

PROFESSOR DR.A.WITTING
INTEGRALRECHNUNG



SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 88

Dv 1
0302

SAMMLUNG GÖSCHEN

UNSER HEUTIGES WISSEN IN KURZEN,
KLAREN, ALLGEMEINVERSTÄNDLICHEN
EINZELDARSTELLUNGEN

*ZWECK UND ZIEL DER „SAMMLUNG GÖSCHEN“
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche
und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der
Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen,
auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Be-
rücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bear-
beitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten.
Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt,
aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammen-
hange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet
vorliegt, eine einheitliche systematische Darstellung unseres
gesamten Wissens bilden dürfte.*

Jeder Band geb. RM 1.62. Sammelbezugspreise:
10 Exemplare RM 14.40, 25 Exemplare RM 33.75,
50 Exemplare RM 63.00

80



SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 88

INTEGRALRECHNUNG

Von

Prof. Dr. A. Witting

Oberstudienrat i. R. in Dresden

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 62 Figuren und 190 Beispielen



Janina Puchalikowa

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Berlin 1940

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten



141 170

Archiv-Nr. 11 00 88

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Printed in Germany

D 320/14

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erster Abschnitt. Bestimmte und unbestimmte Integrale.	
§ 1. Einleitung und Ausblick	5
§ 2. Empirische Flächenmessung	6
§ 3. Der Begriff des bestimmten Integrals	10
§ 4. Beispiele bestimmter Integrale.	15
§ 5. Allgemeine Sätze über bestimmte Integrale	19
§ 6. Das Integral als Funktion	24
§ 7. Die Ableitung eines unbestimmten Integrals	26
§ 8. Die Stammfunktion (primitive Funktion)	27
§ 9. Zusammenfassung und graphische Darstellung	29
§ 10. Elementare Integralformeln. Unbestimmte und bestimmte Integrale	33
Zweiter Abschnitt. Allgemeine Sätze und Regeln.	
§ 11. Allgemeine Integrationsregeln	37
§ 12. Die Methode der Teilintegration	39
§ 13. Die Substitutionsmethode	43
§ 14. Rückgriffsformeln (Rekursionsformeln)	50
§ 15. Einiges über die geschichtliche Entwicklung des Integralbegriffs	54
§ 16. Die beiden Mittelwertsätze	58
§ 17. Ausblick und Marschrichtung	61
Dritter Abschnitt. Integration rationaler Funktionen.	
§ 18. Spezielle rationale Funktionen	62
§ 19. Algebraische Hilfssätze	65
§ 20. Die Integration einer gebrochenen rationalen Funktion	68
Vierter Abschnitt. Integration einiger irrationaler und transzendenter Funktionen.	
§ 21. Überblick	71
§ 22. Rationale Funktionen von x und von $\sqrt[n]{\frac{a + bx}{\alpha + \beta x}}$	71
§ 23. Rationale Funktionen von x und von $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$	72
§ 24. Transzendente Funktionen	76
Fünfter Abschnitt. Reihenentwicklung. Uneigentliche Integrale. Differentiation und Integration nach einem Parameter.	
§ 25. Allgemeines über Reihenentwicklungen und Grenzfunktionen	79
§ 26. Das Integral einer Reihe	84
§ 27. Uneigentliche Integrale	89
§ 28. Größenordnung des Null- und Unendlichwerdens von Funktionen	91

	Seite
§ 29. Integrale von Funktionen mit Unendlichkeitsstellen	93
§ 30. Unendlicher Integrationsbereich	96
§ 31. Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter	107

Sechster Abschnitt. Mehrfache Integrale.

§ 32. Das Linienintegral (Kurvenintegral)	110
§ 33. Das Doppelintegral	116
§ 34. Sätze über das Doppelintegral	117
§ 35. Einführung neuer Veränderlicher; Bemerkungen über dreifache Integrale	120
§ 36. Der Satz von Green.....	124

Siebenter Abschnitt. Fouriersche Reihen und Integrale.

§ 37. Die Fourierschen Reihen	127
§ 38. Darstellung periodischer Funktionen durch Fouriersche Reihen	134
§ 39. Die harmonische Analyse	139
§ 40. Das Fouriersche Integral	141

Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

Achter Abschnitt. Anwendungen auf die Geometrie der Ebene.

§ 41. Quadratur der Kurven in rechtwinkligen Koordinaten	145
§ 42. Quadratur in Polarkoordinaten	151
§ 43. Die Länge einer Kurve	153

Neunter Abschnitt. Anwendungen der Integralrechnung auf die Geometrie des Raumes.

§ 44. Der Rauminhalt von Körpern	158
§ 45. Kubatur von Rotationskörpern	162
§ 46. Kubatur von zylindrisch begrenzten Raumteilen	164
§ 47. Berechnung der Oberflächen von Rotationskörpern	165
§ 48. Berechnung von Zylinderflächen	168
§ 49. Ausblick.....	170
§ 50. Die Bogenlänge von Raumkurven	174
Namensverzeichnis	176
Sachverzeichnis	176

Weitere Beispiele, insbesondere Anwendungen der Integralrechnung auf die Physik in Sammlung Götschen Bd. 147: A. Witting, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung

Weitergehende Darstellung der Integralrechnung im III. Bande von Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung (Götschens Lehrbücherei) Berlin 1938. Wir verweisen im folgenden auf die Bände dieses Werks kurz mit Haupt-Aumann I bzw. II bzw. III.

Erster Abschnitt. Bestimmte und unbestimmte Integrale.

§ 1. Einleitung und Ausblick.

Unter dem arithmetischen Mittel Y von n gegebenen Zahlen y_1, y_2, \dots, y_n versteht man den n^{ten} Teil ihrer Summe:

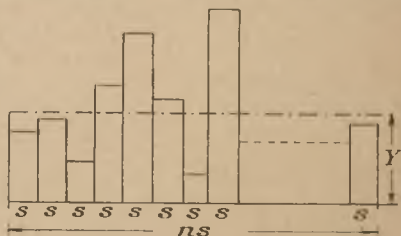
$$Y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (1)$$

Man nennt das arithmetische Mittel wohl auch mittleren Wert oder Durchschnittswert oder lineares Mittel. So definiert man z. B. das mittlere Alter der Abiturienten eines Jahrganges oder die mittlere Temperatur eines Tages, wenn etwa aller Stunden die Temperatur abgelesen worden ist. Was aber hat man zu tun, wenn ein Registrierthermometer die Temperaturkurve eines Tages liefert und man nicht nur einzelne Temperaturwerte willkürlich herausgreifen will? Hier bringt uns folgende Überlegung weiter. Erweitert man den Bruch von (1) mit einer beliebigen Zahl s , so kommt

$$Y = \frac{y_1 s + y_2 s + \dots + y_n s}{ns}$$

und nun kann man s und die y als Längenmaße, ihre Produkte als Rechtecksinhalte auffassen. Diese Rechtecke

stellen wir, wie in Fig. 1, auf einer Geraden nebeneinander; die Summe der im Zähler stehenden Rechtecke ist dann gleich dem Rechteck nsY . Im Falle der



Temperaturkurve wird es demnach

Fig. 1.

zweckmäßig sein festzusetzen: die mittlere Temperatur T soll dadurch bestimmt werden, daß das Produkt aus T und

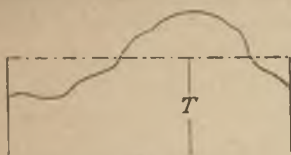


Fig. 2.

der Breite des Diagramms gleich der Fläche ist, die von der Kurve, den beiden Endordinaten und der Achse begrenzt wird (Fig. 2). Denn offenbar kommt diese Fläche zustande, wenn man sich die Strecke s immer kleiner denkt, also an Stelle einzelner Meßergebnisse den ganzen stetigen Kurvenzug zu erfassen sucht. Wir werden also zwangsläufig auf die Frage geführt, ob und wie man eine nicht überall geradlinig begrenzte Fläche definieren und ausmessen kann. Diese Untersuchung werden wir zunächst empirisch in Angriff nehmen, sodann werden wir daran gehen, mit formelmäßigen Hilfsmitteln bei Flächen zum Ziele zu kommen, die durch formelmäßig gegebene Kurven begrenzt werden.

§ 2. Empirische Flächenmessung.

Sei (Fig. 3 a und 4 a) zwischen den Punkten $x = a$, $y = y_a$ und $x = b$, $y = y_b$ eine glatte Kurve gezeichnet,

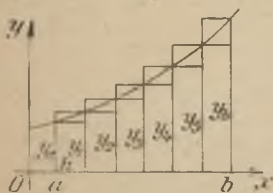


Fig. 3a.

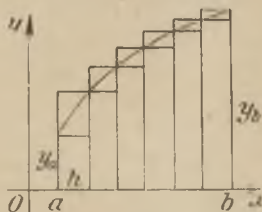


Fig. 4a.

und zwar einsinnig steigend. Um nun die Rechtecküberlegung von S. 5 anwenden zu können, teilen wir die Strecke $b - a$ in n gleiche Teile ($b - a$): $n = h$ und errichten die Ordina-

naten y_1, y_2, \dots, y_{n-1} . Dann kann man eine innere, bzw. äußere Rechteckstreppe konstruieren, deren (Flächen-)Inhalt kleiner, bzw. größer ist als der Inhalt F der von der Kurve, den Ordinaten y_a und y_b und der Strecke $b - a$ auf der x -Achse begrenzten Fläche. Es ist also

$$h(y_a + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) < F < h(y_1 + y_2 + \dots + y_b).$$

Nimmt man das arithmetische Mittel der beiden Treppenfleichen, so erhält man geometrisch, wie Fig. 3 b und 4 b andeuten, eine Summe von Trapezen; die Kurve wird dabei durch einen Sehnenzug ersetzt. Man bekommt so die (Sehnen-)Trapezformel

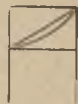


Fig. 3b.



Fig. 4b.

$$F \leq \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} y_a + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_b \right), \quad (1)$$

wobei das Zeichen $<$ für eine nach unten erhabene Kurve (Fig. 3 a), das Zeichen $>$ für eine nach unten hohle Kurve (Fig. 4 a) gilt.

Eine andere Art der Flächenannäherung ist, statt des Trapezes mit der Kurvensehne ein Trapez mit der Kurventangente im Mittelpunkt eines Intervalles zu benutzen (Fig. 5 und 6). Bezeichnet man die mittleren Ordinaten

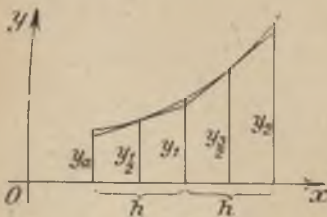


Fig. 5.

