

# MECHANIKA nr 11

P. 3362 | 62

Dr inż. TADEUSZ HOP

## DRGANIA BELEK SPRĘŻONYCH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA  
ZESZYT NAUKOWY Nr 56 – GLIWICE 1962

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp . . . . .	3
2. Zarys teorii drgań belek sprężonych . . . . .	6
2.1. Belka sprężona osiowo . . . . .	6
2.2. Belka sprężona ciągnem prostym o stałym mimośrodzie . . . . .	14
2.3. Belka sprężona ciągnem parabolicznym . . . . .	42
3. Badania dynamiczne belek sprężonych i żelbetowych . . . . .	46
3.1. Przygotowanie belek próbnych . . . . .	46
3.2. Określenie współczynnika sprężystości betonu na podstawie pomiaru odkształcenia przy sprężaniu . . . . .	58
3.3. Częstość drgań własnych belek sprężonych i żelbetowych . . . . .	64
3.4. Tłumienie drgań belek doświadczalnych . . . . .	123
3.5. Dynamiczny moduł sprężystości betonu . . . . .	124
3.6. Wpływ intensywności sprężenia na parametry ruchu drgającego . . . . .	132
3.7. Współczynnik dynamiczny . . . . .	142
Bibliografia . . . . .	150

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 56

Dr inż. TADEUSZ HOP



P. 3362/62

DRGANIA BELEK SPREŻONYCH

PRACA HABILITACYJNA Nr 16

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 14. III. 1962 r.

---

GLIWICE 1962





REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH  
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

*Andrzej Grossman*

P.7. 564/62

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej

---

Oddano do wyk. 10. IV. 1962	Zam. 576	G-21	Ark. druk. 9 <sup>10</sup> / <sub>16</sub>	Ark. wyd. 9 <sup>6</sup> / <sub>16</sub>
Papier powielacz. kl. V, 61×86, 70 g			Nakład 300+55	Cena zł 11,75

---

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach



*ŻONIE MOJEJ POŚWIĘCAM*

## 1. WSTĘP

Postępujący w niezwykle szybkim tempie rozwój techniki powoduje zmianę charakteru obciążeń konstrukcji inżynierskich i budowlanych. Człowiek zaprzęga w swoją służbę coraz bardziej skomplikowane maszyny, rosną masy i prędkości wszelkiego rodzaju pojazdów oraz ruchomych części mechanizmów. Przy olbrzymim zasięgu mechanizacji trudno o idealne wyważenie elementów wykonujących ruchy i o dokładną amortyzację wstrząsów.

Konstrukcje hal fabrycznych, mostów, nawierzchnie dróg, pasy startowe lotnisk itp. muszą oczywiście bezpiecznie przejmować wszystkie obciążenia, w tym również bezpośrednie i pośrednie oddziaływania maszyn i pojazdów. Oddziaływania te nabierają istotnego znaczenia nie tylko dlatego, że w przypadku rezonansu mogą spowodować niebezpieczne odkształcenia grożące katastrofą danego obiektu, ale również z uwagi na zjawisko zmęczenia materiałów odbijające się i na bezpieczeństwie i na żywotności konstrukcji. Ważne jest również to, aby przez odpowiednie projektowanie i wykonanie budowli przemysłowych i mieszkalnych ograniczyć do minimum szkodliwy wpływ drgań i wstrząsów na organizm ludzki. W tej sytuacji zrozumiałe staje się znaczenie dynamiki budowli i zainteresowanie, jakim cieszy się ona w świecie inżynierskim.

Budownictwo ostatniego dwudziestolecia charakteryzuje się m.in. tym, że coraz istotniejszą rolę odgrywają w nim konstrukcje sprężone, a głównie konstrukcje z betonu sprężonego przy pomocy kabli, lin, prętów stalowych lub strun. Wiadomo, że przez sprężenie danego elementu możemy celowo regulować rozkład sił wewnętrznych w jego przekrojach, a tym samym wpływać świadomie na jego zachowanie się zarówno pod obciążeniem statycznym jak i dynamicznym. Już znany, prosty wzór z dynamiki

$$n = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} \quad (1)$$



wskazuje na możliwość regulacji częstości drgań własnych przez zmianę statycznego odkształcenia elementu  $f_{st}$ , a tej dokonamy przez odpowiednie sprężenie. Jeśli się zważy, że idea sprężania znalazła bardzo szerokie zastosowanie właśnie w konstrukcjach poddanych obciążeniom zmiennym w czasie, takich jak: mosty, belki podsuwnicowe, a ostatnio również fundamenty pod maszyny [8], to wyraźnie zarysowuje się konieczność gruntowniejszego zbadania wpływu sprężenia na wielkości charakteryzujące ruch drgający ustroju, a więc na częstość drgań swobodnych, logarytmiczny dekrement tłumienia, współczynnik dynamiczny itp. W początkowym, krótkim stosunkowo okresie rozwoju konstrukcji sprężonych nie było po prostu czasu na przeprowadzenie tego rodzaju badań, gdyż zajmowano się głównie problemami technologicznymi, reologicznymi, sposobami realizacji sił sprężających oraz metodami wymiarowania przekrojów i trasowania kabli. Na podstawie skromnych eksperymentów Freyssineta [4] i równie skromnych szwajcarskich badań podkładów kolejowych [18] utarło się przekonanie, że ustroje sprężone zachowują się pod obciążeniem dynamicznym nieporównanie lepiej niż ustroje żelbetowe. Stwierdzenie to nabiera pełnego znaczenia naukowego dopiero wtedy, jeśli zostanie przetłumaczone na język liczb i formuł matematycznych.

Potrzebę obszerniejszych i bardziej dogłębnych badań dynamicznych i zmęczeniowych elementów z betonu sprężonego uświadomił sobie autor po raz pierwszy w czasie Konferencji Naukowej Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych mającej miejsce w Krynicy w sierpniu 1957 r. Mimo, że dynamika budowli znalazła pewne, dość nawet wyraźne odzwierciedlenie w tematyce wygłaszanych tam referatów, to o dynamice konstrukcji sprężanych było cicho. Pierwszym etapem rozwoju myśli zrodzonej podczas wspomnianej konferencji był staż naukowy odbyty w roku 1958 w Szwajcarii, gdzie autor brał udział w badaniach statycznych i dynamicznych mostów z betonu sprężonego prowadzonych przez Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt (EMPA). Na początku roku 1959 powstał konkretny już program dynamicznych i zmęczeniowych badań eksperymentalnych belek z betonu sprężonego obejmujący następujące zagadnienia:

- a) doświadczalne ujęcie zależności parametrów ruchu drgającego belki od sposobu i stopnia sprężenia,
- b) porównanie zachowania się belki sprężonej i belki żelbetowej w czasie ruchu drgającego,
- c) dynamiczny moduł sprężystości betonu,



- d) zachowanie się belki sprężonej pod uderzeniem,
- e) drgania wymuszone belki sprężonej,
- f) wytrzymałość zmęczeniowa betonów wyższych marek,
- g) wytrzymałość zmęczeniowa belek sprężonych,
- h) porównanie zachowania się belki sprężonej i belki żelbetowej pod długotrwałym obciążeniem oscylującym.

Ze względu na specyfikę poszczególnych problemów, potrzebną aparaturę, organizację pracy doświadczalnej i czas podzielono program badań na 3 części. Część pierwsza obejmuje zagadnienia a), b) i c), w części drugiej mieszczą się zagadnienia d) i e), a pozostałe problemy stanowić mają trzecią część badań. Przewidziano również teoretyczne uogólnienie wyników prac eksperymentalnych.

Realizacja pierwszej części programu badań została zakończona. Trwała ona od października 1959 r. do listopada roku 1960. Opracowywanie wyników zajęło również prawie rok. Przygotowania do drugiej i trzeciej części doświadczeń są daleko zaawansowane. Gotowe są belki próbne oraz słupki betonowe do badań zmęczeniowych, przygotowano do badań pulsator L. Schopera oraz wibrator do wymuszania drgań. Druga część doświadczeń zostanie przeprowadzona na tych samych belkach próbnym, które zostały zbadane w części pierwszej. Po zakończeniu badania zagadnień d) i e) przewiduje się obciążanie niektórych belek próbnym aż do złamania.

Praca niniejsza jest sprawozdaniem z pierwszej części badań. Poprzedza je krótki zarys teorii drgań belek sprężonych, a kończy się ono wnioskami i uogólnieniami.

W końcu 1959, tzn. wtedy, kiedy była już realizowana pierwsza część naszkicowanego wyżej programu badań, ukazało się kilka publikacji związanych tematycznie z dynamiką ustrojów sprężonych [12], [13], [14], [15]. Są to przeważnie relacje z badań przeprowadzanych na pojedynczych (lub nielicznych) obiektach rzeczywistych lub doświadczalnych. Autorowie tych prac zajmowali się tylko pewnymi, wąskimi zagadnieniami. W publikacji [12] opisano badanie dynamiczne jednej belki sprężonej i jednej belki żelbetowej, zaś publikacje [14] i [15] traktują o drganiach nieliniowych i dynamicznym module sprężystości. Wspomniane wyżej i wcześniejsze prace stanowią bardzo skromny początek studiów nad problemami dynamicznymi w ustrojach sprężonych, zajmowano się w nich raczej stroną jakościową poszczególnych zagadnień, a wyniki ich są

często ze sobą sprzeczne. Nie zdezaktualizowały one w najmniejszym stopniu relacjonowanego w niniejszej rozprawie programu badań, a uwydatniły raczej jego aktualność. Stwierdzenie takie jest w pełni zgodne ze stanowiskiem autora publikacji [13], który bardzo wnikliwie skrytykował braki dotychczasowych prac na temat drgań konstrukcji sprężonych oraz nakreślił kierunki, na których powinien się skoncentrować przyszły wysiłek badawczy w tej dziedzinie.

## 2. ZARYS TEORII DRGAŃ BELEK SPRĘŻONYCH

W cytowanej już publikacji [13] A.D. Lizariw stwierdza, że w dotychczasowych pracach na temat drgań konstrukcji sprężonych nie spotkał nawet próby teoretycznego ujęcia tego zagadnienia.

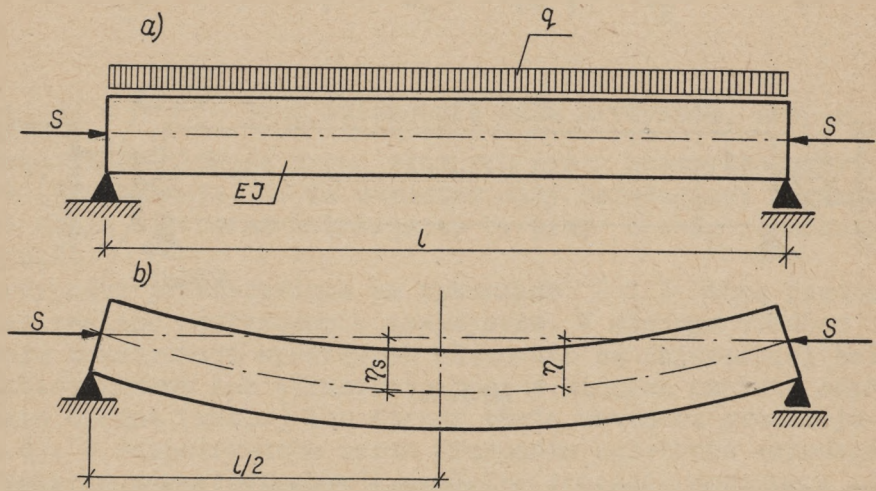
Poniższe rozważania będą taką właśnie próbą. Rozpatrzymy kolejno drgania poprzeczne belek sprężonych w trojaki sposób: osiowo, kablem prostoliniowym (lub strunami) o stałym mimośrodzie  $e$ , kablem parabolicznym.

### 2.1. Belka sprężona osiowo

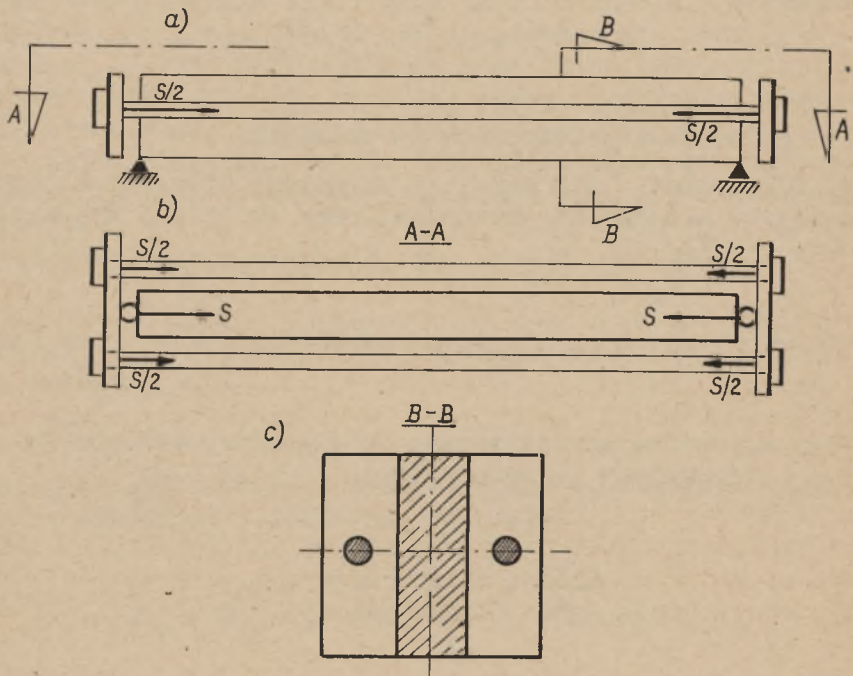
W literaturze technicznej spotkać można stwierdzenie, że ze wzrostem wstępnego sprężenia maleje częstotliwość drgań własnych prętów [1], także płyt [7]. Sformułowanie takie może być całkowicie błędne, jeśli nie określi się ściśle sposobu, w jaki wstępne sprężenie zostało wywołane. Zjawisko zmniejszania się częstotliwości drgań własnych w miarę wzrostu sprężenia występuje istotnie, ale tylko wtedy, kiedy siła sprężająca nie zmienia swego kierunku w czasie ruchu drgającego i stale pokrywa się z osią pręta w stanie nieodkształconym (rys.1).

Technicznie można taki przypadek zrealizować np. przez równoczesny naciąg 2-ch kabli (lub prętów) biegnących wzdłuż bocznych ścian belki na wysokości jej osi i zakotwionych w płytach, które przenoszą siłę sprężającą na końce belki przy pomocy odpowiednio skonstruowanych przegubów (rys.2).





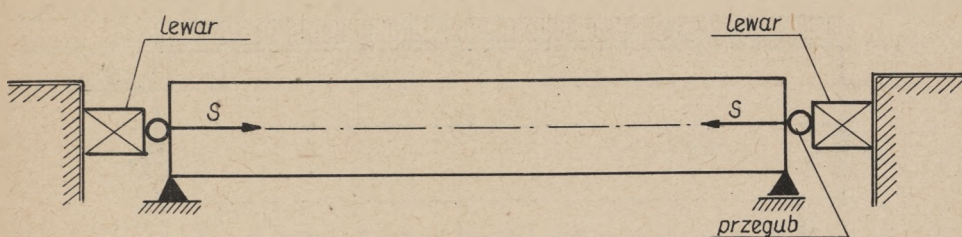
Rys.1.



Rys.2



Inny sposób zachowania stałego kierunku siły sprężającej pokazano na rys.3.



Rys.3.

Ważne jest tutaj znane z klasycznej dynamiki równanie różniczkowe opisujące ruch drgający pręta ściskanego siłą osiową [21]:

$$(EJ \eta''')'' + S \eta'' - \frac{q}{g} \alpha^2 \eta = 0 \quad (2)$$

gdzie \$g\$ oznacza przyspieszenie ziemskie.

Przy \$EJ = \text{const}\$, \$q = \text{const}\$ i warunkach brzegowych odpowiadających schematowi przedstawionemu na rys.1a wystarczy założyć

$$\eta = \eta_s \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (3)$$

i wtedy ograniczając rozważania do drgania podstawowego (\$i = 1\$) otrzymujemy po podstawieniu (3) do (2)

$$\frac{\pi^4 EJ}{l^4} - \frac{\pi^2 S}{l^2} - \frac{q}{g} \alpha^2 = 0, \quad (4)$$

skąd

$$\alpha = \frac{\pi^2}{1^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}} \cdot \sqrt{1 - \frac{S}{S_E}} = \alpha_{pn} \sqrt{1 - \frac{S}{S_E}} \quad (5)$$

gdzie  $S_E = \frac{\pi^2 EJ}{1^2}$  jest Eulerowską siłą krytyczną, zaś  $\alpha_{pn}$  oznacza częstotliwość drgań własnych pręta niesprężonego. Wynik (5) pokazuje, że ze wzrostem siły sprężającej drgania pręta stają się coraz wolniejsze, by przy  $S = S_E$  zaniknąć zupełnie.

Przypadki przedstawione na rysunkach 2 i 3 mogą bardzo rzadko znaleźć zastosowanie praktyczne. W obecnym stadium rozwoju konstrukcji sprężonych stosowane są najczęściej belki kablobetonowe lub strunobetonowe, w których napięte odpowiednio ciężna (kable) lub struny tkwią wewnątrz przekroju (rys.4). W rozpatrywanym teraz przypadku sprężenia osiowego, potrzebnego np. wtedy, kiedy na belkę działają momenty o zmiennych znakach, środek ciężkości ciężenia (kablów) lub strun musi pokrywać się ze środkiem przekroju. Jest oczywiste, że siła sprężająca nie może zachowywać teraz stale tego samego kierunku pokrywającego się z osią belki w stanie nieodkształconym. Wraz z odkształceniem osi odkształca się biegnące wzdłuż niej ciężno. Siła sprężająca ma teraz kierunek stycznej do osi belki w każdym momencie ruchu drgającego. Równanie (2) traci swoją ważność. Właściwe równanie ruchu elementu  $dx$  belki otrzymamy rozpatrując działający na niego układ sił, który zgodnie z zasadą d'Alemberta musi być w równowadze (rys.4e).

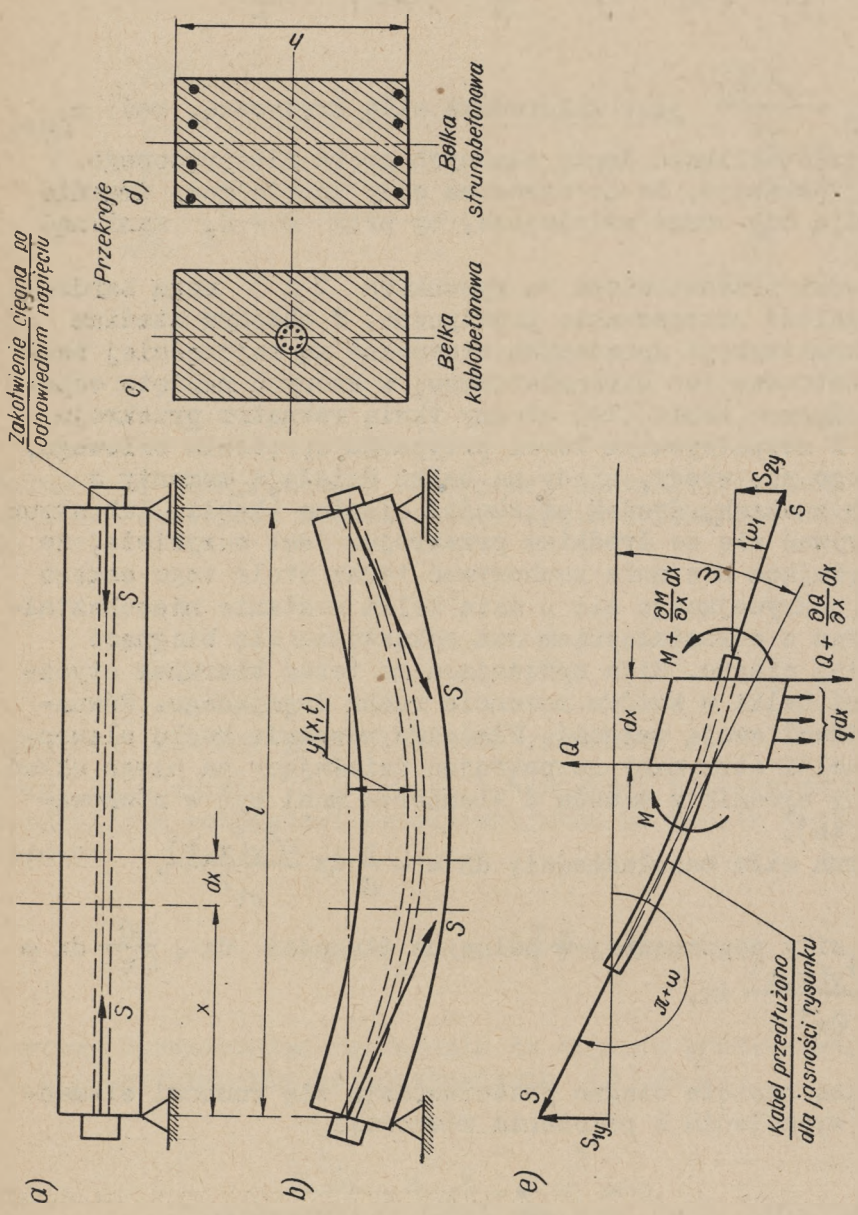
Elementarna siła bezwładności: 
$$dB = -\frac{q}{g} dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Przyrost siły poprzecznej w belce na długości  $dx$ : 
$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} dx$$

Siła z jaką napięte ciężno przeciwstawia się ruchowi elementu  $dx$  (wychyleniu z położenia równowagi):

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} = S \sin(\pi + \omega) + S \sin \omega_1$$





Rys. 4



Kąty  $\omega$  i  $\omega_1$  są bardzo małe, wobec tego

$$\sin \omega \approx \omega; \quad \sin \omega_1 \approx \omega_1 - \omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx;$$

$$S_y = -S\omega + S\left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} dx\right) = S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} dx.$$

Równanie ruchu elementu  $dx$  pręta sprężonego w sposób pokazany na rys.4 przyjmie więc postać

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Sztywność cięga na zginanie (zresztą bardzo małą) można uwzględnić łącznie ze sztywnością belki w sposób praktykowany w żelbecie. Ograniczając się do rozpatrzenia normalnych postaci drgania [22] można przyjąć

$$y = \eta(x) f(t) = \eta \sin \alpha t^x. \quad (7)$$

Po obliczeniu odpowiednich pochodnych funkcji (7), wstawieniu ich do (6) i podzieleniu przez  $\sin \alpha t \neq 0$  otrzymujemy

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} - \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \beta^4 \eta = 0, \quad (8)$$

gdzie:

$$\beta = 1 \sqrt[4]{\frac{q \alpha^2}{EJ g}}, \quad \gamma_1 = 1 \sqrt{\frac{S}{EJ}}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

x) Ze względu na spełnienie warunków początkowych należałoby przyjmować  $f(t) = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$ . Na interesującą nas tutaj częstość drgań własnych funkcja  $f(t)$  nie ma jednak w tym przypadku wpływu.

Rozwiązanie równania (8) oparte na rachunku operatorowym podaje Rayleigh [16] za Seebeckiem i Donkinem. Rozwiązanie uzyskane na innej drodze znajdujemy w monografii I. Kisiela [10]. Całka ogólna równania (8) ma postać

$$\eta(x) = C_1 \cosh \delta \xi + C_2 \sinh \delta \xi + C_3 \cos \zeta \xi + C_4 \sin \zeta \xi, \quad (9)$$

przy czym

$$\delta = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma_1^4}{4} + \beta^4} + \frac{\gamma_1^2}{2}} \quad (9a)$$

$$\zeta = \sqrt{\sqrt{\frac{\gamma_1^4}{4} + \beta^4} - \frac{\gamma_1^2}{2}} \quad (9b)$$

są pierwiastkami równania charakterystycznego.

Z warunków brzegowych ustawionych dla rozważanego przypadku belki swobodnie podpartej wynika:

$$C_1 = C_3 = 0$$

oraz

$$C_2 \sinh \delta + C_4 \sin \zeta = 0$$

$$\delta^2 C_2 \sinh \delta - \zeta^2 C_4 \sin \zeta = 0.$$

Warunek nietrywialnego rozwiązania tego układu

$$(\delta^2 + \zeta^2) \sinh \delta \sin \zeta = 0 \quad (10)$$

jest zarazem szukanym równaniem częstotliwości. Jest ono spełnione wtedy, kiedy

$$\sin \zeta = 0,$$



a to zachodzi przy

$$\xi = i\pi (i = 1, 2, \dots).$$

Po podstawieniu za  $\xi$  prawej strony równości (9b) obliczymy

$$\alpha^2 = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{g}{q} \left( \frac{i^2 \pi^2}{l^2} EJ + S \right). \quad (11)$$

Częstość drgania podstawowego ( $i = 1$ ) wynosi

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{g}{q} \left( \frac{\pi^2}{l^2} EJ + S \right)} \quad (12)$$

lub

$$n = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}} \cdot \sqrt{1 + \frac{Sl^2}{\pi^2 EJ}} = n_{pn} \sqrt{1 + \frac{Sl^2}{\pi^2 EJ}}, \quad (13)$$

gdzie  $n_{pn}$  oznacza częstość drgań własnych pręta niesprężonego.

Widzimy więc, że sprężenie osiowe belki (w sposób powszechnie dziś stosowany) zwiększa częstość drgań własnych, co potwierdzają zarówno doświadczenia opisywane przez A.D. Lizarięwa [13], jak i badania przeprowadzone przez autora. Oceńmy jeszcze wielkość tego wzrostu częstości drgań własnych. Dla belki o przekroju prostokątnym możemy napisać

$$n = n_{pn} \sqrt{1 + \frac{1,216 \varepsilon}{\lambda^2}} = m n_{pn}, \quad (14)$$

przy czym  $\varepsilon$  jest jednostkowym skróceniem belki wywołanym przez sprężenie, a  $\lambda = \frac{h}{l}$  oznacza stosunek wysokości belki do rozpiętości.

Jeśli belkę z betonu marki 450 kg/cm<sup>2</sup> poddamy wstępnemu sprężeniu  $\sigma_w = 100$  kg/cm<sup>2</sup> i jeśli  $\lambda = 0,0375$ , to

$$m = \sqrt{1 + \frac{1,216 \cdot 25 \cdot 10^{-5}}{0,0014}} = 1,106.$$



Dzięki sprężeniu nastąpił tu wzrost częstości drgań własnych o prawie 11%.

## 2.2. Belka sprężona ciągnem prostym o stałym mimośrodzie

W przypadku rozpatrywanym poprzednio sprężenie nie naruszało prostoliniowości osi podłużnej belki. Obecnie, naciąg prostego cięgna usytuowanego mimośrodowo względem osi belki (rys.5a) powoduje jej wygięcie ku górze (rys.5b). Obliczenie wytrzymałościowe belki obciążonej momentami  $M=S.e$  przedstawia się następująco:

Całkując dwukrotnie równanie różniczkowe osi odkształconej belki

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

otrzymujemy

$$EJ \frac{dy}{dx} = Mx + C$$

oraz

$$EJ y = \frac{M x^2}{2} + Cx + D.$$

Z warunków brzegowych

$$x = 0, \quad y = 0$$

$$x = 1, \quad y = 0$$

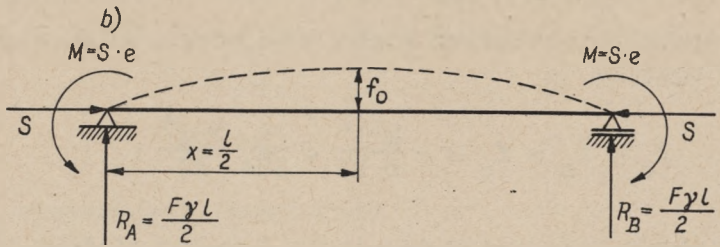
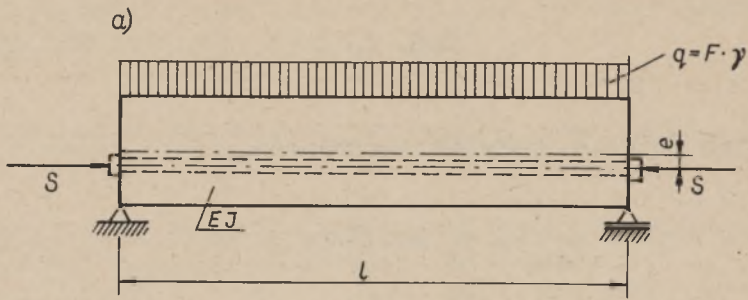
wyznaczamy

$$D = 0$$

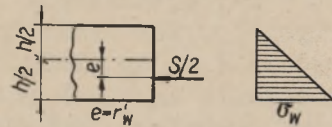
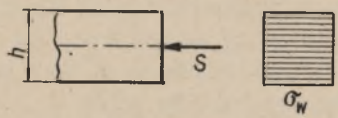
$$C = - \frac{M l}{2}.$$

Kąt obrotu przekroju

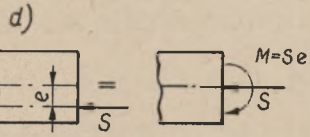
$$\Theta = \frac{dy}{dx} = \frac{M}{2 EJ} (2x-1). \quad (15)$$



c) Sprężenie osiowe



Sprężenie mimośrodkowe



Rys. 5



## Ugięcie belki

$$y = \frac{M x}{2 EJ} (x - 1). \quad (16)$$

Maksymalne ugięcie wywołane sprężeniem

$$y_{\max} = f_s = -\frac{M l^2}{8 EJ}. \quad (17)$$

Jeszcze przed rozpoczęciem ruchu drgającego belka otrzymuje strzałkę ugięcia

$$f_o = f_s + f_q = -\frac{M l^2}{8 EJ} + \frac{5}{384} \frac{F_y l^4}{EJ}, \quad (18)$$

na którą składa się wpływ sprężenia i wpływ ciężaru własnego  $q = F\gamma$ , przy czym  $F$  oznacza pole przekroju belki, a  $\gamma$  jest ciężarem objętościowym materiału (np. betonu).

Przystępując do rozpatrzenia ruchu drgającego belki przedstawionej na rys.5a zauważmy najpierw, że teraz dla uzyskania wstępnego naprężenia krawędziowego o tej samej wartości co przy sprężeniu osiowym wystarczy siła o połowę mniejsza (przy symetrycznym przekroju i usytuowaniu siły na granicy rdzenia, tzn. przy  $e = r'$  - rys.5c). Skrócenie osi belki  $\varepsilon$  występujące we wzorze (14) będzie też odpowiednio mniejsze. Z tego względu oraz dla uproszczenia dalszych rozważań założymy na razie, że opór ciągną przeciwko ruchowi elementu  $dx$  belki jest znikomy. Efekt sprężania uwidoczni się więc tylko w postaci momentów  $M = S \cdot e$  przyłożonych do końców belki. Wobec tego równanie ruchu drgającego zachowa swą znaną postać

$$EJ \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

lub

$$a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (19a)$$

zaś działanie ciężna znajdzie wyraz w odpowiednim sformułowaniu i wykorzystaniu warunków brzegowych. Zakładając, że belka wykonuje drgania normalne zastosujemy metodę rozdzielania zmiennych. Przyjmujemy

$$y(x, t) = \eta(x)f(t) = \eta(x)(A \cos \alpha t + B \sin \alpha t), \quad (20)$$

gdzie  $\eta(x)$  jest funkcją normalną (w dalszym ciągu zamiast  $y(x, t)$  i  $\eta(x)$  będziemy pisać tylko  $y$  i  $\eta$ ). Podstawiając (20) do (19a) otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \frac{\alpha^2}{a} \eta = 0, \quad (21)$$

które po wprowadzeniu oznaczenia

$$\beta^4 = \frac{\alpha^2}{a} = \frac{\alpha^2 q}{EJ g} \quad (22)$$

przyjmuje postać

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \beta^4 \eta = 0. \quad (23)$$

Szczególnymi rozwiązaniami równania (23) są funkcje:  $\sin \beta x$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sinh \beta x$  i  $\cosh \beta x$ . Rozwiązanie ogólne tego równania będzie mieć postać

$$\eta = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x. \quad (24)$$

Do tego miejsca postępowanie nasze nie odbiegało od tego, jakie stosuje się zwykle przy rozpatrywaniu ruchu drgającego belki nie poddanej sprężeniu. Specyfikę belki sprężonej





uwzględnimy poniżej w ustawieniu i wykorzystywaniu warunków brzegowych. Oto one:

$$1) (\eta)_{x=0} = 0, \quad 2) (\eta'')_{x=0} = \frac{M}{EJ}$$

$$3) (\eta)_{x=1} = 0, \quad 4) (\eta'')_{x=1} = \frac{M}{EJ}$$

Warunki te powinny być spełnione dla każdego czasu  $t$ .  
Druga pochodna funkcji (24)

$$\eta'' = \beta^2 (-C_1 \sin \beta x - C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x).$$

Z warunków 1) i 2) otrzymujemy:

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$-C_2 + C_4 = \frac{M}{EJ\beta^2} = 2k,$$

skąd

$$C_2 = -k, \quad C_4 = k.$$

Warunki 3) i 4) prowadzą do następującego układu równań:

$$C_1 \sin \beta l + C_3 \sinh \beta l = k(\cos \beta l - \cosh \beta l) \quad (25)$$

$$-C_1 \sin \beta l + C_3 \sinh \beta l = k(2 - \cos \beta l - \cosh \beta l)$$

Przy rozpatrywaniu różnych przypadków jednoprzęsłowej belki niesprężonej otrzymuje się na ogół z warunków brzegowych jednorodny układ równań, w których niewiadomymi są poszczególne stałe rozwiązania ogólnego. Warunek niezerowego rozwiązania takiego układu, czyli

$$|a_{jk}| = 0,$$

daje wówczas równanie częstotliwości. Symbol  $|a_{jk}|$  oznacza wyznacznik figurujący w mianowniku wzoru Cramera. W rozważanym przez nas przypadku warunkiem na to, żeby układ (25) był układem Cramera jest

$$2 \sin \beta l \sinh \beta l \neq 0 \quad (26)$$

Ponieważ nie interesują nas argumenty  $\beta l < 0$  i  $\beta l = 0$  a dla  $\beta l > 0$  jest zawsze  $\sinh \beta l > 0$ , więc zamiast (26) możemy napisać

$$\bullet \quad \sin \beta l \neq 0, \quad (27)$$

co nam mówi, że częstotliwość drgań własnych belki sprężonej w sposób pokazany na rys.5a różni się od częstotliwości drgań własnych belki niesprężonej identycznie podpartej.

(Jak wiadomo, dla niesprężonej belki wolnopodpartej równanie częstotliwości brzmi:  $\sin \beta l = 0$ ).

Przy spełnieniu warunku (26) układ (25) ma rozwiązania:

$$C_1 = -k \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2},$$

$$C_3 = -k \operatorname{tgh} \frac{\beta l}{2}.$$

Wobec tego rozwiązanie ogólne (24) przedstawia się następująco:

$$\eta = k(\cosh \beta x - \cos \beta x - \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \sin \beta x - \operatorname{tgh} \frac{\beta l}{2} \sinh \beta x). \quad (28)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja normalna (28) czyni zadość nie tylko warunkom 1) ... 4), ale jest także

$$(\eta')_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{i} \quad (\eta''')_{x=\frac{l}{2}} = 0.$$



Funkcja (20) przyjmie teraz postać

$$y = k(\cosh \beta x - \cos \beta x - \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \sin \beta x - \operatorname{tgh} \frac{\beta l}{2} \sinh \beta x)(A \cos a \beta^2 t + B \sin a \beta^2 t). \quad (29)$$

Stałe A i B trzeba obliczyć dla każdego szczególnego przypadku z warunków początkowych

$$(y)_{t=0} = f(x), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = F(x),$$

których prawe strony zależą od rodzaju przyczyny wzbudzającej ruch drgający belki.

Ponieważ z dotychczas branych pod uwagę 4-ch warunków brzegowych nie udało nam się otrzymać równania częstotliwości, więc musimy dojść do niego inną drogą. Zauważmy najpierw, że siła poprzeczna

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \\ &= k\beta^3 (\sinh \beta x - \sin \beta x + \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \cos \beta x - \operatorname{tgh} \frac{\beta l}{2} \cosh \beta x) x \\ &\quad \times (A \cos a \beta^2 t + B \sin a \beta^2 t). \quad (30) \end{aligned}$$

Zakładamy, że w chwili  $t = 0$  nie działa na belkę żadne inne obciążenie poza jej ciężarem własnym.

Wobec tego

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_{\substack{x=0 \\ t=0}} = -\frac{F \gamma l}{2 EJ} = -\frac{q l}{2 EJ}. \quad (31)$$

Po wstawieniu (31) do (30) otrzymujemy

$$A \frac{\beta l}{2} (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{tgh} \frac{\beta l}{2}) + c = 0$$

lub

$$A \varphi (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tgh} \varphi) + c = 0, \quad (32)$$

gdzie

$$\varphi = \frac{\beta l}{2}, \quad c = \frac{q l^2}{2 M}. \quad (32a)$$

To samo równanie częstotliwości (32) da nam wykorzystanie warunku

$$\left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=l} \Big|_{t=0} = \frac{q l}{2 E J}.$$

Stałą  $A$  określimy dla szczególnego przypadku, który ma bezpośredni związek z badaniami przeprowadzonymi przez autora. Przyjmujemy, że w punkcie  $x = \frac{l}{2}$  została do belki przyłożona siła  $P$  skierowana w dół. W chwili  $t = 0$  nastąpiło nagłe przerwanie działania tej siły, wskutek czego rozpoczął się ruch drgający belki. W momencie przerwania działania siły  $P$  ugięcie belki w środku rozpiętości wynosiło

$$f = f_s + f_q + f_p,$$

gdzie  $f_p$  oznacza ten składnik ugięcia całkowitego, który został spowodowany samą siłą  $P$ . Przypominamy, że  $f_s$  ma wartość ujemną i pochodzi od sprężenia. Warunek początkowy z którego wyznaczymy stałą  $A$  brzmi:

$$\left( y \right)_{x = \frac{l}{2}} \Big|_{t = 0} = f, \quad (33)$$



a więc

$$f = A k \left( \frac{1}{\cosh \frac{\beta_1}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\beta_1}{2}} \right), \quad (34)$$

skąd

$$A = \frac{f}{k} \frac{\cos \frac{\beta_1}{2} \cosh \frac{\beta_1}{2}}{\cos \frac{\beta_1}{2} \cosh \frac{\beta_1}{2}}. \quad (35)$$

Równanie częstotliwości przybiera teraz postać

$$\frac{\varphi^3 (\sinh \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cosh \varphi)}{\cosh \varphi - \cos \varphi} + c_1 = 0, \quad (36)$$

przy czym

$$c_1 = \frac{q l^4}{16f EJ}.$$

Równanie (36) można też przedstawić następująco:

$$F(\varphi) = -c_1. \quad (37)$$

Jego pierwiastki znajdujemy wykreślnie. W tablicy 1 zestawiono wartości funkcji

$$F(\varphi) = \frac{\varphi^3 (\sinh \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cosh \varphi)}{\cosh \varphi - \cos \varphi} \quad (38)$$

dla niektórych argumentów wybranych z przedziału  $(0, \frac{9\pi}{2}]$ , zaś fragment jej wykresu przedstawia rys.6. Dokładniej uzmysłowimy sobie całkowity przebieg funkcji (38) jeśli poznamy jej ciekawe własności. A więc o znaku tej funkcji decyduje

Wartości funkcji  $F(\varphi)$

$\varphi$	$\pi/9$ 0,3491	$\pi/4$ 0,7854	$3\pi/8$ 1,1781	$9\pi/20$ 1,4137	$\pi/2$ 1,5708
$F(\varphi)$	-0,0099	-0,2529	-1,2656	-2,5833	$-\frac{\pi^3}{8} = -3,8758$

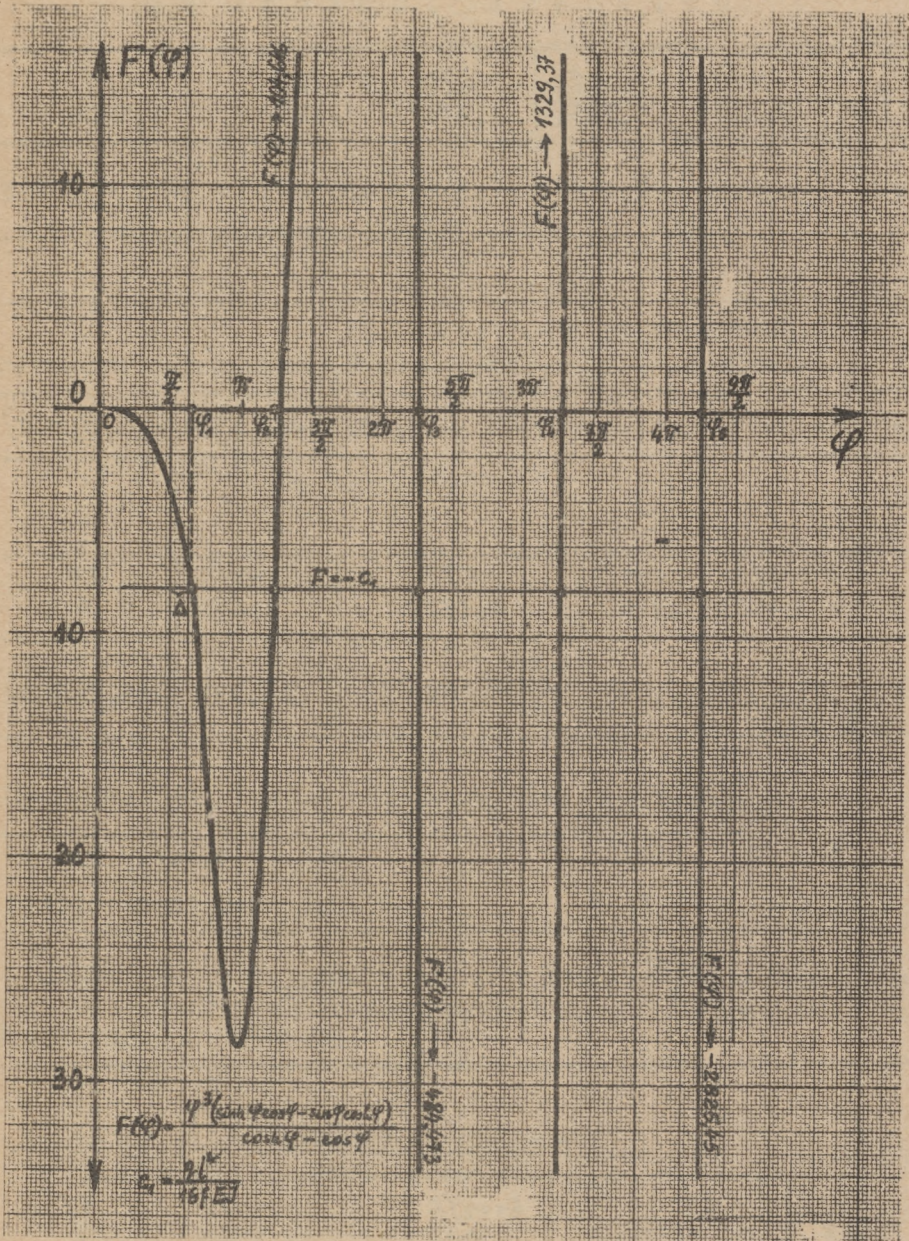
$\varphi$	$0,5056\pi$ 1,5883	$\pi-9\pi/20$ 1,7278	$\pi-3\pi/8$ 1,9534	$\pi-\pi/4$ 2,3561	$\pi$ 3,1415
$F(\varphi)$	-4,0495	-5,6761	-8,8453	-16,1821	$-28,4040 = -1,0916\pi^3$

$\varphi$	$\pi+\pi/9$ 3,4906	$\pi+\pi/4$ 3,9269	$3\pi/2$ 4,7122	$2\pi-\pi/4$ 5,4976	$2\pi$ 6,2830
$F(\varphi)$	-23,9737	0,0329	$\frac{27\pi^3}{8} = 104,646$	222,589	$248,968 \approx 8\pi^3$

$\varphi$	$2\pi+\pi/4$ 7,0684	$5\pi/2$ 7,8537	$3\pi$ 9,4245	$3\pi+\pi/4$ 10,2099	$7\pi/2$ 10,9953
$F(\varphi)$	0,0000	$-\frac{125\pi^3}{8} = -484,473$	$-27\pi^3 = -837,17$	0,0000	$\frac{343\pi^3}{8} = 1329,37$

$\varphi$	$4\pi$ 12,5660	$4\pi+\pi/4$ 13,3514	$9\pi/2$ 14,1368
$F(\varphi)$	$64\pi^3 = 1984,40$	0,0000	$-\frac{729\pi^3}{8} = -2825,45$





Rys.6



znak licznika, gdyż mianownik jest dodatni dla wszystkich  $\varphi \neq 0$ , a dla  $\varphi = 0$  przyjmuje wartość 0 [zresztą, zgodnie z warunkiem (27) argument  $\varphi = 0$  nas nie interesuje]. W przedziale  $(0, \sim \frac{5\pi}{4})$  licznik jest ujemny, a następnie w przedziałach  $(\frac{4i+1}{4}\pi, \frac{4i+5}{4}\pi)$  jest na przemian dodatni i ujemny, przy czym  $i = 1, 2, \dots$ . Dla argumentów:  $\sim \frac{4i+1}{4}\pi$ ,  $i = 1, 2, \dots$  funkcja (38) przyjmuje wartości zerowe. W miarę wzrostu "i" właściwość ta zachodzi z coraz większą ścisłością.