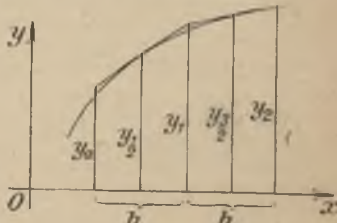


Fig. 6.

mit $y_{1/2}, y_{3/2}, \dots, y_{n-1/2}$, so bekommt man die Tangentenformel (Tangenten-Trapezformel)

$$F \gtrless \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad (2)$$

wobei das Zeichen $>$ für eine nach unten erhabene, das Zeichen $<$ für eine nach unten hohle Kurve gilt. Jedes der Tangententrapeze ist auch in ein Rechteck mit der Berührungsordinate (y_1, y_2, \dots) als Höhe verwandelbar (Fig. 7).

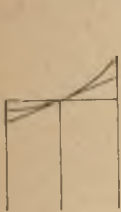
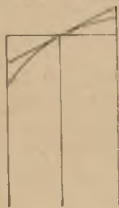


Fig. 7.



Da die Kurve teils unterhalb, teils oberhalb der Decklinie jedes Rechtecks liegt, so wird die Tangentenformel im allgemeinen genauer sein als die Trapezformel. Hiernach und nach dem Sinn der Ungleichungen bei (1) und (2) darf man eine noch genauere Formel erwarten, wenn

man aus beiden Formeln ein Mittel so bildet, daß der bessere Näherungswert nach der Tangentenformel doppelt, der schlechtere nach der Trapezformel einfach verwendet wird. So entsteht

$$F \approx \frac{1}{3} \frac{b-a}{n} \left\{ 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + \left(\frac{1}{2} y_a + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_b \right) \right\}$$

oder anders geordnet

$$F \approx \frac{b-a}{6n} \{ y_a + y_b + 4(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \}. \quad (3)$$

Gewöhnlich bezeichnet man die $(2n-1)$ Zwischenordinaten $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{n-1}, y_n$ mit $y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}$; sie entsprechen einer Teilung des Intervalles $a \dots b$ in $2n$ gleiche Teile. Die Formel wird meist die Simpsonsche Regel¹⁾ genannt, obwohl sie bereits bei Newton²⁾ vor-

¹⁾ Th. Simpson, 1710 ... 1761.

²⁾ J. Newton (1643 ... 1727), Methodus differentialis, 1711.

kommt; für $n = 1$ ergibt sich die Keplersche Faßregel¹⁾

$$F \approx \frac{b-a}{6} (y_a + 4y_1 + y_b). \quad (4)$$

Anm. Wenn die Kurve arithmetisch durch $y = f(x)$ erklärt, wenn ferner y viermal stetig differenzierbar ist und wenn endlich ξ einen gewissen (von Formel zu Formel verschiedenen) Zwischenwert ($a \dots \xi \dots b$) bedeutet, so gibt eine eingehendere Untersuchung als genaue Formeln:

$$\left. \begin{aligned} F &= \text{Sehnen-Trapezsumme} - \frac{(b-a)^3}{12 n^2} f''(\xi) \\ F &= \text{Tangenten-Trapezsumme} + \frac{(b-a)^3}{24 n^2} f''(\xi) \\ F &= \text{Simpsonsumme} - \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} f^{IV}(\xi). \end{aligned} \right\} (5)$$

Die Korrektionsglieder bestätigen unsere anschaulichen Feststellungen über \geq gemäß Erhabenheit oder Hohlheit der Kurve $y = f(x)$. Bei gleichem n ist die Sehnen-Trapezformel im allgemeinen am ungenauesten, die Simpsonregel am genauesten. Ferner sieht man: wenn y^{IV} im Intervall ($a \dots b$) Null, wenn also y eine Parabel von höchstens dritter Ordnung ist, so gibt die Simpsonsche Regel den genauen Wert der Fläche.

Die Formeln (5) gestatten noch eine wertvolle praktische Anwendung. Wir teilen die Strecke $(b-a)$ einmal in n , dann in $2n$ gleiche Teile und berechnen beidemale die Näherungswerte; für die grobe Teilung möge der jeweilige Näherungswert N_g , für die feine Teilung N_f heißen. Wir nehmen ferner an, daß die bei den beiden Einteilungen sowie auch in $f''(\xi)$ und $f^{IV}(\xi)$ jeweils auftretenden Abszissen ξ angenähert dieselben sind. Dann erhält man aus N_f und N_g noch bessere Werte durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} F &\approx N_f + \frac{N_f - N_g}{3} \text{ bei der Sehnen-Trapezformel} \\ F &\approx N_f + \frac{N_f - N_g}{3} \text{ bei der Tangenten-Trapezformel} \\ F &\approx N_f + \frac{N_f - N_g}{15} \text{ bei der Simpsonformel.} \end{aligned} \right\} (6)$$

Man übe diese Methode an einfachen Beispielen ein.

Von den zahlreichen anderen Methoden²⁾, den Inhalt einer gezeichnet vorliegenden Fläche empirisch zu bestimmen,

¹⁾ Joh. Kepler, (1571...1630); nova stereometria solidorum vinariorum, 1619.

²⁾ Vgl. z. B. Fr. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Göschens Lehrbücher Bd. 12.

sei zunächst die des sogenannten Zwickelabgleiches erwähnt. Man zerlegt durch geeignete Ordinaten die Fläche in Teile, die man nach Augenmaß so in Rechtecke verwandelt (Fig. 8), daß je ein weggelassener Zwickel einem zugegebenen

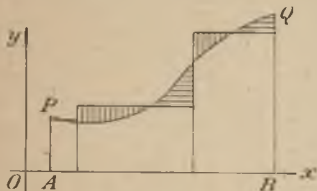


Fig. 8.

gleich wird, und bestimmt die Summe dieser Rechtecke. Dieses Verfahren liefert bei einiger Übung erstaunlich genaue Ergebnisse¹⁾. Praktisch ist es noch besser, von den Waagerechten auszugehen und dann den Zwickelabgleich durch die Ordinaten zu machen. Eine andre Methode ist rein instrumentell. Die dabei gebrauchten Werkzeuge heißen Planimeter; sie zeigen bei Umfahren der gesuchten Fläche deren Inhalt an²⁾.

Anm. Nur kurz sollen noch die primitivsten Methoden der Flächenbestimmung erwähnt werden. Die eine besteht darin, daß man über die gegebene Fläche (wenn sie nicht schon auf Millimeterpapier gezeichnet ist) ein durchsichtiges Papier deckt, das in Quadratmillimeter geteilt ist; man zählt dann ab, wieviel mm^2 in der Fläche liegen, und gleicht die überschießenden Stückchen der Fläche gegen die überschießenden Zwickel der mm -Quadrate ab.

Die andere Methode bedient sich der Wägung: Man zeichnet die Fläche auf starkes Papier, schneidet sie aus, bestimmt das Gewicht und vergleicht es mit dem Gewicht etwa von einem Quadratdezimeter desselben Papiers.

§ 3. Der Begriff des bestimmten Integrals.

Nachdem wir uns empirisch mit dem Flächeninhalt einer teilweise krummlinig begrenzten ebenen Figur auseinandergesetzt haben, schreiten wir zu einer feineren theo-

¹⁾ Zeichnet man z. B. einen Viertelkreis von 10 cm Radius, teilt auf dem einen Radius 4 cm, 3 cm, 2 cm und 1 cm ab (s. Fig. 9), so erhält man für $\frac{1}{4}\pi$ etwa den Wert 0,782, der von dem wahren Wert um weniger als 0,4% abweicht.

²⁾ Vgl. Fr. A. Willers, Mathematische Instrumente, Sammlung Göschel Bd. 972.

retischen Untersuchung. Dabei müssen wir die rein anschauliche Vorstellung des Flächeninhaltes, die wir bisher als selbstverständlich angenommen hatten, verlassen und vor allem festlegen, was überhaupt unter dem Flächeninhalt einer krummlinig begrenzten ebenen Figur genau verstanden, d. h. wie er erklärt werden soll.

Es handelt sich also darum, von einer mehr gefühlsmäßigen anschaulichen Vorstellung zu einer arithmetischen Definition überzugehen¹⁾.

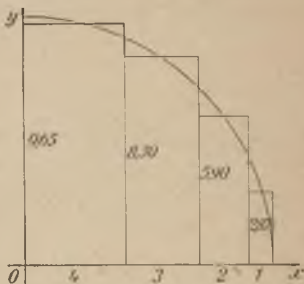


Fig. 9.

Sei $y = f(x)$ eine im abgeschlossenen Intervall $\langle a \dots b \rangle$ gegebene, eindeutige, stetige und positive Funktion. Dann wird rein anschaulich durch die Kurve $y = f(x)$ in rechtwinkligen Koordinaten, durch die Endordinaten $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$ und durch die x -Achse ein Flächenstück der xy -Ebene begrenzt. In Fig. 3 a und 4 a haben wir die krumme Linie durch eine „Stufenkurve“, die Fläche durch eine „Treppe“ angenähert; dieses Verfahren verfeinern wir jetzt.

Wir zerlegen die Strecke $b - a$ durch die Punkte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in eine beliebige Anzahl n gleicher oder verschiedener Teilstücke; in jedem Teilstücke nehmen wir einen beliebigen Zwischenpunkt an, dessen Abszisse allgemein mit ξ_k bezeichnet werde. Es ist dann (Fig. 10) $a \leq \xi_1 \leq x_1$, $x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \dots, x_{n-1} \leq \xi_n \leq b$; zur Einheitlichkeit sei noch $x_0 = a$, $x_n = b$. Die zu den Zwischenpunkten ξ_k gehörigen Ordinaten sind $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$. Jetzt bilden wir die

¹⁾ Daß dabei gedankliche Schwierigkeiten zu überwinden sind, haben schon die alten griechischen Mathematiker bemerkt.

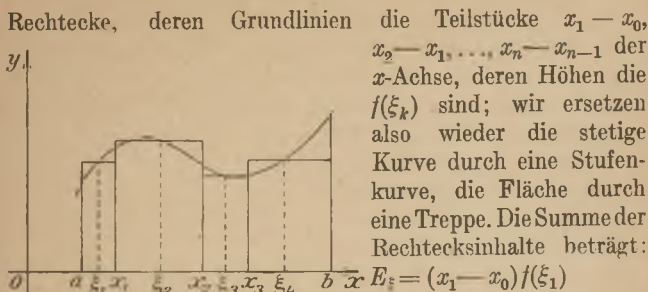


Fig. 10.

$$E_{\xi} = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n).$$

Wir können sie etwas bequemer schreiben, wenn wir die Teilstücke der x -Achse durch das Symbol Δ ausdrücken, das „Differenz“ bedeutet:

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \\ \dots, \quad x_k - x_{k-1} = \Delta x_k, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Wenden wir noch das Summenzeichen Σ an, so ergibt sich

$$E_{\xi} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1)$$

Wir wollen E_{ξ} als eine zur Einteilung \mathbf{E} , d. h. zu $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ gehörige (Näherungs-)Summe bezeichnen, ferner als Feinheitmaß von \mathbf{E} die größte Länge $d(\mathbf{E})$, die unter den Δx_v , d. h. unter den Längen der Teilintervalle $(x_{v-1} \dots x_v)$ vorkommt. Die Summen haben nicht nur für positive Funktionen einen Sinn, sondern allgemein für jede (endlichwertige) Funktion, die also positiver und negativer Werte fähig ist. Dementsprechend lassen wir für das Folgende beliebige stetige Funktionen zu. Eine Beschränkung auf positive Funktionen wird höchstens bei geometrischer Deutung der Summen als Flächeninhalte erforderlich (vgl. aber S. 20).

Wir wollen nun den folgenden von der geometrischen Deutung völlig unabhängigen, rein arithmetischen Satz beweisen:

Satz der Existenz des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion:

Strebt das Feinheitsmaß der Einteilung gegen Null, so streben die zugehörigen Summen einem von den benutzten Einteilungen unabhängigen Grenzwerte F zu.

Das soll heißen: Ist $f(x)$ im (abgeschlossenen, beschränkten) Intervall $\langle a \dots b \rangle$ (eindeutig und) stetig, so gibt es eine solche Zahl F , daß irgend eine Summe $E_\varepsilon = \sum f(\xi_k) \Delta x_k$ sich von F beliebig wenig (etwa um weniger als $\varepsilon > 0$) unterscheidet, sobald nur die zugehörige Einteilung \mathbf{E} hinreichend fein (also $d(\mathbf{E}) < \eta(\varepsilon)$) ist.

Den Zusammenhang zwischen $f(x)$ und F bringt man zum Ausdruck in der von Leibniz (1646...1716) eingeführten Bezeichnung

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

wobei das Zeichen \int , ein früher in der Kurrentschrift übliches langgestrecktes S als Anfangsbuchstabe des Wortes Summe,

die Bezeichnung Integral erhalten hat. Man liest $\int_a^b f(x) dx$ also

Integral von a bis b über $f(x) dx$ und nennt es bestimmtes Integral, weil die beiden Grenzen der Summierung, die untere Grenze a und die obere Grenze b , gegeben sind. Ist $f(x)$ positiv, so wird man in Anlehnung an unsere vorhergehenden Betrachtungen den Grenzwert F als den Inhalt der Fläche unter der Kurve deuten, womit man eine arithmetische Definition dieses Flächeninhaltes erhält.

Wir führen nun den (arithmetischen) Beweis des obigen Existenzsatzes in 6 Schritten:

1) Es nimmt $f(x)$, weil in $\langle a \dots b \rangle$ stetig, in jedem $\langle x_{k-1} \dots x_k \rangle$ einen größten Wert M_k und einen kleinsten m_k an¹⁾. Bei geeig-

¹⁾ Vgl. Bd. 87.

meter Wahl der ξ_k erhalten wir daher als größte bzw. kleinste aller Summen

$$\bar{E} = \sum M_k \Delta x_k \text{ bzw. } \underline{E} = \sum m_k \Delta x_k,$$

zwischen denen also jede zur gleichen Einteilung gehörige Summe E_ξ liegt: $\underline{E} \leq E_\xi \leq \bar{E}$.

2) Für jede hinreichend feine Einteilung wird

$$\bar{E} - \underline{E} = \sum (M_k - m_k) \Delta x_k$$

beliebig klein; denn nach dem Satze von der gleichmäßigen Stetigkeit¹⁾ folgt, daß $M_k - m_k < \varepsilon$ wird, sobald nur $d(E) < \eta(\varepsilon)$ ist, womit also $0 < \bar{E} - \underline{E} < (b - a)\varepsilon$ gilt.

3) Verfeinert man eine Einteilung E , d. h. fügt man zu den Teilpunkten von E irgendwelche neue Teilpunkte hinzu, so gilt: Es nimmt \bar{E} bzw. \underline{E} bei einer Verfeinerung von E nicht ab bzw. nicht zu. Denn wird etwa im Intervall $\langle x_{k-1} \dots x_k \rangle$ bei der Verfeinerung ein neuer Teilpunkt x'_k hinzugefügt, so ist z. B. das Maximum von $f(x)$ in $\langle x_{k-1} \dots x'_k \rangle$ sowohl als in $\langle x'_k \dots x_k \rangle$ nicht größer als das Maximum von $f(x)$ in $\langle x_{k-1} \dots x_k \rangle$.

4) Erzeugt man aus E durch fortgesetzte Verfeinerung eine Folge $E^{(\lambda)}$, deren Feinheitmaße gegen Null gehen, so bilden die $E^{(\lambda)}$ bzw. die $\bar{E}^{(\lambda)}$ eine (wegen 3.) nicht fallende bzw. nicht steigende Folge. Diese Folgen sind beschränkt, weil $\underline{E}^{(\lambda)} \leq \underline{E}^{(1)}$ bzw. $\bar{E}^{(1)} \leq \bar{E}^{(\lambda)}$. Daher konvergieren beide Folgen²⁾ und zwar (wegen 2.) gegen den gleichen Grenzwert F .

5) Für jede beliebige Einteilung E liegt F zwischen \underline{E} und \bar{E} . Ist nämlich E^* eine gemeinsame Verfeinerung von E und $E^{(\lambda)}$, etwa diejenige, die durch alle Teilpunkte der beiden Einteilungen gebildet wird, so gilt (nach 3.)

$$\underline{E} \leq \underline{E}^* \leq \underline{E}^* \leq \underline{E} \text{ sowie } \bar{E}^{(\lambda)} \leq \bar{E}^* \leq \bar{E}^* \leq \bar{E}^{(\lambda)}.$$

Es ist also $\underline{E} \leq \underline{E}^{(\lambda)}$ und $\bar{E}^{(\lambda)} \leq \bar{E}$. Da dies für jedes λ gilt und da $\underline{E}^{(\lambda)} \leq F \leq \bar{E}^{(\lambda)}$ mit $\underline{E}^{(\lambda)} \rightarrow F$, $\bar{E}^{(\lambda)} \rightarrow F$ für $\lambda \rightarrow \infty$, so folgt wirklich $\underline{E} \leq F \leq \bar{E}$.

6) Ist nun E_ξ eine Näherungssumme, für deren zugehörige Einteilung E gilt: $d(E) < \eta(\varepsilon)$, so folgt aus dem Vorhergehenden:

$$\underline{E} \leq E_\xi \leq \bar{E}, \underline{E} \leq F \leq \bar{E} \text{ und } \bar{E} - \underline{E} < (b - a)\varepsilon.$$

¹⁾ Vgl. z. B. Haupt-Aumann I, S. 85.

²⁾ Vgl. S. G. Bd. 146, S. 9.

Es liegen also F und E_ξ beide zwischen E und \bar{E} , welche letztere um weniger als $(b-a)\varepsilon$ voneinander entfernt sind. Daher muß $|E_\xi - F| < (b-a)\varepsilon$ sein. Somit ist, was zu beweisen war, F für jede hinreichend feine Einteilung E beliebig wenig von jedem E_ξ verschieden.

Zusatz. Wie man sieht, gründet sich der Beweis auf den von Riemann¹⁾ eingeführten Begriff der Schwankung einer Funktion innerhalb eines Intervalles, worunter man eben die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der Funktion im betrachteten Intervalle versteht.

§ 4. Beispiele bestimmter Integrale.

1. $y = f(x) = x^k$, k eine nichtnegative ganze Zahl. Wir suchen $\int_a^b x^k dx$, wobei $0 < a < b$ sein soll. Statt die Strecke $b-a$ in n gleiche Teile zu zerlegen, ist es bequemer²⁾, wenn man

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q \text{ setzt und nun die Teilpunkte } a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \\ aq^n = b \text{ annimmt. Dann ist zu summieren:} \\ a^k(aq - a) + (aq)^k(aq^2 - aq) + \dots + (aq^{n-1})^k(aq^n - aq^{n-1}) \\ = a^{k+1}(q-1)\{1 + q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \dots + q^{(n-1)(k+1)}\} \\ = a^{k+1}(q-1) \frac{q^{n(k+1)} - 1}{q^{k+1} - 1} = (b^{k+1} - a^{k+1}) \cdot \frac{q-1}{q^{k+1} - 1} \\ = (b^{k+1} - a^{k+1}) \cdot \frac{1}{q^k + q^{k-1} + \dots + 1}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergehen, so geht bekanntlich (man prüfe es zahlenmäßig und zeichnerisch nach!)

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \rightarrow 1, \text{ also } q^k + q^{k-1} + \dots + 1 \rightarrow k + 1.$$

¹⁾ Bernhard Riemann, 17. Sept. 1826 ... 20. Juli 1866.

²⁾ Die folgende Zerlegung ist bereits im 17. Jahrhundert mehrfach benutzt worden.

Somit ergibt sich

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}). \quad (1)$$

Man entwerfe zur geometrischen Deutung eine Figur! Die geometrisch selbstverständlichen Formeln $\int_a^b dx = b - a$ (Fläche des Rechtecks von der Höhe 1),

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2} (b-a)$$

(Trapezfläche) erhält man aus (1) für $k=0$ und $k=1$. Ferner ist

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}, \quad (\text{Parabelfläche, fasse das Ergebnis in Worte!})$$

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}, \quad \text{usw.}$$

Der Beweis von (1) erforderte $0 < a$. Später wird gezeigt, daß diese Beschränkung unnötig ist; für $a=0$ ist also

$$\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} \quad (k \text{ ganz, positiv}). \quad (2)$$

Bei der Teilung in n gleiche Teile von der Größe $\frac{b}{n} = h$ erhält man die Summe

$$\begin{aligned} & h [h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k] \\ &= h^{k+1} (1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k) \\ &= b^{k+1} \cdot \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \end{aligned}$$

Da nun nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze (dem Existenztheorem des bestimmten Integrals) beim Übergang zur Grenze ebenfalls das Ergebnis (2) herauskommen muß, so folgt die bemerkenswerte Beziehung¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}. \quad (3)$$

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß die Formeln (1) und (2) nicht nur für positives ganzes k gelten; indessen werden wir später in wesentlich einfacherer Weise zu den allgemeinen Ergebnissen gelangen (S. 35).