Dalsze własności funkcji  $F(\varphi)$ :

$$\text{gdy} \quad \varphi = \frac{2i+1}{2}\pi$$

$$F(\varphi) \rightarrow \mp \varphi^3,$$

$$\text{czyli} \quad F(\varphi) \rightarrow \mp \frac{(2i+1)^3 \pi^3}{8}, \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots$$

Znak - obowiązuje dla  $i = 0$  oraz dla  $i$  parzystych.

$$\text{Gdy} \quad \varphi = i\pi,$$

$$F(\varphi) \rightarrow \mp \varphi^3,$$

$$\text{czyli} \quad F(\varphi) \rightarrow \mp i^3 \pi^3, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots$$

Tutaj znak - obowiązuje przy "i" nieparzystych. Ostatnia własność ma charakter przybliżony, ale w miarę wzrostu "i" zachodzi ona z coraz większą ścisłością. I tak

$$\text{dla} \quad \varphi = \pi,$$

$$F(\varphi) = -28,4040 = 0,9161\pi^3,$$

$$\text{a już dla} \quad \varphi = 2\pi,$$

$$F(\varphi) = 248,9682 = 1,0037 \cdot (2\pi)^3.$$



Aby otrzymać rozwiązania równania (37) wystarczy teraz poprowadzić na wykresie funkcji  $F(\varphi)$  (rys.6) prostą równoległą do osi  $\varphi$  w ościepie  $-C_1$  od niej. Odcięte punktów przecięcia się tej prostej z poszczególnymi gałęziami wykresu funkcji (38) będą właśnie szukanymi pierwiastkami równania częstotliwości.

Jeśli w chwili  $t = 0$  ugięcie belki w punkcie  $x = \frac{1}{2}$  jest ujemne, to

$$A = \frac{f}{k} \frac{\cos\varphi \cosh\varphi}{\cosh\varphi - \cos\varphi}, \quad (39)$$

wobec czego

$$\frac{\varphi^3 (\sinh\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \cosh\varphi)}{\cos\varphi - \cosh\varphi} - C_1 = 0 \quad (40)$$

lub

$$F_1(\varphi) = C_1. \quad (41)$$

Funkcja (41) różni się od funkcji (38) tylko znakiem, jest bowiem

$$F_1(\varphi) = -F(\varphi). \quad (42)$$

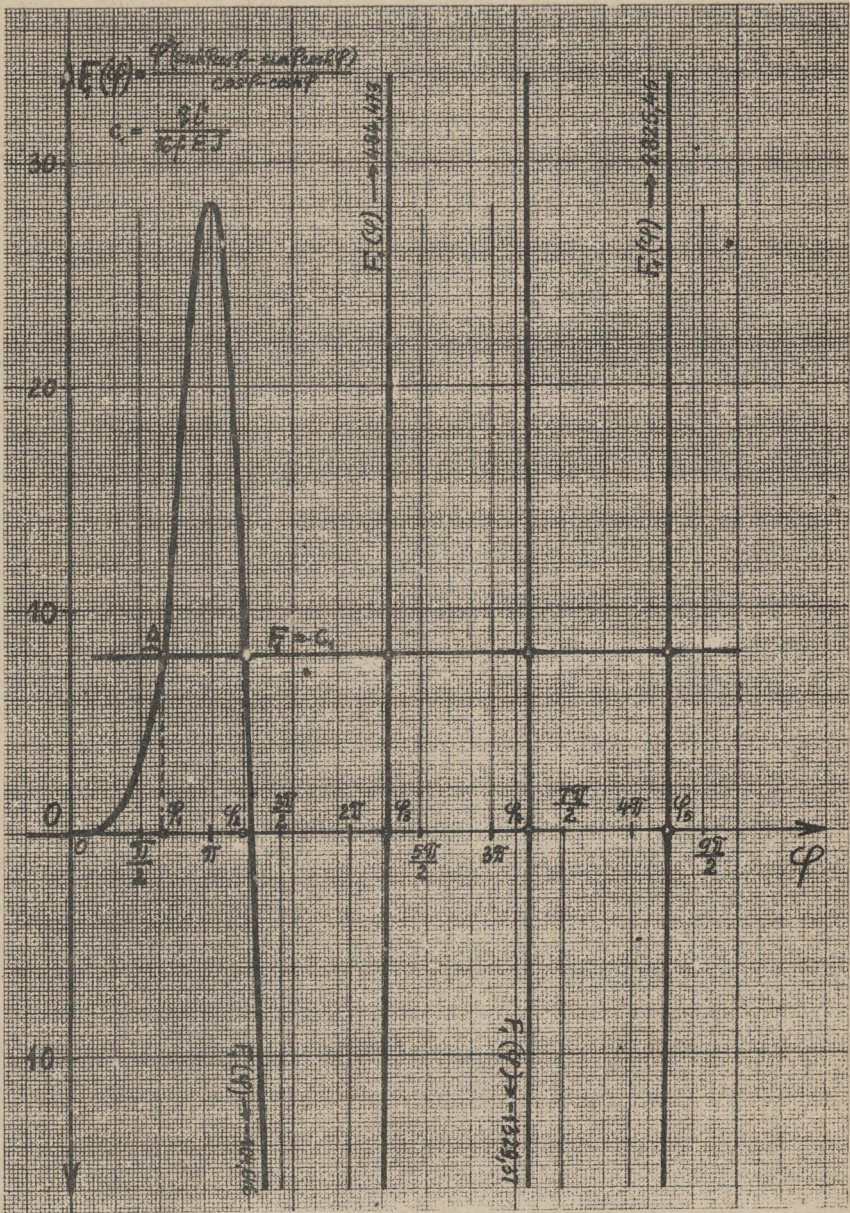
Przedstawiony na rys.7 wykres funkcji  $F_1(\varphi)$  powstał przez obrót wykresu funkcji  $F(\varphi)$  (rys.6) dookoła osi  $\varphi$  o  $180^\circ$ .

Pierwiastkami równania (40) będą odcięte punktów przecięcia się poszczególnych gałęzi wykresu funkcji (41) z prostą równoległą do osi  $\varphi$  usytuowaną w odległości  $C_1$  nad tą osią.

Spróbujmy zanalizować teraz uzyskane rozwiązanie. Zaczniemy od przypadku, w którym  $f < 0$ , Pierwszy pierwiastek równania (40) można ogólnie przedstawić następująco

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \Delta, \quad (43)$$





Rys.7



gdzie  $\Delta$  oznacza odchylenie pierwszej gałęzi wykresu funkcji  $F_1(\varphi)$  od pionowej prostej  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  na poziomie  $C_1$  od osi odciętych (rys.7).

$$\text{Dla } C_1 < \frac{\pi^3}{8}, \quad \Delta < 0.$$

$$\text{"-"} \quad C_1 = \frac{\pi^3}{8}, \quad \Delta = 0.$$

$$\text{"-"} \quad C_1 > \frac{\pi^3}{8}, \quad \Delta > 0.$$

Z (43) dochodzimy do

$$\beta l = \pi + 2\Delta = \pi \left(1 + \frac{2\Delta}{\pi}\right), \quad (44)$$

a po uwzględnieniu (22) otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\left(1 + \frac{2\Delta}{\pi}\right)^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ g}{q}} \quad (45)$$

oraz

$$n = \frac{\left(1 + \frac{2\Delta}{\pi}\right)^2 \pi}{2 l^2} \sqrt{\frac{EJ g}{q}}. \quad (46)$$

Oznaczając przez  $n_{pn}$  częstość drgań własnych wolnopodpar-  
tej belki niesprężonej napiszemy

$$n = \left(1 + \frac{2\Delta}{\pi}\right)^2 n_{pn}. \quad (47)$$

Związek ten ważny jest również dla przypadku  $f > 0$ .  
Weźmy teraz pod uwagę występującą w równaniach (36) i (40)  
stałą

$$C_1 = \frac{q l^4}{16f EJ}.$$

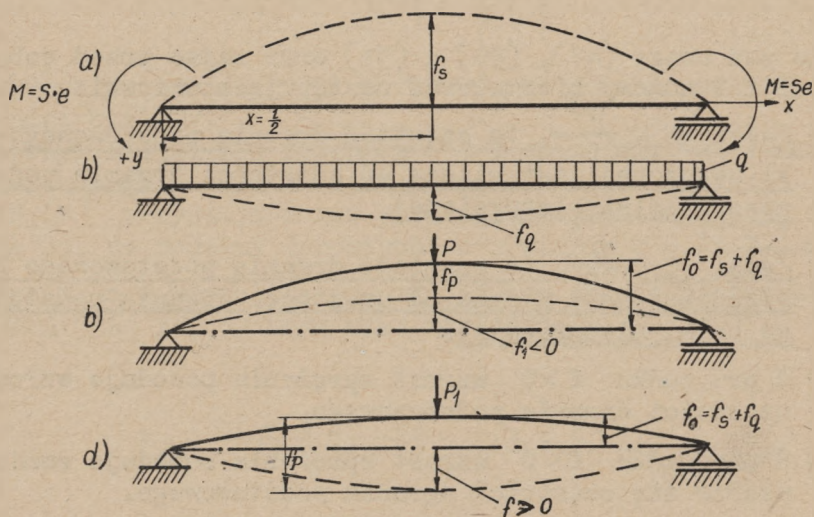
W oparciu o (18) można jej też nadać postać

$$C_1 = \frac{4,8 f_q}{f} \quad (48)$$

lub

$$C_1 = \frac{4,8 f_q}{f_s + f_q + f_p} \quad (49)$$

Dla wyjaśnienia związku między  $C_1$  i stopniem sprężenia belki przedstawiono na rys.8 składniki mianownika w wyrażeniu (49).



Rys.8

Widzimy więc, że w przypadku przedstawionym na rys.8c, przy  $P = \text{const}$  i  $q = \text{const}$ , ze wzrostem sprężenia rośnie bezwzględna wartość strzałki  $f$ , a tym samym maleje wielkość  $C_1$  i prosta na rys.7 zbliża się do osi odciętych. Natomiast w przypadku, który ilustruje rys.8d, przy stałym obciążeniu  $q$  i  $P_1 = \text{const}$ , wzrost sprężenia powoduje zmniejszanie się



bezwzględnej wartości strzałki  $f$ , a tym samym rośnie wielkość  $C_1$  i prosta na rys.6 oddala się w dół od osi  $\varphi$ . Matematycznie możemy to ująć następująco:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jeśli} \\ \text{to przy} \\ \text{a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f < 0, \\ S \rightarrow \infty, \\ |f| \rightarrow \infty, \\ C_1 \rightarrow 0. \end{array} \quad (50)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Jeśli zaś} \\ \text{to przy} \\ \text{a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f > 0, \\ S \rightarrow \infty, \\ f \rightarrow 0, \\ C_1 \rightarrow \infty. \end{array} \quad (51)$$

Biorąc pod uwagę (47), (50) i (51) oraz mając przed sobą rysunki 6 i 7 możemy sformułować następujące wnioski:

- a) Jeśli  $|C_1| < \frac{\pi^3}{8}$ , to częstość drgania podstawowego belki sprężonej jest niższa od częstości drgania podstawowego belki niesprężonej.
- b) Jeśli  $|C_1| > \frac{\pi^3}{8}$ , to częstość drgania podstawowego belki sprężonej jest wyższa od częstości drgania podstawowego belki niesprężonej.
- c) W przypadku  $f > 0$  wzrost sprężenia powoduje wzrost częstości drgania podstawowego.
- d) W przypadku  $f < 0$  wzrost sprężenia powoduje zmniejszanie się częstości drgania podstawowego.

Matematycznie:

$$a) \quad |C_1| < \frac{\pi^3}{8}, \quad n < n_{pn}.$$

$$b) \quad |C_1| > \frac{\pi^3}{8}, \quad n > n_{pn}.$$

c) gdy

$$S \rightarrow \infty, \\ n \rightarrow \frac{2\pi}{l^2} \sqrt{\frac{EJ g}{q}}, \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} S \\ n \end{matrix}} \right\} \text{ przy } f > 0$$

gdy zaś

$$S \rightarrow 0,$$

$$n \rightarrow 0.$$

d) gdy

$$S \rightarrow \infty,$$

$$n \rightarrow 0,$$

przy  $f < 0$

gdy zaś

$$S \rightarrow 0,$$

$$n \rightarrow \frac{2\pi}{l^2} \sqrt{\frac{EJ g}{q}}.$$

Powyższe wnioski zostały potwierdzone doświadczalnie, co później okażemy.

Przyglądając się rysunkom 6 i 7 zauważamy, że w miarę wzrostu argumentu  $\varphi$  kolejne gałęzie wykresów funkcji  $F(\varphi)$  i  $F_1(\varphi)$  przyjmują coraz bardziej pionowe położenie i zbliżają się do rodziny "prostych" o równaniu  $\varphi = \frac{4i+1}{4}\pi$ .

Można więc w przybliżeniu przyjąć, że dalsze pierwiastki równań (36) i (40) będą mieć wartości:

$$\varphi_i \cong \frac{4i-3}{4}\pi, \quad (i = 2, 3, 4, 5, \dots) \quad (52)$$

Ze wzrostem  $\varphi$  wyrażenie (52) zbliża się coraz bardziej do równości. Dokładne wartości pierwiastków  $\varphi_2, \varphi_3, \dots$  wyznaczają punkty przecięcia się poszczególnych gałęzi wykresu na rys. 6 lub 7 z prostą  $F = -C_1$ , względnie  $F_1 = C_1$ . Im mniejsza jest bezwzględna wartość  $C_1$ , tym bardziej pierwiastki  $\varphi_2, \varphi_3, \dots$  stają się bliższe wartościom  $\frac{4i-3}{4}\pi$ .



Mając już kolejne wartości  $\varphi_2, \varphi_3, \dots$  otrzymamy następnie po uwzględnieniu (22)

$$\alpha_i = \frac{4a \varphi_i^2}{l^2}, \quad (i = 2, 3, \dots) \quad (53)$$

a następnie

$$n_i = \frac{2 \varphi_i^2}{\pi l^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}}. \quad (54)$$

Równania (36) i (40) zostały wyprowadzone dla środka belki, który - jak to widać na rys.9 - nie będzie wykonywał

drgań o częstościach z indeksami parzystymi. Do (53) i (54) należy więc wstawiać dla  $x = \frac{l}{2}$   $i = 3, 5,$

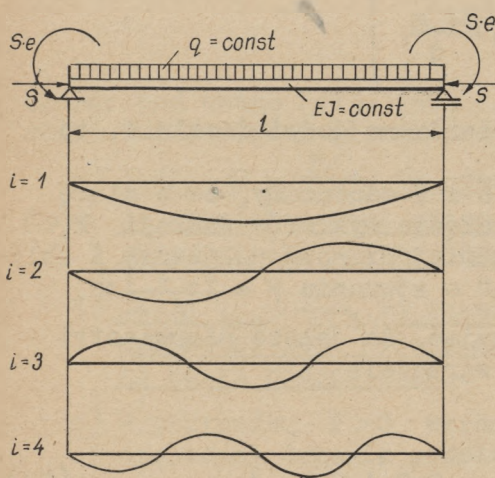
$7, \dots$  Jednakże już punkty odległe o  $dx$  od środka mogą wykonywać wszystkie rodzaje drgań, a dla nich równania (36) i (40) nie zmieniają zasadniczo swego charakteru. Możemy więc na podstawie rysunków 6 i 7 oraz zależności (47), (50), (51) i (54) stwierdzić:

W przypadku  $f > 0$  ze wzrostem sprężenia maleją parzyste czę-

stości drgań własnych ( $i = 2, 4, \dots$ ), rosną zaś częstości nieparzyste ( $i = 1, 3, 5, \dots$ ).

W przypadku  $f < 0$  jest odwrotnie.

Przy założeniu, że ruch drgający belki został wywołany nagłym przerwaniem działania siły  $P$  wyginającej belkę ku dołowi, prędkość tego ruchu w chwili  $t = 0$  wynosi 0.



Rys.9

Wobec tego

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

skąd

$$B = 0.$$

Rozwiązanie równania (19) można więc napisać następująco:

$$y(x, t) = k(\cosh 2\varphi_1 \xi - \cos 2\varphi_1 \xi - \operatorname{tgh} \varphi_1 \sin 2\varphi_1 \xi - \operatorname{tgh} \varphi_1 \sinh 2\varphi_1 \xi) \cdot A \cos \frac{4a \varphi_1^2}{l^2} t, \quad (55)$$

przy czym  $\xi = \frac{x}{l}$ , zaś  $A$  określa odpowiedni warunek początkowy.

Uwzględniając wpływ napiętego siła  $S$  ciągną na ruch elementu  $dx$  belki otrzymamy znane równanie (6). Zamiast funkcji (7) przyjmijemy teraz funkcję (20). Zrezygnujemy z podstawienia  $\xi = \frac{x}{l}$ , wobec czego równanie (8) przyjmie postać:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \beta^4 \eta = 0. \quad (56)$$

Tutaj

$$\beta^4 = \frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{q \alpha^2}{EJ g}, \quad \gamma_1^2 = \frac{S}{EJ}. \quad (57)$$

Rozwiązanie równania (56) podajemy w skrócie:  
Całka ogólna

$$\eta(x) = C_1 \cosh \delta x + C_2 \sinh \delta x + C_3 \cos \xi x + C_4 \sin \xi x. \quad (58)$$



Wielkości  $\delta$  i  $\xi$  zostały już określone wzorami (9a) i (9b).  
 Warunki brzegowe są tu takie same jak te, z których wyznaczyliśmy stałe  $C_1 \dots C_4$  przy rozwiązywaniu równania (23).  
 Wobec tego otrzymamy:

$$C_1 = \frac{M}{(\delta^2 + \xi^2)EJ} = k_1, \quad C_3 = -k_1$$

oraz

$$C_2 = -k_1 \operatorname{tgh} \frac{\delta l}{2}, \quad C_4 = -k_1 \operatorname{tg} \frac{\xi l}{2},$$

przy czym musi być

$$\sin \xi l \neq 0 \quad (59)$$

Funkcja (20) ma tu postać

$$y = k_1 \left( \cosh \delta x - \cos \xi x - \operatorname{tgh} \frac{\delta l}{2} \sinh \delta x - \operatorname{tg} \frac{\xi l}{2} \sin \xi x \right) \left( A \cos a \beta^2 t + B \sin a \beta^2 t \right) \quad (60)$$

Z warunku (31)

$$A k_1 \left( \xi^3 \operatorname{tg} \frac{\xi l}{2} - \delta^3 \operatorname{tgh} \frac{\delta l}{2} \right) = - \frac{q l}{2 EJ}, \quad (61)$$

a z (33)

$$A = \frac{f}{k_1} \frac{\cosh \frac{\delta l}{2} \cos \frac{\xi l}{2}}{\cos \frac{\xi l}{2} - \cosh \frac{\delta l}{2}}. \quad (62)$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\frac{\xi l}{2} = \varphi_1, \quad \frac{\delta l}{2} = \varphi \quad \text{oraz} \quad \frac{q l^2}{16 f EJ} = C_1 \quad (\text{jak poprzednio}) \quad (63)$$

otrzymujemy po podstawieniu (62) do (61)

$$\frac{\psi^3 \sinh \psi \cos \varphi_1 - \varphi_1^3 \sin \varphi_1 \cosh \psi}{\cosh \psi - \cos \varphi_1} + C_1 = 0, \quad (64a)$$

lub

$$F(\varphi_1) = -C_1. \quad (64b)$$

W przypadku  $f < 0$  będzie

$$\frac{\psi^3 \sinh \psi \cos \varphi_1 - \varphi_1^3 \sin \varphi_1 \cosh \psi}{\cos \varphi_1 - \cosh \psi} - C_1 = 0, \quad (65a)$$

a w uproszczonym zapisie

$$F_1(\varphi_1) = C_1. \quad (65b)$$

Wbrew temu, co się widzi na pierwszy rzut oka, równania (64a) i (65a) są równaniami o jednej niewiadomej, albowiem z (9a) i (9b) wynika

$$\delta = \sqrt{\xi^2 + \eta_1^2},$$

a wobec tego

$$\psi = \sqrt{\varphi_1^2 + \frac{\eta_1^2 l^2}{4}}.$$

Dla belki o przekroju prostokątnym

$$\frac{\eta_1^2 l^2}{4} = \frac{S l^2}{4 EJ} = \frac{3\xi}{\lambda^2},$$



przy czym  $\varepsilon$  i  $\lambda$  są znanymi nam już wielkościami występującymi we wzorze (14). Przyjmując, że średnie naprężenie (na poziomie środka ciężkości) wywołane sprężeniem wynosi  $60 \text{ kG/cm}^2$ , a  $E = 400\,000 \text{ kG/cm}^2$  i  $\lambda = 0,05$  otrzymamy

$$\frac{r_1^2 - l^2}{4} = 0,18.$$

Widać, że  $\psi^0$  nie będzie się bardzo różnić od  $\varphi_1$ . Jeśli zauważymy jeszcze, że dla argumentów

$$\varphi_{1i} \approx \frac{4i+1}{4} \pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

funkcje  $F(\varphi_1)$  i  $F_1(\varphi_1)$  przyjmują wartości zerowe, że przy

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &\rightarrow \frac{2i+1}{2} \pi \\ F(\varphi_1) &\rightarrow \mp \varphi_{1i}^3, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(znak minus przy  $i = 0, 2, 4, 6, \dots$ ),  
a przy

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &\rightarrow i \pi \\ F(\varphi_1) &\rightarrow \mp \varphi_{1i}^3, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(znak minus przy "i" nieparzystych),

to możemy z całą pewnością stwierdzić, że wykresy funkcji  $F(\varphi_1)$  i  $F_1(\varphi_1)$  bardzo mało będą się różnić od wykresów funkcji  $F(\varphi)$  i  $F_1(\varphi)$  przedstawionych na rysunkach 6 i 7. Wobec tego i rozwiązania równań (64a) oraz (65a) będą bardzo bliskie rozwiązań, które uzyskaliśmy poprzednio dla równań (36) i (40).

Mając kolejne pierwiastki  $\varphi_{1i}$  otrzymamy z (9b) po uwzględnieniu (63) i (57)

$$\alpha_i = \frac{2\varphi_{1i}}{l} \sqrt{\frac{g}{q} \left( \frac{\varphi_{1i}^2}{l^2} EJ + S \right)} \quad (66)$$

skąd, po podzieleniu przez  $2\pi$ , mamy

$$n = \frac{\varphi_{1i}}{\pi l} \sqrt{\frac{g}{q} \left( \frac{\varphi_{1i}^2}{l^2} EJ + S \right)} \quad (67)$$

Przedstawiając, podobnie jak poprzednio, pierwszy pierwiastek równania (64a) lub (65a) w postaci

$$\varphi_{11} = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2\Delta}{\pi} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (68)$$

dostajemy na częstość podstawowej postaci drgań własnych belki następujący wzór:

$$n_1 = \frac{\nu}{2l} \sqrt{\frac{g}{q} \left( \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2} EJ + S \right)}, \quad (69)$$

któremu można też nadać postać

$$n_1 = \frac{\nu^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJg}{q}} \sqrt{1 + \frac{S l^2}{\nu^2 \pi^2 EJ}} = n_{pn} \nu^2 \sqrt{1 + \frac{S l^2}{\nu^2 \pi^2 EJ}} \quad (70)$$

Symbol  $\Delta$  występujący we wzorze (68) ma to samo znaczenie, co we wzorze (43), zaś  $n_{pn}$  oznacza to samo, co we wzorze (47).

Nie wdając się w szczegółową analizę wzoru (70) stwierdzimy tylko, że pozostają w mocy wszystkie wnioski wyprowadzone dla przypadku, w którym nie uwzględnialiśmy wpływu napiętego cięgna na ruch drgający elementu belki.



Przybliżone wyższe częstotliwości drgań otrzymamy wstawiając do wzoru (67) za  $\nu_{1i}$  wartości  $\frac{4i-3}{4} \pi$ , przy czym  $i = 2, 3, 4, \dots$

Ostateczne rozwiązanie równania ruchu elementu belki otrzymamy tutaj podobnie jak rozwiązanie (55) wyznaczając stałą B z warunku początkowego

$$(\dot{y})_{t=0} = F(x)$$

w zależności od charakteru przyczyny wzbudzającej ruch drgający i wstawiając do (60) pierwiastki odpowiedniego równania częstotliwości.

Pozostaje jeszcze do omówienia przypadek, kiedy

$$(y)_{\substack{x=\frac{l}{2} \\ t=0}} = 0, \quad (71)$$

czyli

$$f = 0.$$

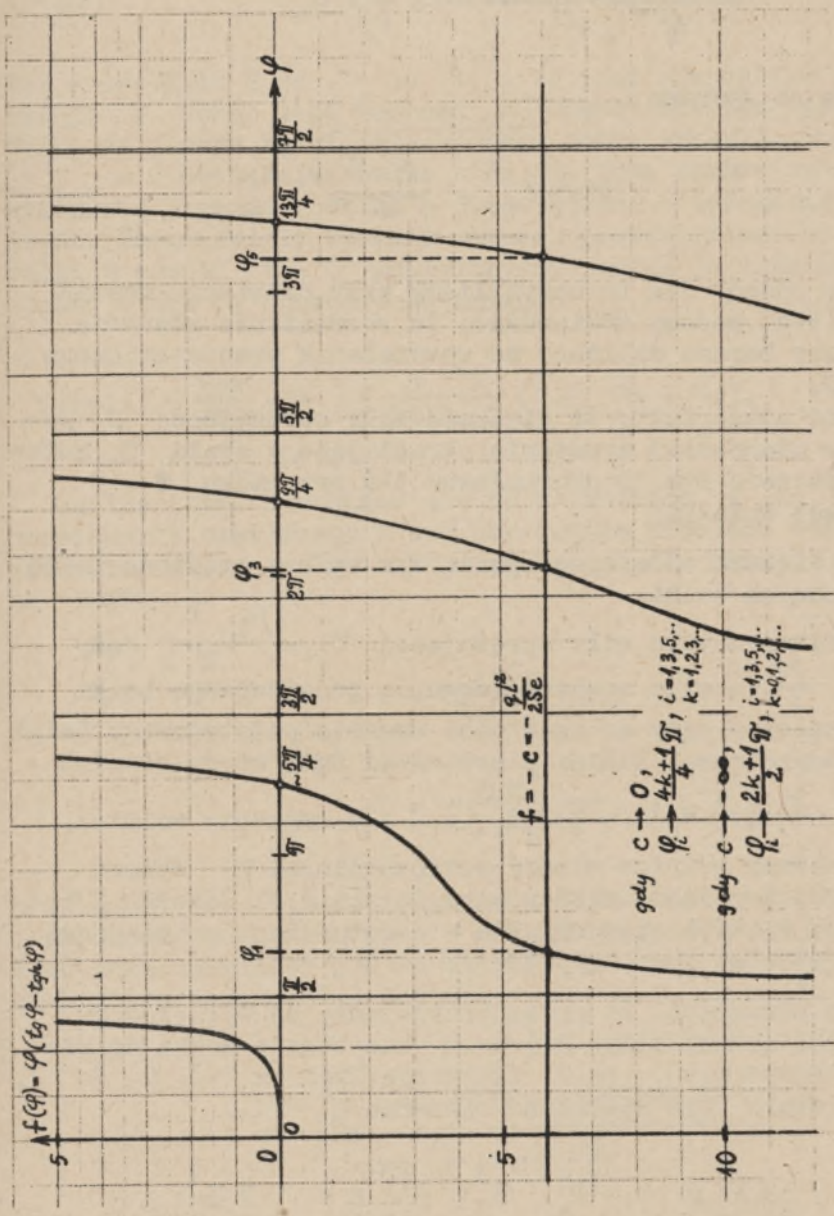
Warunkowi temu czyni zadość funkcja czasu

$$f(t) = \sin \alpha t. \quad (72)$$

Równanie ruchu elementu  $dx$  belki oraz warunki brzegowe nie ulegają oczywiście zmianie. Ponieważ reakcje podporowe nie mogą zniknąć, więc przy założeniu, że w chwili  $t = 0$  belka obciążona jest tylko ciężarem własnym, musi być spełniony warunek

$$(\eta''')_{x=0} = -\frac{q l}{2 E J}, \quad (73)$$

który prowadzi do równania częstotliwości (32), z tym, że teraz  $A = 1$ . Rozwiązanie tego równania przedstawiono graficznie na rys.10. Przy uwzględnieniu siły  $S$  w równaniu



Rys. 10



ruchu elementu dx równanie częstotliwości będzie miało postać

$$\frac{\varphi_1^3 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - \psi^3 \operatorname{tg} h \psi}{\varphi_1^2 + \psi^2} + \frac{C}{2} = 0, \quad (74)$$

przy czym po dawnemu

$$\psi = \sqrt{\varphi_1^2 + \frac{\beta_1^2}{4}}$$

W podobny sposób jak to uczyniliśmy przy omawianiu równań (64a) i (65a) możemy stwierdzić, że rozwiązanie równania (74) będzie bardzo zbliżone do rozwiązania przedstawionego na rys.10.

Biorąc pod uwagę fakt, że wielkość siły sprężającej S występuje w mianowniku wyrażenia określającego stałą C, możemy na podstawie rys.10 sformułować dla przypadku  $f = 0$  następujące wnioski:

- Im większa siła sprężająca, tym wyższa częstość drgań własnych belki.
- W miarę ubytku siły sprężającej  $\varphi_1 \approx \frac{\beta_1}{2}$  dąży do  $\frac{\pi}{2}$ , a więc częstość drgania podstawowego belki sprężonej dąży do częstości drgania podstawowego belki niesprężonej. Dalsze pierwiastki dążą wtedy również do  $\frac{2i+1}{2} \pi$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) ale znacznie wolniej.
- Ponieważ różnica między poszczególnymi  $\varphi_i$  wynosi  $\sim \pi$ , a różnica między wartościami  $\beta_i$  około  $2\pi$ , więc nie wystąpią drgania o częstościach z indeksami parzystymi (por. rys.9).

Trzeba tu zaznaczyć, że przez przyłożenie do wygiętej ku górze belki jednej siły P (rys.8) nie będzie można ściśle spełnić warunku  $(y)_{t=0} = 0$  dla wszystkich x od 0 do 1, gdyż musiałyby być spełnione równanie

$$\frac{Sx}{2EJ}(x-1) + \frac{q}{24} \frac{l^4}{EJ} \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) + \frac{Pl^3}{16EJl} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2}\right) = 0 \quad (75)$$

dla wszystkich punktów osi belki, względnie równanie

$$2ql^2\xi^4 - 4l(q_1+P)\xi^3 + 24 Se\xi^2 + (3Pl + 2 ql^2 - 24 Se)\xi = 0 \quad (75a)$$

dla wszystkich  $\xi$  od 0 do 1, a to jest niemożliwe przy każdym P. Wobec tego wniosek c) odnosi się bez zastrzeżeń tylko do środka belki, dla którego można spełnić warunek  $(y)_{t=0} = 0$  obciążając belkę siłą P. Inne punkty belki mogą wykonywać drgania również o częstościach z indeksami parzystymi. Chcąc ściśle spełnić warunek prostoliniowości osi belki w chwili  $t = 0$  musielibyśmy poddać ją takiemu obciążeniu, które by spowodowało ugięcie

$$y(p, x) = \frac{Sex}{2EJ} (x-1) + \frac{q l^4 x}{24 EJ l} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l}\right).$$

Ogólne (tzn. odnoszące się do wszystkich x od 0 do 1) rozwiązanie omawianego w tym paragrafie problemu otrzymałoby się wyznaczając stałe A i B występujące w funkcji  $f(t)$  ze wzorów

$$A = \frac{f(x)}{k \eta(\beta_1, x)}, \quad (76)$$

$$B = \frac{F(x)}{k \eta(\beta_1, x)}, \quad (77)$$

przy czym  $f(x)$  i  $F(x)$  oznaczają odpowiednio ugięcie belki i prędkość ruchu w chwili  $t = 0$ . Funkcja  $\eta(\beta_1, x)$  będzie mieć taki charakter jak we wzorze (35). Dla  $x = \frac{l}{4}$  np. funkcja ta będzie mieć postać

$$\eta(\beta_1, x) = \frac{\cos \frac{\beta_1}{2} \cosh \frac{\beta_1}{4} - \cosh \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_1}{4}}{\cosh \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_1}{2}} \quad (78)$$



Najbardziej interesującym nas zagadnieniem jest częstość drgań własnych belki sprężonej, dlatego też główną uwagę zwróciliśmy na wyprowadzenie i rozwiązanie równania częstości o możliwie prostej postaci, nie troszcząc się o jego uogólnienie. Jednakowoż, jeśli oś belki spełnia warunek ciągłości (nie powstały przeguby), to ilości drgań o określonej postaci wykonywanych w jednostce czasu przez różne punkty belki nie będą się różniły między sobą. Wobec tego nasze wnioski dotyczące wpływu sprężenia na częstość drgań belki można odnosić do całej jej rozpiętości.

### 2.3. Belka sprężona cięgnem parabolicznym

Rozpatrzmy najpierw przypadek, kiedy nad podporami środek ciężkości przekroju cięgna (ciągien) pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju belki, tzn. kiedy  $e_0 = e_1 = 0$  (rys. 11a).

Ponieważ w praktycznych realizacjach maksymalny mimośród kabla  $e_m$  jest na ogół mały w stosunku do rozpiętości belki, więc można z dobrym przybliżeniem przyjąć

$$S = \text{const}; \quad S \cos \omega \approx S.$$

Niewielki błąd popełniony również, jeśli nacisk napiętego cięgna na belkę zastąpimy równomiernie rozłożonym i skierowanym pionowo w górę obciążeniem  $u$ . Tak więc wpływ cięgna zostanie sprowadzony do działania tegoż obciążenia i siły osiowej  $S$  (rys. 11b i c).

Wielkość  $u$  znajdziemy z warunku równowagi momentów. Mamy więc

$$M_s = - \frac{4 S e_m}{l^2} x (1-x)$$

$$M_u = \frac{u x}{2} (1-x).$$

Musi być

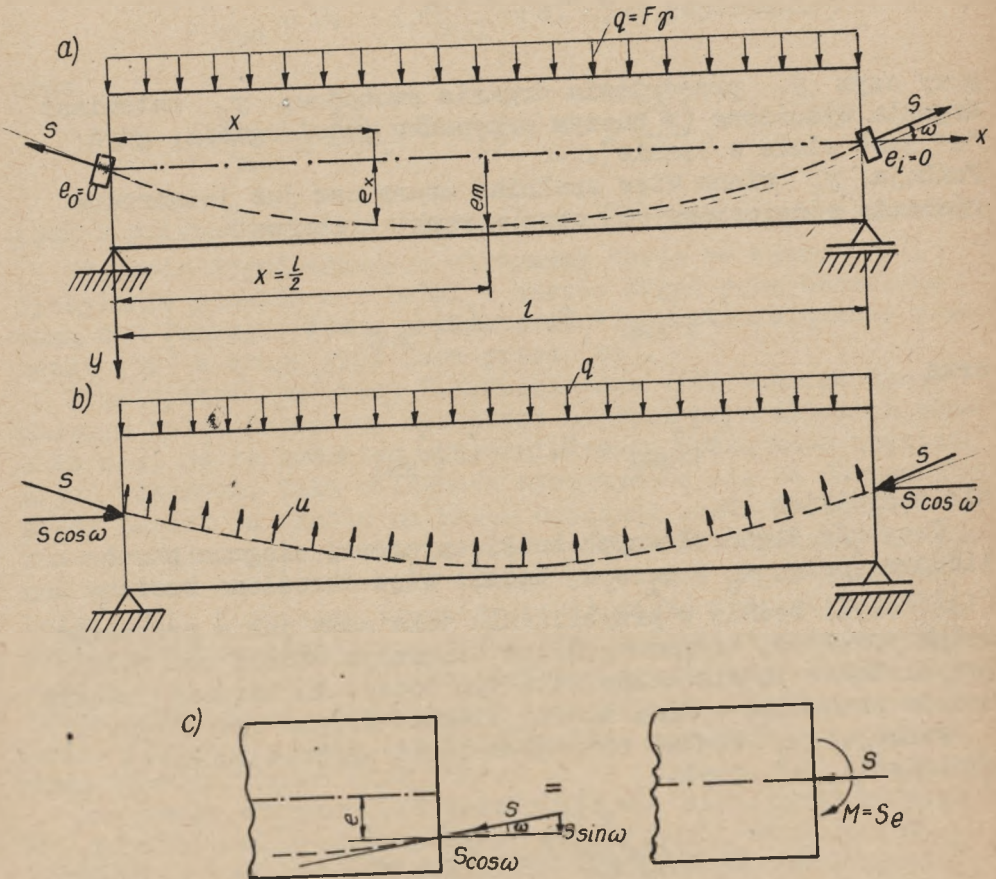
$$M_s = M_u,$$

skąd

$$u = - \frac{8 e_m S}{l^2} = \frac{d^2 M_s}{d x^2} = S \frac{d^2 e}{d x^2} \quad (79)$$

W czasie ruchu elementu  $dx$  musi być zachowana równowaga między wewnętrznym oporem sprężystym

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) dx - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - u dx$$



Rys.11



i siłą bezwładności

$$- \frac{q}{g} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Wobec tego

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -u. \quad (80)$$

Rozwiązanie równania (80) będzie sumą dwu funkcji, czyli

$$y = y_1 + y_2,$$

przy czym  $y_1$  przedstawia drgania swobodne,  $y_2$  natomiast drgania wymuszone (w naszym przypadku quasidrgania, gdyż "u" jest stałe w czasie).

Funkcja  $y_1$  winna więc spełniać znane nam już jednorodne równanie różniczkowe (6) oraz warunki brzegowe

$$(y_1)_{x=0} = 0, \quad (y_1'')_{x=0} = 0$$

oraz

$$(y_1)_{x=l} = 0, \quad (y_1'')_{x=l} = 0$$

dla wszystkich  $t$ .

Częstość drgań własnych belki sprężonej ciągnem parabolicznym (przy  $e_0 = e_1 = 0$ ) będzie więc określona wzorem (13), czyli będzie w przybliżeniu taka sama jak w przypadku belki sprężonej ciągnem prostym biegnącym wzdłuż osi belki. Przybliżenie będzie oczywiście tym lepsze im bardziej płaska będzie parabola, wzdłuż której biegnie ciągnie sprężające.