2. $f(x) = \sin x$; gesucht wird $\int \sin x dx$.

Man gelangt zum Ziele, wenn man $b-a$ in n gleiche Teile $\frac{b-a}{n} = h$ zerlegt. Dann ist die Summe zu bilden:

$\Sigma = h [\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin(a+nh)]$.
Nun ist aber

$$2 \sin \frac{h}{2} \sin(a+vh) = \cos\left(a + \frac{2v-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2v+1}{2}h\right),$$

multipliziert man also Σ beiderseits mit $2 \sin \frac{h}{2}$, so heben sich rechts alle Glieder bis auf das erste und letzte weg. Es ergibt sich daher

$$\Sigma = \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n+1}{2}h\right) \right].$$

¹⁾ Die Anfänge dieser Gleichung hat bereits Archimedes (287 ... 212 v. Chr.) in seiner Schrift über die Spiralen. Die vollständige Entwicklung mit Hilfe der Binomialformel findet sich bei den Mathematikern der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts: Fermat (1601 ... 1665), Roberval (1602 ... 1675), Pascal (1623 ... 1662), Wallis (1616 ... 1703).

Der vor der Klammer stehende Bruch strebt gegen 1, wenn h nach Null strebt, $a + \frac{2n+1}{2}h$ strebt dann gegen b , der Grenzwert von Σ ist das gesuchte Integral, also ist

$$\int_a^b \sin x \, dx = -\cos b + \cos a. \quad (4)$$

Auf entsprechende Weise ergibt sich

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a. \quad (5)$$

Es ist also z. B.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos \pi + \cos 0 = +2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = +1,$$

Ergebnisse, die sich leicht in Sätze über Flächeninhalte an der Sinus- und Kosinuslinie umdeuten lassen.

Diese Beispiele könnten zu der Annahme verführen, daß es wohl auf ähnlichen Wegen stets möglich wäre, jedes bestimmte Integral in „geschlossener“ Form auszuwerten. Diese Annahme ist in mehrfacher Hinsicht trügerisch. Wir werden später erkennen, daß selbst sehr einfach aussehende Integrale, bei denen sich also $f(x)$ aus elementaren Funktionen zusammensetzt, nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden können. Weiter ist zu bedenken, daß man zwar mit $\ln x$, $\sin x$, a^x usw. sehr schöne und kurze Formeln herstellen kann, daß man aber, sobald es sich um die numerische Auswertung handelt, durch Reihenentwicklung in mühsamer Arbeit hergestellte Tafeln benutzen muß. Nur soweit solche Tafeln vor-

handen sind, kann man die wirkliche Berechnung leicht ausführen¹⁾; wenn nicht, so muß man sich selbst der Kleinarbeit einer geeigneten Tafelberechnung unterziehen. Wir werden später Hilfsmittel angeben, um dieses wichtige Ziel zu erreichen.

Bevor wir von anderer Seite her die Berechnung der Integrale untersuchen, gehen wir zu der am Anfang aufgestellten Frage zurück, die wir nun folgendermaßen beantworten können:

Wenn eine eindeutige, stetige Funktion $y = f(x)$ im Bereiche $\langle a \dots b \rangle$ vorliegt, so wird ihr lineares Mittel Y gegeben durch

$$Y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

So ist z. B. $\frac{2}{\pi} \approx 0,6366$ das lineare Mittel von $\sin x$ zwischen den Grenzen 0 und π , wo $\sin x$ von 0 bis 1 zunimmt und dann wieder von 1 bis 0 abnimmt. Ferner ist $1 : (k+1)$ das lineare Mittel von x^k zwischen den Grenzen 0 und 1. Es ist nützlich für den Leser, wenn er hierzu Figuren zeichnet.

§ 5. Allgemeine Sätze über bestimmte Integrale.

Wir formen die Gleichung (6) der vorigen Nummer um in

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) Y.$$

Es war vorausgesetzt, daß $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ eine eindeutige, stetige Funktion sein sollte; eine solche Funktion hat in diesem Bereiche einen kleinsten Wert m und einen größten

¹⁾ Außer den bekannten Logarithmentafeln seien hier erwähnt die Tafeln von Hayashi und die Funktionentafeln von Jahnke und Emde.

Wert M ; ferner wird jeder Zwischenwert zwischen m und M von der Funktion angenommen. Offenbar ist ¹⁾

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

Y aber liegt zwischen m und M , ist also ein Wert, den $f(x)$ für irgendeinen Wert X von x annimmt, der zwischen a und b liegt. Daher können wir die obige Gleichung schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(X), \text{ wo } a \leq X \leq b \text{ ist. (1)}$$

Dieser Satz heißt der **erste Mittelwertsatz der Integralrechnung** ²⁾.

Man erkennt leicht, daß bei $a < b$ das Integral stets positiv ist, wenn $f(x)$ im Bereiche $\langle a \dots b \rangle$ nirgends negativ ist. Ausdrücklich sei bemerkt, daß a und b auch negativ sein können, sofern nur $a < b$ ist. So ist z. B.

$$\int_{-4}^{+3} x^4 dx = \frac{3^5 - (-4)^5}{5} = \frac{1}{5} (3^5 + 4^5) \text{ und}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 \approx +0,2929.$$

Wenn $f(x)$ im Bereiche $\langle a \dots b \rangle$ nirgends positiv ist, so ergibt sich aus der Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe von lauter negativen Zahlen, daß auch das Integral negativ anzusetzen ist; wir erhalten dann also für die von der Kurve $y = f(x)$, den Randordinaten und der x -Achse eingeschlossene Fläche einen negativen Inhalt. Wir sehen demnach:

¹⁾ Das Gleichheitszeichen gilt, wenn $m=M$, d. h. wenn $f(x)$ eine Konstante ist.

²⁾ Vgl. weiter unten § 16.

Wenn die Fläche links von der Richtung $a \rightarrow b$ liegt, ist sie positiv, liegt sie rechts von der Richtung $a \rightarrow b$, so ist sie negativ.

Bisher war immer $a \leq b$ angenommen; um nun in der Wahl von a und b im bestimmten Integral volle Freiheit zu haben, setzen wir fest:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Es entspricht dies der Definition des bestimmten Integrals. Wenn nämlich $a < b$ ist, so werden für das links stehende Integral die Differenzen Δx_k der Formel (1) S. 12 sämtlich negativ zu nehmen sein.

Wir können das auch so ausdrücken:

Wenn $f(x)$ im Bereiche $\langle a \dots b \rangle$ positiv ist, so ist $\int_a^b f(x) dx$ positiv oder negativ, je nachdem $a < b$ oder $a > b$ ist; ist $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ negativ, so ist es gerade umgekehrt.

Auch für diesen Fall trifft also der oben angegebene Satz über das Vorzeichen der Fläche zu.

Aus der Definition des Integrals folgt ferner

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \quad (3)$$

wobei a, b, c irgend drei Werte von x des Definitionsbereiches von $f(x)$ bedeuten. Wenn $a < b < c$ ist und $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ positiv, in $\langle b \dots c \rangle$ negativ ist, so werden die beiden Integrale verschiedene Vorzeichen haben. Die Gleichung (3) läßt sich sofort auf eine endliche Anzahl von Summanden ausdehnen. Geometrisch heißt das: Der Gesamthalt, der von einem Kurvenstück, den Randordinaten und der x -Achse begrenzt wird, setzt sich im allgemeinen aus positiven und negativen Teilen zusammen. So ist z. B.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 - \cos 2\pi + \cos \pi = 0;$$

dasselbe ergibt sich unmittelbar aus $-\cos 2\pi + \cos 0 = 0$. Wenn man den absoluten Wert des Flächeninhaltes haben will, so muß man die absoluten Werte der negativen Flächen-

stücke in Rechnung ziehen; man muß also $\int_a^b f(x) \, dx$ in solchem

Falle, d. h. wenn $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ teilweise positiv, teilweise negativ ist, in geeigneter Weise zerlegen. Damit haben wir den Begriff des Flächeninhaltes unter einer Kurve für beliebiges eindeutiges stetiges $f(x)$ und beliebige endliche Grenzen erklärt.

Bedeutet c eine Konstante, so ist leicht zu beweisen, daß

$$\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx \quad (4)$$

ist. Ferner folgt aus der Definition des Integrals

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b \varphi(x) \, dx. \quad (5)$$

Sehr wichtig sind die beiden folgenden Abschätzungssätze:

Wenn im Bereiche $a \leq x \leq b$ stets $f(x) \geq g(x)$ ist, so ist auch

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx,$$

denn die Differenz $f(x) - g(x)$ ist nicht negativ, daher ist

$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \geq 0$, woraus sich nach (5) obiger Satz ergibt.

Wenn für $a \leq x \leq b$ die Differenz $f(x) - g(x) \leq \varepsilon > 0$ ist, so ist

$$\int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \leq (b - a) \varepsilon.$$

Ist ε eine beliebig kleine Zahl, so kann man diesen Satz etwas ungenauer so ausdrücken:

Wenn sich für $a \leq x \leq b$ zwei Funktionen nur um sehr wenig unterscheiden, so unterscheiden sich ihre Integrale über diesen Bereiche auch nur wenig.

Es muß hier besonders angemerkt werden, daß es keinen analogen Satz für Differentialquotienten gibt, wie man an den beiden Funktionen $y_1 = a$ und $y_2 = a + \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}$ sieht; denn die maximalen Unterschiede dieser Funktionen sind $\pm \varepsilon$, ihre Ableitungen $y_1' = 0$ und $y_2' = \cos x$ dagegen haben die maximalen Unterschiede ± 1 . Man entwerfe ein Bild der Funktionen!

Eine wichtige Tatsache, die dem Anfänger häufig Schwierigkeiten macht, drückt sich in der Gleichung

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt \quad (6)$$

aus. Es kommt beim bestimmten Integral nicht auf die Bezeichnung der „Integrationsveränderlichen“ an; denn diese erscheint ja im Endergebnis gar nicht, sondern im Resultat stehen nur die Grenzen a und b . Man vergleiche die früheren Beispiele, um sich das ganz klar zu machen.

Zum Schluß sei eine Erweiterung angefügt. Wir haben zuerst (§ 2) vorausgesetzt, daß $f(x)$ eine eindeutige, stetige, positive Funktion sei, die einsinnig wächst. Die weiteren Darlegungen (§ 3) ließen erkennen, daß der Begriff des bestimmten Integrals ausdehnbar ist auf stetige Funktionen, die weder durchweg gleiches Vorzeichen haben, noch einsinnig sind. Jetzt wollen wir den letzten Schritt tun und erklären:

Eine Funktion $f(x)$ heißt in $\langle a \dots b \rangle$ integrierbar, wenn für sie ein Grenzwert der Näherungssummen in dem im Existenzsatze festgelegten Sinne existiert.

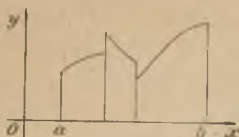


Fig. 11.

Dazu braucht $f(x)$ nicht stetig zu sein, wie wir später untersuchen werden. Praktisch wichtig ist vor allem neben der Stetigkeit die stellenweise unterbrochene Stetigkeit (s. Fig. 11).

§ 6. Das Integral als Funktion.

Der entscheidende Fortschritt in der Integralrechnung wurde im 17. Jahrhundert von verschiedenen Mathematikern angebahnt, am treffendsten aber von Leibniz ausgeführt. Hatte man bis dahin ein Integral als starre Größe (bestimmtes Integral) betrachtet, eben als Maßzahl einer bestimmten vorgelegten Fläche, so löste man sich jetzt von dieser Beschränkung los und fing an, das Integral als Funktion anzusehen und zu behandeln. Damit befreite man sich auch immer mehr von der zu engen rein geometrischen Auffassung und wandte sich der tiefer führenden arithmetischen Behandlung zu.

Es ist ja geometrisch wie arithmetisch selbstverständlich, daß der Wert eines bestimmten Integrals von den beiden Grenzen abhängig ist, bzw. nur von einer, wenn man die andere festhält. Geometrisch besagt das Festhalten etwa der unteren Grenze a , daß man nur die zu b gehörende Endordinate y_b verschiebt. Um die Veränderlichkeit der oberen Grenze deutlich zu machen, wollen wir sie nicht b , sondern x nennen. Ferner wollen wir, um Verwechslungen zu vermeiden, die Integrationsvariable einstweilen mit t bezeichnen. Dann ist also zu untersuchen

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Diese Funktion der oberen Grenze x heißt ein **unbestimmtes Integral der Funktion** $f(t)$; $f(t)$ heißt der **Integrand**.

Wählen wir eine andere untere Grenze b , so erhalten wir die Funktion

$$F_b(x) = \int_b^x f(t) dt.$$

Man erkennt nach Gleichung (3), S. 21, daß

$$F_a(x) - F_b(x) = \int_a^b f(t) dt$$

eine durch a und b bestimmte Konstante ist, die wir mit C bezeichnen wollen. Man sieht das sehr bequem an Fig. 12, wo die Fläche unter der Kurve mit $F(x)$ bezeichnet ist. Funktionen F mit verschiedenen unteren Grenzen unterscheiden sich also nur um eine (additive) Konstante. Man läßt daher meist die untere Grenze ganz weg und schreibt

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad (1)$$

wobei also $F(x)$ zu irgendeiner unteren Grenze gehört und C eine zunächst unbestimmte Konstante, die **Integrations-**

konstante, ist. So war z. B. $\int_a^b t^2 dt = \frac{b^3 - a^3}{3}$; man schreibt

jetzt $\int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} + C$, ähnlich $\int \cos t dt = \sin x + C$; in beiden Fällen ist $C = 0$, wenn die untere Grenze 0 ist. Ist aber im ersten Beispiel die untere Grenze 1, so wird

$$\int_1^x t^2 dt = \int_0^x t^2 dt - \int_0^1 t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Das bestimmte Integral $\int_a^x f(t) dt$ ergibt sich demnach,

wenn man ein unbestimmtes Integral $\int f(t) dt = F(x) + C$

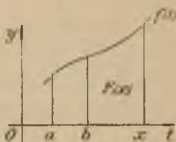


Fig. 12.

kennt, als Differenz:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Diese letzte Differenz pflegt man

$$[F(x)]_a^b \text{ oder auch } F(x) \Big|_a^b \quad (3)$$

zu schreiben, und das bedeutet, daß man den Wert, den das unbestimmte Integral für die obere Grenze $x = b$ annimmt, um den Wert für die untere Grenze $x = a$ zu vermindern hat. Als Hauptergebnis dieser Untersuchung stellen wir fest:

|| Ein (unbestimmtes) Integral einer Funktion ist nur bis auf eine additive Konstante festgelegt.

|| Die verschiedenen unbestimmten Integrale einer Funktion unterscheiden sich um additive Konstanten.

Wenn die obere Grenze festliegt, dagegen die untere Grenze x variabel ist, so erledigt sich der Fall einfach durch Anwendung der Formel (2) S. 21; es ist

$$\int_x^a f(t) dt = - \int_a^x f(t) dt. \quad (4)$$

Die vorgenannten Sätze sind sämtlich geometrisch an der Fig. 12 einleuchtend.

§ 7. Die Ableitung eines unbestimmten Integrals.

Es sei ein unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

einer stetigen Funktion $y = f(t)$ gegeben. Dann bilden wir

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (1)$$

Da die Funktion $f(t)$ stetig ist, so hat sie in $\langle x \dots x+h \rangle$ einen größten Wert M und einen kleinsten Wert m , daher ist

$$Mh \geq \int_x^{x+h} f(t) dt \geq mh,$$

was auch geometrisch an Fig. 13 deutlich ist. Daraus ergibt sich

$$M \geq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \geq m;$$

geht man zur Grenze $h \rightarrow 0$ über, so ist wegen der Stetigkeit von $f(t)$

$M \rightarrow f(x)$ und $m \rightarrow f(x)$,
es entsteht also aus (1) die Gleichung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x),$$

d. h.

$$F'(x) = f(x). \quad (2)$$

Die Ableitung eines unbestimmten Integrals der stetigen Funktion $f(t)$ ist gleich der Funktion $f(t)$ selbst an der oberen Grenze x des Integrals.

Daraus folgt der wichtige Satz:

Das Integral einer stetigen Funktion ist eine stetige Funktion der oberen Grenze.

§ 8. Die Stammfunktion (primitive Funktion).

Das soeben gefundene Ergebnis gehört zu den wichtigsten Errungenschaften des 17. Jahrhunderts; Barrow¹⁾, der Lehrer Newtons, ahnte den Zusammenhang zwischen der Ableitung und dem Integral oder, wie man damals sagte, zwischen dem Tangentenproblem für eine Kurve und der

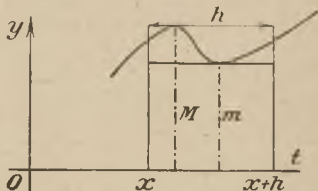


Fig. 13.

¹⁾ Isaac Barrow, 1630 . . . 1677. Isaac Newton, 1643 . . . 1727.

Quadratur der Fläche unter dieser Kurve; Newton und Leibniz, die beiden voneinander unabhängigen Begründer der Infinitesimalrechnung, waren völlig klar darüber, daß, wenigstens für stetige Funktionen, das eine Problem die Umkehrung des andern ist. Stellt man die Aufgabe, eine Funktion $F(x)$ zu finden, deren Ableitung eine gegebene stetige Funktion $f(x)$ ist,

$$F'(x) = f(x),$$

so wird diese Aufgabe mindestens durch die unbestimmten Integrale von $f(x)$ gelöst. Daß es (bei stetigem $f(x)$) auch keine andere Lösungen geben kann, folgt aus einem allgemeinen (nämlich für beliebiges endliches $f(x)$) gültigen Eindeutigkeitssatz.

Um diesen zu beweisen, bezeichnen wir (bei beliebigem $f(x)$) jede Funktion $F(x)$, für welche $F'(x) = f(x)$ gilt, als eine Stammfunktion oder eine primitive Funktion von $f(x)$. Sind nun $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$, dann ist $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$. Daher ist $F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{d}{dx}(F_1(x) - F_2(x)) = 0$. Wenn aber die Ableitung der

Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ stets Null ist, so ist diese Funktion nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung eine Konstante; es ist also

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad \text{und} \quad F_2(x) = F_1(x) + C,$$

d. h. wir haben den Eindeutigkeitssatz:

Die Stammfunktionen $F(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ unterscheiden sich voneinander nur durch additive Konstanten.

Die Stammfunktionen für stetiges $f(x)$ unterscheiden sich also voneinander gerade so, wie die unbestimmten Integrale von $f(x)$, wir können also nun endlich schließen

$$F(x) = \int f(t) dt + C.$$

Alle Stammfunktionen von $f(x)$ erhält man, indem man zu irgendeinem unbestimmtem Integrale von $f(x)$ konstante Größen addiert (dabei soll $f(x)$ stetig sein).

Dieses Ergebnis nennt man den **Fundamentalsatz der Integralrechnung**. Im wesentlichen besagt er, daß es für die von uns betrachteten Funktionen keine getrennte Differential- und Integralrechnung gibt, sondern nur eine einzige Infinitesimalrechnung; diese Erkenntnis ist die Leistung von Leibniz und Newton.

§ 9. Zusammenfassung und graphische Darstellung¹⁾.

1. Wir hatten zuerst das bestimmte Integral definiert als Grenzwert von Summen, gedeutet als Flächeninhalt unter einer Kurve bei festen Randordinaten.
2. Ein unbestimmtes Integral entstand dadurch, daß die untere Grenze an beliebiger Stelle fest gedacht wurde, die obere Grenze veränderlich war; das Ergebnis war eine Funktion der oberen Grenze, die, entsprechend der Willkür bei Festsetzung der unteren Grenze nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.
3. Die Ableitung eines unbestimmten Integrals erwies sich als Wert des Integranden an der Stelle der oberen Grenze.
4. Durch die Bedingung $F'(x) = f(x)$ wurden Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ definiert.
5. Jede Stammfunktion von $f(x)$ erwies sich als ein unbestimmtes Integral von $f(x)$.