Funkcja  $y_2$  będzie równaniem linii ugięcia belki od obciążenia  $u$ , czyli

$$y_2 = \frac{u l^3 x}{24 EJ} \left( 1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right). \quad (81)$$

Wychylenie poszczególnych punktów osi belki w czasie ruchu drgającego będzie się więc składać z wychylenia określonego funkcją  $y_1$  będącą iloczynem

$$y_1(x, t) = \eta(x)(A \cos \alpha t + B \sin \alpha t)$$

i wychylenia określonego funkcją (81). Postać funkcji  $\eta(x)$  została określona przez wyrażenie (9). Wyznaczaniem stałych  $A$  i  $B$  nie będziemy się tu zajmować.

W przypadku kiedy  $e_0 = e_1 = e_k \neq 0$ , równanie (80) nie traci swej ważności zmieniają się jednak dwa warunki brzegowe dla funkcji  $y_1$ .  
Winno teraz być

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y)_{x=1} = 0, \quad (\text{jak poprzednio})$$

oraz

$$(y'')_{x=0} = \frac{Se_k}{EJ}, \quad (y'')_{x=1} = \frac{Se_k}{EJ},$$

(jak w przypadku belki sprężonej mimośrodowo cięgnem prostym).

Częstość drgań własnych otrzymamy teraz ze wzoru (70). Wychylenie punktów osi belki w czasie drgań będą określone sumą dwu funkcji: jedna przedstawiać będzie rozwiązanie równania (56) a druga jest dana przez (81).

Przy opisywanym przez H.K. Kuźniecowa [12] badaniu dynamicznym belki betonowej sprężonej cięgnem parabolicznym okazało się, że ze wzrostem sprężenia rosła początkowo częstość drgań własnych. Taka zależność utrzymywała się aż do momentu, kiedy nacisk  $u$  kabla na beton osiągnął wartość obciążenia  $q$ . Dalsze sprężanie, a więc zwiększanie nacisku  $u$  ponad wartość  $q$  powodowało spadek częstości drgań własnych belki. H.K. Kuźniecowa tłumaczy to zjawisko tym, że z chwilą wystąpienia rozciągania w górnych włóknach belki maleje moduł sprężystości betonu, co nie jest przekonywujące. Prawidłowe tłumaczenie daje nam rysunek 7 (ze wzrostem sprężenia maleje  $C_1$ , maleje więc też  $\Delta$  figurujące we wzorze na podstawową częstość drgań własnych).

Nie chcąc zwiększać zbytnio objętości niniejszej rozprawy, pominięliśmy w naszkicowanej wyżej teorii drgań belek sprężonych wiele zagadnień, m.in. tłumienie i współczynnik dynamiczny. Rozszerzeniu tej teorii, a także jej uściśleniu i uogólnieniu mamy zamiar poświęcić oddzielne opracowanie.



### 3. BADANIA DYNAMICZNE BELEK SPRĘŻONYCH I ŻELBETOWYCH

#### 3.1. Przygotowanie belek próbnych

Zostały one wykonane w 3-ch grupach według tablicy 2.

Tablica 2

#### Z e s t a w i e n i e   b e l e k   p r ó b n y c h

Grupa belek	Wymiary przekroju	Symbol belki	Sztuk	Rodzaj belki	Charakterystyka sprężenia
A	10 x 18	A1	3	kablo- betonowa	kabel paraboliczny
		A2	3	-"-	kabel prostoliniowy, sprężenie mimośrodowe
		A3	2	-"-	kabel prostoliniowy, sprężenie osiowe
		A3	1	-"-	sprężenie drutami Ø 5 mm biegnącymi poza przekrojem
		Aż	2	żelbetowa	-
B	12 x 18	B1	2	kablo- betonowa	kabel paraboliczny
		B2	1	struno- betonowa	naciąg strun przed betonowaniem na sztywnej formie
		B3	1	-"-	jak w belce B2
C	10 x 30	C1	3	kablo- betonowa	kabel paraboliczny
		C2	2	-"-	kabel prostoliniowy, sprężenie mimośrodowe
		C3	1	struno- betonowa	-
		Cż	2	żelbetowa	-

Konstrukcję belek próbnych pokazano na rys.12.





Przed rozpoczęciem produkcji belek doświadczalnych zostały wykonane 3 próbne mieszanki betonu. Skład tych mieszanek podano w tablicy 3. Z każdej mieszanki pobrano 3 próbki w postaci walców  $\varnothing$  16 cm. Wyniki badania walców próbnych zawiera tablica 4.

Tablica 3

Skład próbnych mieszanek betonu

Składniki	Ilości składników w $\text{kg/m}^3$ w poszczególnych mieszankach		
	beton I	beton II	beton III
piasek Racibórz	510	450	540
grys granitowy 2-5	170	270	250
" " 4-20	1020	-	-
" sżemityowy 4-20	-	1080	1080
cement 350 "Saturn"	575	550	500
woda	180 $\text{l/m}^3$	170 $\text{l/m}^3$	175 $\text{l/m}^3$
w/c	0,313	0,309	0,350

Tablica 4

Wyniki badania próbek betonu

Rodzaj betonu	Ciężar objętościowy w $\text{kg/m}^3$	Wiek betonu w chwili badania "d" w dniach	Wytrzymałość betonu $R_d$ w $\text{kg/cm}^2$	Wytrzymałość 28-dniowa obliczona ze wzoru: $R_{28} = R_d + a_d \sqrt{R_d \cdot x}$
I	2426	7	394	553
II	2503	9	418	546
III	2483	8	341	471

x) Współczynnik  $a_d = 0,933 \frac{28 - d}{\sqrt{d - 1}}$  (patrz PN/B-06250).

W projekcie belek doświadczalnych przewidywano ich wykonanie z betonu 3-ech marek: 500, 400 i 300. Beton marki 500 miał skład podobny do składu mieszanki III przy nieco wyższej dawce cementu. Na mieszance III opierano się również

przy wykonywaniu belek z betonu marki 400 zmniejszając tutaj jedynie ilość cementu. Beton marki 300 wykonywany był również na kruszywie granitowym i miał skład taki sam jak beton używany do produkcji różnego rodzaju elementów żelbetowych w Zakładach "Konsbet" w Strzybnicy, gdzie przygotowywane były belki doświadczalne. Do zagęszczania betonu używano wibratorów przyczepnych. W okresie dojrzewania betonu belki były przynajmniej dwa razy dziennie polewane wodą. Tak samo pielęgnowano walce próbne. Rzeczywista wytrzymałość 28-dniowa betonów wszystkich 3-ech marek była zawsze nieco wyższa od założonej.

Do sprężenia belek doświadczalnych stosowano stal polską  $\emptyset$  5 mm I-go gatunku produkowaną przez Fabrykę Lin i Drutu w Zabrze. Badanie tej stali wykazało wytrzymałość na zerwanie  $R_{\sigma} = 180 \text{ kg/mm}^2$  i wydłużenie przy zerwaniu  $A_{20} = 3,28\%$ .

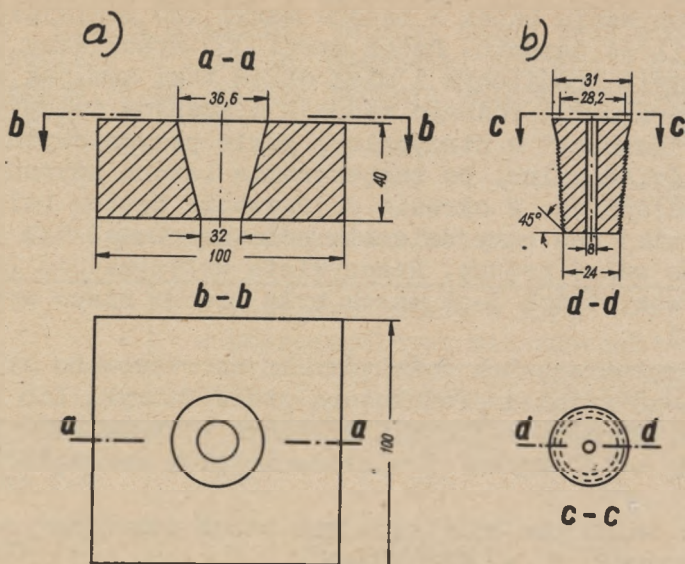
Belki żelbetowe były zbrojone stalą żebrowaną o granicy plastyczności  $Q_{\sigma} = 3600 \text{ kg/cm}^2$ .

W belkach sprężonych stosowano 2 rodzaje zakotwień: stalowe (rys.13) i żelbetowe (rys.14). Pierwsze z tych zakotwień produkuje się w Zakładach "Konsbet", gdzie znajdują od dawna zastosowanie w kablobetonowych dźwigarach zwanych oszczędnościowymi. Zakotwienia żelbetowe zakupiono w Katedrze Budownictwa Żelbetowego Politechniki Krakowskiej.

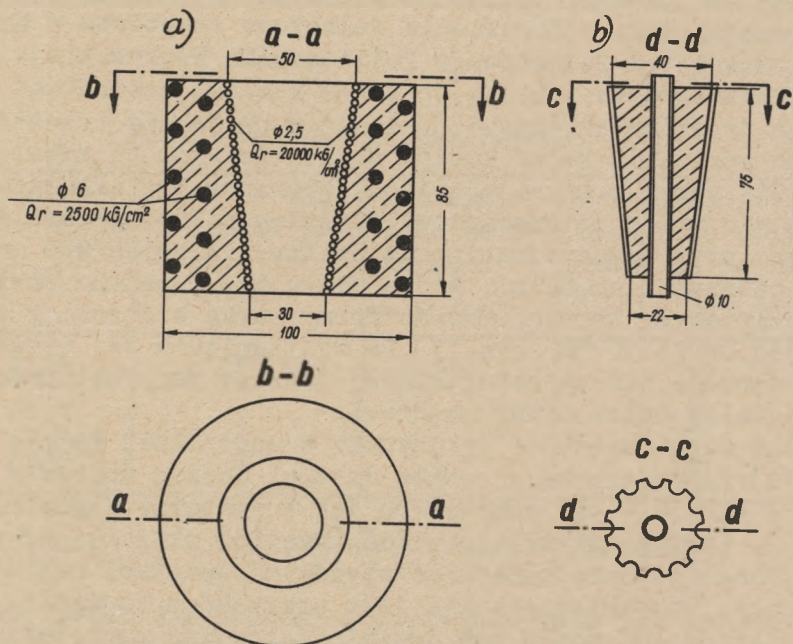
Belki żelbetowe i belki sprężane kablami betonowano w formach drewnianych (rys.15). Jeśli w projekcie przewidziane było sprężenie belki kablem parabolicznym, to kabel taki osłonięty rurką z cienkiej blachy (por.rys.16) układano w deskowaniu przed betonowaniem. Właściwe położenie kabla ustalano przy pomocy drabinek z prętów stalowych  $\emptyset$  6 mm. Przed betonowaniem belki, która miała być sprężana kablem prostoliniowym, wprowadzano do formy rurkę o średnicy zewnętrznej około 30 mm (rys.17). Po wyciągnięciu tej rurki z zagęszczonej, ale niestwardniałej jeszcze masy betonowej pozostawał w belce otwór na kabel.

Belki strunobetonowe wykonywano w specjalnej formie (rys.18) zaprojektowanej przez autora. Naciąg drutów  $\emptyset$  5 mm odbywał się tu w ten sam sposób jak w systemie Magnela (por. rys.19). Żeliwne płytki kotwiące (rys.20) okazały się za słabe i trzeba je było wzmocnić stalowymi opaskami nakładanymi na gorąco. Wzmocnienie takie jest przykładem sprężania żeliwa, dzięki czemu mogło ono przenieść znaczne naprężenia rozciągające powstające przy klinowaniu drutów. Oprócz wzmocnionych płytek żeliwnych stosowano też płytki stalowe (St.55). Do chwili osiągnięcia przez beton wymaganej wytrzymałości



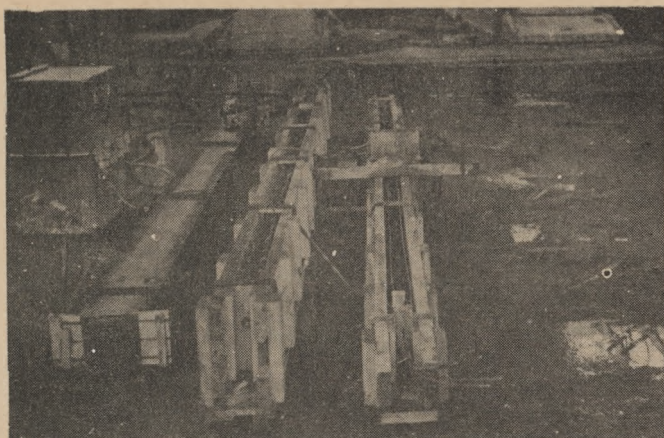


Rys.13. Zakotwienie stalowe dla kabla 12  $\varnothing$  5 mm  
 a) płyta kotwiąca, b) stożek



Rys.14. Zakotwienie żelbetowe dla kabla 12  $\varnothing$  5 mm  
 a) blok kotwiący, b) stożek

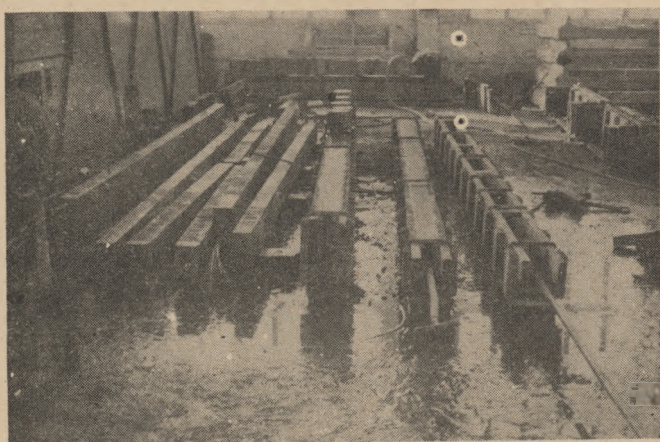




Rys. 15

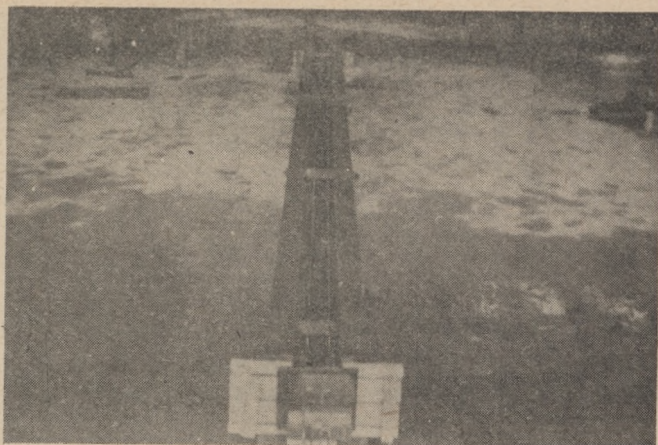


Rys. 16



Rys. 17

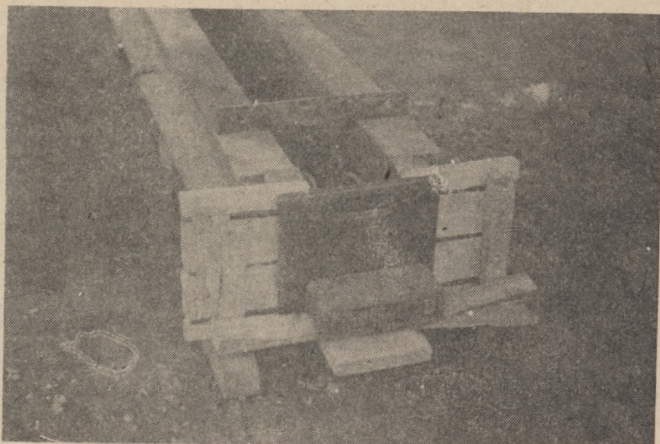




Rys.18



Rys.19



Rys.20



siła sprężająca przekazywała się na sztywną formę za pośrednictwem specjalnych końcówek (rys.21) złożonych z dwóch słupków stalowych, sześciu wałków stalowych  $\varnothing$  20 mm osadzonych w drewnianych tarczach i stalowej płycie czołowej, na którą przekazywał się docisk od zakotwień. Jedną z belek strunobetonowych (w okresie dojrzewania betonu) widzimy na rysunkach 15 i 16.

Sprężenie belki strunobetonowej następowało po wyciągnięciu stalowych wałków tkwiących między płytą czołową i stalowymi słupkami przylegającymi do końców ceowników stanowiących formę dla belki. Operacja przekazywania siły sprężającej z formy na beton była więc bardzo prosta. Po usunięciu wałków belka wyginała się ku górze, co świadczyło o tym, że nastąpiło jej sprężenie. Rozformowanie nie nastęrczało również żadnych trudności, gdyż przed betonowaniem smarowano lekko ścianki ceowników.

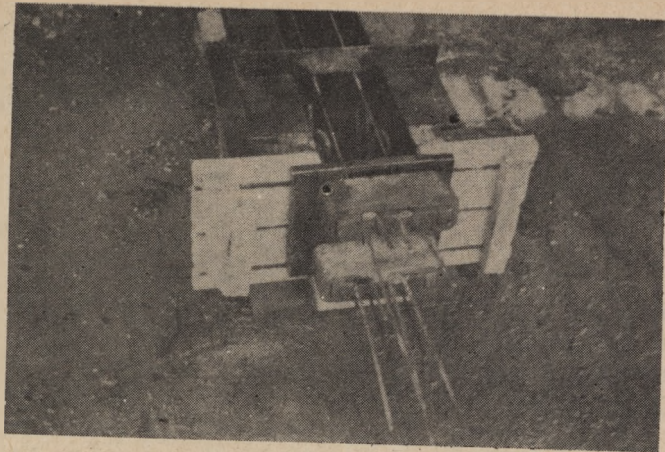
Do naciągu kabli używano prasy hydraulicznej o podwójnym działaniu (rys.22). Jest to tzw. prasa krakowska zaprojektowana w Zakładzie Dokumentacji Technicznej Katedry Części Maszyn Politechniki Krakowskiej. Średnica wewnętrzna ruchomego cylindra tej prasy przeznaczonej do naciągu kabla złożonego z 12 drutów  $\varnothing$  5 mm wynosi 125 mm, zaś tłok służący do wbijania stożka przy kotwieniu drutów ma średnicę 76 mm. Używano też sporadycznie prasy, w której średnica wewnętrzna ruchomego cylindra wynosi 145 mm. Obie te prasy zostały wycechowane przy pomocy dynamometru rtęciowego na specjalnym urządzeniu zaprojektowanym przez autora. Schemat tego urządzenia przedstawia rys.23.

Współczynniki sprawności pras przy różnych wartościach ciśnienia zestawiono w tablicy 5.

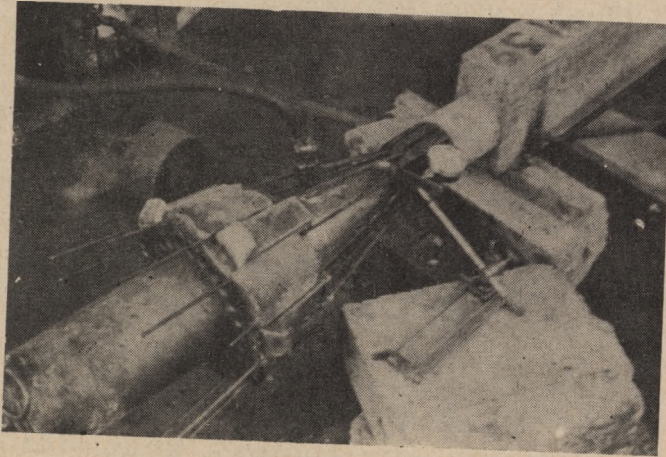
Wartość siły sprężającej określano w zasadzie na podstawie odczytów manometru pompy olejowej, którą widzimy na rysunku 24. Oprócz tego mierzono wydłużenie kabla przy naciągu. Pomiaru tego dokonywano za pomocą czujnika 0,01 mm. Ruch punktu wybranego na jednym z drutów kabla przenosił się na czujnik za pośrednictwem płaskownika przytwierdzonego do tegoż drutu (por.rys.22).

Za pomocą tego samego czujnika mierzono poślizg drutów w zakotwieniu po zwolnieniu naciągu. Pomiar ten miał bardzo istotne znaczenie przy określaniu straty sprężenia. Mierzono też wciąganie kabla w zakotwienie w czasie naciągu (por. rys.25 - czujnik środkowy), co było potrzebne do określenia rzeczywistego wydłużenia stali.

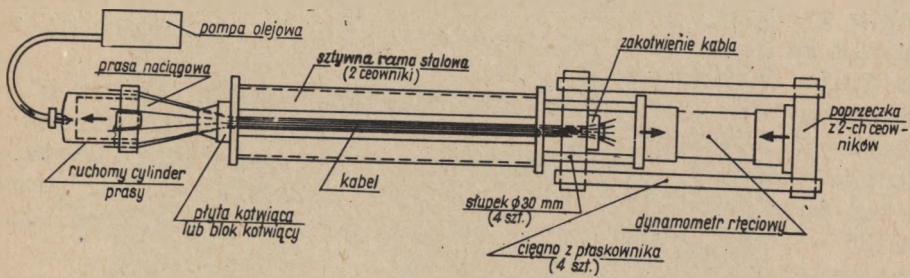




Rys. 21



Rys. 22



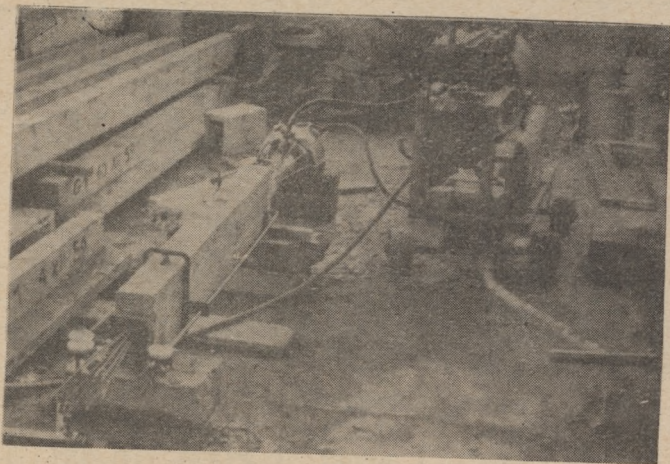
Rys. 23. Urządzenie do cechowania pras

Współczynniki sprawności pras naciągowych

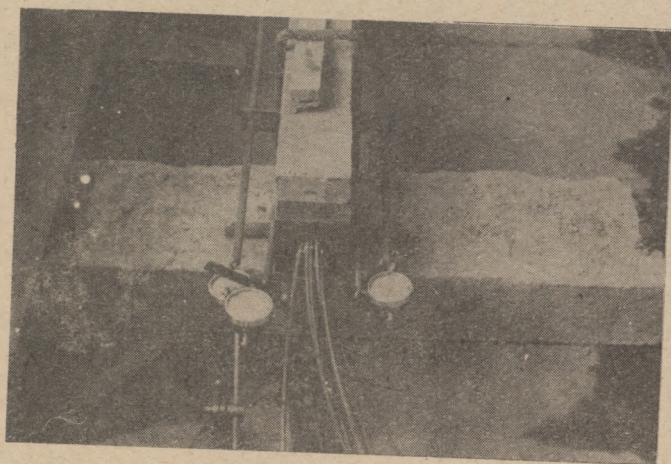
Średnica cylindra prasy d mm	Powierzchnia tłoka $F_t$ cm <sup>2</sup>	Ciśnienie oleju w prasie p kg/cm <sup>2</sup>	Nominalna siła naciągu $P_n = F_t \cdot p$ kG	Siła określona za pomocą dynamometru $P_d$ kG	Współczynnik sprawności prasy $\eta = \frac{P_d}{P_n} \cdot x$	Uwagi
125	122	40	4880	4005	0,821	Prasa oznaczona numerem IV w Zakładach "Konsbet"
		80	9760	8796	0,901	
		120	14640	13680	0,934	
		160	19520	17768	0,910	
		200	24400	22320	0,915	
		240	29280	27255	0,931	
		260	31720	29511	0,930	
145	165	40	6600	5118	0,775	Prasa oznaczona numerem V w Zakładach "Konsbet"
		60	9900	8842	0,893	
		80	13200	11435	0,866	
		100	16500	14930	0,905	
		120	19800	17418	0,880	
		140	23100	20790	0,900	
		160	26400	23255	0,881	
		180	29700	26860	0,904	
200	33000	28395	0,860			

x) Cechowanie w sposób pokazany na rys.23 dało możliwość ujęcia nie tylko strat siły wywołanych oporami w samej prasie naciągowej, lecz także strat wywołanych tarciem kabla o ściankę otworu w zakotwieniu.





Rys. 24



Rys. 25



W wiadomo, że zabieg sprężenia jest jednocześnie próbą materiałów. W trakcie sprężenia zostaje też poddana próbie prawidłowość konstrukcji belki i jakość jej wykonania. I tak np. w czasie sprężania jednej z belek należącej do grupy B pojawiła się na dolnej ścianie belki szeroka, podłużna rysa (rys.26). Po odkuciu betonu okazało się, że źle wykonano osłonę kabla (rys.27). Wskutek rozsunięcia się rurek blaszanych, z których składała się osłona, do wnętrza kabla dostał się podczas betonowania zaczyn cementowy. W miejscu przerwania osłony wytworzył się guz, który w czasie ruchu kabla przy naciągu spowodował pęknięcie belki.



Rys. 26



Rys. 27



### 3.2. Określenie współczynnika sprężystości betonu na podstawie pomiaru odkształcenia przy sprężaniu

W projekcie normy dla konstrukcji żelbetowych z 1954 r. (PN-54/B-03260) podane były współczynniki sprężystości betonów o markach od 50 do 600. W normie, która ukazała się w 1956 r. (PN-56/B-03260), ograniczono się do podania współczynników sprężystości betonu tylko dla marek od 50 do 400. Norma dotycząca konstrukcji sprężonych (PN-57/B-03320) nie mówi też o tym, jak należy określać współczynnik sprężystości betonów o markach wyższych od 400. Ten mankament naszych norm nastęrcza projektantom trudności nie tylko przy obliczaniu konstrukcji hiperstatycznych, ale nawet w zakresie prostych belek z betonu sprężonego (obliczanie strat sprężenia, określanie przekroju idealnego, obliczanie strzałki ugięcia). Jest więc rzeczą naturalną, że u autora zrodziła się myśl określania współczynników sprężystości betonu przy okazji sprężania dużej stosunkowo liczby belek doświadczalnych. Trzeba tu zauważyć, że oprócz 23-ch belek przeznaczonych do badań dynamicznych wykonywano jednocześnie 44 belki, które zostaną poddane badaniom zmęczeniowym.

Biorąc pod uwagę charakter obciążenia i odkształcenia belki w czasie zabiegu sprężania otrzymujemy dla współczynników sprężystości betonu następujące określenia:

ściskanie (przy sprężaniu osiowym)

$$E_{sc} = k_{sc} \frac{\Delta S}{\Delta l}, \quad (82)$$

zginanie (przy sprężaniu mimośrodowym)

$$E_{zg} = k_{zg} \frac{\Delta S}{\Delta f}, \quad (83)$$

gdzie:

- $\Delta S$  - różnica siły sprężającej,
- $\Delta l$  - skrócenie belki odpowiadające wartości  $\Delta S$ ,
- $\Delta f$  - różnica ugięć belki odpowiadająca różnicy  $\Delta S$ ,

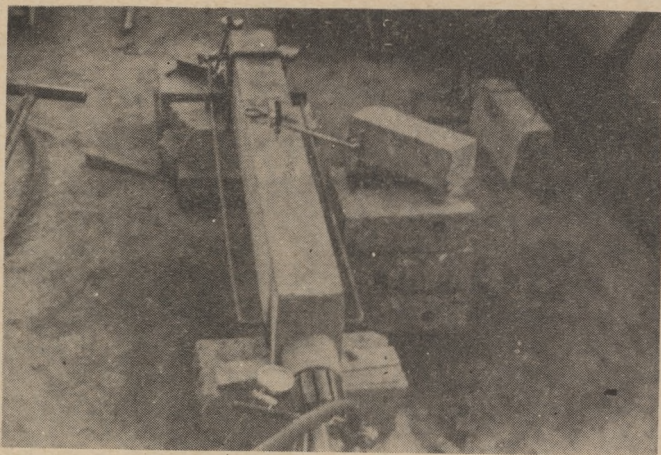
$k_{sc} = \frac{1}{F}$  - iloraz rozpiętości i pola przekroju belki,  
 $k_{zg}$  - współczynnik zależny od charakteru trasy kabla, rozpiętości belki i od momentu bezwładności przekroju belki.

Używając do sprężania pras wycechowanych można było określać różnicę siły sprężającej na podstawie odczytów manometru pompy olejowej. Pomiar wydłużenia kabla służył tylko jako sprawdzian. Do mierzenia skrócenia i ugięcia belki przy sprężaniu stosowano czujniki. Sposób pomiaru widoczny jest dokładnie na rysunkach 24 (sprężenie osiowe), 25, 28 i 29. Mierzono w zasadzie tylko skrócenie dolnych włókien belki. W miejscach podparcia belki były osadzone w betonie stalowe płytki o grubości 10 mm. Do jednej z tych płytek przyspawano 2 krótkie pręty stalowe o kształcie fajki, na których umocowano czujniki (por. rys. 25). Połączenie czujników z drugim końcem bazy pomiarowej (równej rozpiętości belki) stanowiły dwa dłuższe pręty stalowe odpowiednio wygięte i przyspawane do drugiej płytki podporowej (por. rys. 24). Ugięcie belki sprężanej kablem parabolicznym lub kablem prostym usytuowanym mimośrodowo mierzono za pomocą czujnika kontaktującego się z górną ścianką belki w środku jej rozpiętości (por. rys. 28 i 29).

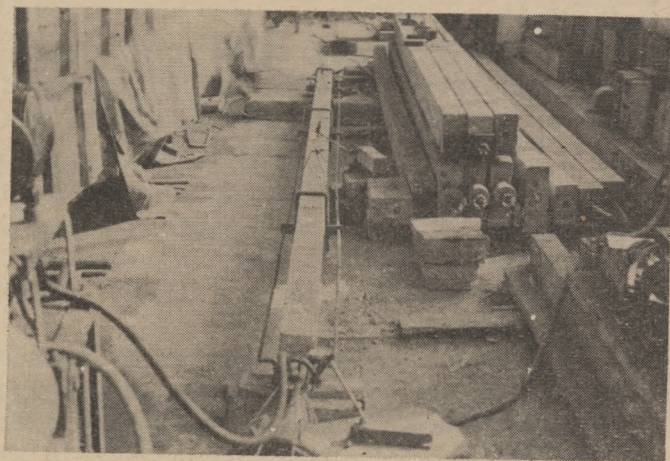
Sposób określania współczynnika sprężystości betonu na przykładzie belek A3 (sprężenie osiowe) i A2 (sprężenie kablem prostym usytuowanym mimośrodowo) przedstawiono w tablicy 6, zaś w tablicy 7 zestawiono wartości  $E_{zg}$  i  $E_{sc}$  dla wszystkich belek, przy sprężaniu których dokonywano pomiaru ugięcia względnie skrócenia. Tablica 7 zawiera również daty betonowania i sprężania belek a także wytrzymałość 28-dniową oraz wytrzymałość betonu w dniu sprężania (i określania współczynnika sprężystości).

Wytrzymałość betonu w belkach doświadczalnych określano czterokrotnie, a mianowicie: w wieku 28 dni, bezpośrednio przed sprężaniem, w czasie badania dynamicznego belki oraz bezpośrednio po pomiarze prędkości rozchodzenia się fali ultradźwiękowej w belce. Badanie wytrzymałości betonu dokonywane było w dwojaki sposób: przez zgniatanie w prasie próbek pobranych przy betonowaniu oraz nieniszcząco za pomocą szwajcarskiego aparatu konstrukcji inż. E. Schmidta (rys. 30 i 31). Aparat E. Schmidta (nazwa niemiecka: Betonprüfhammer, nazwa francuska: Scléromètre à béton) oddał tu bardzo cenne usługi, gdyż można było bardzo wydatnie zmniejszyć ilość





Rys.28



Rys.29

Określenie współczynnika sprężystości betonu w belkach A3 i A2

	Ciśnienie w prasie p kG/cm <sup>2</sup>	Pomiarzone średnie skrócenie belki cm	Różnica skróceń $\Delta l$ cm	Siła sprężająca S=122.p. $\eta$ kG	$\Delta S$ kG	$E_{sc} = k_{sc} \frac{\Delta S}{\Delta l} = 2,791 \frac{\Delta S}{\Delta l}$ kG/cm <sup>2</sup>	Średnia wartość $E_{xx}$ kG/cm <sup>2</sup>
belka A3 z 5. 4. 1960	60	0,0210	0,0195	6595	2199	314700	353000 (335000)
	80	0,0405	0,0170	8794	2601	427000	
	100	0,0575	0,0195	11395	2279	326200	
	120	0,0770		13674			
	p kG/cm <sup>2</sup>	Strzałka ugięcia f cm	Różnica ugięć $\Delta f$ cm	Siła sprężająca S=122.p. $\eta$ kG	$\Delta S$ kG	$E_{zg} = \frac{e}{8} \frac{1^2 \Delta S}{J \cdot \Delta f} = 18,056 \frac{\Delta S}{\Delta f}$ kG/cm <sup>2</sup>	$E = 18,056 \times \frac{\sum \Delta S}{\sum \Delta f}$ kG/cm <sup>2</sup>
belka A2 z 14. 4. 1960	40	0,360	0,346	4006	4968	259300	261000 (247100)
	80	0,706	0,271	8974	4700	313100	
	120	0,977	0,380	13674	4109	195200	
	160	1,357	0,295	17783	4543	278100	
	200	1,652	0,316	22326	4934	281900	
	240	1,968		27260			

x)  $k_{sc} = \frac{1}{F_{netto}} = \frac{480}{10 \times 18 - 8} = \frac{480}{172} = 2,791$  (uwzględniono osłabienie przekroju przez otwór na kabel).

xx)  $E = k_{sc} \frac{E \Delta S}{\sum \Delta l} = 2,791 \frac{7079}{0,0560} = 353000 \text{ kG/cm}^2$ .

Przy założeniu

$\eta_{sr} = \frac{0,901 + 0,934}{2} = 0,918$   $E = 2,791 \frac{122 \times 60 \times 0,918}{0,0560} = 335000 \text{ kG/cm}^2$

xxx) Przy założeniu

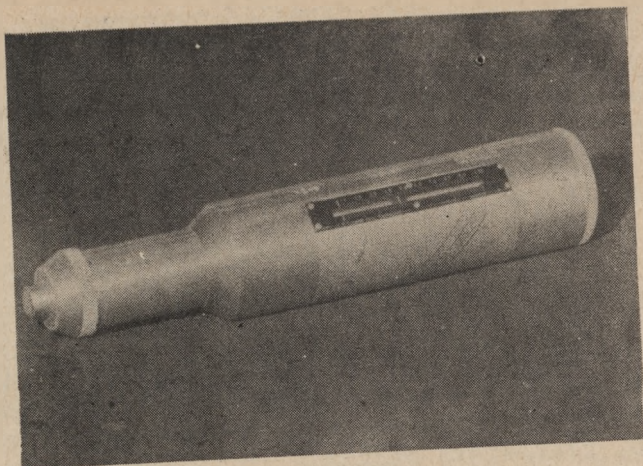
$\eta_{sr} = 0,902$   $E = 18,056 \frac{122 \times 200 \times 0,902}{1,968 - 0,360} = 247100 \text{ kG/cm}^2$



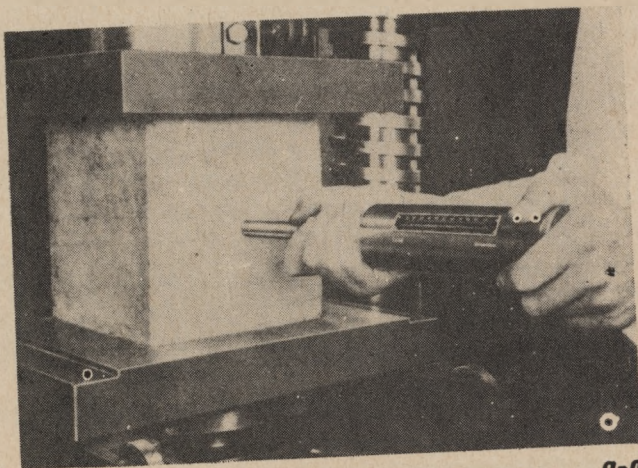
Tablica 7

Wytrzymałość betonu i współczynniki sprężystości

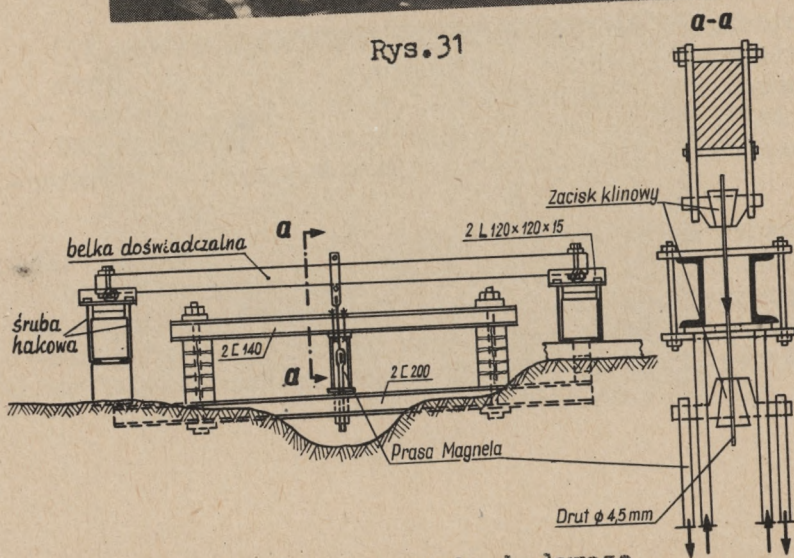
Sym- bol bel- ki	Data betono- wania	Marka betonu (wytrzym. 28-dnio- wa) $R_w 28$ kG/cm <sup>2</sup>	Data spręża- nia	Wytrzy- małość betonu w dniu spręża- nia kG/cm <sup>2</sup>	Współ- czynnik spręży- stości betonu $E$ kG/cm <sup>2</sup>	U w a g i
A1	17.11.59	410 n	15.3.60	432 nn	402400 1)	n - badanie niszczą- ce (na próbkach)
A1	12.4.60	290 nn	28.5.60	330 nn	272400 1)	
A1	5.5.60	400 nn	28.5.60	400 nn	-	nn - badanie nie- niszczące
A2	23.11.59	-	11.2.60	440 nn	313000 2)	1) $E = E_{zg} = \frac{5.8 e_{max} l^2}{384 J}$
A2	26.11.59	340 nn	13.2.60	410 nn	271200 2)	
A2	14.4.60	320 nn	19.5.60	340 nn	210900 2)	2) $E = E_{zg} = \frac{\Delta S}{\Delta f}$
A2	14.4.60	320 nn	12.8.60	405 n	247100 2)	
A3	6.11.59	-	-	-	-	Orientacyjna wartość $E_{zg}$ obliczona przy założeniu, że ugię- cie $f$ zostało wy- wołane obciążeniem
A3	22.1.60	400 n	18.2.60	400 n	329500 3)	
A3	5.4.60	430 nn	12.5.60	460 nn	335000 3)	u = $\frac{8 e_{max} S}{l^2}$
Aż	14.11.59	-	-	-	-	
Aż	18.11.59	400 n	-	-	-	2) $E = E_{zg} = \frac{e l^2}{8 J} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta f}$
B1	30.10.59	500 n	17.3.60	510 nn	321600 1)	3) $E = E_{sc} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta l}$
B1	5.4.60	440 nn	12.5.60	480 nn	339100 1)	
B2	5.4.60	-	14.4.60	450 nn	-	
B3	14.11.59	-	24.11.59	450 n	-	
C1	21.11.59	425 n	28.1.60	450 nn	-	
C1	25.11.59	425 n	28.1.60	450 nn	-	
C1	1.12.59	-	30.1.60	450 nn	406900 1)	
C2	27.2.60	440 nn	24.3.60	440 nn	-	
C2	9.4.60	440 nn	12.5.60	460 nn	344300 2)	
C3	3.5.60	-	13.6.60	-	-	
Cż	18.11.59	490 n	-	-	-	
Cż	19.11.59	490 n	-	-	-	



Rys. 30



Rys. 31



Rys. 32. Stanowisko badawcze



walców próbnych, a tym samym obniżyć koszt badań. Poza tym za pomocą aparatu można było określić wytrzymałość betonu wprost w belce. Zakrojone na szeroką skalę badania porównawcze wykazały dobrą zgodność wyników uzyskanych przy zastosowaniu sklerometru z wynikami otrzymanymi ze zgniatania walców próbnych. Nieniszczące badanie wytrzymałości betonu przy użyciu sklerometru zostanie obszerniej omówione w oddzielnej pracy.

### 3.3. Częstość drgań własnych belek sprężonych i żelbetowych

Badania dynamiczne zostały przeprowadzone na poligonie usytuowanym w obrębie Zakładów "Konsbet" w Strzybnicy. Jako podpory dla belek wykorzystano wybrakowane skłupy o przekroju 35 x 40 cm. Stanowisko badawcze przedstawiono schematycznie na rys. 32.

Na rysunku 33 widzimy moment transportowania jednej z belek na stanowisko badawcze. Widok całego poligonu z belkami przygotowanymi do badań przedstawia rysunek 34.