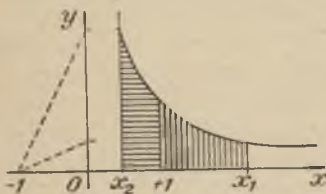
In geometrischer Deutung besagen diese Ergebnisse, daß die beiden Grenzprozesse: a) eine Kurve (Stammkurve)

¹⁾ Eingehendere Darlegungen s. A. Walther, Begriff und Anwendung des Differentials, B. G. Teubner; A. Walther, Einführung in die math. Behandlung naturwissenschaftl. Fragen, J. Springer; Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, W. de Gruyter; H. v. Sanden, Praktische Analysis, B. G. Teubner.

mit gegebenem Steigungsmaß zeichnen und b) den Flächeninhalt unter einer Kurve bestimmen, wenn die obere Randordinate verschiebbar ist, auf dasselbe hinauskommen.

Aus der Differentialrechnung wissen wir z. B., daß die Kurve $y = \ln x$ das Steigungsmaß $\frac{1}{x}$ hat. Zeichnen wir also

die beiden Kurven $y = \frac{1}{x}$ und $y = \ln x$ (Fig. 14) untereinander, so wird die Fläche unter der gleichseitigen Hyperbel von $x = +1$ bis $x = x_1$ dargestellt durch die Ordinate¹⁾



in x_1 , und die Fläche unter der Hyperbel von $x = +1$ bis $x = x_2$ durch die (negative) Ordinate $\ln x_2$. Von der Kurve $y = 1/x$ zur Kurve $y = \ln x$ führt die Bestimmung des Flächeninhaltes, von der Kurve $y = \ln x$ zur Kurve $y = 1/x$ die Bestimmung des Steigungsmaßes.

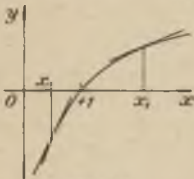


Fig. 14.

Wenn eine beliebige Kurve $y = f(x)$ gezeichnet²⁾ vorliegt, so ist die Aufgabe der graphischen

Integration, den Verlauf des Flächeninhaltes unter der Kurve zu bestimmen oder eine Stammkurve $Y = F(x)$ mit dem Steigungsmaß $y = f(x)$ zu zeichnen — beides läuft ja nach unseren Ergebnissen auf dasselbe hinaus.

¹⁾ Genauer: durch das Rechteck mit den Seiten $\ln x$, und 1, daher numerisch durch die Ordinate $\ln x$, selbst. Da $\ln 1 = 0$ ist, so müssen die Hyperbelflächen von $x = 1$ an genommen werden.

²⁾ Wie immer nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit derselben Längeneinheit auf beiden Achsen.

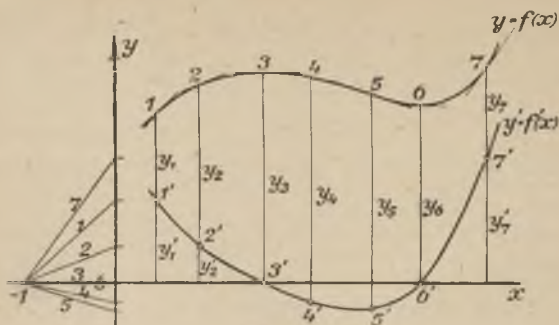


Fig. 15.

Vergegenwärtigen wir uns kurz die umgekehrte Aufgabe, zur Kurve $y = f(x)$ die abgeleitete Kurve $y' = f'(x)$ zu zeichnen, wie sie in Fig. 15 dargestellt ist (vgl. Differentialrechnung, Sammlung Göschel Bd. 87, S. 45), so sehen wir, daß jedem der Punkte 1, 2, ..., 7 von $y = f(x)$ ein eindeutig zu zeichnender Punkt 1', 2', ..., 7' der Kurve $y' = f'(x)$ entspricht. Man wird jetzt untersuchen, wie sich dieser Vorgang umkehren läßt. Die gegebene Kurve $y = f(x)$ gibt uns für jeden Punkt der gesuchten Stammkurve $Y = F(x)$ die Tangentenrichtung, da ja $F'(x) = f(x)$ ist. Die erste Schwierigkeit ist, wo die erste Tangente angesetzt werden soll; diese Unbestimmtheit ist im Wesen der Sache begründet, sie besagt weiter nichts, als daß es nicht eine, sondern beliebig viele Stammkurven zu $y = f(x)$ gibt. Da sich alle primitiven Funktionen nur um additive Konstanten unterscheiden, so gehen alle Stammkurven aus einer beliebigen unter ihnen durch Parallelverschiebung in Richtung der Y-Achse hervor, und dabei bleibt das Steigungsmaß der Kurve $Y = F(x)$ ungeändert. Wir beginnen also damit, daß wir dem Punkte P_0 auf $y = f(x)$ einen beliebigen Punkt R_0 (mit derselben Abszisse x_0) zuordnen und durch R_0 die Tangente

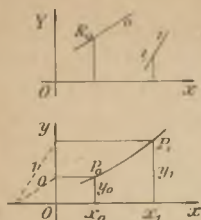


Fig. 16.

legen (Fig. 16), die parallel der mit 0 bezeichneten, vom Punkte -1 der x -Achse ausgehenden Geraden ist. Geht man nun zum Punkte P_1 weiter, so fragt es sich, wo man die Tangente parallel zur Richtung 1 ansetzen soll, wie weit man jene Parallele etwa hinaufschieben muß, wo die neue Steigung also zu beginnen hat. Nimmt man empirisch die Mitte, d. h. die Abszisse $(x_1 - x_0)/2$, so führt das, wie man leicht sieht, zu der früher erwähnten Trapezregel. Erinnerung man sich aber, daß die Ordinaten der Stammkurve $Y = F(x)$ den Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x)$ angeben müssen, so bietet sich ungezwungen die Methode des Zwickelabgleichs (vgl. S. 10) dar, wie sie Fig. 17 darstellt.

Wir ersetzen die gegebene Kurve $y = f(x)$ durch eine Stufenkurve, die in $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ die gegebene Kurve schneidet. In diesen Punkten stimmt der Flächeninhalt unter der gegebenen Kurve mit dem Flächeninhalt unter der Stufenkurve (mit der „Treppe“) überein. Die ihnen in der oberen Figur entsprechenden Punkte $R_0, R_1, R_2, R_3, \dots$ liegen also wirklich auf der gesuchten Stammkurve, deren Tangenten die Richtungen $0, 1, 2, 3, \dots$ haben; hier, ist die Bedingung $F'(x) = f(x)$ genau erfüllt. Die Richtungsänderungen der Tangenten erfolgen in den Punkten T_0, T_1, T_2, \dots , also bei den Ordinaten, die über den senkrechten, zum Zwecke des Zwickelabgleiches zwischen P_0, P_1, P_2, \dots zwischengeschalteten Strecken der Stufenkurve bei S_0, S_1, S_2, \dots stehen. Zeichnet man nun eine Kurve, die sich in R_0, R_1, \dots den Tangenten

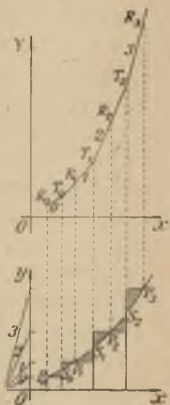


Fig. 17.

anschmiegt, so hat man damit die gesuchte Stammkurve $Y = F(x)$ mit einer Genauigkeit, die so weit geht, wie das bei Zeichnungen überhaupt möglich ist.

Aufgaben: Zeichne Stammkurven von

1. $y = x$; die Stammkurve soll durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems $x = 0, Y = 0$ gehen.

2. $y = \frac{1}{x}$; die Stammkurve gehe durch $x = 1, Y = 0$; (miß Y für $x = 2$).

3. $y = \sin x$; die Stammkurve gehe durch $x = 0, Y = -1$.

§ 10. Elementare Integralformeln. Unbestimmte und bestimmte Integrale.

Aus der Tatsache, daß ein unbestimmtes Integral einer stetigen Funktion $f(x)$ als eine Stammfunktion zu $f(x)$ aufgefaßt werden kann, ergibt sich, daß den aus der Differentialrechnung bekannten Formeln für die erste Ableitung der elementaren Funktionen Integralformeln zur Seite stehen. Dabei ist es üblich geworden

$$\text{statt } \int_a^x f(t) dt = F(x) + C \quad \text{einfach } \int f(x) dx = F(x)$$

zu schreiben, also die Grenzen und die additive Konstante wegzulassen und die Integrationsvariable auch mit x zu bezeichnen; man muß sich aber stets dieser Vereinfachung bewußt bleiben.

Aus den links stehenden Differentialformeln erhält man die rechts stehenden Integralformeln:

$$4. \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (n \neq -1).$$

$$5. \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

6. $\frac{de^x}{dx} = e^x; \quad \int e^x dx = e^x.$
7. $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}.$
8. $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x; \quad \int \cos x dx = \sin x.$
9. $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x; \quad \int \sin x dx = -\cos x.$
10. $\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$
11. $\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$
12. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$
13. $\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x, |x| < 1.$
14. $\frac{d \operatorname{Sin} x}{dx} = \operatorname{Cos} x; \quad \int \operatorname{Cos} x dx = \operatorname{Sin} x.$
15. $\frac{d \operatorname{Cos} x}{dx} = -\operatorname{Sin} x; \quad \int \operatorname{Sin} x dx = -\operatorname{Cos} x.$
16. $\frac{d \operatorname{Tg} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \operatorname{Tg} x.$
17. $\frac{d \operatorname{Ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -\operatorname{Ctg} x.$
18. $\frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x$
 $= \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$
19. $\frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x$
 $= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), |x| > 1.$

$$20. \quad \frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}; \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad |x| < 1.$$

$$21. \quad \frac{d \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}; \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x$$

$$= \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad |x| > 1.$$

Nach den allgemeinen Ergebnissen kann man mit Hilfe dieser Tabelle unbestimmter Integrale ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a und b berechnen, indem man die Differenz der Werte der rechts stehenden Funktion für $x = b$ und für $x = a$ bildet, in Zeichen:

$$\left| \text{Ist } \int f(x) dx = F(x), \text{ so ist } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \right.$$

Blicken wir zurück auf die recht umständliche Art, auf die früher für positives ganzes k gefunden wurde

$$22. \quad \int_a^b t^k dt = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

so sehen wir jetzt erstens, daß sich das Ergebnis ohne Schwierigkeit aus der Formel $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ergibt, und zweitens, daß die Formel nicht nur für ganzes positives n , sondern für jeden beliebigen, auch irrationalen Exponenten mit alleiniger Ausnahme von $n = -1$ gilt. Denn in der Differentialrechnung ist ja bewiesen, daß die Ableitung von x^n für alle, auch irrationalen Exponenten nx^{n-1} lautet. Allerdings ist für die Umkehrung, das Integral, eine gewisse **Vorsicht** vonnöten; der Integrand $f(x)$ muß ja im Bereiche $\langle a \dots b \rangle$ stetig sein!

Daraus folgt, daß z. B. bei negativem n die Grenzen a und b gleiches Vorzeichen haben müssen, und daß keine der Grenzen Null sein darf, da ja x^n ($n < 0$) an der Stelle $x = 0$ unstetig ist. Wenn ferner n ein Bruch mit einer geraden Zahl im Nenner (z. B. $n = \frac{1}{2}$) ist, so darf x nur positiv sein; ebenso sind für irrationales n nur positive Werte von x zulässig, da ja x^n dann nur für positives x definiert ist.

Weitere Beispiele sind:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \text{ ergibt } \int_a^b \sin x \, dx = -\cos b + \cos a.$$

$$23. \quad \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_a^b = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a;$$

setzen wir hier $a = -1$, $b = +1$, so wird

$$24. \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

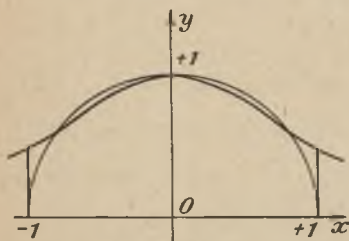


Fig. 81

d. h. der Flächeninhalt unter der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ (Fig. 18) ist $\frac{\pi}{2}$, also gleich dem halben Einheitskreis. Hier ist also die ursprünglich beim Kreis definierte transzendente

Zahl π in Zusammenhang mit einer Fläche gebracht, die durch eine rationale Funktion zwischen zwei ganzzahligen Grenzen bestimmt ist. Man prüfe das Ergebnis zahlenmäßig nach durch empirische Flächenbestimmung nach S. 10.

Noch bedeutsamer ist die Formel

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^x = \ln x,$$

denn sie besagt, daß der natürliche Logarithmus einer positiven Zahl x durch die Fläche unter der Hyperbel $y = 1/x$

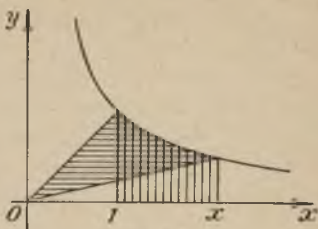


Fig. 19.

zwischen den Grenzen 1 und x gegeben ist (Fig. 19), eine Tatsache, die man geradezu zur Definition des natürlichen Logarithmus benutzen kann¹⁾. Nebenbei bemerkt ist der schraffierte Sektor, wie man leicht findet, ebenso groß.

Wir werden uns nun bemühen, die unbestimmten Integrale möglichst vieler Funktionen zu berechnen; dazu bedürfen wir aber noch einiger Hilfsformeln.

Zweiter Abschnitt. Allgemeine Sätze und Regeln.

§ 11. Allgemeine Integrationsregeln.

Entsprechend früher abgeleiteten Regeln für bestimmte Integrale haben wir die Formeln

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) dx \\ = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \cdots + \int f_n(x) dx, \end{aligned} \quad (2)$$

d. h.

das Integral der Summe einer endlichen Anzahl von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Funktionen.

¹⁾ Zuerst von Nicolaus Mercator (1620 ... 1685) benutzt. Nach dem Vorgang von Felix Klein (1849 ... 1925) neuerdings wieder vielfach verwendet.

Der Produktregel der Differentiation $d(uv) = vdu + u dv = vu'dx + uv'dx$, die wir auch in die Form

$$vu'dx = d(uv) - uv'dx$$

bringen können, entspricht die wichtige

Regel der Teilintegration (der partiellen oder der Produktintegration):

$$\int vu'dx = uv - \int uv'dx. \quad (3)$$

Endlich gibt es noch ein Analogon zur Kettenregel¹⁾ der Differentialrechnung, das man — kurzgesagt — durch Integration der aus $x = \varphi(z)$ folgende Formel

$$f(x)dx = f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

erhält. Der Beweis kann etwa so geführt werden: Ist $x = \varphi(z)$ stetig differenzierbar, also insbes. stetig, so ist bei stetigem $f(x)$ auch $F(z) = f(\varphi(z))$ eine stetige Funktion von z . Für

$$I(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi, \quad K(z) = I(\varphi(z)) \text{ gilt nun } K'(z) = F(z)\varphi'(z).$$

$$\text{Daher ist } I(\varphi(z)) = \int_a^z K(\zeta)d\zeta + C = \int_a^z F(\zeta)\varphi'(\zeta)d\zeta + C,$$

folglich ist für $x = \varphi(z)$:

$$\left[\int f(x) dx \right]_{x=\varphi(z)} = \int f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz. \quad (4)$$

Diese gleich noch genauer zu untersuchende Formel heißt die **Substitutions- oder Transformationsregel**.

Ist das links stehende Integral einfacher als das rechtsstehende, so benutzt man die Formel nach Vertauschung der beiden Seiten, man führt also an Stelle von z die neue Variable x durch die Substitution $\varphi(z) = x$ ein, bestimmt das Integral in x und setzt schließlich wieder $x = \varphi(z)$. Ist aber das rechts stehende Integral einfacher zu berechnen, so heißt das doch, daß man für x eine neue Variable z durch die Substitution $x = \varphi(z)$, $dx = \varphi'(z)dz$ einführt, das Inte-

¹⁾ Vgl. Sammlung Göschen Bd. 87, S. 53.

gral in z bestimmt und endlich z durch x ersetzt. Dazu ist aber notwendig, daß sich die Funktion $x = \varphi(z)$ eindeutig umkehren läßt, $z = \psi(x)$.

Ist das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $x = a$, $x = b$ zu berechnen, so müssen natürlich bei dem Integral für z die Grenzen $z = \psi(a)$ und $z = \psi(b)$ eingesetzt werden.

Unsere nächste Aufgabe ist, die Anwendung dieser Regeln zur Bewältigung einiger Integrale zu zeigen.

§ 12. Die Methode der Teilintegration.

$$\int f(x) dx = \int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Wie die Formel zeigt, kommt es bei gegebenem Integranden $f(x)$ darauf an, zu sehen, ob er sich als Produkt zweier Funktionen u und v' darstellen läßt, also als Produkt einer Funktion u und der Ableitung v' einer andern Funktion v . Wenn das gelingt, so ist die Anwendung der Formel zunächst nur zweckmäßig, falls man das rechts stehende Integral der Funktion vu' bestimmen kann. Die einfachste und manchmal schon ausreichende Zerlegung ist, wenn man $f(x) = u$ und $dx = v'dx$, also $v' = 1$, $v = x$ setzt.

Beispiele:

25. $\int \ln x dx$. Wir setzen $u = \ln x$ und $v' = 1$; dann wird

$$u' = \frac{1}{x}, v = x, \text{ also wird}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x.$$

Die Probe für die Richtigkeit ergibt sich dadurch, daß man die Ableitung von $x \ln x - x$ bildet; man findet $\ln x$. Solche Proben möge der Leser zur Übung weiterhin selbst ausführen.

26. $\int x \sin x dx$. Wir setzen $u = x$, $v' = \sin x$, also $u' = 1$, $v = -\cos x$. Daher ist

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

$$27. \int x^k \ln x dx, k \neq -1. \quad u = \ln x, v' = x^k; u' = \frac{1}{x},$$

$$v = \frac{x^{k+1}}{k+1}. \quad \text{Also wird } \int x^k \ln x dx$$

$$= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \int \frac{x^k}{k+1} dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

$$28. \int \frac{\ln x}{x} dx. \quad u = \ln x, v' = \frac{1}{x}; u' = \frac{1}{x}, v = \ln x. \quad \text{Also}$$

$$\text{wird } \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Wir drehen uns also gewissermaßen im Kreise herum; aber gerade dadurch wird die Aufgabe bequem lösbar, denn wir brauchen ja nur das Integral rechts auf die linke Seite zu nehmen. Dann kommt

$$2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2, \text{ also ist } \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2.$$

$$29. \int \cos^2 x dx. \quad u = \cos x, v' = \cos x; u' = -\sin x, v = \sin x.$$

$$\text{Also } \int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x dx;$$

$$2 \int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + x, \text{ daher}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x.$$

$$30. \left| \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right.$$

$$\left. \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right.$$

$$\text{also ist } \left| \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \right.$$

$$\left. \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x). \right.$$

31.

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx. u = \sin \beta x, v' = e^{\alpha x}; u' = \beta \cos \beta x, v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}.$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx. u = \cos \beta x, v' = e^{\alpha x}; u' = -\beta \sin \beta x, v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}.$$

Wendet man nun die Teilintegration an, addiert und subtrahiert die entstehenden Gleichungen, so kommt

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx \pm \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} (\sin \beta x \pm \cos \beta x) \\ - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \pm \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx.$$

Daraus erhält man ohne Mühe die wichtigen Endformeln:

$$32. \quad \left| \begin{aligned} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} (\sin \beta x - \frac{\beta}{\alpha} \cos \beta x), \\ \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} \left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \beta x + \cos \beta x \right). \end{aligned} \right.$$

Übungsbeispiele:

$$33. \quad \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x$$

$$34. \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x.$$

Einige der letzten Formeln werden wir später noch auf anderem Wege ableiten (S. 45 und § 24).