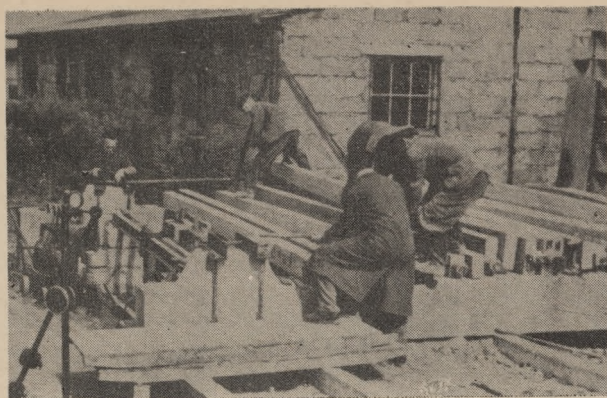
Drgania belki na stanowisku badawczym wywołano przez nagłe przerwanie działania siły przyłożonej w odległości 15 cm od środka i wyginającej belkę ku dołowi. Siłę realizowano przez naciąg drutu  $\varnothing$  4,5 mm (lub  $\varnothing$  6 mm) za pomocą prasy Magnela (rys. 32 - przekrój a-a oraz rys. 35). Sposób przymocowania drutu do belki widoczny jest dokładnie na rysunku 36 - został tu właśnie uchwycony moment, w którym drut jest już naciągnięty, tzn. działa już siła na belkę. Energiczne przecięcie drutu nożycami (widocznymi na rys. 36) spowoduje przerwanie działania siły i ruch drgający belki.

Do rejestracji drgań belek stosowano dwojakiego rodzaju aparaturę:

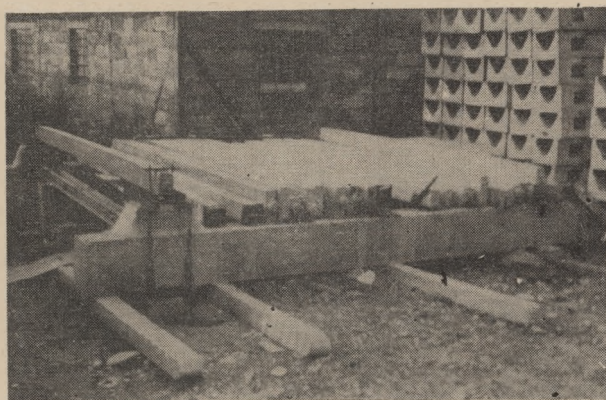
mechaniczną, a mianowicie wibrograf Geigera (rys. 37) i elektryczną (rys. 38), składającą się z oscylografu katodowego typ OK4-2s (Spółdzielnia "Radiotechnika" - Wrocław), przystawki fotograficznej typu Orion EMC oraz zespołu przetworników i czujników elektrodynamicznych.

Całą aparaturę wypożyczono z Zakładu Fundamentowania Politechniki Śląskiej. W celu wypróbowania i porównania pod względem przydatności zastosowano do rejestracji drgań zestaw czujników elektrodynamicznych (0 - 200 Hertzów) produkcji Katedry Akustyki i Teorii Drgań Uniwersytetu Poznań-

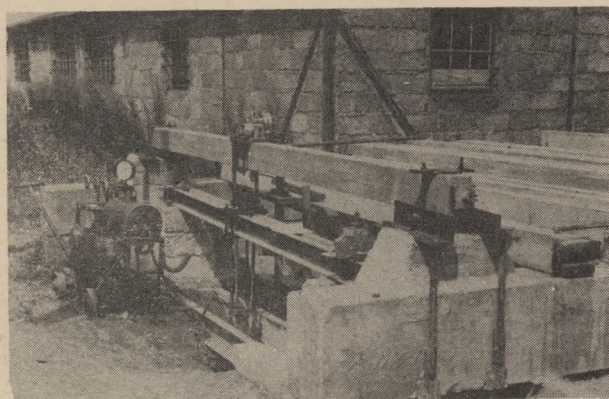




Rys. 33

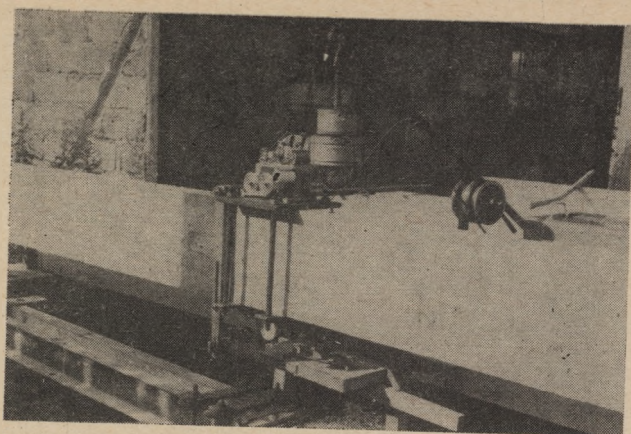


Rys. 34

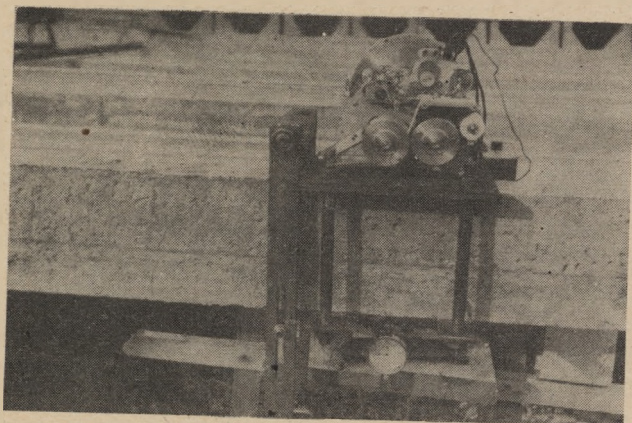


Rys. 35

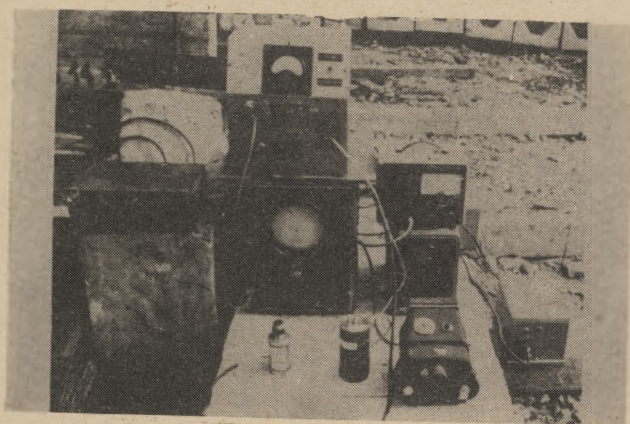




Rys. 36



Rys. 37



Rys. 38



skiego (jeden z tych czujników widzimy na rys.39) oraz następujące przetworniki:

przetwornik elektrodynamiczny firmy Philips (rys.40),  
przetwornik elektrodynamiczny wibracyjny typ EW-561 (rys.41),  
przetwornik pływowy uniwersalny o częstotliwości własnej  
poniżej 0,1 Hertza z tłumieniem olejowym (rys.42).

Dwa ostatnie przetworniki zostały wykonane przez Zakład Elektroniki Przemysłowej Politechniki Śląskiej.

Zasadniczą rolę odgrywał w badaniach wibrograf Geigera. Był on stosowany do rejestracji drgań wszystkich belek doświadczalnych. Rejestracja każdorazowego cyklu drgań miała przebieg następujący:

naciąg drutu za pomocą prasy Magnela (rys.35 i 36), odczyt manometru pompy olejowej uruchamiającej tłok prasy Magnela (na podstawie tego odczytu można było określić wielkość siły, jaka za pośrednictwem naciągniętego drutu przekazywała się na belkę), odczyt czujnika (rys.37) rejestrującego ugięcie belki (w środku rozpiętości) tuż przed rozpoczęciem ruchu drgającego, uruchomienie mechanizmu powodującego ruch papieru w wibrografie Geigera, przecięcie naciągniętego drutu - ze względu na oszczędność papieru starano się, by odstęp czasu między uruchomieniem mechanizmu w wibrografie i przecięciem drutu był możliwie mały, zatrzymanie ruchu papieru w wibrografie (dokonywano tego wtedy, kiedy wychylenia belki stawały się bardzo małe lub zanikały zupełnie).

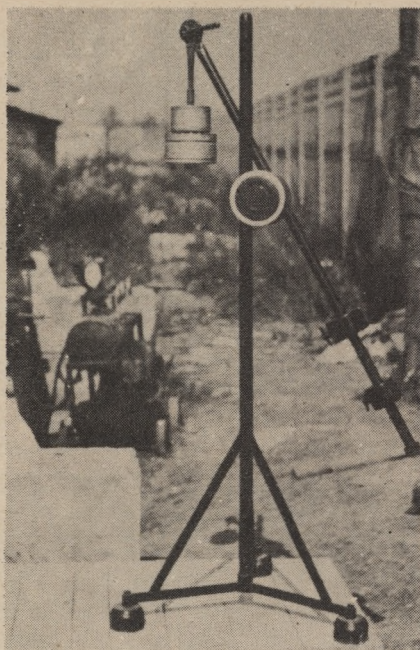
Oprócz drgań poprzecznych w płaszczyźnie pionowej rejestrowano drgania poprzeczne w płaszczyźnie poziomej oraz drgania podłużne belki.

Ruch drgający belki był wywoływany nie tylko nagłym przerwaniem działania przyłożonej do belki siły, lecz także uderzeniem. Po uruchomieniu wibrografu uderzano w belkę młotem z góry (gdy chodziło o drgania w płaszczyźnie pionowej) lub z boku (dla wywołania drgań w płaszczyźnie poziomej). W miejscu uderzenia (położonym w pobliżu środka belki) podkładano kawałek deski.

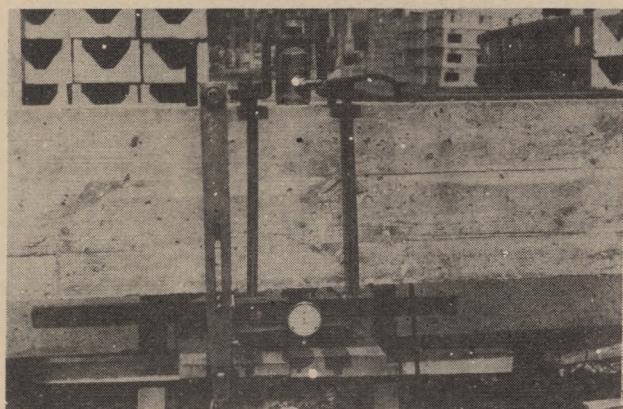
Rejestrowano minimum 6 cykli drgań poprzecznych pionowych każdej belki wywołanych nagłym przerwaniem działania siły. Minimalna ilość rejestrowanych cykli drgań poprzecznych poziomych i drgań podłużnych wynosiła 3 dla każdej belki. Były również rejestrowane przynajmniej 3 cykle drgań poprzecznych pionowych i poziomych wywołanych uderzeniem.

Chcąc doświadczalnie uchwycić wpływ intensywności sprzężenia na częstość drgań własnych, logarytmiczny dekrement



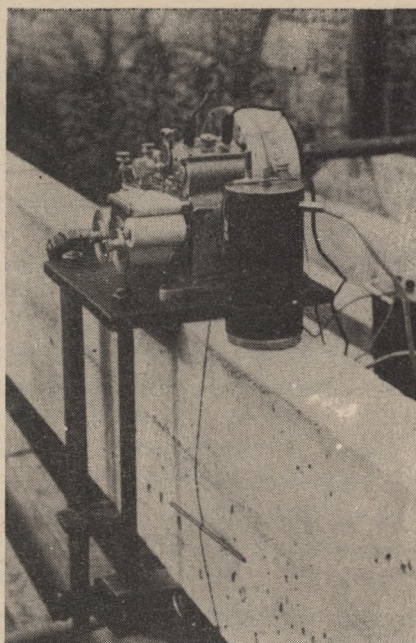


Rys. 39

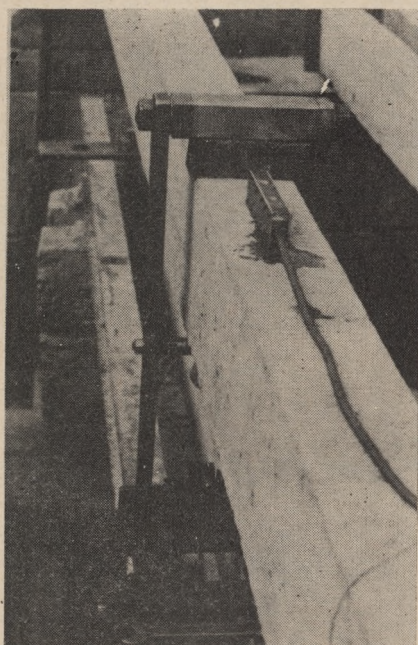


Rys. 40





Rys.41



Rys.42



tłumienia i na współczynnik dynamiczny rejestrowano drgania 3-oh belek przy różnych stopniach sprężenia.

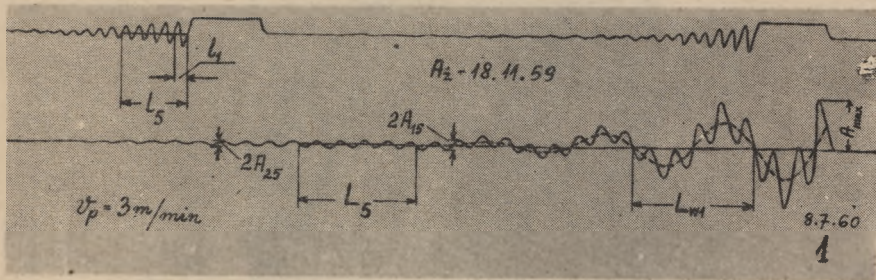
W wibrografie Reigera używano stale papieru woskowanego do zapisu drgań. Nie stosowano masy dodatkowej. Do znakowania czasu używano stale znacznika z dodatkowym ciężarkiem. Częstość drgań tego znacznika wynosiła 1500/min (25/sek). Stosowano najczęściej dwie prędkości posuwu papieru w wibrografie: 0,6 m/min (1 cm/sek) i 0,9 m/min (1,5 cm/sek). Sporaadycznie stosowane były też prędkości większe. Powiększenie amplitud wynosiło 3:1 lub 6:1. Wyjątkowo tylko stosowano w mechanizmie rysującym przekładnię 12:1.

Na podstawie uzyskanych w czasie badań wibrogramów obliczano częstość drgań własnych belek za pomocą wzoru

$$n = \frac{25 l_k}{L_k}, \quad (84)$$

gdzie:

- $l_k$  - długość odcinka odpowiadającego k drganiom znacznika czasu (rys.43),
- $L_k$  - długość odcinka odpowiadającego k drganiom belki (na rys.43 k = 5 w odniesieniu do drgań belki i k=1 w odniesieniu do drgań własnych wibrografu).



Rys.43

Wzór (84) otrzymuje się z proporcji

$$\frac{T_k}{t_k} = \frac{l_k}{L_k}$$





W atęście do aparatu Geigera, który był używany do rejestracji drgań podano  $n_w = 2,67$  Hz.

Niezależnie od znakowania czasu, o którym była już mowa, określano dokładnie prędkość posuwu papieru mierząc za pomocą elektrycznego zegara czas  $t$ , w którym specjalny znacznik wibrografu wykreślał na papierze woskowym pewien odcinek (np. odcinek 11 lub 12 na rys.44a). Zegar tak połączono z akumulatorem i wibrografem, że przez pierwsze naciśnięcie kontaktu (rys.45) następował równocześnie ruch znacznika wibrografu i ruch wskazówki zegara. Następne naciśnięcie kontaktu powodowało ruch znacznika wibrografu w przeciwnym kierunku z równoczesnym zatrzymaniem mechanizmu zegara.

Po zmierzeniu długości  $l_0$  odcinka wykreślonego przez znacznik wibrografu możemy już określić rzeczywistą prędkość posuwu papieru

$$V_{pr} = \frac{l_0}{t}$$

Prędkość ta nie pokrywa się na ogół z prędkością  $V_p$ , na którą jest nastawiony mechanizm wibrografu.

Znając prędkość posuwu papieru  $V_{pr}$  częstotliwość drgań własnych belki (do której odnosi się dany wibrogram) obliczymy ze wzoru

$$n = \frac{k V_{pr}}{L_k} \quad (85)$$

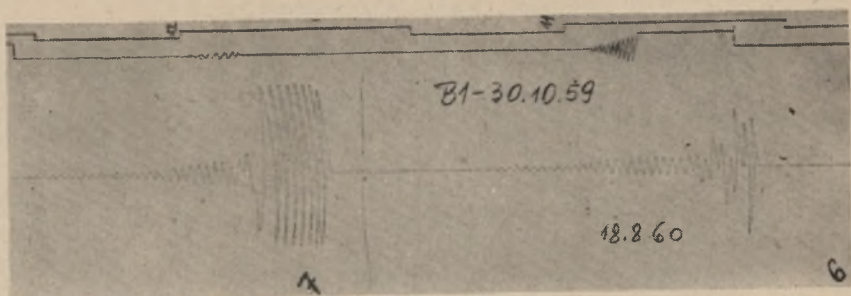
Symbole  $k$  i  $L_k$  mają tu takie samo znaczenie jak we wzorze (84).

Stosowalność wibrografu Geigera do rejestracji drgań ograniczona jest m.in. wielkością amplitudy tych drgań. Na rysunku 44 przedstawiono 4 wibrogramy ilustrujące drgania belki B1 z 30.10.1959 r. przy następujących wychyleniach początkowych (środku belki):

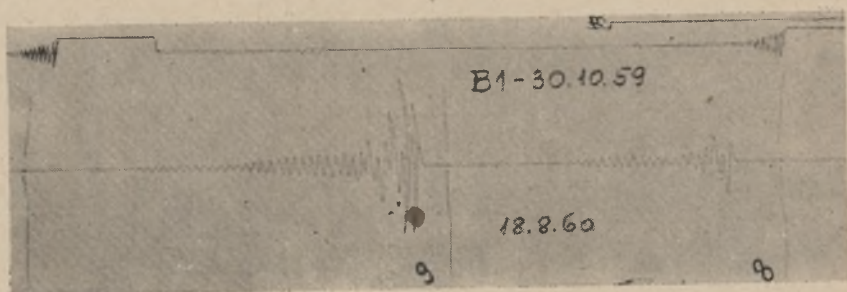
cykl drgań nr 6 -	wychylenie początkowe (ugięcie belki)	=	2,475 mm
" " nr 7 -	" "	"	3,570 "
" " nr 8 -	" "	"	1,220 "
" " nr 9 -	" "	"	3,025 "

Widzimy, że skutek ograniczenia wielkości wychyleń masy wibrografu, drgania belki B1 o wychyleniu początkowym przekra-

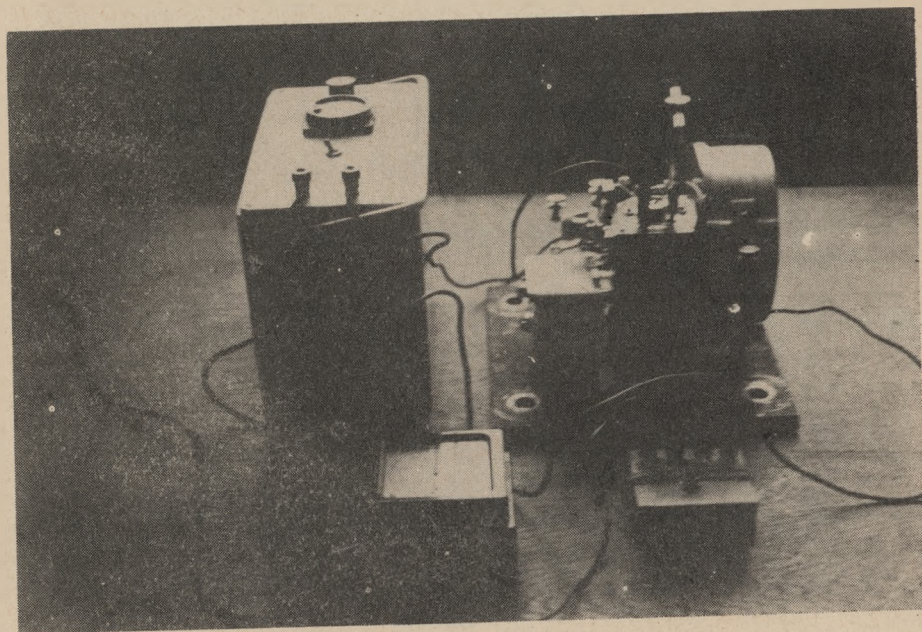
a)



b)



Rys.44

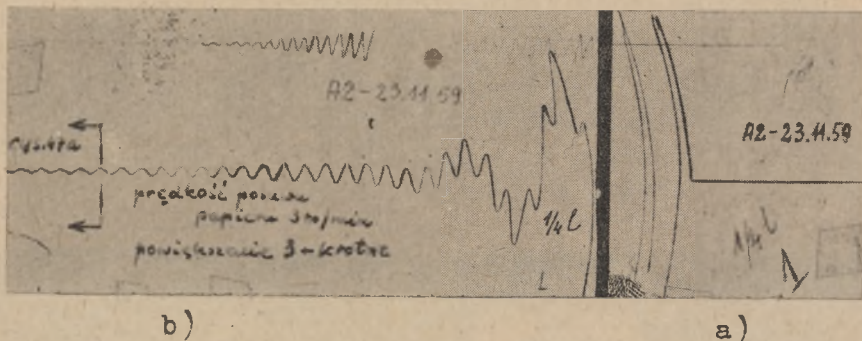


Rys.45



czającym znacznie 3,0 mm nie znalazły już wiernego odzwierciedlenia w wibrogramie (por. wibrogram nr 7).

W trakcie badania niektórych belek rejestrowano nie tylko drgania punktu o odciętej  $x = 1/2$ , lecz także punktu o odciętej  $x = 1/4$  licząc od prawej podpory. Udało się przy tym uchwycić w pewnych przypadkach (mianowicie przy bardzo dużych wychyleniach początkowych) drgania o postaci dwóch półfal (por. rys.9) i częstotliwości czterokrotnie wyższej od częstotliwości drgań podstawowych. Jako przykład przytaczamy wibrogram ilustrujący ruch drgający punktu  $x = 1/4$  belki A2 z 23.11.1959 r. (rys.46). Wychylenie początkowe było tu tak duże, że podwójne amplitudy w początkowej fazie drgań okazały się większe niż szerokość papieru. Drgania o wyższej częstotliwości uwidoczniły się wyraźnie w końcowej części wibrogramu (rys.46b), którą powiększono odpowiednio na rysunku 47a.



Rys.46

Z wibrogramu widocznego na rysunku 46 odczytano przy pomocy mikroskopu:

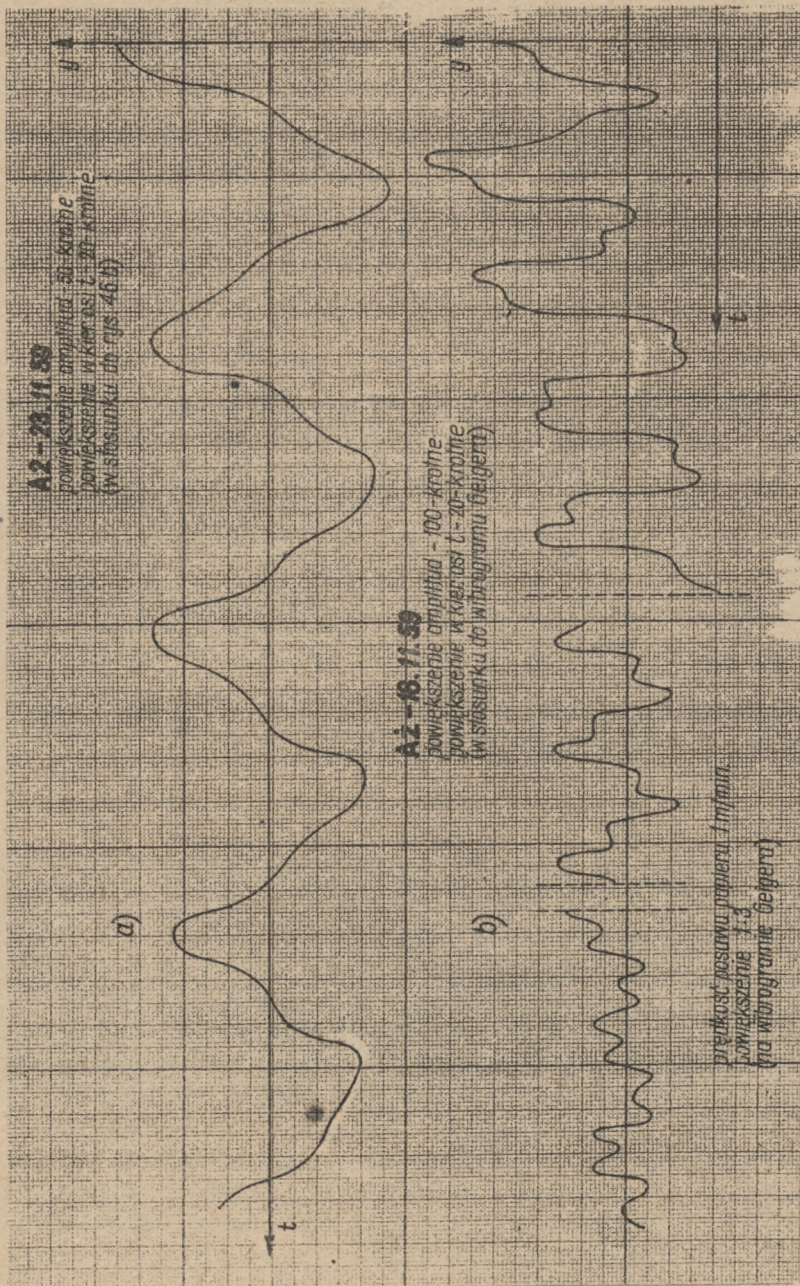
dla drgań podstawowych:

$$L_1 = 2,013, \quad L_1 = 3,56;$$

dla drgań o wyższej częstotliwości

$$L_1 = 0,897.$$





Rys. 47



Ze wzoru (84) otrzymujemy

$$n_1 = \frac{2,013 \times 25}{3,562} = 14,130 \text{ Hz}, \quad n_2 = \frac{2,013 \times 25}{0,896} = 56,104 \text{ Hz} = 4 n_1.$$

Mamy więc tutaj bardzo dobrą zgodność ze znanym wzorem

$$n_1 = \frac{i^2 \pi}{2 l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}}, \quad (86)$$

według którego  $n_2 = 4 n_1$ .

Na rysunku 47b przedstawiono powiększone fragmenty wibrogramu ilustrującego drgania punktu  $x = l/4$  belki żelbetowej Aż z 18.11.1959 r. Z wibrogramu odczytano tutaj:

$$l_1 = 0,7487;$$

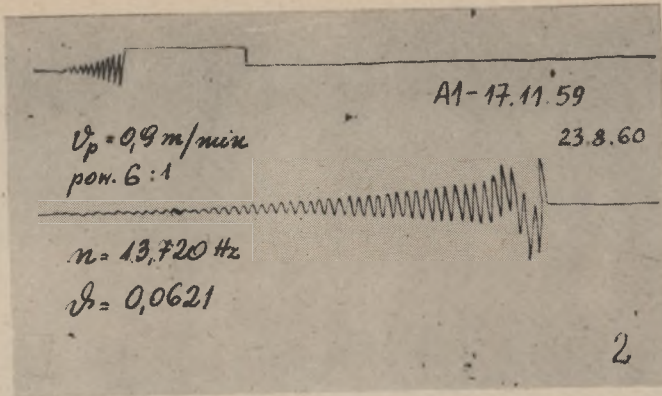
$$L_1 = 1,4625 \text{ (drgania podstawowe);}$$

$$L_1 = 0,3560 \text{ (drgania o wyższej częstotliwości - końcowy fragment wibrogramu).}$$

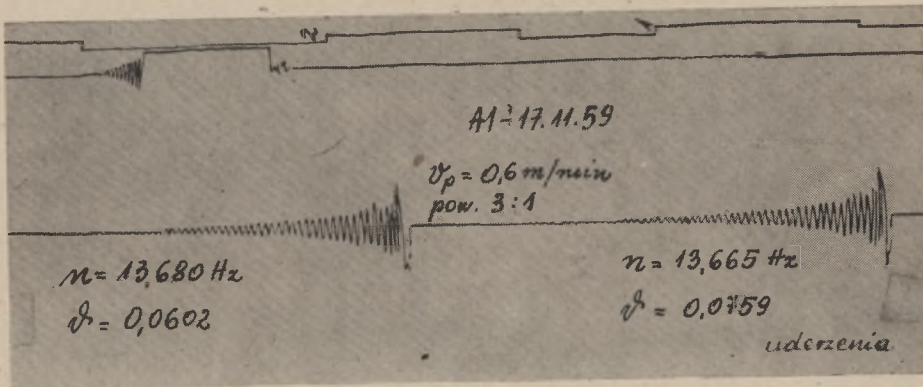
Wobec tego

$$n_1 = \frac{0,7487 \times 25}{1,4625} = 12,798 \text{ Hz}, \quad n_2 = \frac{0,7487 \times 25}{0,3560} = 52,577 \text{ Hz} = 4,1 n_1.$$

Trudno byłoby przedstawić tutaj wszystkie wibrogramy uzyskane w trakcie badań, gdyż jest ich kilkaset. Ograniczymy się wobec tego do zilustrowania drgań każdej grupy belek na kilku najbardziej charakterystycznych wykresach uzyskanych albo za pomocą aparatu Geigera albo metodą elektryczną. Wibrogramy odnoszące się do grupy belek A1 pokazano na rysunkach od 48 do 57. Symbol  $H_{pp}$  oznacza drgania poziome, zaś  $H_{pd}$  drgania podłużne. Cyfry arabskie są numeracją wibrogramów stosowaną w czasie badań.



Rys 48



Rys.49



A1-17.11.59

Rys.50

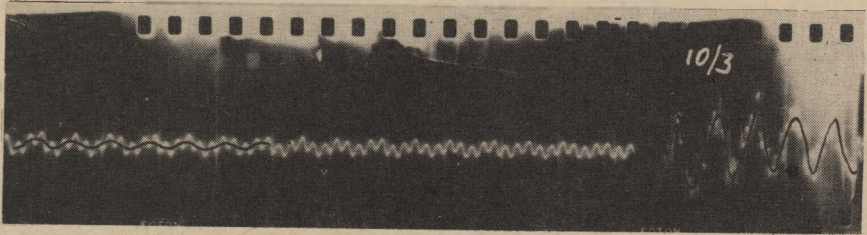


a)



$$n_u = 14,545 \text{ Hz}$$

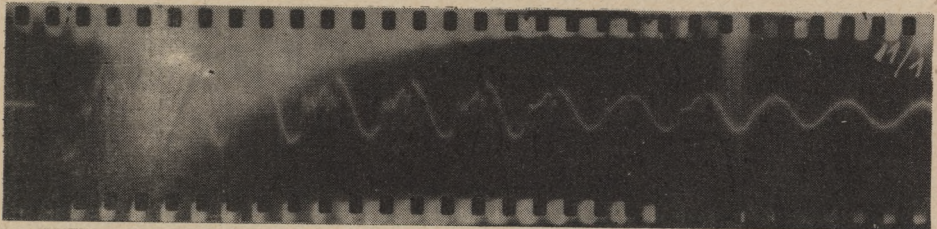
b)



A1 - 17.11.59

uderzenia

Rys.51

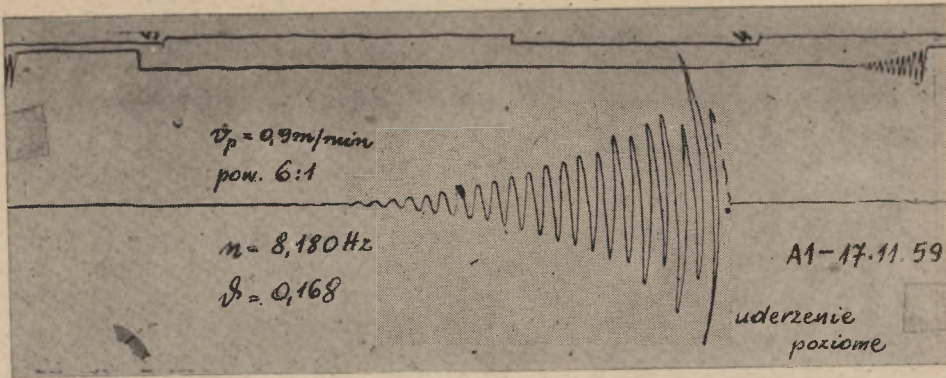


A1 - 17.11.59

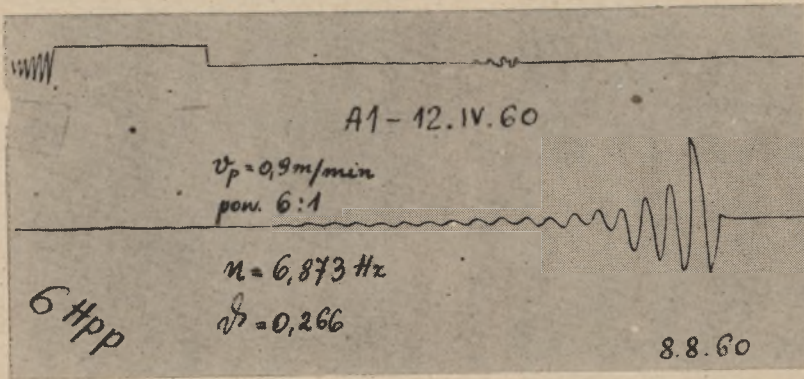
$$n_{Hu} = 7,812 \text{ Hz}$$

$$\nu_{Hu} = 0,1140$$

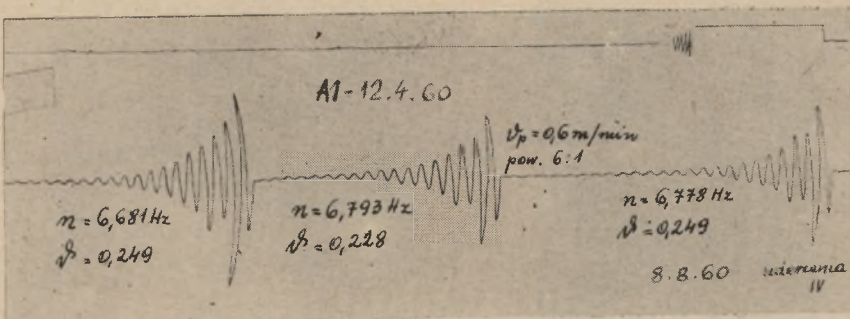
Rys.52



Rys. 53

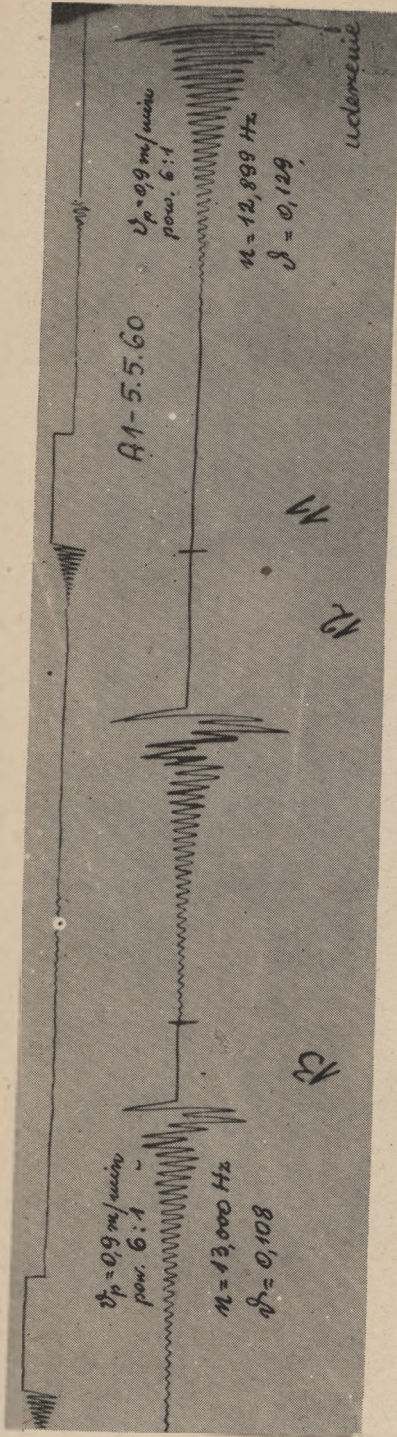


Rys. 54

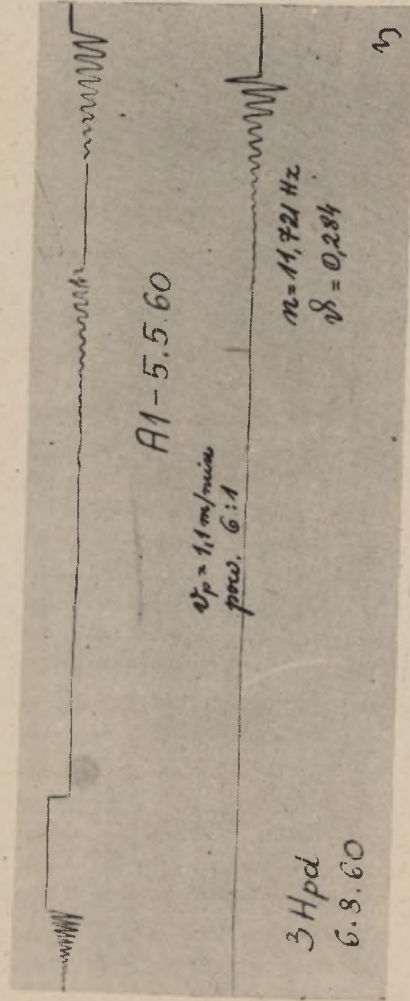


Rys. 55





Rys. 56



Rys. 57

Obok wibrogramów podano nominalne wartości prędkości posuwu papieru  $V_p$  i powiększenia amplitud, na jakie nastawiony był mechanizm wibrografu podczas rejestracji danego cyklu drgań. Przy badaniu belki A1 z 17.11.59 określano też podanym poprzednio sposobem, rzeczywistą prędkość posuwu papieru  $V_{pr}$ . Rzeczywiste powiększenie wychyleń zależy od wielkości stosunku częstości drgań badanego obiektu do częstości drgań własnych masy wibrografu i zostało podane w atencie, na podstawie którego sporządzono tablicę 8.

Przy wibrogramach podano też średnią częstość drgań własnych  $n$  i logarytmiczny dekrement tłumienia  $\nu$ . Częstości drgań własnych obliczone z różnych części wibrogramów nie są jednokowe. Przy początkowych, dużych wychyleniach częstość jest mniejsza, potem lekko **wzrasta**, a następnie maleje wskutek tłumienia. Logarytmiczny dekrement tłumienia obliczano ze wzoru

$$\nu = \frac{1}{k} \ln \frac{2 A_i}{2 A_{i+k}} \quad (87)$$

(por. rys. 43, na którym  $i = 15$ ,  $k = 10$ ).

Tablica 8

Rzeczywiste powiększenie amplitud

Częstość drgań własnych aparatu $n_w$	Stosunek częstości drgań obiektu do drgań własnych aparatu $\frac{n}{n_w}$	Rzeczywiste powiększenie przy nominalnym 3:1	Rzeczywiste powiększenie przy nominalnym 6:1
2,67	8 i więcej	3,4	6,8
	4	3,6	7,2
	3	3,8	7,6
	2	4,5	9,0

W badanych belkach tłumienie nie miało na ogół większego wpływu na częstość drgań własnych. Weźmy np. pod uwagę drgania poprzeczne poziome belki A1 - 17.11.59. Na podstawie 3-ch wibrogramów, (z których jeden przedstawiono na rys.53),



ustalono  $n = 8,036$  Hz,  $\nu = 0,171$ . Współczynnik tłumienia wyniesie zatem

$$\varphi = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\pi^2}} = \frac{0,171}{\sqrt{0,171^2 + 4\pi^2}} = 0,0272. \quad x)$$

Częstość drgań nietłumionych

$$n_{\text{nietł.}} = \frac{8,036}{\sqrt{1 - 0,0272^2}} = 8,039 \text{ Hz.}$$

Na rysunkach 50 i 51 widzimy oscylogramy uzyskane za pomocą aparatury elektrycznej przy zastosowaniu przetwornika płynowego uniwersalnego z tłumieniem olejowym (por. rys. 42). Rysunek 50 ilustruje drgania poprzeczne belki A1 - 17.11.59 wywołane nagłym przerwaniem działania siły wyginającej belkę w dół, zaś rysunek 51 drgania poprzeczne wzbudzone uderzeniem z góry. Na drgania belki nakładały się tu drgania elektryczne o częstości około 50 Hz, co utrudniało w pewnym stopniu opracowywanie oscylogramów. Dla określenia częstości drgań belki należało zmierzyć:

odstęp  $l_t$  między dwoma sąsiednimi znakami czasu oraz odstęp  $L_k$  między grzbietami  $k$  fal przedstawiających wychylenia belki w trakcie ruchu drgającego.

Znakowanie czasu w przystawce fotograficznej typu Orion następuje co 1/50 sekundy, z pogrubieniem każdego piątego znaku (wyraźniejsze znaki mamy więc co 1/10 sekundy). Znając  $l_t$  i  $L_k$  częstość drgań belki obliczymy ze wzoru

$$n = \frac{10 k l_t}{L_k}. \quad (88)$$

$l_t$  wyraża tu zmierzony na oscylogramie odcinek zawarty między wyraźniejszymi znakami czasu. Długość tego odcinka zależy od prędkości ruchu filmu w przystawce.

x) Por. J.N.Mc.Duff, J.R.Curreri: Drgania w technice. PWT Warszawa 1960, str.46, wzór [38].

Oscylogram przedstawiony na rysunku 52 uzyskano przy zastosowaniu czujnika elektrodynamicznego (rys. 36 i 39) w pozycji poziomej, gdyż mamy tu do czynienia z drganiami poprzecznymi w płaszczyźnie poziomej. Czujnik ten stosowano najczęściej. Dawał on bowiem możliwość uzyskania najbardziej przejrzystego obrazu drgań (bez wpływu drgań elektrycznych zaznaczającego się wyraźnie przy zastosowaniu przetwornika płynowego).

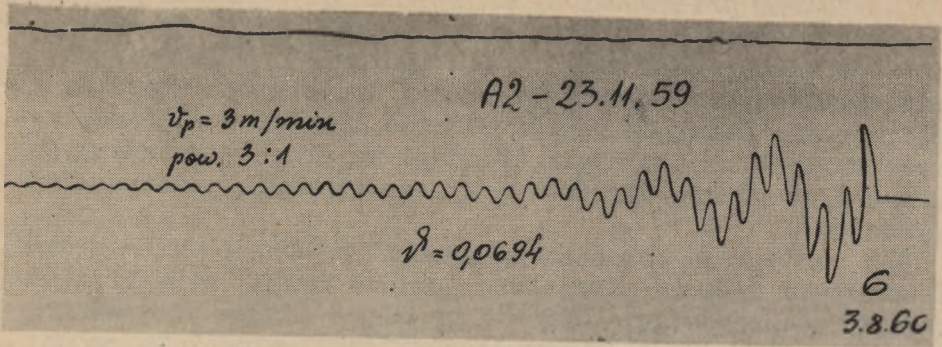
Dla porównania pokazano na rysunkach 54 i 55 wibrogramy ilustrujące drgania poprzeczne poziome belki A1 - 12.4.60. Rysunek 54 przedstawia drgania wywołane nagłym przerwaniem działania pionowej siły przyłożonej w odległości 15 cm od środka belki, zaś rysunek 55 jest obrazem drgań wzbudzonych poziomym uderzeniem.

Na rysunku 57 widzimy drgania podłużne belki A1-5.5.60. Częstość tych drgań jest nieco mniejsza od częstości drgań poprzecznych pionowych. Tłumienie jest tu natomiast stosunkowo duże.

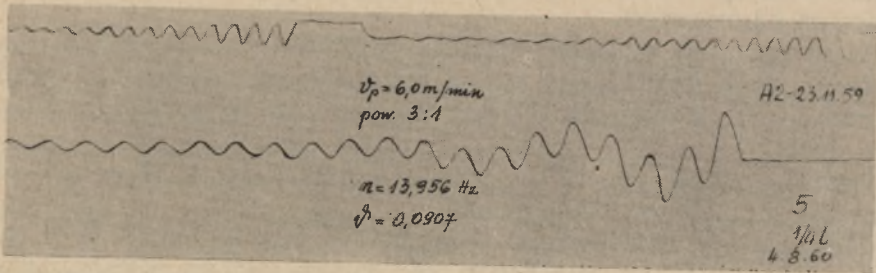
Drgania belek A2 - 23.11.59, A3 - 22.1.60 i A3 - 6.11.59 pokazano są na rysunkach 58-64.

Oddzielnego omówienia wymaga belka A3 z 6.11.59 r. W projekcie przewidziano sprężenie tej belki kablem parabolicznym  $6 \varnothing 5$  mm. Sprężenie takie nie udało się jednak, gdyż podczas kotwienia został ucięty 1 drut. Trudno było wymienić kabel, bo po zabetonowaniu zmniejszyła się średnica osłony. Nie chcąc całkiem stracić tej belki postanowiono sprężyć ją za pomocą naciągnięcia 8 drutów  $\varnothing 5$  mm rozłożonych na zewnątrz przekroju symetrycznie względem jego osi poziomej (por. rys. 12 i 65). Naciągane prasą Magnela druty kotwione były w płytkach stosowanych również w doświadczalnych belkach strunobetonowych (rys. 20). Dwie płytki przylegające do jednego końca belki związane odpowiednią ramką stalową. Siła sprężająca przenosiła się na czoka belki za pośrednictwem grubych blach stalowych, w których znajdowały się wycięcia na druty. Pozostały po wyciągnięciu kabla  $6 \varnothing 5$  mm otwór został przed powtórным sprężeniem wypełniony zaczynem cementowym. Żywot belki A3 - 6.11.59 nie był jednakże długi. Wskutek nieostrożnych manipulacji przy transporcie ze stanowiska badawczego po zakończeniu rejestracji drgań nastąpiło nagłe przewrócenie się tej belki na bok, co spowodowało jej wyboczenie (rys. 65) z silnym zarysowaniem od strony wypukłej. Całkowitemu złamaniu belki przeciwdziałało konstrukcyjne zbrojenie stałą miękką.

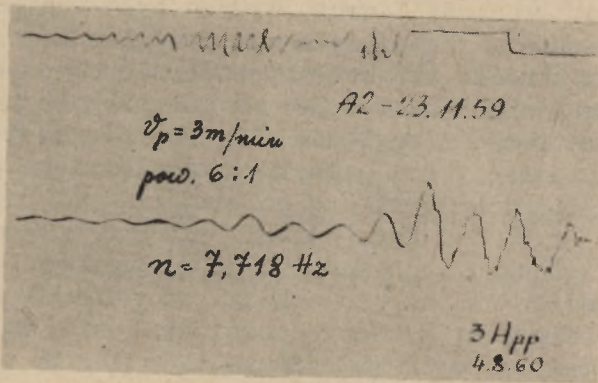




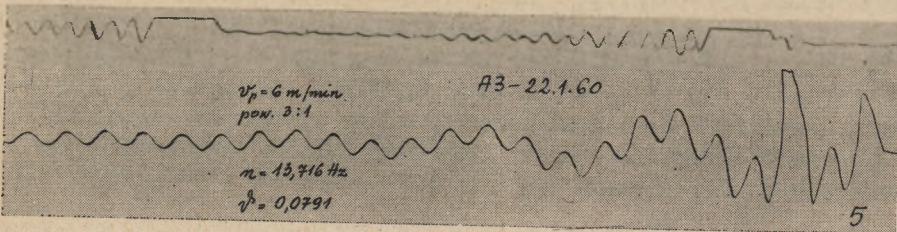
Rys. 58



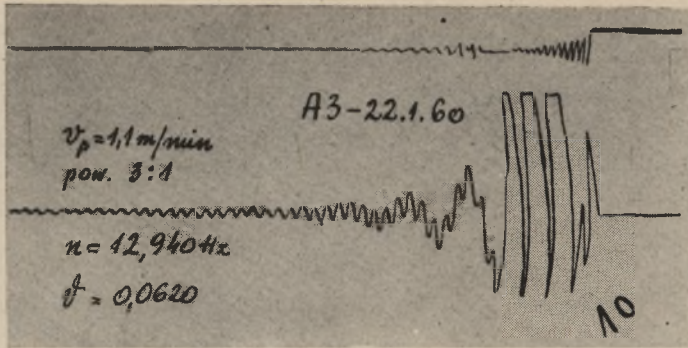
Rys. 59



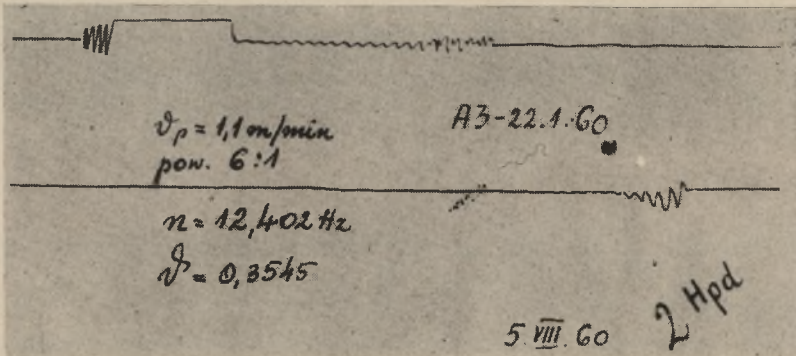
Rys. 60



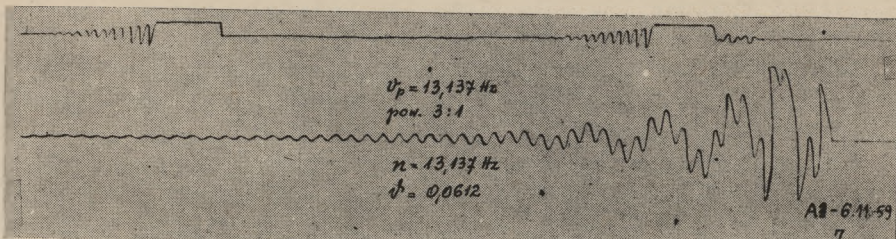
Rys. 61



Rys.62

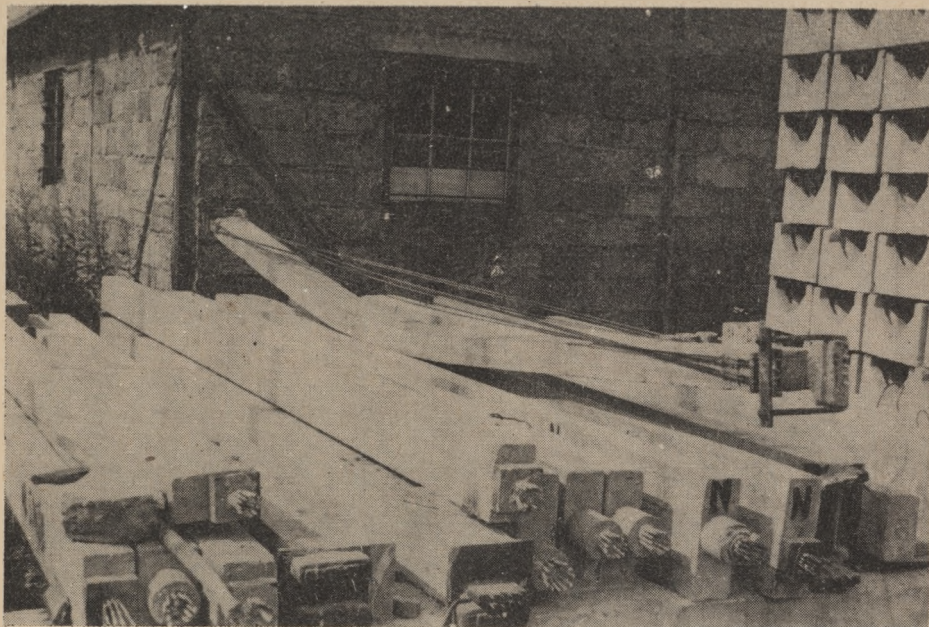


Rys.63



Rys.64





Rys.65

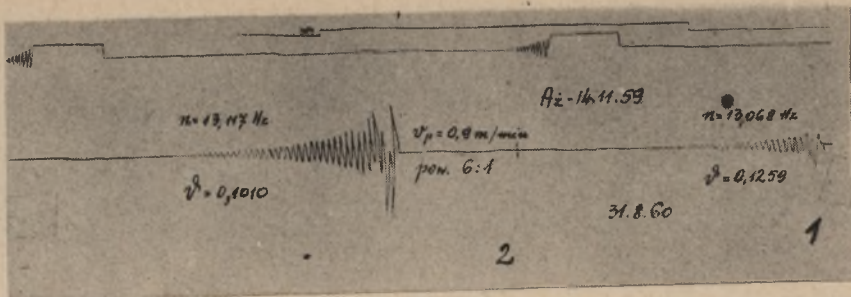
Na rysunkach 66-73 zilustrowano drgania belek żelbetowych Aż - 14.11.59 i Aż - 18.11.59.

Oscylogram uwidoczniiony na rysunku 70 obrazuje drgania poprzeczne pionowe belki Aż - 18.11.59. Uzyskano go przy zastosowaniu przetwornika elektrodynamicznego "Philips" (rys.40). Drgania elektryczne wystąpiły tu jeszcze wyraźniej niż w przypadku zastosowania przetwornika płynowego. Częstość drgań belki określano na podstawie krzywej wyciągniętej tuszem stosując przy tym wzór (88).

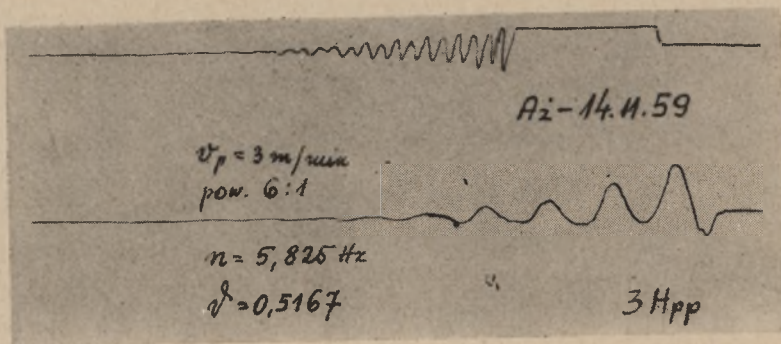
Wzbudzone poziomym uderzeniem drgania belki Aż-18.11.59 ilustruje rysunek 73. Wibrogram ten powstał przy użyciu czujnika elektrodynamicznego (rys.39).

Ze względu na interesujący charakter wibrogramów belki grupy B potraktujemy oddzielnie. Drgania belki B1 - 30.10.59 odzwierciedlają rysunki 74-84.

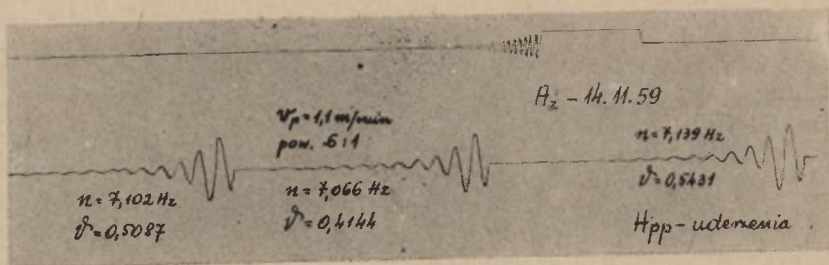
Już przy badaniu niektórych belek z grupy A dało się zauważyć zjawisko dudnienia. W trakcie badania belek grupy B dudnienie było w niektórych przypadkach tak wyraźne (por. rys.74 i 75), że uniemożliwiało całkowicie wykonanie posta-



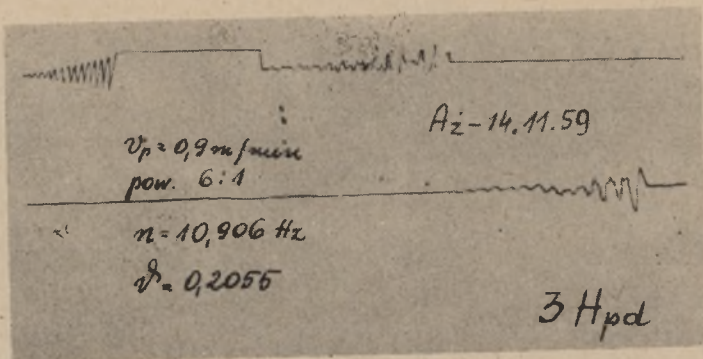
Rys.66



Rys.67

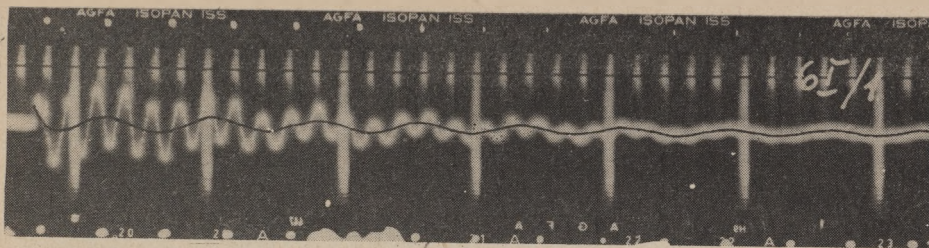


Rys.68



Rys.69

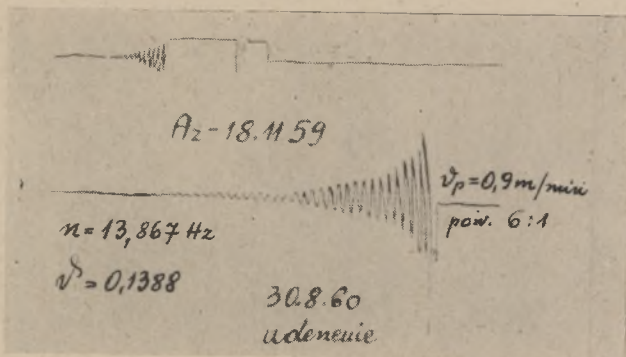




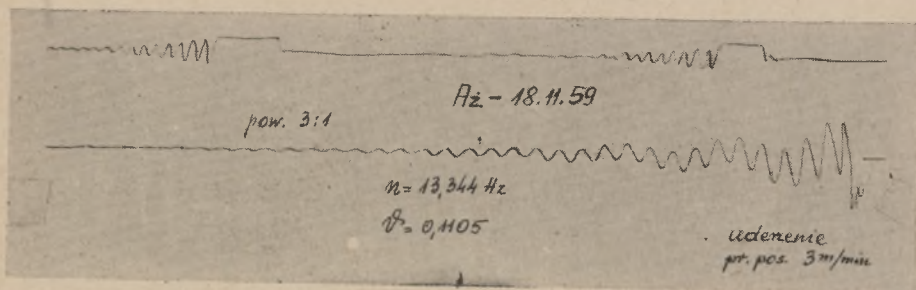
AZ - 18.11.59

$n_p = 12,880 \text{ Hz}$

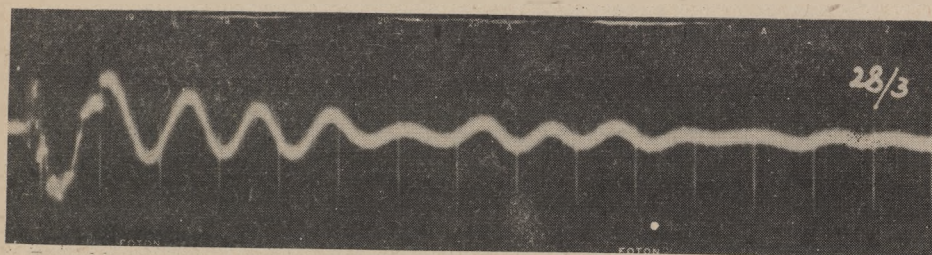
Rys.70



Rys.71



Rys.72

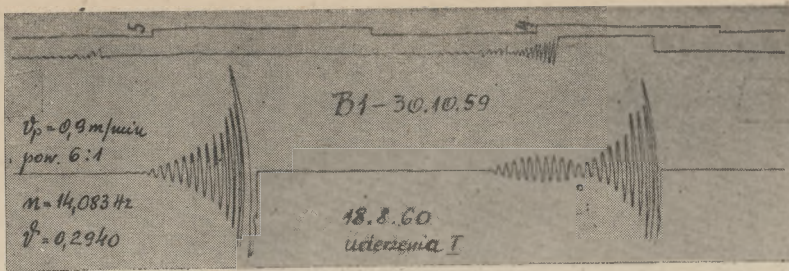


AZ - 18.11.59

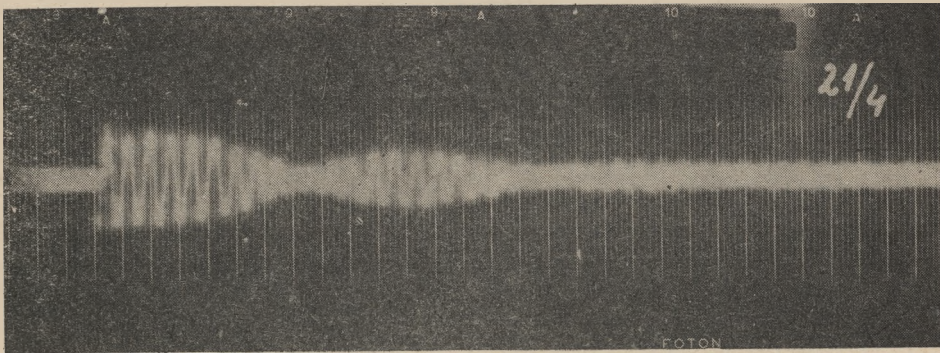
$n_{Hu} = 8,527 \text{ Hz}$   $v_{Hu} = 0,3062$

Rys.73





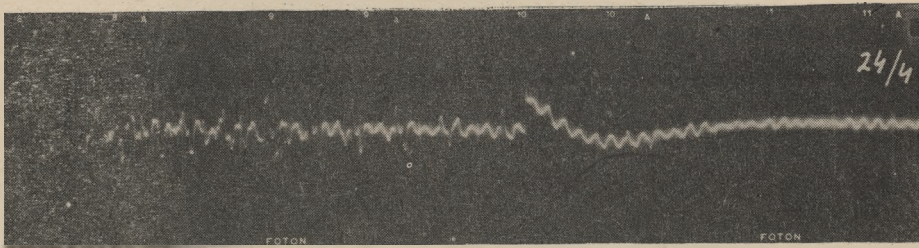
Rys.74



B1 - 30.10.59

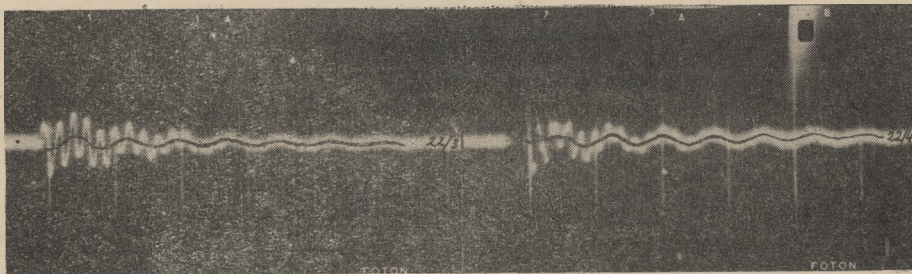
$n_u = 13,762 \text{ Hz}$

Rys.75



Drgania podpory

Rys.76.

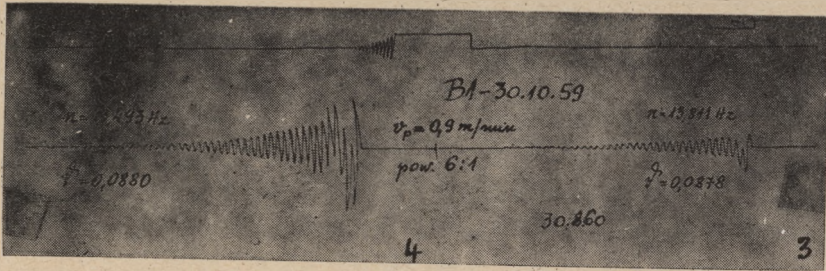


B1 - 30.10.59  $n_p = 13,245 \text{ Hz}$  B1 - 30.10.59  $n_u = 12,996 \text{ Hz}$

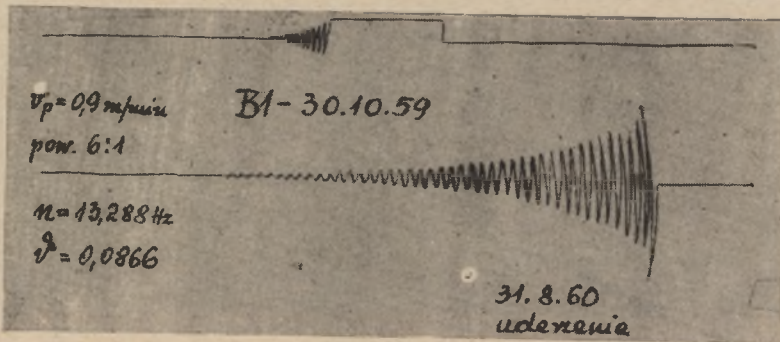
Rys.77

Rys.78

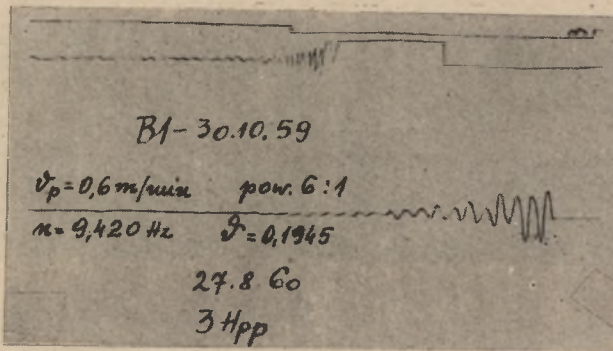




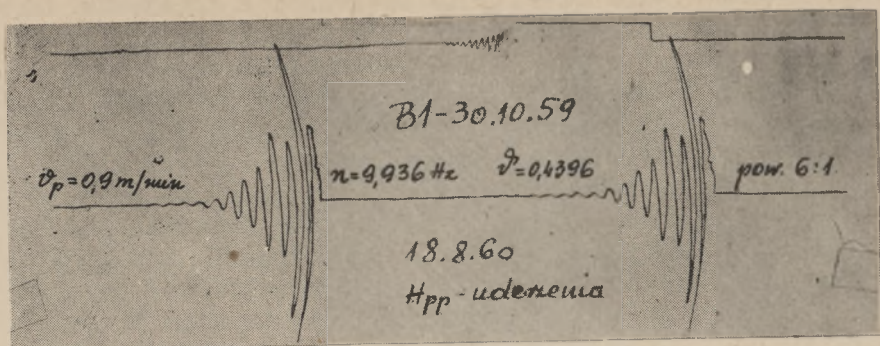
Rys.79



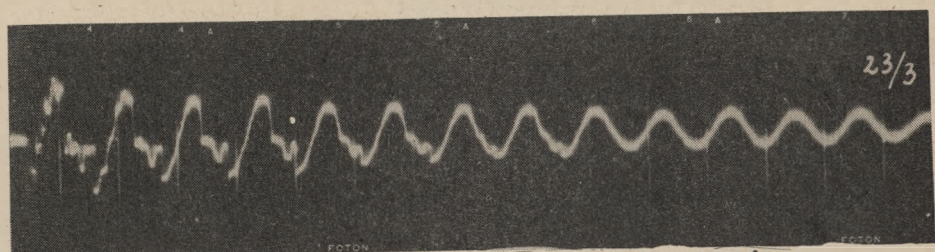
Rys.80



Rys.81



Rys.82



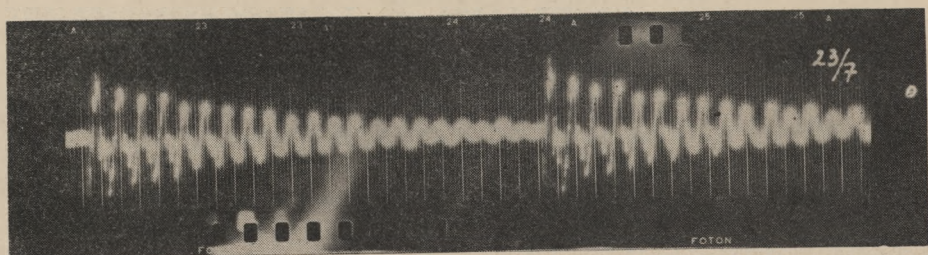
H<sub>pp</sub> - uderzenie

$n_{Hu} = 9,118 \text{ Hz}$

$j_{Hu} = 0,1511$

B1 - 30.10.59

Rys.83



H<sub>pp</sub> - uderzenie

$n_{Hu} = 8,949 \text{ Hz}$

$j_{Hu} = 0,1141$

B1 - 30.10.59

Rys.84



wionego zadania (tzn. określenie częstości i tłumienia drgań swobodnych). Przyczyną dudnienia były drgania podpór (poziomo ułożonych szupów - por.rys.34) oraz spoczywających na nich belek. Walka z dudnieniem polegała na dobrej izolacji (za pomocą kawałków płyty pilśniowej) podpór badanej belki od poziomo ułożonych szupów i na ustawieniu możliwie dużej ilości belek blisko stanowiska badawczego (utrudniało to drgania podpór). O skuteczności walki z dudnieniem świadczą oscylogramy pokazane na rysunkach 77-80. Przy drganiach poziomych zjawisko dudnienia oczywiście nie występowało. Aby uzyskać możliwość ilościowego ujęcia dudnienia rejestrowano drgania podpór (rys.76). Teoretyczną stroną zagadnienia wpływu impulsów od podpór na ruch drgający badanej belki nie będzie my się tu z braku miejsca zajmowali.

Drgania poprzeczne pionowe belki B1 - 30.10.59 po nagłym przerwaniu działania siły odzwierciedla rysunek 77, a także drgania ale wzbudzone uderzeniem mamy zobrazowane na rysunku 78. Obydwa te oscylogramy powstały przy zastosowaniu przetwornika "Philips". Przy rejestracji tych drgań nie stosowano wzmocnienia.

Na rysunkach 83 i 84 zarejestrowane zostały wzbudzone uderzeniem drgania poprzeczne poziome belki B1 - 30.10.59. Oscylogram 83 powstał przy większej prędkości ruchu filmu (nastawienie przystawki fotograficznej na 2), zaś oscylogram 84 przy prędkości mniejszej (nastawienie przystawki na 1). Stosowano przy tym czujnik elektrodynamiczny (rys.39).

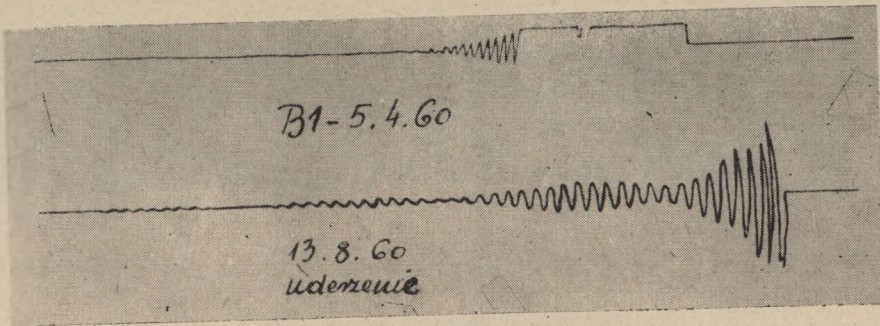
Fragment wyników badania belki B1 - 5.4.60 przedstawiamy na rysunkach 85-92.

Tu również były kłopoty z dudnieniem (por.rys.85 i 90). przy rejestracji drgań zilustrowanych na rysunkach 86,88, i 89 używano czujnika elektrodynamicznego produkcji Katedry Akustyki i Teorii Drgań Uniwersytetu Poznańskiego.

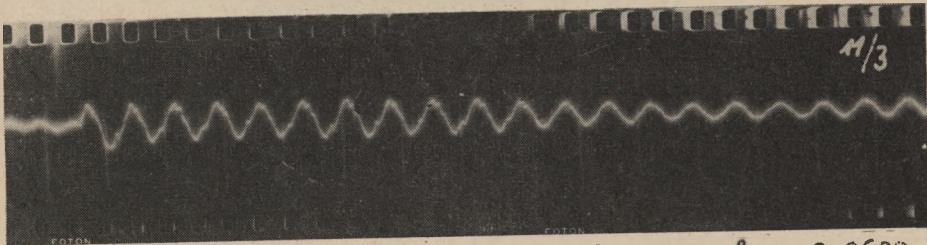
Porównajmy oscylogramy 11/3 (rys.86) i 12/4 (rys.88a i 88b) ilustrujące drgania poprzeczne pionowe. W pierwszym przypadku ugięcie belki w momencie przecinania drutu (przerwania działania siły powodującej zginanie belki) wynosiło 0,575 mm, w drugim przypadku ugięcie to było 3,06 razy większe i wynosiło 1,750 mm. Skala amplitud oscylografu była w pierwszym przypadku nastawiona na 2, w drugim przypadku na 3.

Wibrogram 12 na rysunku 87 i oscylogram 12/4 na rysunku 88 odzwierciedlają ten sam cykl drgań (jednoczesna rejestracja za pomocą aparatu Geigera i aparatury elektrycznej).

Oscylogram 12/5 (rys.89) obrazuje drgania poprzeczną pionowe wywołane uderzeniem. Widzimy, że drgania swobodne wywe-



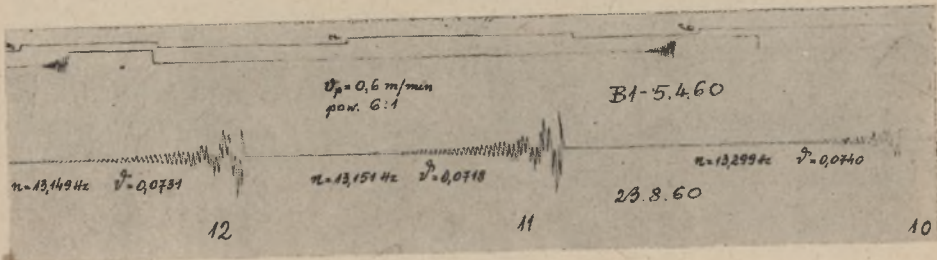
Rys.85



B1 - 5.4.60

$$\eta_p = 13,693 \text{ Hz} \quad \beta_p = 0,0638$$

Rys.86



Rys.87

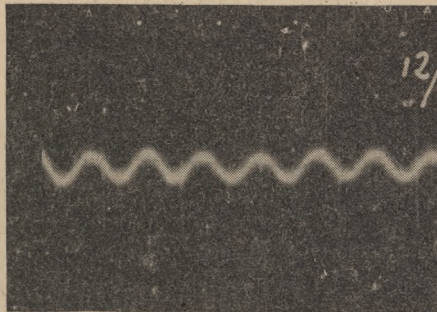




B1-5.4.60

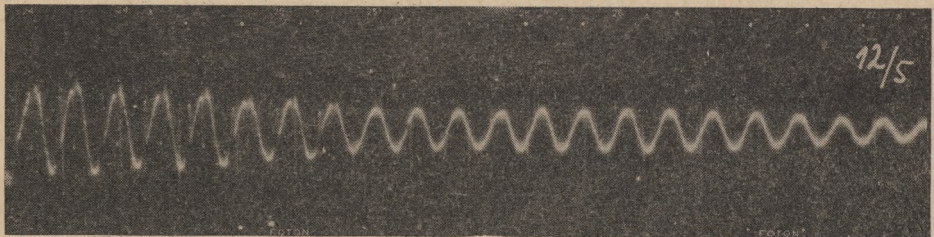
$$n_p = 13,483 \text{ Hz} \quad \nu = 0,0791$$

Rys.88a



B1-5.4.60 Końcowa faza drgań

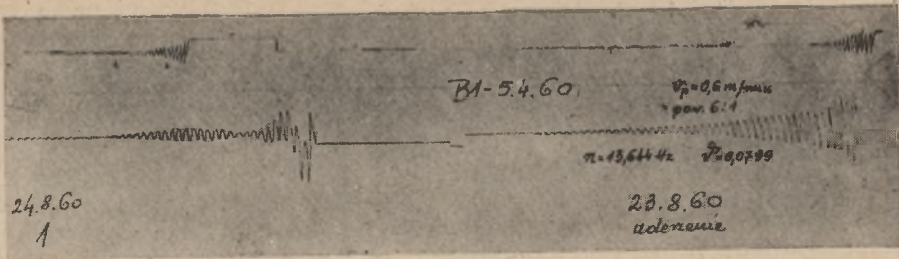
Rys.98b



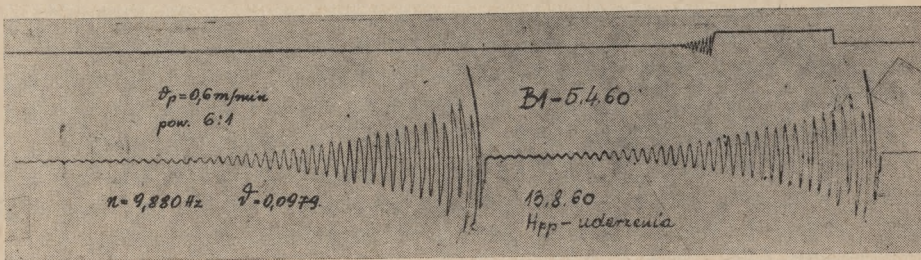
B1-5.4.60 uderzenie

$$n_u = 13,679 \text{ Hz} \quad \nu_u = 0,0636$$

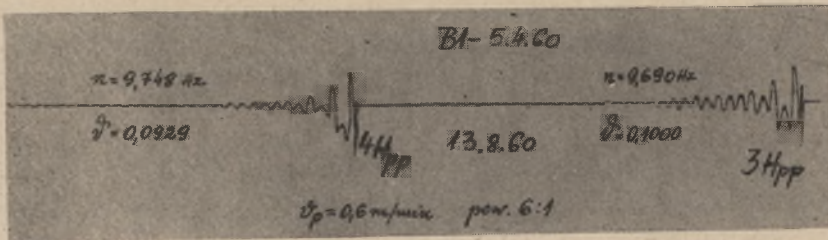
Rys.89



Rys. 90



Rys. 91



Rys. 92



żane nagłym przerwaniem działania siły i uderzeniem mają podobny charakter. Różnice obrazów tych drgań ujawniające się na wibrogramach uzyskanych za pomocą aparatu Geigera spowodowane są wpływem drgań własnych masy aparatu.

Niektóre z zarejestrowanych drgań belki B2 - 5.4.60 pokazano na rysunkach 93-97, a belki B3 - 14.11.59 na rysunkach 98-103. Wibrogramy 4, 5, 6 i 7 na rysunkach 98 i 99 przedstawiono tu w celu porównania. Podano przy nich zmierzone czujnikiem początkowe wychylenia (w momencie przzerwania działania siły).

Przechodzimy do grupy belek C. Drgania belki C1 - 21.11.59 pokazujemy na rysunkach 104-106.

Część wyników rejestracji drgań belki C1 - 25.11.59 widzimy na rysunkach 107 i 108 oraz 110-112.

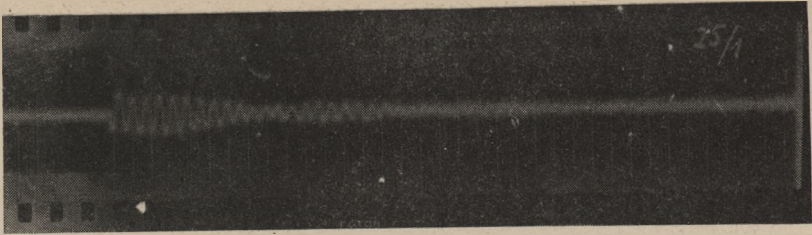
Wibrogram 3 na rysunku 107 i oscylogram 6/3 na rysunku 108 powstały w wyniku jednoczesnej rejestracji tego samego drgania dwoma metodami: mechaniczną (rys.107) i elektryczną (rys.108). Uzyskany za pomocą aparatury elektrycznej obraz drgań belki jest bardzo korzystny dla dalszego opracowania, gdyż nie zakłócają go żadne uboczne wpływy. Widok belki C1-25.11.59 i aparatury bezpośrednio po zakończeniu rejestracji cyklu drgań zilustrowanego przez wibrogram 3 (rys.107) i oscylogram 6/3 (rys.108) przedstawia rysunek 109. Na pierwszym planie widzimy tu oscylograf wraz z przystawką fotograficzną typu Orion.

Niektóre z zarejestrowanych cykli drgań belki C1 - 1.12.59 widzimy na rysunkach 113-117.

Rysunki 113 i 114 odzwierciedlają ten sam cykl drgań poprzecznych pionowych. Widzimy, że w tym przypadku drgania własne aparatu Geigera nie zakłóciły bardzo obrazu drgań belki. Oscylogram 16/3 (rys.115) jest obrazem drgań poprzecznych pionowych punktu  $x = \frac{1}{4}$  belki C1 - 1.12.59.

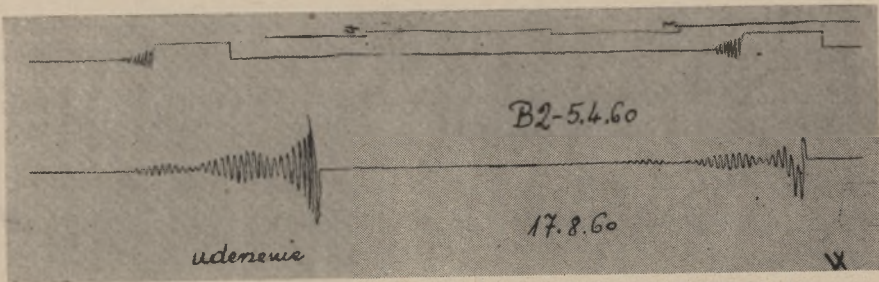
Ciekawsze obrazy drgań belek C2 - 9.4.60 i C3 - 3.5.60 pokazujemy na rysunkach 118-127. Wibrogram 1 (rys.118) i oscylogram 17/1 (rys.119) są różnymi obrazami tych samych drgań. Wibrogramy 7 i 8 (rys.121) oraz 9 (rys.122) ilustrują poprzeczne drgania pionowe belki C2 - 9.4.60 przy różnych wychyleniach początkowych i różnych prędkościach posuwu papieru w aparacie Geigera.

Prezentację bardziej ciekawych wibrogramów powstałych w trakcie badań dynamicznych zakończą rysunki 128-139, odnoszące się do belek Cż - 18.11.59 i Cż - 19.11.59. Do rejestracji drgań zilustrowanych na rysunku 128 zastosowano przetwornik elektrodynamiczny wibracyjny typ EW-561 produkcji Zakładu Elektroniki Przemysłowej Politechniki Śląskiej.

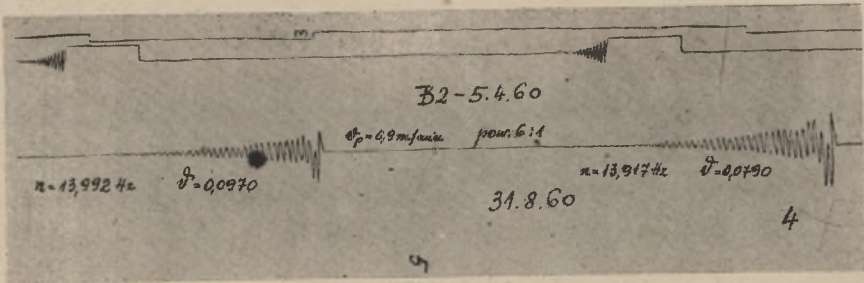


B2 - 5.4.60

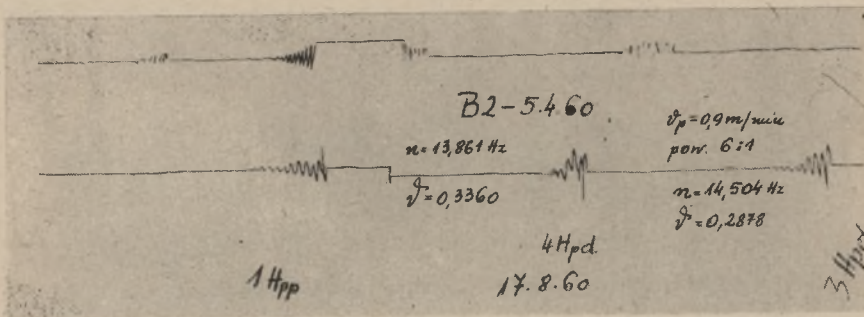
Rys. 93



Rys. 94

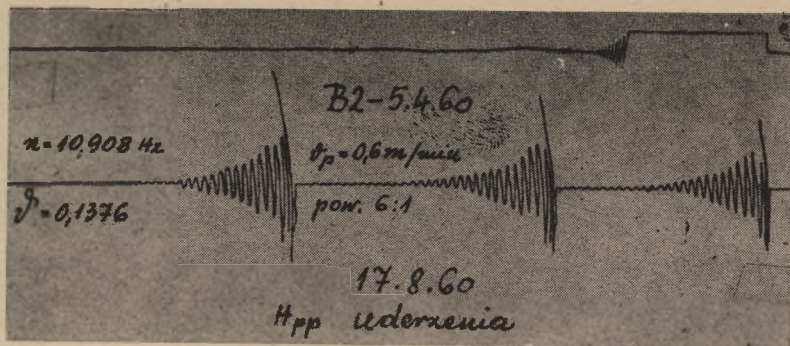


Rys. 95

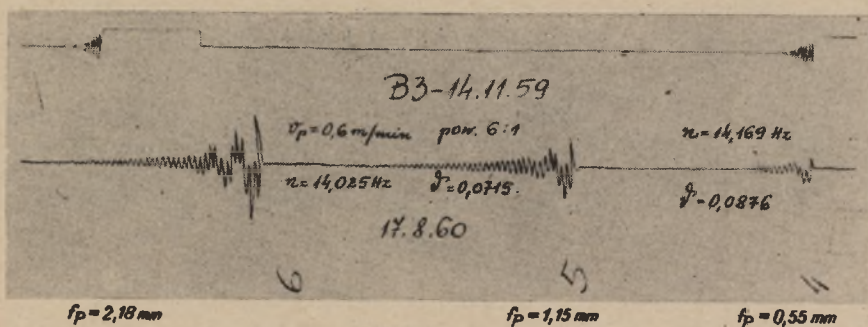


Rys. 96

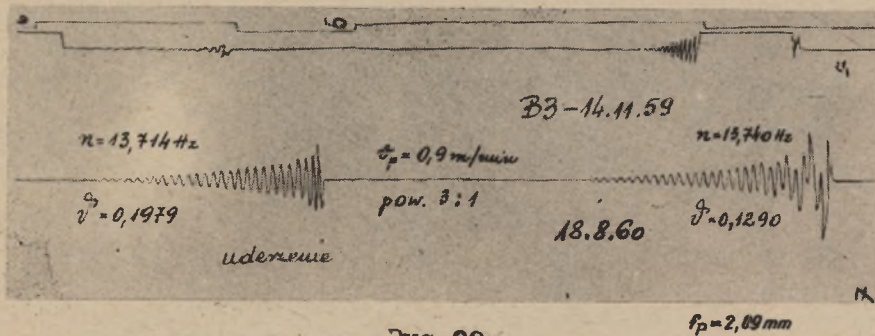




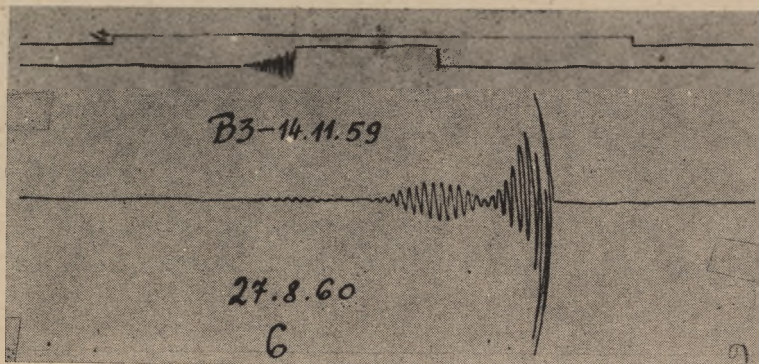
Rys. 97



Rys. 98

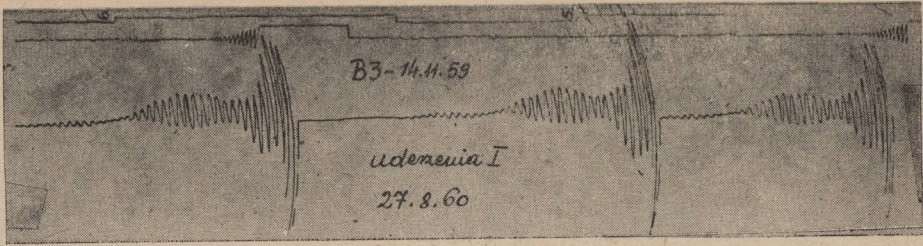


Rys. 99

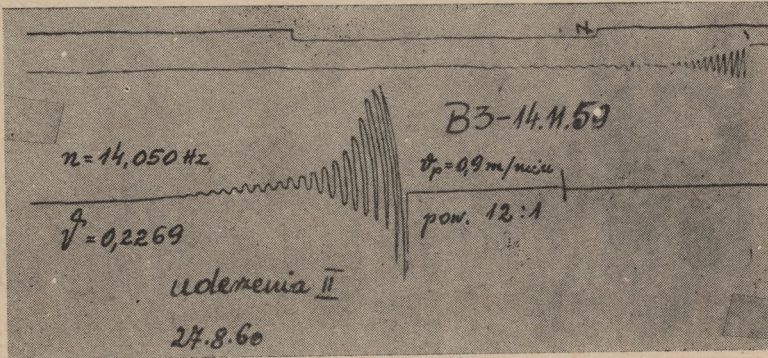


Rys. 100

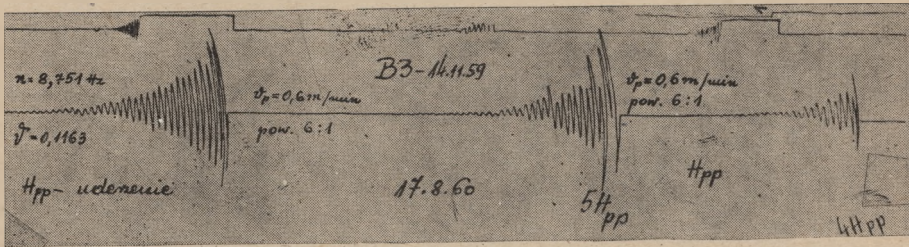




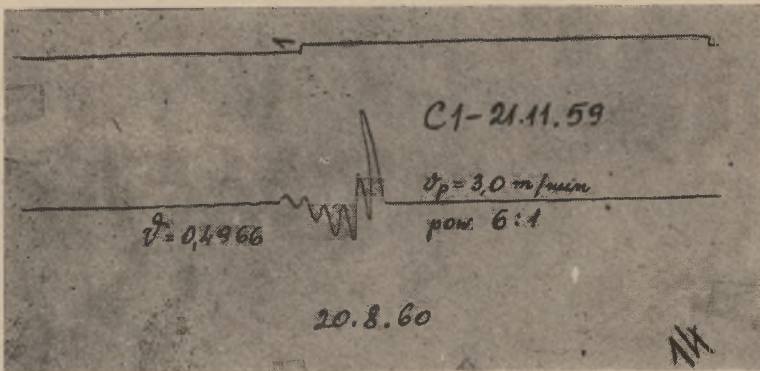
Rys.101



Rys.102

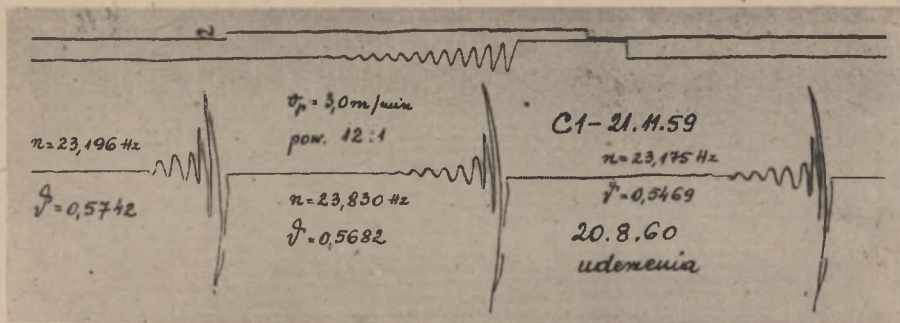


Rys.103

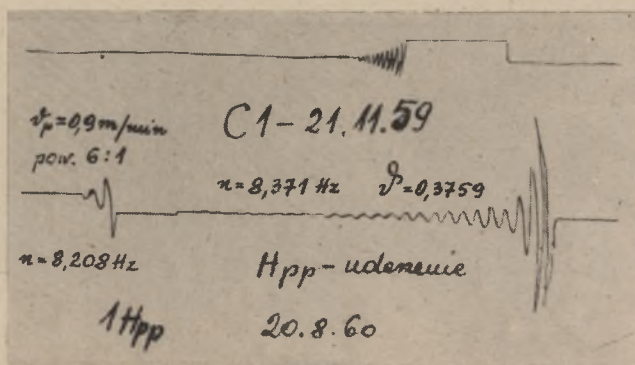


Rys.104

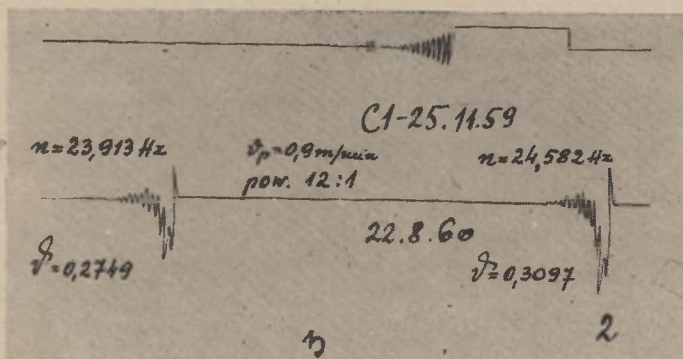




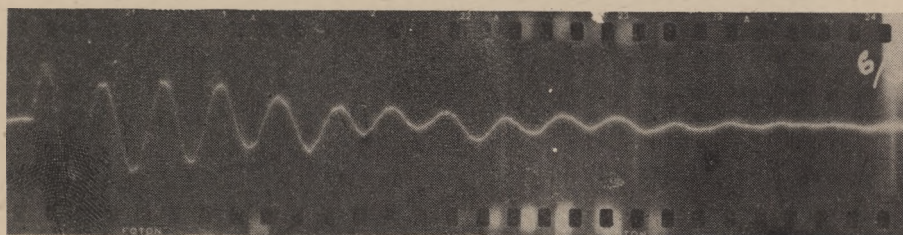
Rys.105



Rys.106

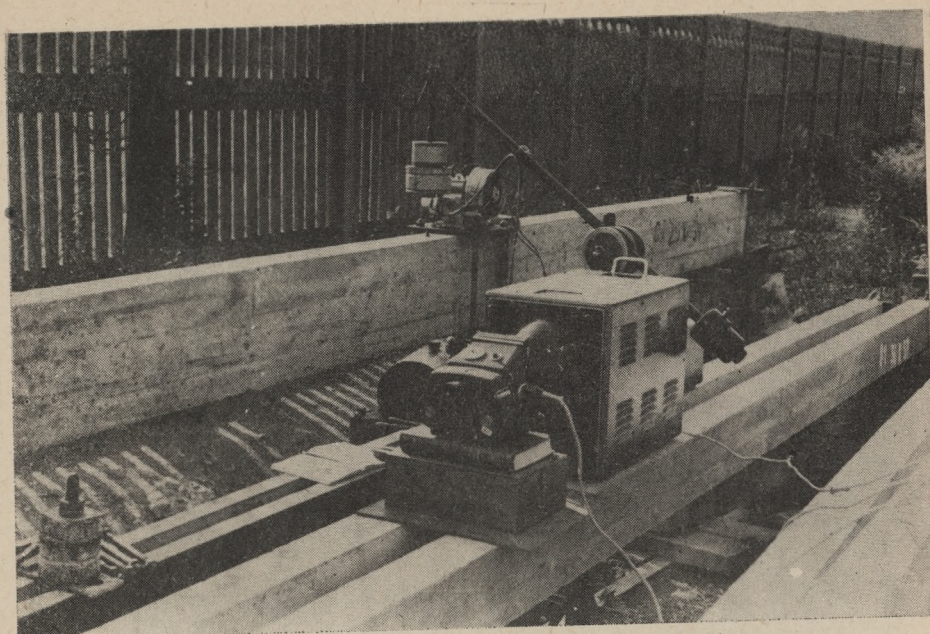


Rys.107

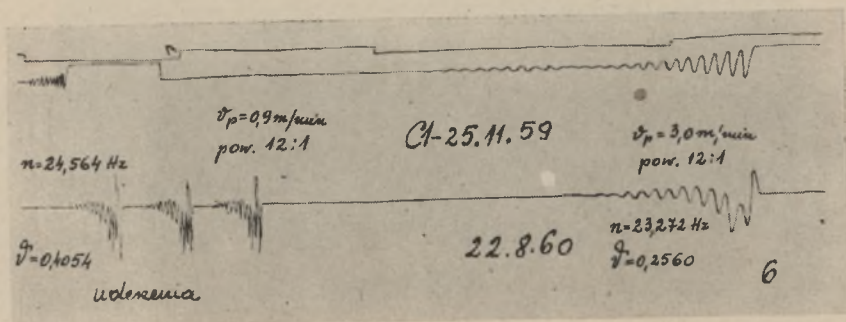


C1 - 25.11.59

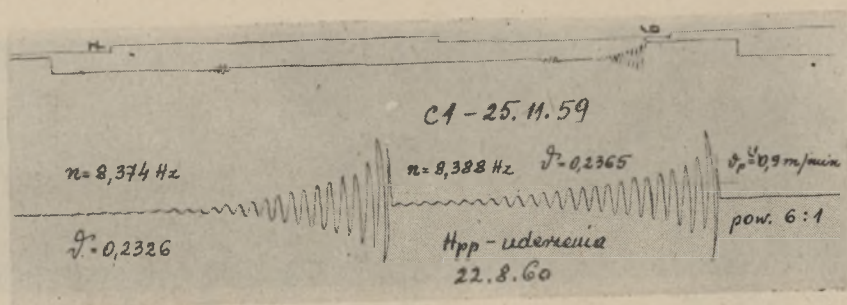
Rys.108



Rys. 109

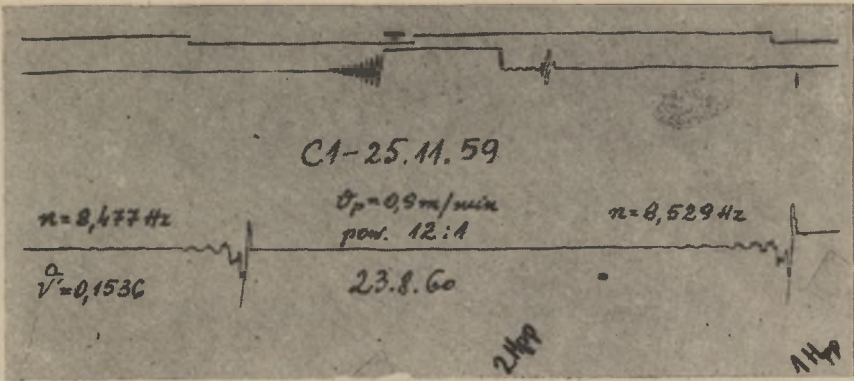


Rys. 110

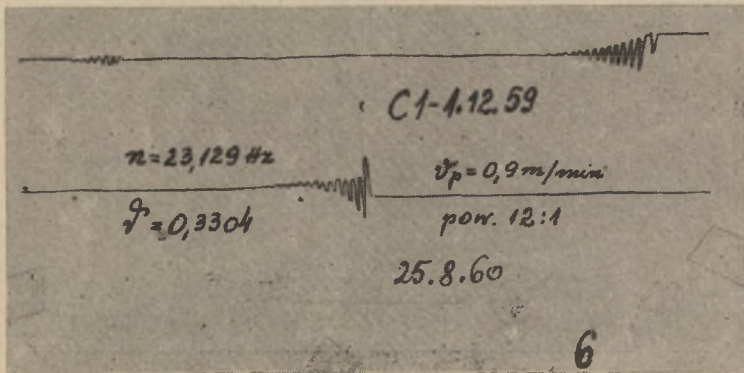


Rys. 111





Rys. 112



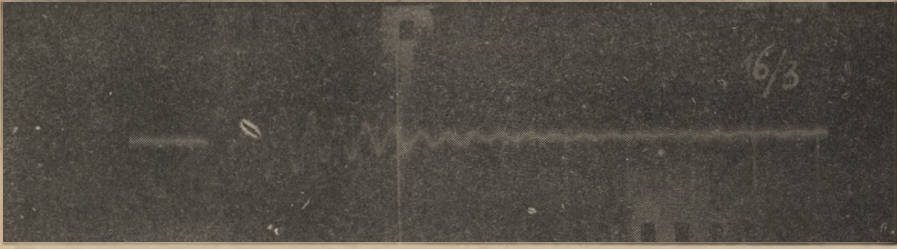
Rys. 113



C1 - 1.12.59

$n_p = 22,914 \text{ Hz}$   $v_p = 0,2322$

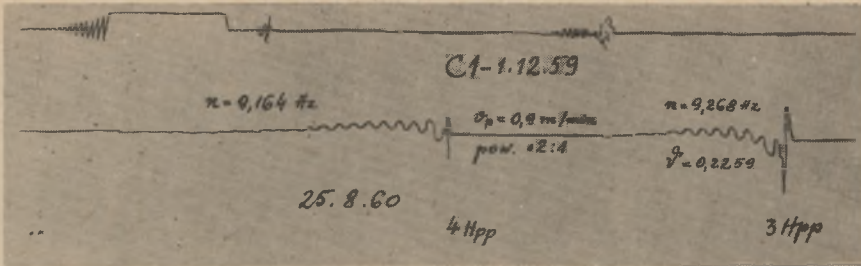
Rys. 114



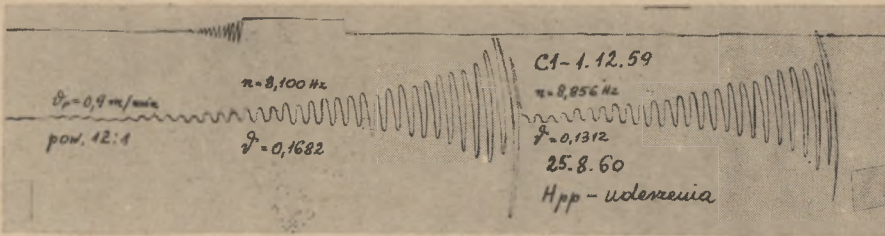
C1 - 1.12.59 1/4 1

$$n_p = 22,777 \text{ Hz} \quad \mathcal{J} = 0,2686$$

Rys.115



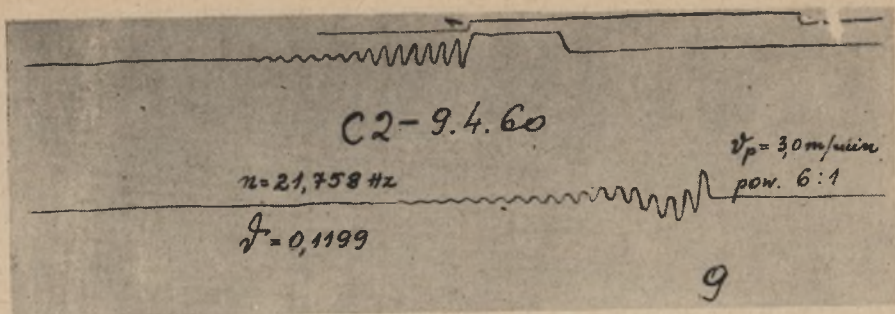
Rys.116



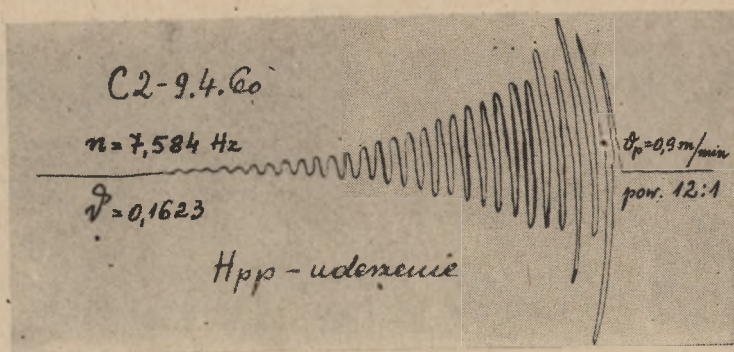
Rys.117



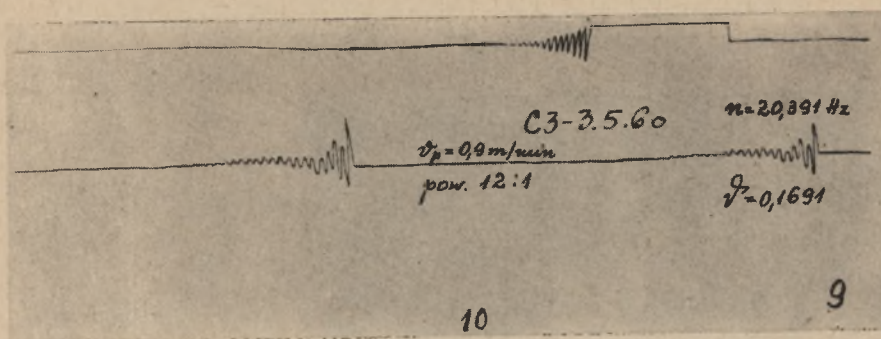




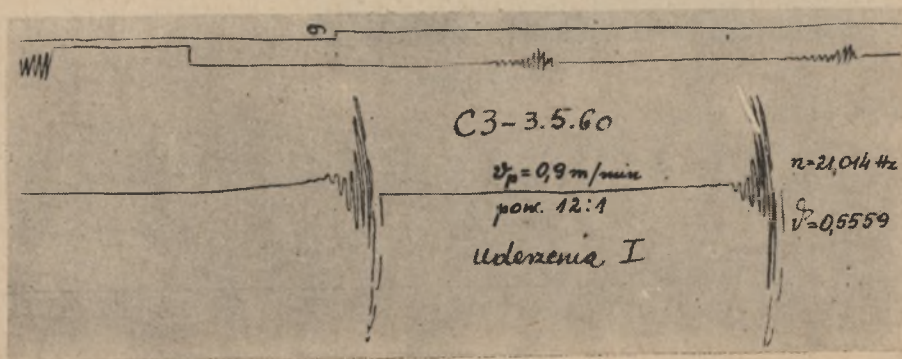
Rys. 122



Rys. 123

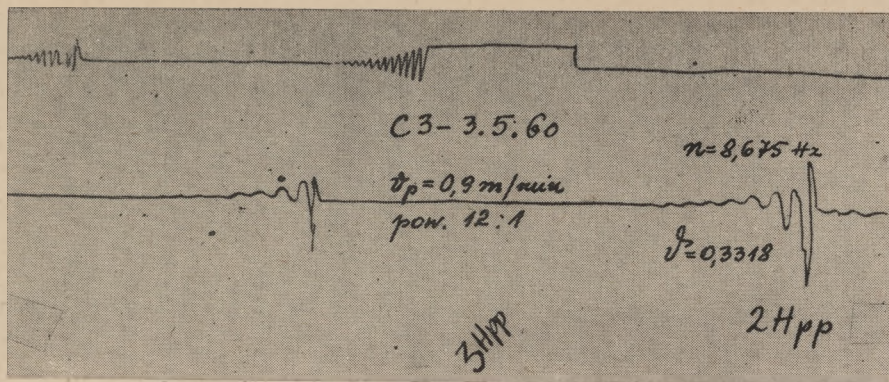


Rys. 124

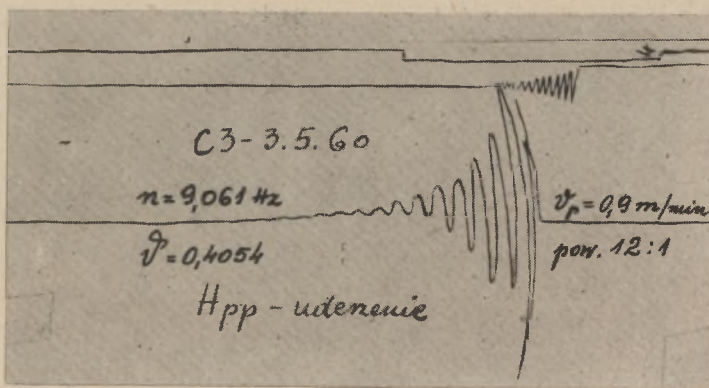


Rys. 125

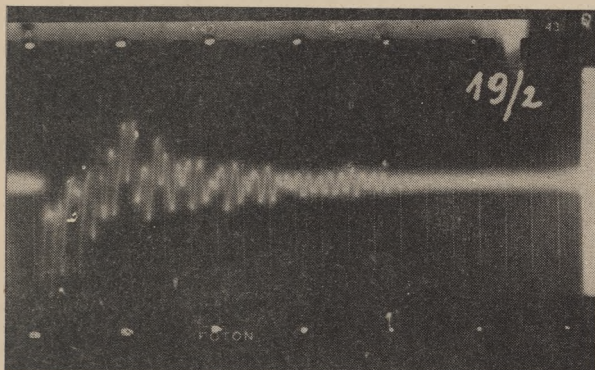




Rys.126



Rys.127

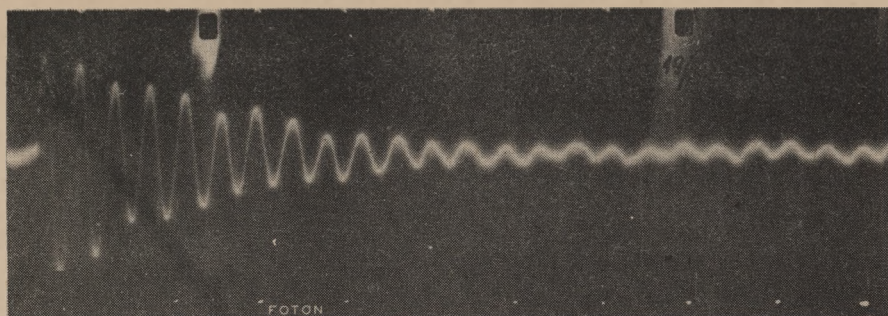


Cz - 18.11.59

$n_p = 24,059 \text{ Hz}$

Rys.128

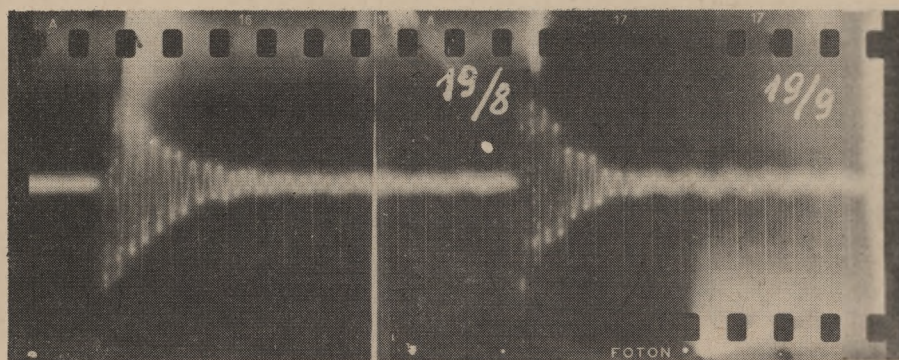




Cz - 18.11.59

$n_p = 22,540 \text{ Hz}$   $\nu_p = 0,1984$

Rys.129

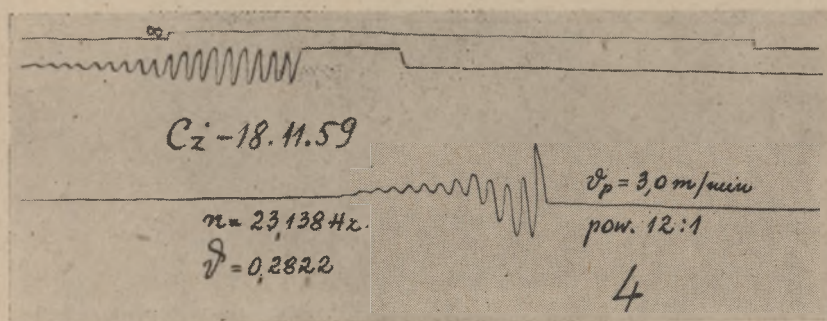


$n_u = 22,199 \text{ Hz}$   $\nu_u = 0,2001$

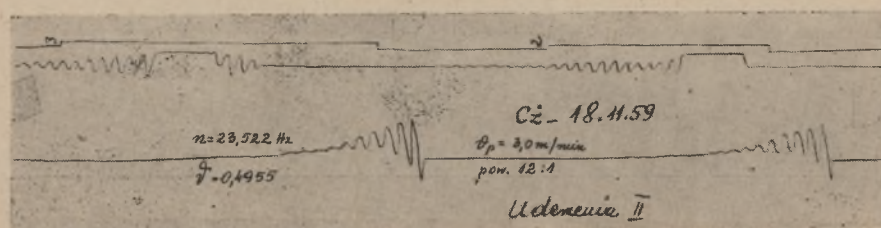
$n_u = 22,503 \text{ Hz}$

Cz - 18.11.59

Rys.130

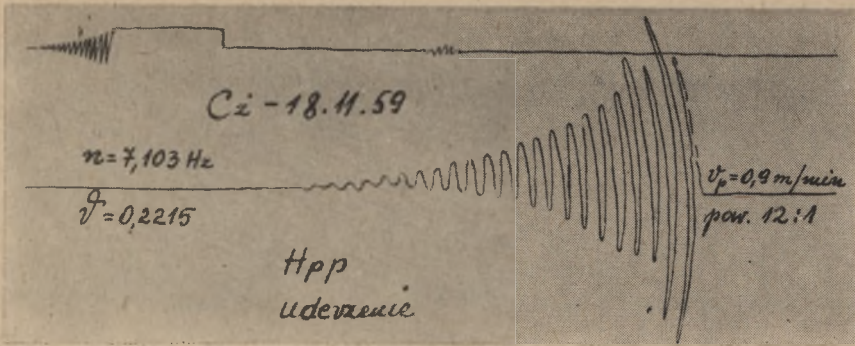


Rys.131

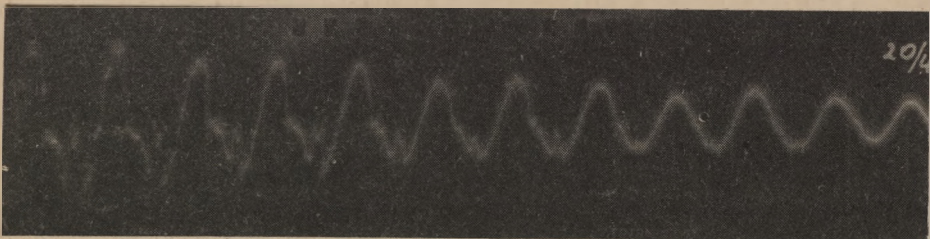


Rys.132





Rys. 133

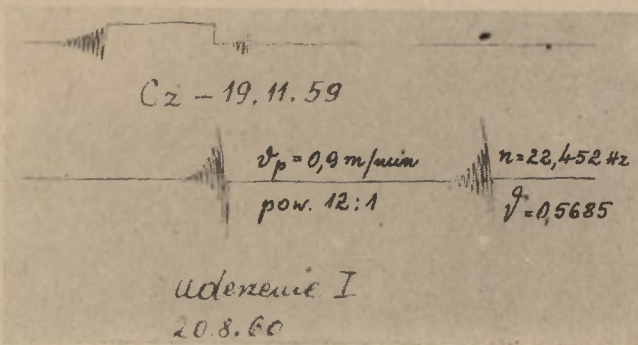


Cz - 18.11.59

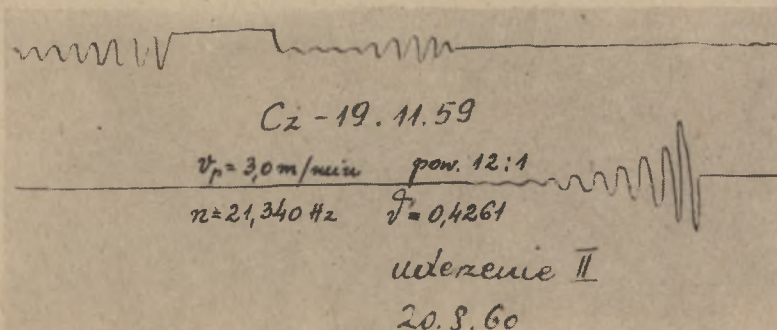
$n_{Hu} = 7,434 \text{ Hz}$

$\beta_{Hu} = 0,2243$

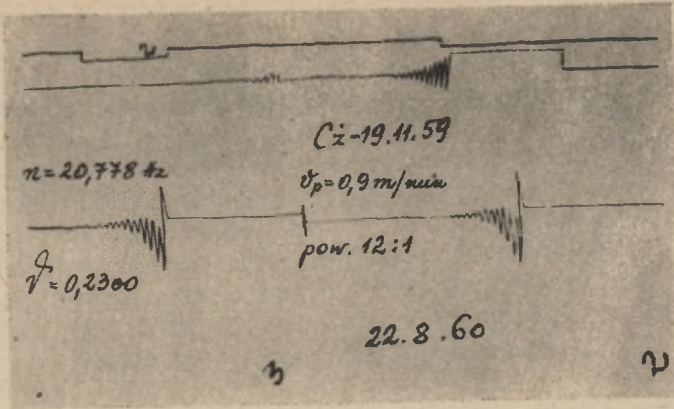
Rys. 134



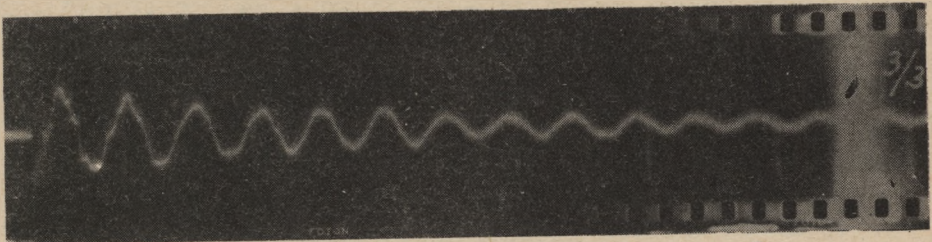
Rys. 135



Rys. 136



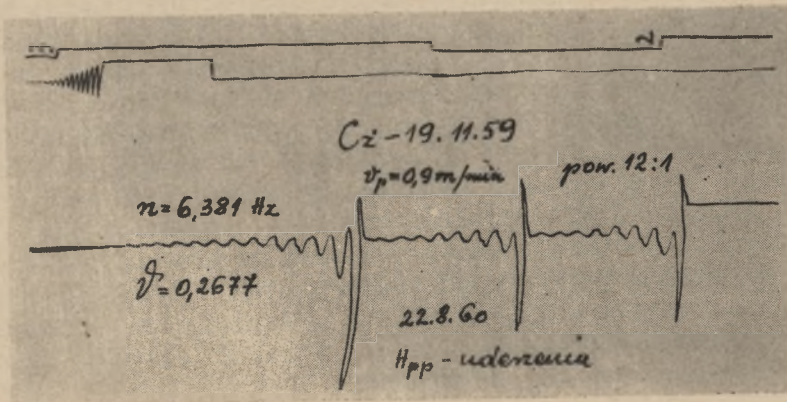
Rys.137



$Cz = 19.11.59$

$n_u = 20,870 \text{ Hz}$     $v_u = 0,1210$

Rys.138



Rys.139



Częstości drgań badanych belek zestawiono w tablicy 10. Są to wartości średnie obliczone dla każdej belki z częstości wszystkich zarejestrowanych cykli drgań danego rodzaju. Analizą statystyczną wyników badań zajmiemy się w oddzielnym opracowaniu.

W kolumnie 8 tablicy 10 podajemy częstość  $n_p$  drgań poprzecznych pionowych wywołanych nagłym przerwaniem działania siły, zaś w kolumnie 9 częstość  $n_u$  takichże drgań ale wywołanych pionowym uderzeniem. Kolumna 10 zawiera średnie częstości obliczone dla każdej z belek z częstości wszystkich zarejestrowanych drgań poprzecznych pionowych. Kolumny 11, 12 i 13 dotyczą drgań poprzecznych poziomych, a kolumna 14 drgań podłużnych.

Ważną częścią doświadczalnych belek sprężonych nie posiadała żadnego zbrojenia stałą miękką. Zbrojenie takie dano tylko w 3-ech belkach, co zaznaczono w tablicy 10 literą "z" przy symbolu belki. Belki A1 - 17.11.59 i A3 - 6.11.59 otrzymały po 2  $\emptyset$  6 mm dołem i górze, zaś belka B1 - 5.4.60 po 2  $\emptyset$  8 mm.

Belki, w których kabel nie został związany z betonem przez zastrzyk zaczynu cementowego oznaczono literą n przy ich symbolach w tablicy 10.

Literą r została oznaczona w tablicy 10 belka A1 - 12.4.60, która wskutek nieostrożnego przesuwania z miejsca na miejsce pękła w środku. Przez sprężenie obie połówki zostały połączone w jedną całość pracującą pod obciążeniem jak belka monolityczna.

W kolumnie 4 tablicy 10 podano wytrzymałość betonu, jaką osiągnął on w dniu badania dynamicznego. W 10-u belkach wytrzymałość tę określano dwoma metodami: niszczącą (przy wyniku dano znak n) i nieniszczącą (przy wyniku znak nn). Wytrzymałość betonu w pozostałych 13-u belkach określano wyłącznie metodą nieniszczącą tzn. za pomocą sklerometru przedstawionego na rysunku 30. Na podstawie tablicy 10 możemy stwierdzić dobrą zgodność wyników uzyskanych jedną i drugą metodą. Różnica w wytrzymałościach nie przekracza 8%.

Tablica 10 zawiera również wartości naprężeń, jakie występowały we włóknach skrajnych belek w stanie bezużytkowym (sprężenie końcowe + ciężar własny). Naprężenia te odnoszą się do przekroju środkowego każdej z belek. Sposób ich obliczania zilustrujemy na przykładach.

#### Belka A1 - 17.11.59

Kabel paraboliczny 6  $\emptyset$  5 mm. Stal gatunku I.

Częstości drgań belek doświadczalnych

Symbol belki	Data betonowania	Data rejestracji drgań	Wytrzymałość betonu w osi belki w czasie badania drgań kg/cm <sup>2</sup>	Napięcia w skrajnych włókniach belki		Strzałka gięcia f <sub>s</sub> mm	Częstość drgań [Hz]						
				σ <sub>1</sub> kg/cm <sup>2</sup>	σ <sub>2</sub> kg/cm <sup>2</sup>		poprzecznych pionowych			poprzecznych poziomych			podłużnych
							n <sub>p</sub>	n <sub>u</sub>	n	n <sub>HP</sub>	n <sub>Hu</sub>	n <sub>H</sub>	n <sub>pd</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A1 /z/	17.11.59	28.6.60 2.7.60 23.8.60	480 <sup>nn</sup> 480 <sup>nn</sup>	126	- 1	4,49	13,662	13,750	13,672	-	7,914	7,914	-
A1 /z/	12.4.60	8.8.60 10.8.60	340 <sup>nn</sup>	104	3	6,61	11,883	12,098	11,969	6,762	6,798	6,788	11,843
A1	5. 5.60	6.8.60 8.8.60	455 <sup>nn</sup> 430 <sup>nn</sup>	89	5	5,53	12,699	12,560	12,637	5,586	6,646	6,620	11,833
A2	23.11.59	3.8.60 4.8.60	445 <sup>nn</sup> 480 <sup>nn</sup>	93	24	5,33	13,760	-	13,760	7,546	-	7,546	13,256
A2	26.11.59	2.7.60	550 <sup>n</sup>	158	24	16,10	11,436	-	11,436	6,139	-	6,139	-
A2 /n/	14. 4.60	11.8.60	425 <sup>nn</sup> 405 <sup>n</sup>	45	24	2,59	12,690	12,573	12,643	-	7,425	7,425	12,410
A3 /n/	6.11.59	3.8.60	525 <sup>nn</sup> 545 <sup>n</sup>	10	58	-	13,111	-	13,111	-	-	-	-
A3	22. 1.60	5.8.60	460 <sup>nn</sup>	61	109	-	13,652	-	13,652	-	-	-	13,783
A3 /n/	5. 4.60	10.8.60	490 <sup>nn</sup> 510 <sup>n</sup>	22	70	-	13,406	13,228	13,360	-	-	-	-
A4	14.11.59	6.8.60 31.8.60	510 <sup>nn</sup>	-18	20	-	12,921	12,783	12,870	5,900	7,103	6,415	10,903
A4	18.11.59	8.7.60 27.8.60 30.8.60	520 <sup>nn</sup> 500 <sup>n</sup>	-18	20	-	13,166	13,232	13,190	-	8,517	8,517	12,381
B1	30.10.59	18.8.60 26.8.60 27.8.60 31.8.60	550 <sup>nn</sup>	155	1	8,98	13,580	13,566	13,573	9,416	9,185	9,267	-
B1 /z/	5. 4.60	13,16,23 1 24.8.60	535 <sup>nn</sup> 510 <sup>n</sup>	168	-1	9,29	14,121	14,129	14,125	9,708	9,904	9,837	15,931
B2	5.4.60	17,27 1 31.8.60	545 <sup>nn</sup> 510 <sup>n</sup>	131	24	-	14,129	14,042	14,104	-	10,761	10,761	14,318
B3	14.11.59	17,18 1 27.8.60	520 <sup>nn</sup>	121	21	-	13,973	13,826	13,904	9,027	8,997	9,007	-
C1	21.11.59	20.8.60	540 <sup>nn</sup>	116	0	5,28	24,292	23,944	24,114	8,208	8,140	8,146	-
C1	25.11.59	22.8.60 23.8.60	500 <sup>nn</sup>	118	0	-	23,297	23,861	23,579	8,426	8,213	8,274	-
C1 /n/	1.12.59	25.8.60	500 <sup>nn</sup>	107	1	3,30	23,245	23,419	23,250	9,123	8,862	9,017	-
C2 /n/	27. 2.60	12.8.60	510 <sup>nn</sup>	107	14	2,42	22,567	22,574	22,569	7,909	7,893	7,899	-
C2	9. 4.60	25.8.60	505 <sup>nn</sup> 540 <sup>n</sup>	126	14	4,48	21,983	21,326	21,808	7,579	7,636	7,604	-
C3	3. 5.60	24.8.60	470 <sup>nn</sup> 435 <sup>n</sup>	74	23	-	20,754	21,250	20,886	8,742	9,011	8,885	-
C4	18.11.59	26.8.60	560 <sup>nn</sup>	-11	12	-	22,754	22,593	22,713	7,583	7,450	7,488	-
C4	19.11.59	20.8.60 22.8.60	550 <sup>nn</sup>	-11	12	-	21,499	21,773	21,582	6,890	6,434	6,644	-



Wydłużenie stali w momencie kotwienia kabla:  $\Delta l_k = 32,68$  mm.

Skrócenie belki (betonu):  $\Delta l_b = 1,015$  mm.

Przesunięcie kabla w zakotwieniu podczas operacji naciągu:

$w_1 = 0,90$  mm.

Długość pomiarowa kabla:  $l = 5200$  mm.

Względne wydłużenie stali:

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta l_k - \Delta l_b - w_1}{l} = \frac{32,680 - 1,015 - 0,900}{5200} = 0,00594.$$

Współczynnik sprężystości stali:  $E_s = 2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> (wg. PN-57/B-03320).

Naprężenie w stali:

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s = 0,00594 \times 2 \times 10^6 = 11840 \text{ kg/cm}^2.$$

Siła sprężająca w momencie kotwienia kabla:

$$S'_o = F_s \sigma_s = \frac{6 \times 0,5^2 \pi}{4} \times 11840 = 6 \times 0,196 \times 11840 = 13924 \text{ kg}.$$

Siła sprężająca obliczona na podstawie odczytu manometru pompy olejowej:

Cisnienie w cylindrze prasy naciągowej:  $p = 118$  kg/cm<sup>2</sup>.

Przekrój tłoka prasy naciągowej:  $F_t = 122$  cm<sup>2</sup>.

Współczynnik sprawności prasy:  $\eta = 0,934$  (z tablicy 5).

$$S''_o = p F_t \eta = 118 \times 122 \times 0,934 = 13446 \text{ kg}.$$

Różnica między  $S''_o$  i  $S'_o$  wynosi 3,55%.

Poślizg w zakotwieniu po zwolnieniu naciągu:  $w_2 = 4,46$  mm.

Strata siły sprężającej wskutek poślizgu:

$$\Delta S_o = \frac{w_2}{l} E_s F_s = \frac{4,46}{5200} \times 2 \times 10^6 \times 6 \times 0,196 = 2017 \text{ kg}.$$

Początkowa siła sprężająca:

$$S_0 = S'_0 - \Delta S_0 = 13924 - 2017 = 11907 \text{ kg.}$$

Obliczenie cech przekroju z uwzględnieniem otworu na kabel.

$$\text{Pole przekroju: } F = 10 \times 18 - \frac{3,2^2 \times 3,14}{4} = 172 \text{ cm}^2.$$

Położenie środka ciężkości przekroju przy mimośrodku kabla

$$e = 4,2 \text{ cm}$$

$$5 v'^2 + 10 (18 - v') \left( \frac{v'}{2} + 9 \right) - 38,4 = 172 v'$$

$$v' = 9,195 \text{ cm.}$$

Moment bezwładności przekroju:

$$J = \frac{10 \times 18^3}{12} + 172 \times 0,195^2 - 4,395^2 \times 8 = 4712 \text{ cm}^4.$$

Wskaźniki przekroju

$$W = \frac{4712}{8,805} = 535 \text{ cm}^3; \quad W' = \frac{4712}{9,195} = 512 \text{ cm}^3.$$

Maksymalny moment zginający wywołany ciężarem własnym

$$M_g = \frac{0,1 \times 0,18 \times 2500 \times 4,8^2}{8} = 129,6 \text{ kGm} = 12960 \text{ kGcm.}$$

Naprężenia w betonie bezpośrednio po sprężeniu:  
w górnych włóknach:

$$\sigma = \frac{S_0}{F} = \frac{S_0 \cdot e}{W} + \frac{M_g}{W} = \frac{11907}{172} - \frac{11907 \times 4,395}{535} + \frac{12960}{535} = 69,2 - 97,8 + 24,2 = -4,4 \text{ kg/cm}^2,$$



w dolnych włókniach:

$$\begin{aligned}\sigma' &= \frac{S_o}{F} + \frac{S_o \cdot e}{W'} - \frac{M_g}{W'} = \frac{11907}{172} + \frac{11907 \times 4,395}{512} - \frac{12960}{512} = \\ &= 69,2 + 102,2 - 25,3 = 146,1 \text{ kg/cm}^2.\end{aligned}$$

Stratę siły sprężającej z powodu skurczu i pełzania betonu obliczamy za pomocą wzoru

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100 = \left(1 - \frac{P}{S} + \frac{E_b F_l \epsilon_{sk}}{\varphi S}\right) (1 - e^{-\alpha \varphi}) \cdot 100$$

podanego w PN-57/B-03320.

Naprężenie w betonie na poziomie kabla:

$$\begin{aligned}\sigma_e &= \frac{S_o}{F} + \frac{S_o e^2}{J} - \frac{M_e}{J} = \frac{11907}{172} + \frac{11907 \times 4,395^2}{4712} - \frac{12960 \times 4,395}{4712} = \\ &= 69,2 + 48,8 - 12,1 = 105,9 \text{ kg/cm}^2.\end{aligned}$$

Naprężenie w stali:

$$\sigma_{so} = \frac{11907}{6 \times 0,196} = 10125 \text{ kg/cm}^2.$$

Przyjęto współczynnik sprężystości betonu  $E_b = 390000 \text{ kg/cm}^2$ ;

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{2 \times 10^6}{3,9 \times 10^5} = 5,13.$$

Ze wzoru (12) PN-57/B-03320

$$\alpha = \frac{n \sigma_e}{n \sigma_e + \sigma'_s} = \frac{5,13 \times 105,9}{5,13 \times 105,9 + 10125} = 0,051.$$

Z tablicy 7 PN-57/03320 przyjęto współczynnik pełzania  $\varphi = 2,0$ . Wobec tego  $\alpha\varphi = 0,102$ .

Z tablicy 8 PN-57/03320 odczytujemy dla  $\alpha\varphi = 0,102$  wartość funkcji  $f = 1 - e^{-\alpha\varphi} = 0,095$ .

Zgodnie z PN-57/B-03320 obliczamy:

$$r = \frac{i^2}{e} = \frac{J}{F e} = \frac{4712}{172 \times 4,395} = 6,23 \text{ cm}; \quad F_1 = \frac{r}{r + e} F =$$
$$= \frac{6,23}{6,23 + 4,395} \times 172 = 101 \text{ cm}^2; \quad P = \frac{M_g}{e+r} = \frac{12960}{10,625} = 1220 \text{ kg},$$

a z tablicy 6 PN-57/B-03320 odczytujemy

$$\varepsilon_{sk} = 0,0002.$$

Wobec tego

$$\frac{4S}{S} 100 = \left( 1 - \frac{1200}{11907} + \frac{390000 \times 101 \times 0,0002}{2,0 \times 11907} \right) \times 0,095 \times 100 =$$
$$= (1 - 0,102 + 0,331) \times 0,095 \times 100 = 11,7\%.$$

Ostateczna wartość siły sprężającej:

$$S = (1 - 0,117) \times 11907 = 10514 \text{ kg}.$$

Naprężenia krawędziowe w betonie w stanie bezużytkowym:  
włókna górne:

$$\sigma_g = \frac{10514}{172} - \frac{10514 \times 4,395}{535} + 24,2 = -1 \text{ kg/cm}^2,$$

włókna dolne:

$$\sigma_d = 61 + \frac{46209}{512} - 25,3 = +126 \text{ kg/cm}^2.$$



Belka A3 - 22.1.60.

Sprężenie osiowe, kabel 12  $\emptyset$  5.

Wydłużenie stali:  $\Delta l_k = 37,56$  mm; skrócenie belki:  $\Delta l_b =$   
 $= 2,195$  mm. Przesunięcie kabla w zakotwieniu:  $w_1 = 8,250$  mm.

$$\epsilon_s = \frac{37,560 - 2,195 - 8,250}{5200} = 0,005214$$

$$\sigma_s = 0,005214 \times 2 \times 10^6 = 10428 \text{ kg/cm}^2.$$

Siła sprężająca w momencie kotwienia kabla:

$$S'_0 = 12 \times 0,196 \times 10428 = 24527 \text{ kg},$$

$$S''_0 = p \cdot F_t \cdot \eta = 228 \times 122 \times 0,923 = 25674 \text{ kg}.$$

Tutaj różnica sił  $S''_0$  i  $S'_0$  wynosi 4,7%.

Poślizg kabla po zakotwieniu  $w_2 = 7,53$  mm.

$$\Delta S_0 = \frac{7,53}{5200} \times 2 \times 10^6 \times 12 \times 0,196 = 6811 \text{ kg}.$$

Początkowa siła sprężająca:

$$S_0 = 24527 - 6811 = 17716 \text{ kg}; \quad \sigma_{s0} = 7532 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprężenie w betonie:

$$\sigma = \frac{S_0}{F} + \frac{M}{W} = \frac{17716}{172} + \frac{12960 \times 6}{10 \times 18^2} = 103 + 24 = 127 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma' = \frac{S_0}{F} - \frac{M}{W} = 103 - 24 = 79 \text{ kg/cm}^2.$$

Przyjęto:

$$E_b = 3,8 \times 10^5.$$

Wobec tego  $n = 5,26$ ;  $\alpha = \frac{5,26 \times 103}{5,26 \times 103 \mp 7532} = 0,067$ ,

$$\alpha\varphi = 0,067 \times 2,0 = 0,134; \quad 1 - e^{-\alpha\varphi} = 0,125.$$

Korzystamy ze wzoru (11) zamieszczonego w PN-57/B-03320.

$$\frac{\Delta S}{S} 100 = \left(1 \pm \frac{N}{S} + \frac{E_b F_b \varepsilon_{sk}}{\varphi S}\right) (1 - e^{-\alpha\varphi}) 100 =$$

$$= \left(1 + \frac{3,8 \times 10^5 \times 172 \times 0,0002}{2,0 \times 17716}\right) \times 0,125 \times 100 = 17,1\%.$$

Końcowa siła sprężająca:

$$S = (1 - 0,171) 17716 = 14687 \text{ kg.}$$

Naprężenia krawędziowe w betonie w stanie beżużytkowym:

$$\sigma_g = \frac{14687}{172} + 24 = 85,4 + 24 = 109,4 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_d = 85,4 - 24 = 61,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Belka B3 - 14.11.59 - strunobeton.

Stosujemy tu teorię samonapreżeń opracowaną przez Rittera i Lardy<sup>x</sup>).

Sprężenie belki dokonane zostało przez naciąg 10 drutów  $\varnothing 5$  mm ułożonych w 3-ch warstwach wg rysunku 140.

Wydłużenie stali:

warstwa dolna  $\Delta l_{k1} = 26,40 \text{ mm}; \quad \varepsilon_1 = \frac{26,40}{5200} = 0,00508;$

" środkowa  $\Delta l_{k2} = 24,65 \text{ mm}; \quad \varepsilon_2 = \frac{24,65}{5200} = 0,00474;$

" górna  $\Delta l_{k3} = 21,70 \text{ mm}; \quad \varepsilon_3 = \frac{21,70}{5200} = 0,00417.$

x) Ritter M., Lardy P.: Vorgespannter Beton. Zurich 1946.



Naprężenia w stali:

$$\sigma_{s1} = -10150 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{s2} = -9500 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{s3} = -8350 \text{ kg/cm}^2.$$

W teorii samonaprzeżeń pękanie betonu uwzględnia się przez współczynnik

$$m = \frac{\varepsilon_{\text{całkowite}}}{\varepsilon_{\text{sprężyste}}} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 1 + \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = 1 + \varphi.$$

Przyjęto:

$$\varphi = 2; \quad m = 3; \quad E_b = 400000 \text{ kg/cm}^2;$$

$$n = 5; \quad n_1 = m \cdot n = 15; \quad \varepsilon_{sk} = 0,0002.$$

Naprężenia w betonie:

$$F_{s1} = 4 \times 0,196 = 0,784; \quad \mu_1 = \frac{0,784}{216} = 0,0036;$$

$$F_{s2} = 4 \times 0,196 = 0,784; \quad \mu_2 = \frac{0,784}{216} = 0,0036;$$

$$F_{s3} = 2 \times 0,196 = 0,392; \quad \mu_3 = \frac{0,392}{216} = 0,0018.$$

$$\Sigma \mu = 0,0090.$$

$$\Sigma \mu y_s = -0,0223 - 0,0151 + 0,0104 = -0,0270.$$

Odstęp między środkiem ciężkości przekroju betonu i środkiem ciężkości przekroju idealnego:

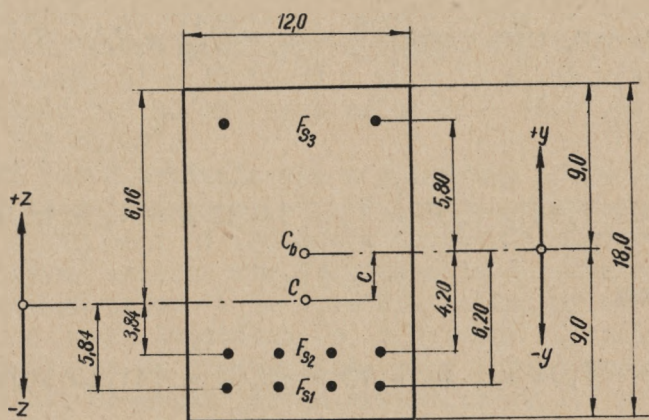
$$c = \frac{n_1 \Sigma \mu y_s}{1 + n_1 \Sigma \mu} = \frac{-15 \times 0,0270}{1 + 15 \times 0,009} = \frac{-0,405}{1,135} = 0,36 \text{ cm.}$$

Cechy przekroju idealnego:

$$F = F_b (1 + n_1 \sum \mu) = 216 \times 1,135 = 245,16 \text{ cm}^2,$$

$$J = J_b + n_1 \sum F_{si} z_{si}^2 = \frac{12 \times 18^3}{12} + 216 \times 0,36^2 + 15(26,74 + 11,56 + 14,87) =$$

$$= 6658 \text{ cm}^4.$$



Rys.140

Naprężenia w stali po stracie z powodu skurczu betonu:

$$\bar{\sigma}_{s1} = -10150 + 2,0 \times 10^6 \times 0,0002 = -10150 + 400 =$$

$$= -9750 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\bar{\sigma}_{s2} = -9500 + 400 = -9100 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\bar{\sigma}_{s3} = -8350 + 400 = -7950 \text{ kg/cm}^2.$$



Sily fikcyjne (określenie używane w teorii samonaprężeń):

$$N = \sum \bar{\sigma}_{si} F_{si} = -9750 \times 0,784 - 9100 \times 0,784 - 7950 \times 0,392 = \\ = -17894 \text{ kG,}$$

$$M = \sum \bar{\sigma}_{si} F_{si} z_{si} = 9750 \times 0,784 \times 5,84 + 9100 \times 0,784 \times 3,84 - \\ - 7950 \times 0,392 \times 6,16 = 52841 \text{ kGcm.}$$

Naprężenia wstępne w betonie:

$$\sigma_w = \frac{N}{F} - z_b \frac{M}{J} = \frac{17894}{245,16} - z_b \frac{52841}{6658} = 73 - 7,94 z_b,$$

włókna górne:

$$\sigma_{wg} = 73 - 7,94 \times 9,36 = 73 - 74,32 = -1,32 \text{ kG/cm}^2.$$

włókna dolne:

$$\sigma_{wd} = 73 + 7,94 \times 8,64 = 73 + 68,60 = 141,60 \text{ kG/cm}^2.$$

Naprężenia wywołane ciężarem własnym:

$$M_g = \frac{0,12 \times 0,18 \times 2500 \times 4,8^2}{8} = 155,52 \text{ kGm} = 15552 \text{ kGcm};$$

$$\sigma = \frac{15552}{6658} \times 9,36 = 21,86 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\sigma' = - \frac{15552}{6658} \times 8,64 = -20,18 \text{ kG/cm}^2.$$

Naprężenia krawędziowe w betonie w stanie bezużytkowym:

$$\sigma_g = -1,32 + 21,86 = 20,54 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\sigma_d = 141,60 - 20,18 = 121,42 \text{ kG/cm}^2.$$

W tabelicy 10 (kolumna 7) podano także wartości strzałek ugięcia  $f$ , jakie poszczególne belki otrzymały przez sprężenie. Wartości  $f$  mierzone były w trakcie naciągu kabla i odnoszą się do chwili, kiedy kabel został zakotwiony i ustał już jego poślizg po zwolnieniu ciśnienia w prasie.

Przed rozpatrzeniem wyników badań zestawionych w tabelicy 10 zauważmy jeszcze, że w okresie produkcji belek doświadczalnych i przygotowywania badań trwającym około 9 miesięcy nastąpiło pewne wyrównanie wytrzymałości betonu. Jest to zgodne z charakterem przyrostu wytrzymałości betonu z czasem<sup>x)</sup>.

W czasie rejestracji drgań wytrzymałość betonu w belkach doświadczalnych oscylowała wokół wartości  $500 \text{ kg/cm}^2$  za wyjątkiem belek A1 - 12.4.60, A1 - 5.5.60, A2 - 14.4.60 i C3 - 3.5.60, które miały wytrzymałość wyraźnie niższą, belek A2 - 26.11.59, B1 - 30.10.59 i C2 - 19.11.59 wykazujących wytrzymałość  $550 \text{ kg/cm}^2$  oraz belki C2 - 18.11.59 o wytrzymałości  $560 \text{ kg/cm}^2$ .

Wyniki badań zgadzają się z wnioskami sformułowanymi w części teoretycznej na str.13 (odnośnie sprężenia osiowego), na str.30 i 31 (odnośnie sprężenia mimośrodkowego kablem prostym) oraz na str.44 (odnośnie sprężenia kablem parabolicznym przez  $e_0 = e_1 = 0$ ). Zaczniemy od belek A3. Biorąc pod uwagę częstotści  $n$  z kolumny 10 tabelicy 10 stwierdzamy, że są one większe, przy intensywniejszym sprężeniu belki. Podobnie jest w grupie belek A1, B1 i C1, przy czym ze względu na dość istotną różnicę wytrzymałości betonu częstotść drgań belki A1 - 12.4.60 musiała być nieco, niższa, zaś częstotść drgań belki C1 - 21.11.59 nieco wyższa niżby to wynikało z samego wpływu sprężenia. Wniosek d) ze str.30 potwierdziło dobitnie badanie belki A2 - 26.11.59. Bardzo intensywne sprężenie powodujące duże wygięcie belki ku górze obniżyło wydatnie częstotść drgań własnych w stosunku do częstotści drgań innych belek tej grupy i w stosunku do częstotści drgań belek żelbetowych. Strzałka ugięcia wywołana ciężarem własnym wynosiła tu

$$f_q = \frac{5 \times q \times l^4}{384 EJ} = \frac{5 \times 0,45 \times 480^4}{384 \times 271200 \times 4785} = 0,240 \text{ cm} = 2,40 \text{ mm}.$$

x) Por.Saliger R.: Der Stahlbetonbau. Wiedeń 1949 str.53



Jak podano w tablicy 10

$$f_s = - 16,10 \text{ mm.}$$

Strzałka ta uległa jeszcze zwiększeniu wskutek peźzania betonu i jak wykazał pomiar, w czasie rejestracji drgań wynosiła około - 30 mm.

Przy największej zastosowanej w czasie rejestracji drgań sile  $P = 1260 \text{ kG}$  strzałka  $f_p$  wynosiła + 10,42 mm. Było więc stale

$$f = f_s + f_q + f_p < 0$$

Było tutaj również

$$|c_1| = 4,8 \left| \frac{f_q}{f} \right| < \frac{\pi^3}{8}.$$

Przy rejestracji drgań belki A2 - 23.11.59 strzałka ugięcia  $f_s$  miała średnią wartość około 4,60 mm, zaś strzałka  $f_q$  wynosiła 2,08 mm.

Wobec tego

$$f = - 5,33 + 2,08 + 4,60 = + 1,35,$$

czyli

$$f > 0$$

oraz

$$c_1 = 4,8 \cdot \frac{2,08}{1,35} = 7,396 > \frac{\pi^3}{8}.$$

Porównanie częstości drgań belki A2 - 23.11.59 z częstościami drgań belek Aż potwierdza wniosek b) ze str.30. Wniosek d) z tejże strony potwierdzony już przez badanie belki A2 - 26.11.59 znalazł jeszcze raz potwierdzenie w wynikach badań belek C2. Dla obydwu tych belek  $f_q = 0,66 \text{ mm}$ , zaś

średnia wartość  $f_p$  dla belki C2 - 27.2.60 wynosiła +1,47 mm, a dla belki C - 9.4.60 + 0,614 mm. Biorąc pod uwagę strzałki ugięcia  $2f$  podane w tabelicy 10 stwierdzamy, że przy rejestracji obydwu belek było

$$f < 0,$$

wobec czego intensywniejsze sprężenie belki C2 - 9.4.60 dało w efekcie mniejszą częstość drgań.

Sprężenie ma niewątpliwie wpływ również i na drgania belek w płaszczyźnie poziomej. Do tego zagadnienia wrócimy jeszcze w dalszych rozważaniach. Teraz zauważmy tylko w kolumnie 13 tabelicy 10 wyraźną różnicę między częstościami  $\omega$  drgań poprzecznych poziomych belek C2 i częstościami takichże drgań innych belek grupy C. Zauważmy też, że częstość drgań w płaszczyźnie poziomej belek A1 i B1 jest wyższa przy intensywniejszym sprężeniu.

Częstość drgań podłużnych (kolumna 14 tabelicy 10) jest na ogół bliska częstości poprzecznych drgań pionowych. Ilość pomiarów nie była tu zbyt wielka i dlatego wyniki trzeba traktować jako orientacyjne.

### 3.4. Tłumienie drgań belek doświadczalnych

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia obliczone na podstawie wibrogramów za pomocą wzoru (87) zestawiono w tabelicy 11. Podano tu również wartości współczynników tłumienia  $\varrho$  (drgania pionowe) i  $\varrho_H$  (drgania poziome) obliczone ze wzoru

$$\varrho = \frac{v^s}{\sqrt{v^s{}^2 + 4A^2}} \quad (88)$$

zastosowanego już uprzednio na str.82. W trzech kolumnach tabelicy 11 odnoszących się do drgań poprzecznych pionowych mamy kolejno:

- $v^s_P$  - logarytmiczny dekrement tłumienia drgań wywołanych nagłym przerwaniem działania siły P,
- $v^s_u$  - logarytmiczny dekrement tłumienia drgań wywołanych uderzeniem,



$\nu$  - średnią wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia obliczoną ze wszystkich wibrogramów uzyskanych w trakcie badania drgań pionowych danej belki (przy czym dla każdego zarejestrowanego cyklu drgań wyznaczono kilka wartości  $\nu_P$  względnie  $\nu_u$  z różnych części wibrogramu).

Analogiczne znaczenia mają symbole  $\nu_{HP}$ ,  $\nu_{HU}$  i  $\nu_H$  w odniesieniu do drgań poprzecznych poziomych.

Studiując tablicę 11 stwierdzamy, że logarytmiczny dekrement tłumienia jest cechą ustroju, a nie cechą materiału. Istotny wpływ na wielkość logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań belek doświadczalnych miała sztywność tych belek na zginanie. Większe tłumienie występowało w zasadzie w belkach o większej sztywności.

Stwierdzamy dalej, że tłumienie drgań pionowych wywołanych uderzeniem jest na ogół większe niż tłumienie takich drgań wywołanych nagłym przerwaniem działania siły. Wyraźny wpływ na wielkość tłumienia wywiera sposób sprężenia. Najmniejsze wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia stwierdzono w przypadku belek sprężonych osiowo, największe zaś w przypadku belek sprężonych kablem parabolicznym. Średnio biorąc, tłumienie drgań belek żelbetowych jest większe od tłumienia drgań sprężonych. Drgania belek posiadających zbrojenie konstrukcyjne ze stali miękkiej charakteryzowały się mniejszym tłumieniem. Na podstawie przeprowadzonych badań nie można jeszcze określić wpływu sposobu powiązania kabla z belką na wielkość tłumienia. W belkach strunobetonowych ze strunami rozłożonymi w dwóch warstwach leżących w pobliżu skrajnych włókien stwierdzono większe tłumienie niż w belkach sprężonych mimośrodowo kablem prostym lub strunami skupionymi w pobliżu dolnej granicy rdzenia. Tłumienie drgań belki strunobetonowej B3 było również wyraźnie większe od tłumienia drgań belek B1 sprężonych kablem parabolicznym.

W belkach grupy A i B (z wyjątkiem belki B3) tłumienie drgań poziomych było na ogół znacznie większe niż tłumienie drgań pionowych. Odwrotna sytuacja była w grupie belek C (znowu z wyjątkiem belki strunobetonowej C3).

### 3.5. Dynamiczny moduł sprężystości betonu

Znając częstość podstawową  $n_{01}$  nietłumionych drgań pionowych doświadczalnej belki wolnopodpartej możemy okre-

Tablica 11

## Charakterystyki tłumienia drgań

Sym- bol belki	Data betono- wania	Logarytmiczny dekre- ment tłumienia drgań pionowych			Współ- czyn- nik tłu- mienia $\varphi$	Logarytmiczny dekre- ment tłumienia drgań poziomych			Współ- czyn- nik tłu- mienia $\varphi_H$
		$v_p$	$v_u$	$v_s$		$v_{HP}$	$v_{HU}$	$v_H$	
A1(z)	17.11.59	0,0654	0,0726	0,0669	0,0106	-	0,1710 0,1140	0,1430	0,0228
A1(r)	12. 4.60	0,1094	0,1224	0,1159	0,0184	0,2960	0,2189	0,2334	0,0371
A1	5. 5.60	0,1030	0,1111	0,1076	0,0171	0,2880	0,2630	0,2742	0,0436
A2	23.11.59	0,0718	-	0,0718	0,0114	0,3795	-	0,3795	0,0602
A2	26.11.59	0,0835	-	0,0835	0,0133	-	-	-	-
A (n)	14. 4.60	0,1271	0,1222	0,1253	0,0199	-	0,1373	0,1373	0,0218
A3(z)	6.11.59	0,0680	-	0,0680	0,0108	-	-	-	-
A3	22.1 .60	0,0635	-	0,0635	0,0101	-	-	-	-
A3(n)	5.4. 60	-	0,0841	0,0841	0,0134	-	-	-	-
Aż	14.11.59	0,1016	0,1103	0,1062	0,0169	0,4354	0,4930	0,4700	0,0746
Aż	18.11.59	0,0848	0,1318	0,1068	0,0170	-	0,4762	0,4762	0,0756
B1	30.10.59	0,0893	0,0895	0,0894	0,0142	0,2083	0,2107	0,2099	0,0334
B1(z)	5. 4.60	0,0755	0,0846	0,0812	0,0129	0,0906	0,0974	0,0949	0,0151
B2	5.4. 60	0,0878	0,0848	0,0868	0,0138	0,2194	0,1391	0,1443	0,0230
B3	14.11.59	0,1201	0,1566	0,1386	0,0221	0,1209	0,1446	0,1378	0,0219
C1	21.11.59	0,5030	0,5778	0,5338	0,0847	-	0,5220	0,5220	0,0828
C1	25.11.59	0,2655	0,3346	0,2985	0,0475	0,1536	0,1993	0,1969	0,0313
C1(n)	1.12.59	0,2773	0,3503	0,2924	0,0465	0,1835	0,1392	0,1515	0,0241
C2(n)	27. 2.60	0,1572	0,1712	0,1626	0,0259	0,1569	0,1634	0,1612	0,0256
C2	9. 4.60	0,1580	0,2259	0,1859	0,0296	0,2065	0,1660	0,1775	0,0282
C3	3. 5.60	0,1729	0,4913	0,2525	0,0401	0,3999	0,4493	0,4328	0,0687
Cż	18.11.59	0,2780	0,3091	0,2858	0,0454	0,4225	0,1902	0,2527	0,0402
Cż	19.11.59	0,3037	0,5136	0,3831	0,0609	-	0,2256	0,2256	0,0359



ślic dynamiczny moduł sprężystości betonu za pomocą następującego wzoru:

$$E_d = \frac{4 l^4 n_{nt}^2 q}{g J \pi^2} \quad (89)$$

wywodzącego się z (86), przy czym

$$n_{nt} = \frac{n}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (90)$$

na podstawie monografii [10]. Jak już stwierdzono na str.81, wpływ tłumienia na częstość drgań belek doświadczalnych jest niewielki i można go pominąć. Dla największej wartości  $\rho = 0,0847$  figurującej w tablicy 11 (belka C1 - 21.11.59) otrzymujemy

$$n_{nt} = \frac{n}{\sqrt{1 - 0,0847^2}} = 1,004 n.$$

Wzór (89) ważny jest dla belek niesprężonych. Dla belek sprężonych osiowo

$$E_d = \frac{(4 q l^2 n^2 - g S) l^2}{J g \pi^2}, \quad (91)$$

co wynika bezpośrednio ze wzoru (12). Wzór (91) znajdzie również zastosowanie w przypadku belki sprężonej kablem parabolicznym o zerowym mimośrodku w przekrojach podporowych. Moduł sprężystości betonu w belce sprężonej mimośrodkowo kablem prostym obliczymy ze wzoru

$$E_d = \frac{4 q n^2 l^4}{\sqrt{4} \cdot \pi^2 g J} - \frac{l^2 S}{\sqrt{2} \cdot \pi^2 J}, \quad (92)$$

który otrzymujemy przekształcając odpowiednio wzór (69).

## Dynamiczny moduł sprężystości

Symbol belki	Data betonowania	Wytrzymałość betonu kg/cm <sup>2</sup>	E <sub>d</sub> kg/cm <sup>2</sup>	Wytrzymałość betonu w dniu pomiaru czasu przejścia fali ultradźwiękowej kg/cm <sup>2</sup>	E <sub>dl</sub> w kg/cm <sup>2</sup>		
					$\mu = \frac{1}{4}$	$\mu = \frac{1}{5}$	$\mu = \frac{1}{6}$
1	2	3	4	5	6	7	8
A1	17.11.59	480	329100	-	385200	416200	431500
A1	12. 4.60	340	247900	-	338600	365900	379300
A1	5. 5.60	430	286100	-	368600	398300	412900
A2	23.11.59	445	-	480	339000	366200	379700
A3	6.11.59	545	349000	-	-	-	-
A3	22. 1.60	460	307900	-	400200	432400	448300
A3	5. 4.60	510	324600	540	401000	433200	449100
Aż	14.11.59	510	336500	-	354100	382600	396600
Aż	18.11.59	500	353300	520	369300	399000	413600
B1	30.10.59	550	310400	590	350300	378400	392300
B1	5. 4.60	510	336800	-	367400	396900	411471
C1	21.11.59	540	396400	-	-	-	-
C1	25.11.59	500	378000	-	-	-	-
C1	1.12.59	500	375000	-	437900	473200	490500
C2	27. 2.60	510	315000	-	401300	433600	449500
Cż	18.11.59	560	367100	-	-	-	-
Cż	19.11.59	550	331400	-	367500	397100	411700



Dla grupy A belek doświadczalnych

$$J = 4860 \text{ cm}^4; \quad q = 0,45 \text{ kG/cm.}$$

Wobec tego przy  $g = 981 \text{ cm/sek}^2$

$$E_d = 2030,37 \text{ n}^2 - 4,80 \text{ S.} \quad (93)$$

Dla grupy B

$$J = 5832 \text{ cm}^4, \quad q = 0,54 \text{ kG/cm,}$$

$$E_d = 2030,64 \text{ n}^2 - 4,00 \text{ S.} \quad (94)$$

Dla grupy C

$$J = 22500 \text{ cm}^4, \quad q = 0,73 \text{ kG/cm,}$$

$$E_d = 711,54 \text{ n}^2 - 1,04 \text{ S.} \quad (95)$$

Biorąc wartości  $n$  z kolumny 10 tablicy 10 i siły  $S$  wykorzystywane już przy określaniu naprężeń figurujących w kolumnach 5 i 6 tejże tablicy obliczono wartości modułów sprężystości  $E_d$  zestawione w tablicy 12. Moduł sprężystości betonu w belce C2 - 27.2.60 obliczono wstawiając do wzoru (95) średnią wartość  $n$  otrzymaną z kilku wibrogramów ilustrujących drgania belki niesprężonej ( $S = 0$ ) wywołane uderzeniem. Chcąc obliczyć moduł sprężystości betonu w belce sprężonej mimośrodowo kablem prostym trzeba znać współczynnik  $\nu$ , który odpowiada danemu cyklowi drgań. Przy rejestracji jednego z cykli drgań belki A2 - 23.11.59 było  $f_p = 5,06 \text{ mm}$  oraz  $n = 13,782 \text{ Hz}$ . Ze wzoru (49)

$$C_1 = \frac{4,8 f_q}{f_s + f_q + f_p} = \frac{4,8 \times 2,08}{-5,33 + 2,08 + 5,06} = 5,52.$$

Wykorzystując rysunek 6 znajdziemy  $\Delta = 0,1$ .  
Wobec tego

$$\nu = 1 + \frac{2\Delta}{\pi} = 1,064.$$

Ze wzoru (92) otrzymujemy

$$E_d = \frac{4 \times 0,45 \times 480^4 \times 13,782^2}{1,28 \times 981 \times 4860 \times 9,87} - \frac{480^2 \times 9948}{1,13 \times 4860 \times 9,87} =$$
$$= 260000 \text{ kg/cm}^2$$

Podane w tablicy 12 moduły sprężystości betonu w belkach Aż i Cz zostały obliczone bez uwzględnienia zbrojenia. Po uwzględnieniu zbrojenia otrzymamy:

dla belki Aż - 14.11.59:

$$J_i = 6095 \text{ cm}^4 = 1,254 J_b,$$

$$E_d = \frac{336500}{1,254} = 268300 \text{ kg/cm}^2,$$

dla belki Aż - 18.11.59:

$$E_d = \frac{353300}{1,254} = 281700 \text{ kg/cm}^2,$$

dla belki Cz - 18.11.59:

$$J_i = 1,196 J_b,$$

$$E_d = \frac{367100}{1,196} = 306900 \text{ kg/cm}^2,$$

dla belki Cz - 19.11.59:

$$E_d = \frac{331400}{1,196} = 277100 \text{ kg/cm}^2.$$



Średnia wartość modułu sprężystości obliczona na podstawie tablicy 12 wynosi

$$E_{d\text{śr}} = 334000 \text{ kg/cm}^2.$$

F.P. Müller [14] zaleca dla marek betonu od 300 do 600 średnią wartość

$$E_{d\text{śr}} = 320000 \text{ kg/cm}^2.$$

W dniu 5.11.1960 r. przeprowadzono pomiar czasu przejścia przez belki doświadczalne podłużnych fal sprężystych. Pomiaru dokonano za pomocą betonoskopu impulsowego BJ-6 nr 5912 wyprodukowanego przez Zakład Badania Drgań Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk. Przy każdym pomiarze głowice betonoskopu były przykładane do końców belki, wobec czego droga przebyta przez nadane impulsy równała się całkowitej długości  $l$  danej belki. Znając czas  $t$  przejścia impulsów przez beton i drogę  $l$  można już wyznaczyć prędkość podłużnych fal sprężystych

$$v_L = \frac{l}{t} \text{ [m/sek].}$$

Prędkość ta związana jest z dynamicznym modułem sprężystości zależnością

$$v_L = \sqrt{\frac{E_{d_i} (1 - \mu)}{\rho_b (1 + \mu)(1 - 2\mu)}}, \quad (96)$$

której wyprowadzenie dla przypadku  $\mu = 0$  można znaleźć w monografii [6]. Zależność (96) podawana jest w wielu pracach, m.in. w [3] i [5].

Z (96) otrzymujemy

$$E_{d_i} = \frac{v_L^2 \rho_b}{g} \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \quad (97)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} = m_e$$

i przyjęciu  $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$  oraz  $\gamma_b = 2,5 \text{ T/m}^3$

$$E_{d_i} = 0,255 \cdot v_L^2 m_e \left[ \text{T/m}^2 \right] \quad (98)$$

W tablicy 12 podano wartości  $E_{d_i}$  obliczone dla 3-ch wartości stosunku odkształcenia poprzecznego do odkształcenia podłużnego, a mianowicie:  $\mu = \frac{1}{4}$ ,  $\mu = \frac{1}{5}$ ,  $\mu = \frac{1}{6}$ . Odpowiednie wartości współczynnika  $m_e$  wynoszą:

$$m_e = 0,833\dots, \quad m_e = 0,9, \quad m_e = 0,933\dots,$$

a wzór na moduł sprężystości przyjmuje kolejno następujące postacie:

$$E_{d_i} \left( \mu = \frac{1}{4} \right) = 0,0212 v_L^2 \left[ \text{kg/cm}^2 \right] \quad (99)$$

$$E_{d_i} \left( \mu = \frac{1}{5} \right) = 0,0229 v_L^2 \quad \text{"-"} \quad (99a)$$

$$E_{d_i} \left( \mu = \frac{1}{6} \right) = 0,0238 v_L^2 \quad \text{"-"} \quad (99b)$$

Prędkość fal sprężystych ma w powyższych wzorach wymiar m/sek.

Na podstawie wyrzykowych badań przy użyciu sklerometru (rys.30) stwierdzono, że w okresie około 2-ch miesięcy dzielącym badania dynamiczne od pomiaru czasu przejścia przez beton fal sprężystych wytrzymałość betonu w belkach doświadczalnych wzrosła o około 6,5%. Jest to nieco mniej niżby wynikało z danych Saligera (Saliger R. : Der Stahlbetonbau. Wiedeń 1949, str.53). Jeśli założylibyśmy podobny wzrost dynamicznego modułu sprężystości, to najbliższe rzeczywisto-



ści okazałyby się te jego wartości, które odpowiadają stosunkowi odkształceń  $\mu = \frac{1}{4}$ . Średnia z 13-u wartości obliczonych za pomocą wzoru (99) wynosi  $375400 \text{ kg/cm}^2$ , zaś średnia wartość  $E_a$  z kolumny 4 tablicy 12 powiększona o 6,5% wynosi  $355700 \text{ kg/cm}^2$ .

Pomiar czasu przejścia fal sprężystych przez beton belek A3 = 5.4.60, Aż = 14.11.59, B1 = 5.4.60 i C2 = 27.2.60 ilustrują przykładowo rysunki 141-144.

### 3.6. Wpływ intensywności sprężenia na parametry ruchu drgającego

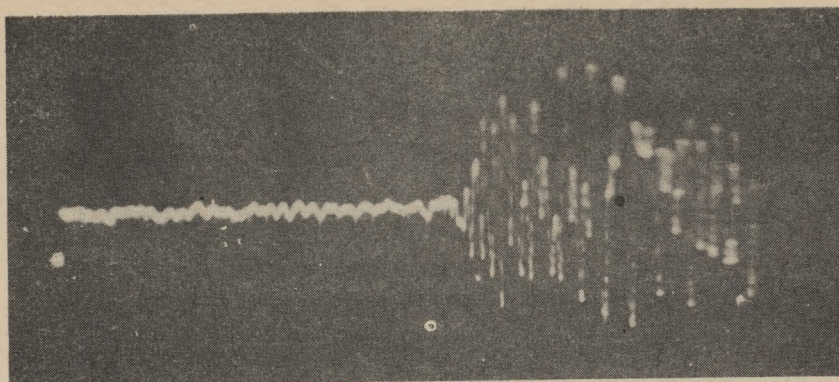
Dla określenia wpływu intensywności sprężenia na częstość drgań własnych, tłumienie i współczynnik dynamiczny poddano specjalnym badaniom 3 belki doświadczalne, a mianowicie: A2 = 14.4.60, A3 = 5.4.60 i C2 = 27.2.60. Badania te polegały na rejestrowaniu drgań belek przy różnych stopniach sprężenia, tzn. przy różnych wartościach siły sprężającej. Drgania belek A2 = 14.4.60 i A3 = 5.4.60 rejestrowano przy sześciu stopniach sprężenia, a drgania belki C2 = 27.2.60 przy pięciu stopniach. Podobnie jak przy badaniach poprzednio opisywanych, belki były wprowadzane w ruch drgający przez nagłe przerwanie działania siły i przez uderzenie. Po zrealizowaniu danego stopnia sprężenia rejestrowano co najmniej 6 cykli drgań pionowych wywołanych nagłym przerwaniem działania siły, 3 cykle drgań pionowych wywołanych uderzeniem oraz 6 cykli drgań poprzecznych poziomych (w tym 3 wywołane nagłym przerwaniem działania siły pionowej i 3 wywołane bocznym uderzeniem). W niektórych przypadkach ilość zarejestrowanych cykli drgań była większa od minimalnej.

Na rysunku 145 uchwycono moment osiągnięcia jednego ze stopni sprężenia belki A3 = 5.4.60. Na pierwszym planie widzimy tu urządzenie naciągowe składające się z prasy hydraulicznej o podwójnym działaniu i pompy olejowej. Odczyt jednego z manometrów tej pompy stanowił podstawę do określenia siły sprężającej przy danym stopniu sprężenia.

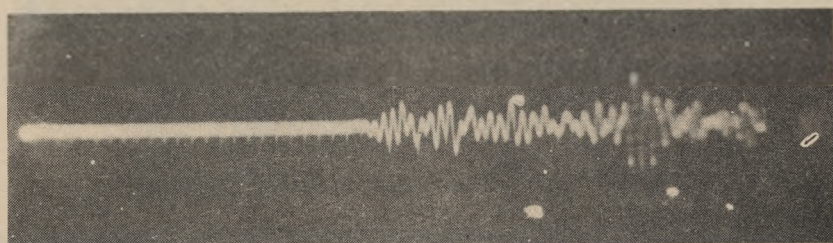
Na rysunku 145 widać również urządzenia do wzbudzenia i rejestracji drgań w stanie bezpośrednio poprzedzającym nadanie belce ugięcia początkowego.

Wibrogramy ilustrujące drgania belki A2 = 14.4.60 przy niektórych stopniach sprężenia przedstawiono na rysunkach 146 - 153. Wibrogramy obrazujące drgania belki A3 = 5.4.60 mamy na rysunkach 154-159, zaś drgania belki C2-27.2.60 przy różnych stopniach sprężenia znalazły odzwierciedlenie na rysunkach 160-170.

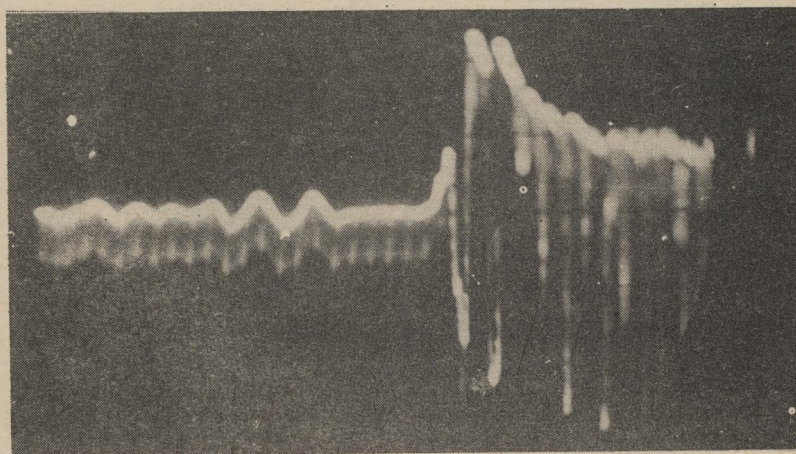




Rys.141 A3 - 5.4.60  $t = 23 \times 50 \times 10^{-6}$  sek  
 $l = 4,998$  m  $v_L = 4346$  m/sek

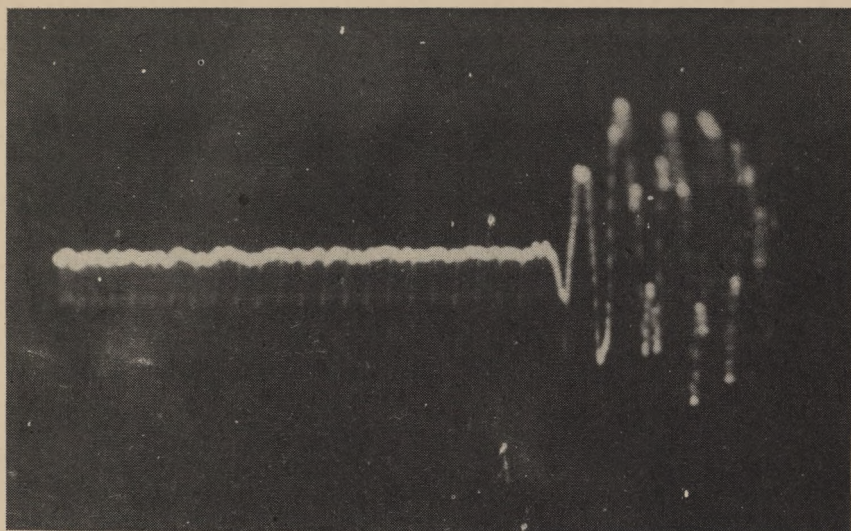


Rys.142 A2 - 14.11.59  $t = 24,5 \times 5 \times 10^{-6}$  sek  
 $l = 5,003$  m,  $v_L = 4084$  m/sek



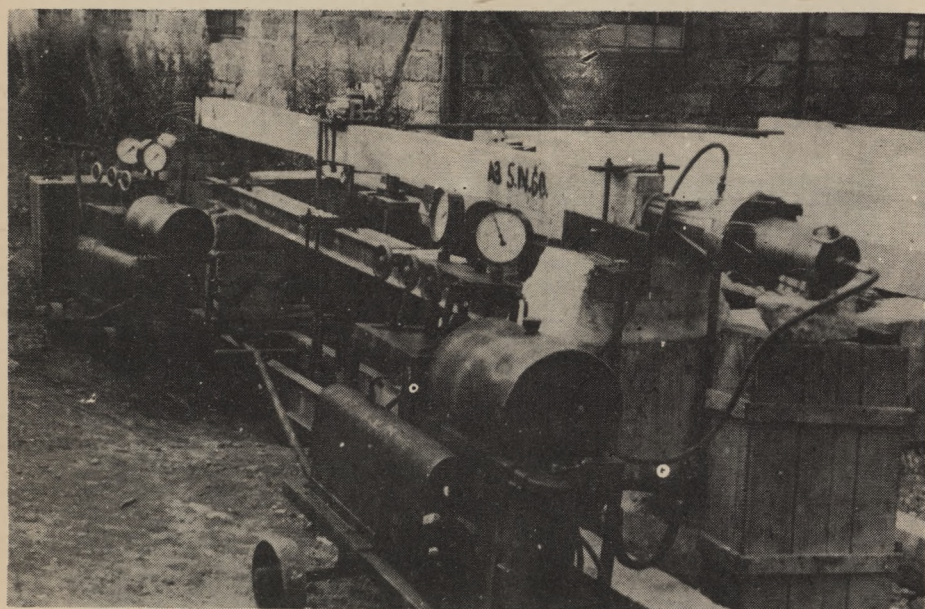
Rys.143 B1 - 5.4.60  $t = 24 \times 50 \times 10^{-6}$  sek  
 $l = 4,993$  m  $v_L = 4160$  m/sek



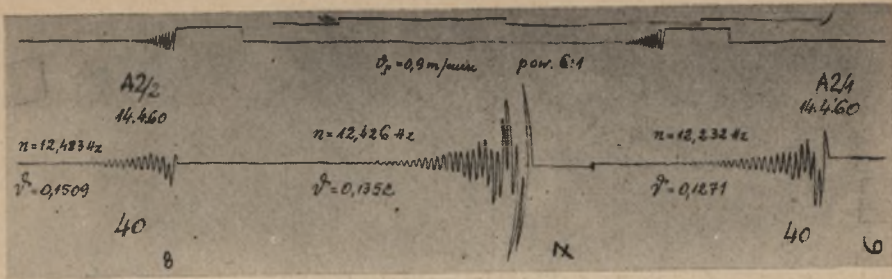


$C_2 - 27.2.60 \quad t = 23 \times 50 \times 10^{-6} \text{ sek,}$   
 $l = 5,000 \text{ m} \quad v_L = 4348 \text{ m/sek}$

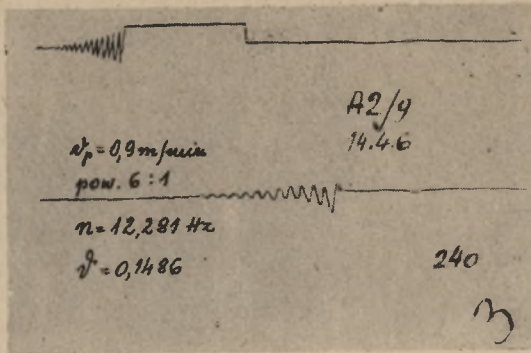
Rys.144



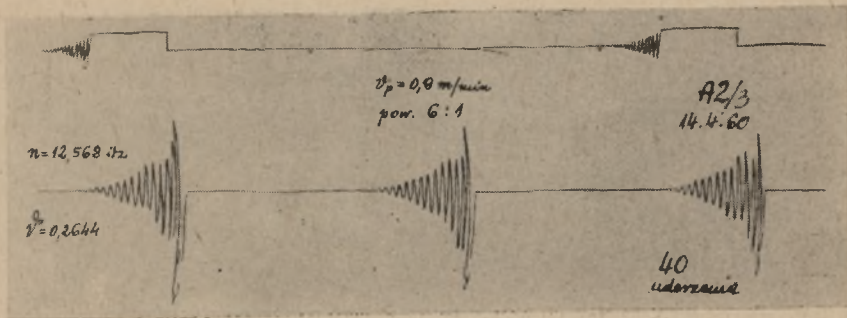
Rys.145



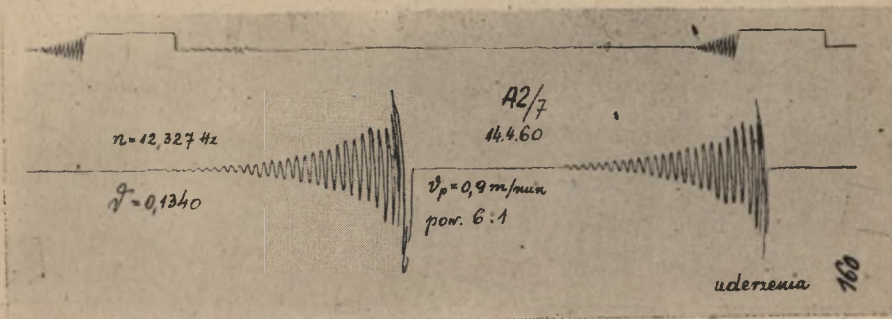
Rys. 146



Rys. 147

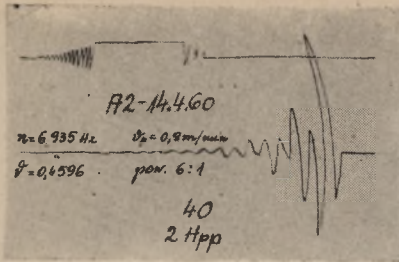


Rys. 148

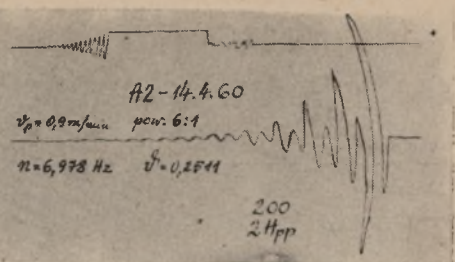


Rys. 149

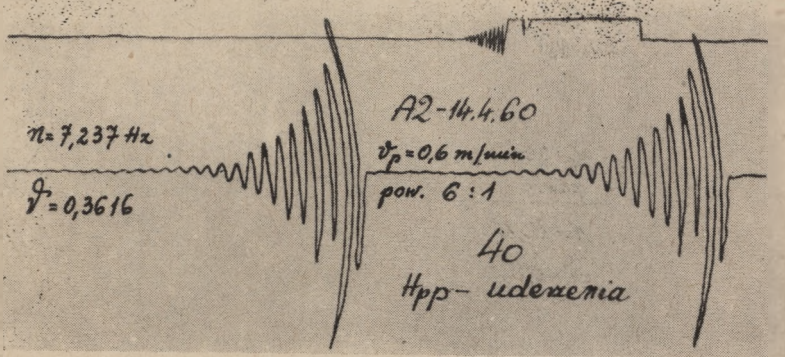




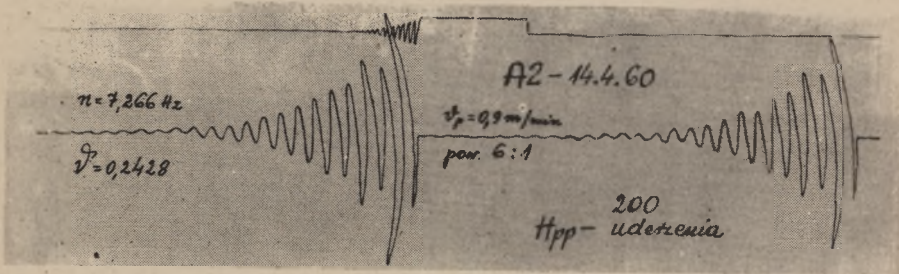
Rys. 150



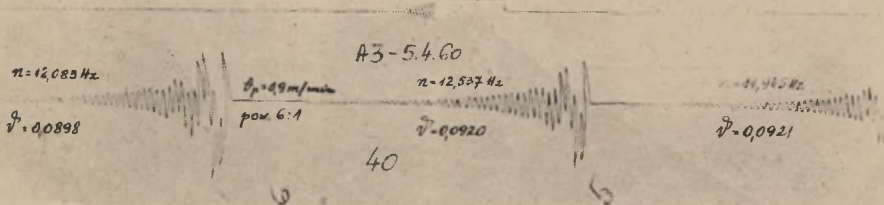
Rys. 151



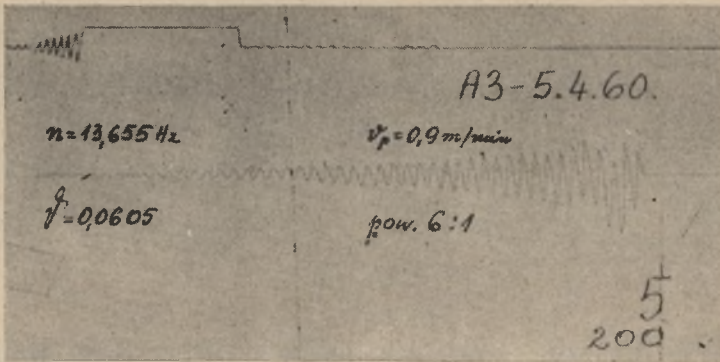
Rys. 152



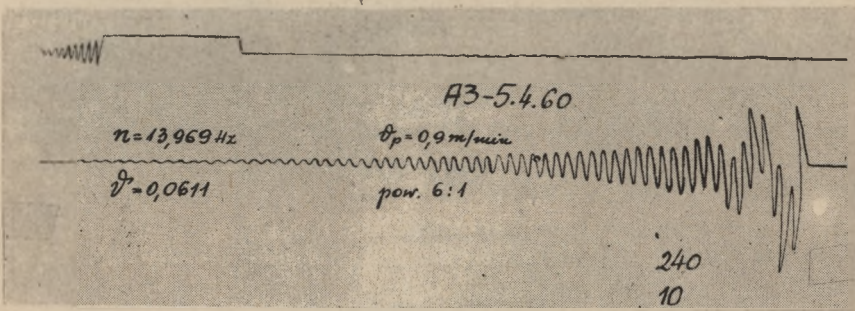
Rys. 153



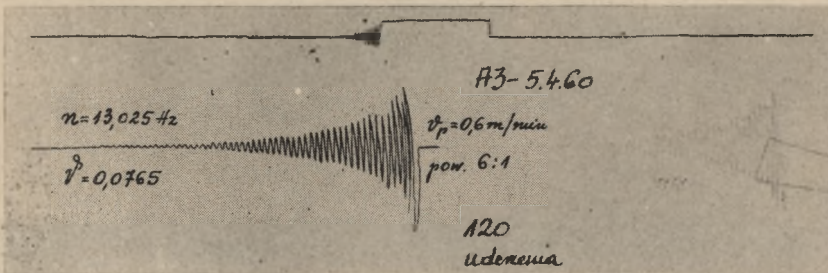
Rys. 154



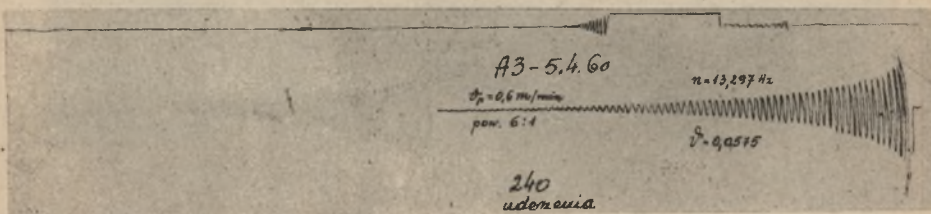
Rys.155



Rys.156

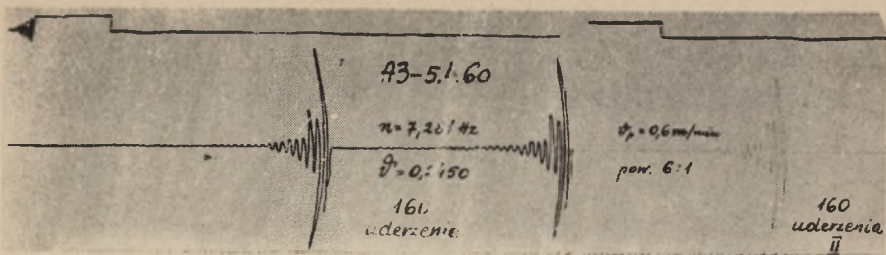


Rys.157

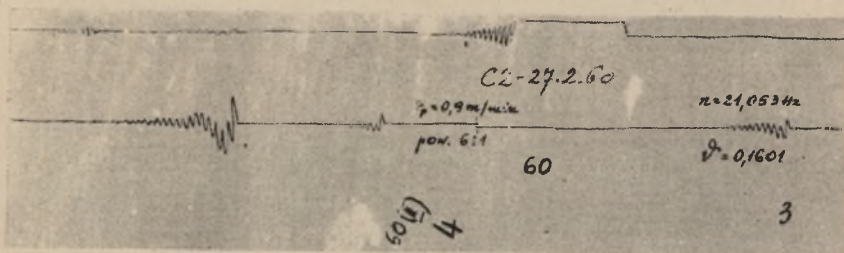


Rys.158

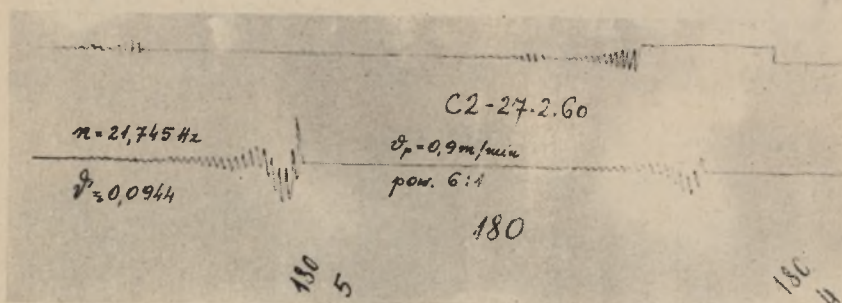




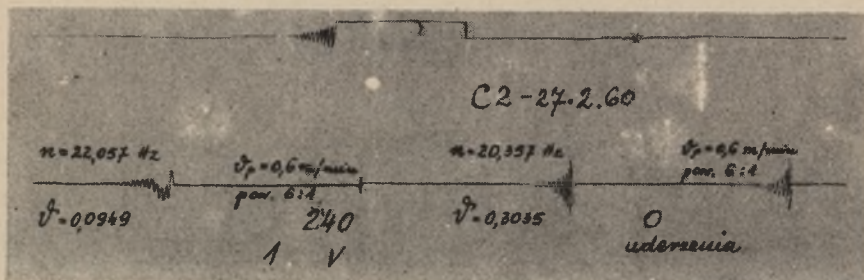
Rys. 159



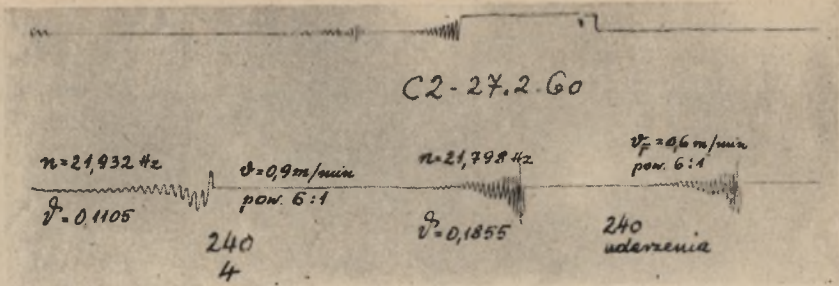
Rys. 160



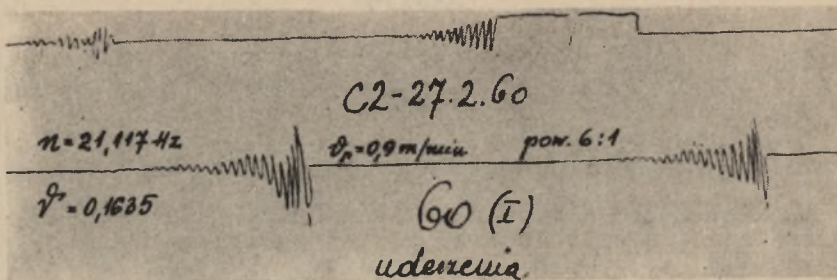
Rys. 161



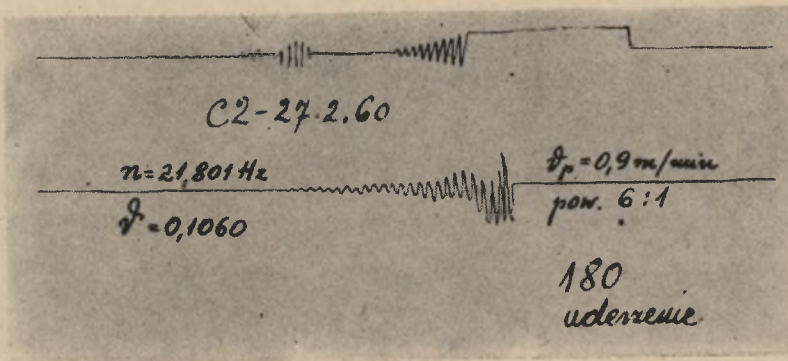
Rys. 162



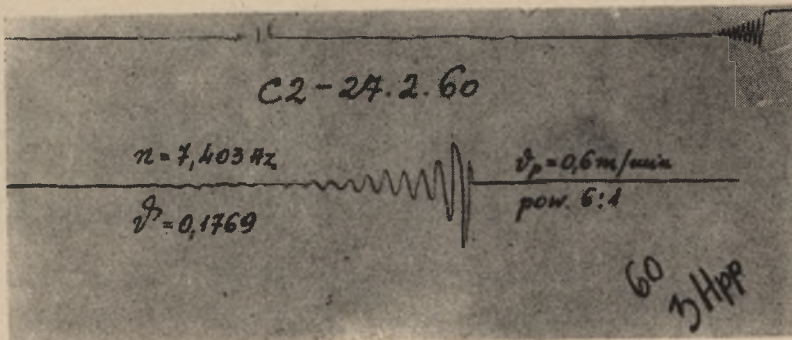
Rys. 163



Rys. 164

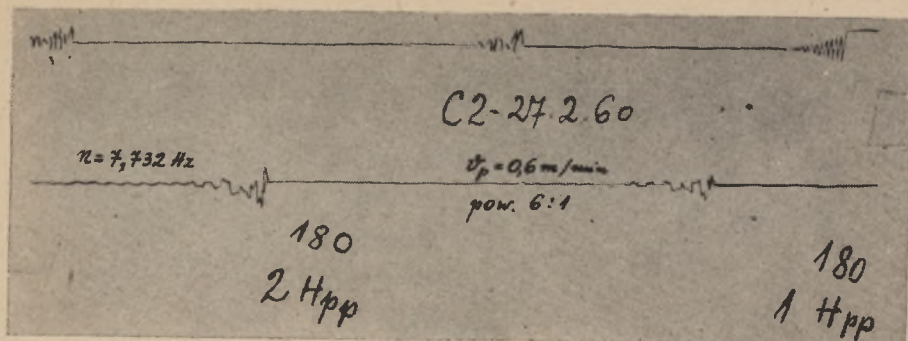


Rys. 165

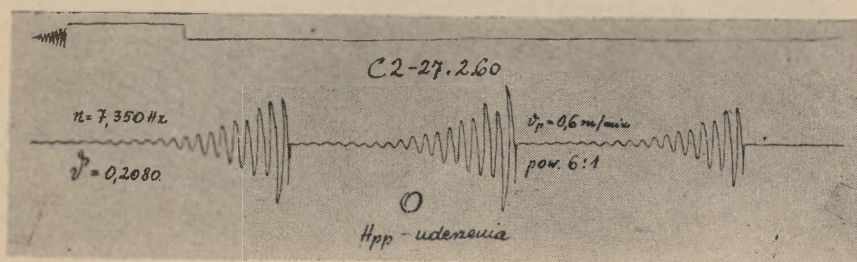


Rys. 166

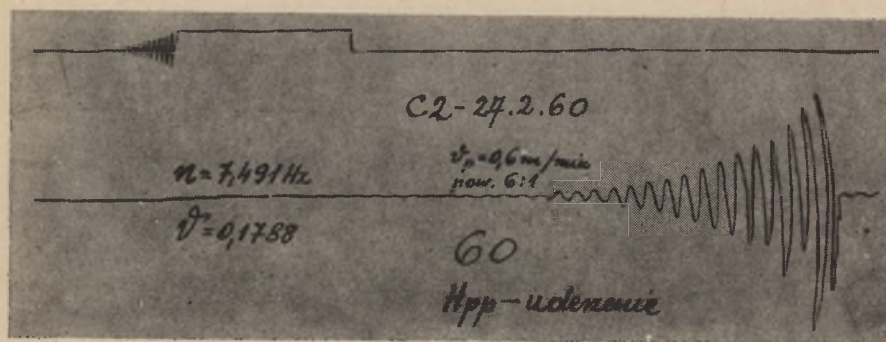




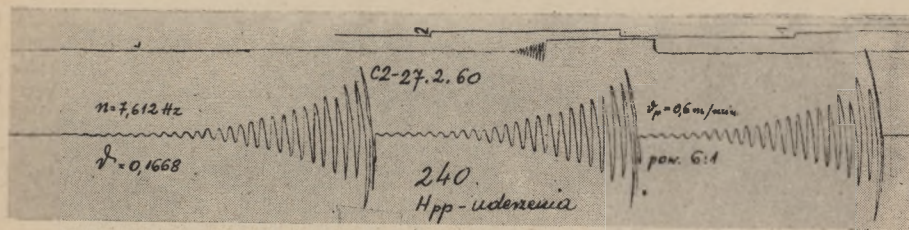
Rys.167



Rys.168



Rys.169



Rys.170

Wyniki badań belek A2 = 14.4.60, A3 = 5.4.60 i C2 = 27.2.60 zestawiono w tablicach 13-18. .

Tablice 13 i 17 zgodne są w zakresie drgań pionowych z wnioskami o*d* i d) na str.30. W tablicy 13 podano średnie wartości częstości drgań uzyskane z wszystkich zarejestrowanych przy danym stopniu sprężenia cykli drgań. Początkowe ugięcia  $f$  (kolumna trzecia tablicy 13) obliczono tu w oparciu o rysunek 8 i wzór (18) przyjmując za  $f_p$  średnią z pomiarów dokonanych przy rejestracji drgań. Składowe ugięcia pochodzące od sprężenia i ciężaru własnego wynosiły tu

$$f_s = - 0,000073 \cdot S_s \quad f_q = 2,63 \text{ mm.}$$

Znając wartości  $f$  i  $f_p$  można było już ze wzoru (48) obliczyć  $C_1$  i korzystać z odpowiednio wykonanych rysunków 6 i 7. Podane w tablicy 17 częstości  $n_p$  obliczono tylko na podstawie tych wibrogramów, przy uzyskiwaniu których stosowane były te same wartości  $f_p$ . Ugięcia  $f_s$  dla każdego stopnia sprężenia były tu mierzone za pomocą  $S_s$  czujnika, a ugięcie wywołane ciężarem własnym wynosiło w przybliżeniu 0,765 mm.

Tablica 15 zawierająca wyniki badań belki A3 = 5.4.60 potwierdza w całej pełni wzór (12) na str. 13. Wzrost intensywności sprężenia osiowego powoduje również wzrost częstości drgań poprzecznych poziomych (patrz ostatnia kolumna tablicy 15).

W tablicach 13 i 17 odnoszących się do przypadku sprężenia mimośrodowego kablem prostym można zauważyć pewną tendencję wzrostu częstości poziomych drgań poprzecznych wraz ze wzrostem sprężenia.

Wzrost intensywności sprężenia osiowego powoduje dość wyraźny spadek wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia i współczynnika tłumienia poprzecznych drgań pionowych (tablica 16).

Daje się tu również zauważyć tendencja do spadku tłumienia drgań poziomych ze wzrostem sprężenia.

Intensywniejsze sprężenie powodowało również spadek tłumienia drgań poprzecznych pionowych i poziomych belki C2 = 27.2.60 (tablica 18). Tendencja do spadku tłumienia drgań poziomych i pionowych drgań wywołanych uderzeniem wystąpiła przy badaniu belki A2 = 14.4.60. Dał się tu jednak zauważyć pewien (nieregularny zresztą) wzrost tłumienia drgań pionowych wywołanych nagłym przerwaniem działania siły.



### 3.7. Współczynnik dynamiczny

Nagłe przerwanie działania na belkę skierowanej pionowo w dół siły można potraktować jako równoważne przyłożeniu do belki w sposób dynamiczny siły o tej samej wielkości ale skierowanej odwrotnie. Przez współczynnik dynamiczny  $\varphi$  będziemy tu rozumieć stosunek największego wychylenia belki  $A_{\max}$  po nagłym przerwaniu działania siły o wartości  $P$ , do ugięcia statycznego  $f_{st}$  wywołanego siłą narastającą powoli od zera do wartości  $P$ .

Największe rzeczywiste wychylenie  $A_{\max}$  otrzymuje się jako iloraz wychylenia  $A_{\max}$  odczytanego z odpowiedniego wibrogramu i powiększenia rzeczywistego  $p_w$  zrealizowanego przez wibrograf Geigera (tablica 8). Wobec tego

$$\varphi = \frac{A_{\max}}{f_{st} p_w} \quad (100)$$

Wielkości  $f_{st}$  były mierzone za pomocą czujnika przy rejestracji każdego cyklu drgań wywołanych nagłym przerwaniem działania siły. Średnie (dla każdej belki) wartości współczynników dynamicznych obliczone za pomocą wzoru (100) zestawiono w tablicy 19.

Współczynniki dynamiczne odpowiadające poszczególnym stopniom sprężenia belek A2 - 14.4.60 i A3 - 5.4.60 podano w tablicach 14 i 16. Widzimy, że przy wyższych stopniach sprężenia (200 i 240 w przypadku belki A2 - 14.4.60 i 160, 200 oraz 240 w przypadku belki A3 - 5.4.60) współczynniki dynamiczne mają większe wartości niż przy niższych stopniach sprężenia.

Uzależniając współczynnik dynamiczny od rozpiętości np. według wzoru

$$\varphi = 1 + \frac{1}{0,3 l + 2}$$

podanego w Normatywie Technicznym projektowania mostów na drogach samochodowych opracowanym przez BPBK . Katowice otrzymalibyśmy jedną dla wszystkich belek doświadczalnych wartość

$$\varphi = 1 + \frac{1}{0,3 \times 4,8 + 2} = 1,29.$$

Zależność częstotści drgań od stopnia sprężenia  
Belka A2 - 14.4.60

Ciśnienie w prasie kg/cm <sup>2</sup>	Siła sprężająca kg	Pozat-kowa strzałka ugięcia mm	Częstość drgań [Hz]					
			pionowych			poziomych		
			n <sub>P</sub>	n <sub>u</sub>	n	n <sub>HP</sub>	n <sub>Hu</sub>	n <sub>H</sub>
40	4006	+ 1,22	12,672	12,498	12,614	6,876	7,082	7,020
80	8794	- 2,55	12,929	12,513	12,786	6,829	7,109	6,974
120	13674	- 5,85	12,465	12,629	12,525	6,982	7,393	7,146
160	17783	- 8,87	12,649	12,343	12,474	7,064	7,308	7,175
200	22326	- 12,30	12,306	12,154	12,230	7,114	7,196	7,149
240	27260	- 15,68	12,125	11,896	12,010	7,119	7,326	7,212



Zależność tężnienia i współczynnika dynamicznego od stopnia sprężenia

Belka A2 - 14.4.60

Ciężnienie w prasie kg/cm <sup>2</sup>	Tężnienie						Współ- czynnik dyna- miczny $\rho$
	drgan pionowych		drgan poziomych				
	$\nu_p$	$\nu_u$	$\nu_{HP}$	$\nu_{Hu}$	$\nu_H$	$\rho_H$	
40	0,1295	0,2719	0,4300	0,3702	0,3902	0,0620	1,18
80	0,1373	0,2881	0,3010	0,3113	0,3054	0,0486	1,21
120	0,1409	0,2878	0,3221	0,3014	0,3138	0,0499	1,20
160	0,1559	0,1323	0,2704	0,2939	0,2822	0,0449	1,19
200	0,1526	0,1618	0,2792	0,2612	0,2709	0,0430	1,25
240	0,1642	0,1578	0,2606	0,3025	0,2799	0,0445	1,30

Zależność częstości drgań od stopnia sprężenia

Belka A3 - 5.4.60

Ciśnienie w prasie kg/cm <sup>2</sup>	Siła sprę- żająca kg	Częstość drgań [Hz]				
		pionowych			poziomych	
		n <sub>p</sub>	n <sub>u</sub>	n	n <sub>Hu</sub>	
40	4006	12,234	-	12,234	7,200	
80	8794	12,535	-	12,535	7,219	
120	13674	12,956	12,937	12,947	7,294	
160	11783	13,138	13,293	13,190	7,354	
200	22326	13,331	13,441	13,381	7,683	
240	27260	13,335	13,449	13,449	7,726	



Zależność tłumienia i współczynnika dynamicznego od stopnia sprężenia

Belka A3 - 5.4.60

Ciśnienie w prasie kg/cm <sup>2</sup>	Logarytmiczny dekrement tłumienia i współczynnik tłumienia						Współczynnik dynamiczny $\varphi$
	drgań pionowych			drgań poziomych			
	$\nu_p^1$	$\nu_u$	$\nu_s$	$\varphi$	$\nu_{Hu}^1$	$\nu_{Hu}^2$	
40	0,0912	-	0,0912	0,0145	0,2523	0,0401	1,12
80	0,0846	-	0,0846	0,0135	0,3146	0,0500	1,17
120	0,0826	0,0842	0,0834	0,0133	0,2150	0,0342	1,15
160	0,0825	0,0755	0,0802	0,0128	0,2190	0,0348	1,29
200	0,0647	0,0697	0,0643	0,0102	0,1874	0,0298	1,24
240	0,0547	0,0588	0,0559	0,0089	0,1865	0,0297	1,28

Zależność częstości drgań od stopnia sprężenia

Belka C2 = 27.2.60

Ciśnienie w prasie kg/cm <sup>2</sup>	Siła sprężająca kg	Początkowa strzałka ugięcia mm	Częstość drgań [Hz]					
			pionowych			poziomych		
			n <sub>p</sub>	n <sub>u</sub>	n <sub>HP</sub>	n <sub>Hu</sub>	n <sub>H</sub>	
0	0	-	-	20,943	-	7,589	7,589	7,589
60	6303	+ 1,320	21,013	21,258	7,432	7,492	7,492	7,459
120	13674	+ 0,675	21,189	22,111	7,782	7,706	7,706	7,731
180	20049	- 0,230	21,586	21,729	7,794	7,648	7,648	7,670
240	27260	- 0,695	21,446	20,851	7,782	7,648	7,648	7,664



## Zależność tłumienia od stopnia sprężenia

Belka C2 - 27.2.60

Ciśnienie w prasie kg/cm <sup>2</sup>	Logarytmiczny dekrement tłumienia i współczynnik tłumienia									
	drgań pionowych					drgań poziomych				
	$\nu_P$	$\nu_u$	$\nu$	$\rho$	$\nu_{HP}$	$\nu_{Hu}$	$\rho_{Hu}$			
0	-	0,3192	-	-	-	0,2207	0,0351			
60	0,1547	0,1611	0,1584	0,0252	0,1649	0,1921	0,0306			
120	0,1264	0,1587	0,1425	0,0227	-	0,1949	0,0310			
180	0,1113	0,1077	0,1099	0,0175	-	0,1684	0,0268			
240	0,1007	-	0,1007	0,0160	-	0,1655	0,0263			

W tablicy 19 widzimy duże zróżnicowanie średnich wartości od 1,13 do 1,54. Wartości  $\varphi$ , odpowiadające poszczególnym cyklom drgań jeszcze bardziej różniły się między sobą, a niektóre z nich przekraczały nawet liczbę 2.

Tablica 19

Wartości współczynnika dynamicznego

Symbol belki	Data betonowania	Współczynnik dynamiczny	Symbol belki	Data betonowania	Współczynnik dynamiczny
A1	17.11.59	1,13	B2	5.4.60	1,14
A1	12. 4.60	1,54	B3	14.11.59	1,32
A1	5. 5.60	1,40	C1	21.11.59	1,13
A2	23.11.59	1,17	C1	25.11.59	1,15
A2	14. 4.60	1,26	C2	27. 2.60	1,47
A3	22. 1.60	1,18	C2	9. 4.60	1,19
Aż	14.11.59	1,20	C3	3. 5.60	1,13
Aż	18.11.59	1,14	Cż	18.11.59	1,26
B1	30.10.59	1,25	Cż	19.11.59	1,18
B1	5. 4.60	1,18			



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Bramall B.: Determination of forces by resonance method. *The Engineer*, 1956, nr 5247.
- [2] Durasow A.G., Kryłow N.N.: Fiziczeskije mietody kontrola kaczestwa bietona. Moskwa 1959.
- [3] Eisenmann K., Odewald G.: Untersuchung der elastischen Eigenschaften von Beton mittels Ultraschall. *Beton - und Stahlbetonbau* 1959 nr 6.
- [4] Freyssinet E.: Une révolution dans les techniques du béton. Wyd.II, Paryż 1939.
- [5] Filipczyński L., Pawłowski Z., Wehr J.: Ultradźwiękowe metody badań materiałów. Warszawa 1959.
- [6] Gorelik G.S.: Kolebanija i wołny. Moskwa 1959.
- [7] Herrmann G.: The Influence of Initial Stress on the Dynamic Behaviour of Elastic and Viscoelastic Plates. *Abh. der Int. Ver. für Brückenbau und Hochbau*, t.XVI.
- [8] Hop T., Pałka J., Sulimowski Z., Lewinowski C.: Zastosowanie sprężenia do wzmocnienia fundamentu pod turbozespół. *Inżynieria i Budownictwo*, 1961, nr 10.
- [9] Hop T.: Zastosowanie równania wieloboku sznurowego w dynamice. Referat wygłoszony w ramach Sympozium na temat Metod numerycznych w Mechanice zorganizowanego w Łodzi przez PTMTS i Politechnikę Łódzką, w dniach od 18 do 21 stycznia 1960 r.

- [10] Kisiel J.: Dynamika fundamentów pod maszyny. Warszawa 1957.
- [11] Kozak R.: Wpływ drgań dynamicznych na podkłady kolejowe. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Budownictwo, nr 2. Poznań 1959 r.
- [12] Kuźniecowa G.K.: O wlijanii priedwaritielnogo napriazhenija na dinamiczeskije swojstwa napriazhonno armirowan~~ych~~ **nych** bałok. Izwiestia Wysszych Uczebnych Zawiedienij - Stroitielstwo i architektura, 1959, nr 3.
- [13] Lizarijew A.D.: Sowremiennyje issledowanija w obłasti dinamiki priedwaritielno napriazhonnych żelezobietonnych konstrukcij. Izwiestia Wysszych Uczebnych Zawiedienij - Stroitielstwo i architektura, 1959, nr 9.
- [14] Müller F.P.: Über den dynamischen E - Modul von Spannbeton. Beton - und Stahlbetonbau. 1959, nr 8.
- [15] Müller F.P.: Die **Ermittlung** der Abweichung vom linearen Formänderungsgesetz sowie die Dämpfung von Spannbeton durch Ausschwingversuche. Beton - und Stahlbetonbau. 1959 nr 11.
- [16] Reley (Rayleigh J.W.): Teorija zwuka. Tom I. Moskwa 1955.
- [17] Roš M.R.: E M P A - Bericht Nr 155. Vorgespannter Beton. Zurych, 1946.
- [18] Roš M.R., Sarrasin A.: E M P A - Bericht Nr 162. Die materialtechnischen Grundlagen und Probleme des Eisenbetons im Hinblick auf die zukünftige Gestaltung Stahlbeton - Bauweise. Zurych, 1950.
- [19] Schulze H.: Auswertung von Vibrogramen. Metallwerker K. - G., Meerane (Sachs). 1956.



- [20] Sorokin E.S.: Dinamiczeskij rasczot niesuszcznych konstrukcij zdanij. Moskwa 1956.
- [21] Stüssi F.: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten. Springer - Verlag, 1958.
- [22] Timoschenko S.P., Young D.Z.: Vibration Problems in Engineering. III wyd. New York, London, Toronto, 1955.
- [23] Ziemba S.: Analiza drgań. Tom I i II. Warszawa 1959.
- [24] Zimmermann R.: Pomiarzy naprężeń i drgań metodami elektrycznymi. Warszawa 1959.



BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
Politechniki Śląskiej

P 3362 / 62