Zu einem bemerkenswerten Ergebnis kommt man, wenn man die Teilintegration auf die folgende Kette von Integralen anwendet. Es sei $f(z)$ eine Funktion, die in $\langle a \dots x \rangle$ n -mal stetig differenzierbar ist. Wir integrieren nun teilweise:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z) dz = \frac{1}{(n-1)!} [(x-z)^{n-1} f^{(n-1)}(z)]_a^x \\ + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-z)^{n-2} f^{(n-1)}(z) dz$$

$$= -\frac{1}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) \\ + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-z)^{n-2} f^{(n-1)}(z) dz.$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-z)^{n-2} f^{(n-1)}(z) dz \\ = -\frac{1}{(n-2)!} (x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\ + \frac{1}{(n-3)!} \int_a^x (x-z)^{n-3} f^{(n-2)}(z) dz, \\ \dots \dots \dots$$

Da n eine positive ganze Zahl ist, so erhält man zum Schluß:

$$\frac{1}{2!} \int_a^x (x-z)^2 f''(z) dz = -\frac{1}{2!} (x-a)^2 f'(a) \\ + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-z) f''(z) dz,$$

$$\frac{1}{1!} \int_a^x (x-z) f''(z) dz = -\frac{1}{1!} (x-a) f'(a) + f(x) - f(a).$$

Addiert man diese n Gleichungen, so heben sich alle Integrale bis auf das erste weg und man erhält nach einfacher Umstellung der Glieder:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z) dz.$$

Die ersten n Glieder der rechten Seite stimmen mit den Gliedern der Taylorsche Formel¹⁾ überein, das letzte Glied ist demnach eine neue Form des Restgliedes R_n :

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z) dz.$$

Wir werden später (S. 59) zeigen, wie sich daraus die üblichen Formen des Restgliedes herleiten lassen.

§ 13. Die Substitutionsmethode.

$$\int f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz \rightleftarrows \int f(x) dx^2).$$

Der einfachste Fall liegt bei dem Integral $\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$ vor. Setzt man $\varphi(z) = x$, so wird $dx = \varphi'(z) dz$; man erhält demnach die wichtige Formel

$$\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = \int \frac{dx}{x} = \ln x = \ln \varphi(z). \quad (1)$$

Beispiele:

$$35. \int \frac{a}{b+cx} dx = \frac{a}{c} \int \frac{cdx}{b+cx} = \frac{a}{c} \ln |b+cx|.$$

$$36. \int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n} dx = \frac{1}{nb} \ln (a+bx^n).$$

$$37. \int \frac{e^x}{e^x+a} dx = \ln (e^x+a).$$

$$38. \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln |\sin x|.$$

$$39. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|.$$

¹⁾ Vgl. Sammlung Götschen Bd. 87, S. 89, wo x für $x_0 + h$ und a für x_0 zu setzen ist.

²⁾ Das Zeichen \rightleftarrows soll andeuten, daß man die Formel sowohl in der einen als auch in der andern Richtung benutzen kann.

$$40. \quad \int \text{Ctg } x \, dx = \ln | \text{Cot } x |.$$

$$41. \quad \int \text{Ctg } x \, dx = \ln | \text{Sin } x |.$$

$$42. \quad \int \frac{\sin x \, dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \ln (a + b \cos x).$$

$$43. \quad \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln | \ln x |.$$

Eine andere Sonderform der allgemeinen Regel ist

$$\begin{aligned} \int [\varphi(z)]^n \varphi'(z) \, dz &= \int x^n \, dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} [\varphi(z)]^{n+1}, \quad n \neq -1. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$44. \quad \int (a + bx)^n \, dx = \frac{1}{b(n+1)} (a + bx)^{n+1}, \quad n \neq -1.$$

$$\begin{aligned} 45. \quad \int (a + bz + cz^2)^n (b + 2cz) \, dz &= \int x^n \, dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (a + bz + cz^2)^{n+1}, \quad n \neq -1. \end{aligned}$$

$$46. \quad \int \frac{\ln z}{z} \, dz = \frac{1}{2} (\ln z)^2.$$

$$47. \quad \int \sin^n z \cos z \, dz = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} z.$$

$$48. \quad \int \frac{\sin^5 z}{\cos^7 z} \, dz = \int \frac{\text{tg}^5 z}{\cos^2 z} \, dz = \frac{1}{6} \text{tg}^6 z.$$

$$49. \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d(\text{tg } x)}{\text{tg } x} = \ln \text{tg } x.$$

$$50. \quad \int \cos nx \, dx. \quad nx = z, \quad x = \frac{z}{n}, \quad dx = \frac{dz}{n}, \quad \text{also wird}$$

$$\int \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \int \cos z \, dz = \frac{1}{n} \sin z = \frac{1}{n} \sin nx.$$

$$51. \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx.$$

$$52. \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) \\ = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$53. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) \\ = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$54. \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx. \quad x = \frac{a}{b} \cos z, \quad z = \arccos \frac{b}{a} x, \\ dx = -\frac{a}{b} \sin z dz;$$

$$\text{also wird } \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx = -\frac{a^2}{b} \int \sin^2 z dz \\ = -\frac{a^2}{2b} \left(\arccos \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} x^2} \right) \\ = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \frac{a^2}{2b} \arccos \frac{b}{a} x.$$

$$55. \int \sqrt{a^2 x^2 - b^2} dx. \quad x = \frac{b}{a} \operatorname{Cof} z, \quad z = \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{a}{b} x, \\ dx = \frac{b}{a} \operatorname{Sin} z dz;$$

also wird

$$\int \sqrt{a^2 x^2 - b^2} dx = \frac{b^2}{a} \int \operatorname{Sin}^2 z dz = \frac{b^2}{2a} \int (\operatorname{Cof}^2 z - 1) dz \\ = \frac{b^2}{2a} \operatorname{Sin} z \operatorname{Cof} z - \frac{b^2}{2a} z = \frac{b}{2} x \sqrt{\frac{a^2}{b^2} x^2 - 1} - \frac{b^2}{2a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{a}{b} x \\ = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{a}{b} x.$$

$$56. \int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx. \quad x = \frac{a}{b} \operatorname{Sin} z, \quad z = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{bx}{a},$$

$$dx = \frac{a}{b} \operatorname{Cos} z dz;$$

also wird

$$\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{a^2}{b} \int \operatorname{Cos}^2 z dz$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \frac{a^2}{2b} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{bx}{a}.$$

$$57. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}. \quad e^x = z, \quad x = \ln z, \quad dx = \frac{dz}{z}; \quad \text{also wird}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{z + \frac{1}{z}} \cdot \frac{dz}{z} = \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x.$$

$$58. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad x = az, \quad z = \frac{x}{a}, \quad dx = a dz; \quad \text{also wird}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sin} z = \operatorname{arc} \operatorname{sin} \frac{x}{a}.$$

Setzt man $x = \frac{a}{z}$, $z = \frac{a}{x}$, $dx = -\frac{a}{z^2} dz$, so ergeben sich die folgenden drei Integrale:

$$59. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{sin} \frac{a}{x}.$$

$$60. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{a}{x}.$$

$$61. \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{a}{x}.$$

$$62. \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}. \quad x = \frac{a}{b} z, \quad z = \frac{b}{a} x, \quad dx = \frac{a}{b} dz;$$

also wird

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{bx}{a}.$$

Ebenso wird

$$63. \int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{ab} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \\ = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right|.$$

$$64. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \ln [bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}].$$

$$65. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arc} \sin \frac{bx}{a}.$$

$$66. \int \sin(a + bx) dx = -\frac{1}{b} \cos(a + bx).$$

67.

$$\int \frac{dx}{\sin x}. \text{ Es ist } \sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}; \text{ wir setzen } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = z,$$

$$\text{dann wird } dz = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{z dx}{\sin x}, \text{ also } \frac{dx}{\sin x} = \frac{dz}{z};$$

demnach ist

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$68. \int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ = - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right|.$$

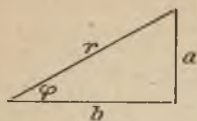


Fig. 20.

$$69. \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$$

Wenn a und b beliebige Zahlen sind, dann gibt es immer eine positive Zahl r und einen Winkel φ , so daß $a = r \sin \varphi$ und $b = r \cos \varphi$

ist; es ist nämlich (Fig. 20) $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$ und $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$.

Daher wird

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} &= \int \frac{dx}{r \sin(x + \varphi)} = \frac{1}{r} \int \frac{d(x + \varphi)}{\sin(x + \varphi)} \\ &= \frac{1}{r} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \varphi}{2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right| \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| 1 - \frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der goniometrischen Additionstheoreme erhält man die folgenden Integrale:

70.

$$\begin{aligned} \int \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int \cos(m+n)x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right], \end{aligned}$$

wenn $m \neq n$ ist; wenn aber $m = n$ ist, so erhält man (s. Beisp. 53).

$$71. \int \sin mx \sin mx dx = \int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right).$$

Ebenso ergibt sich

$$\int \sin mx \cos nx dx$$

$$72. = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right] & \text{für } m \neq n, \\ -\frac{1}{2} \frac{\cos 2mx}{2m} & \text{für } m = n. \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

$$74. = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] & \text{für } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2mx}{2m} \right) & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Diese letzten Formeln führen zu wichtigen Ergebnissen, wenn man zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ integriert; es ist $\sin 2m\pi = -\sin(-2m\pi) = 0$,

$$\cos 2m\pi = +\cos(-2m\pi) = +1,$$

$\sin(m \pm n)\pi = 0$, $\cos(m+n)\pi = \pm 1$, je nachdem $m+n$ gerade oder ungerade ist, und ähnlich steht es mit $\cos(m-n)\pi = \pm 1$. Daraus folgt:

$$76. \left. \begin{array}{l} \\ 77. \end{array} \right\} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \pi & \text{für } m = n. \end{cases}$$

$$78. \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$79. \left. \begin{array}{l} \\ 80. \end{array} \right\} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \pi & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Man nennt die Formeln 76, 78 und 79 die **Orthogonalitätsgleichungen** der trigonometrischen Funktionen, 77 und 80, anders geschrieben

$$\left. \begin{array}{l} 81. \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 x dx = \pi \\ 82. \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 x dx = \pi \end{array} \right\} \text{die Normierungsgleichungen.}$$

Statt $-\pi$ und $+\pi$ kann man auch die Grenzen 0 und 2π oder irgendwelche um die Periodenlänge 2π der trigonometrischen Funktionen voneinander entfernte Grenzen nehmen.

§ 14. Rückgriffsformeln (Rekursionsformeln).

Hängt eine Größe von einem ganzzahligen „Parameter“ n ab, so kann es vorkommen, daß ihre Berechnung leicht gelingt, wenn man den Wert der Größe für $n-1, n-2, \dots$ kennt. Formeln, die solche Berechnung für n durch Rückgriff auf Werte für kleinere Parameter ermöglichen, nennt man Rückgriffsformeln oder Rekursionsformeln¹⁾. Sie finden in manchen Gebieten der Analysis fruchtbare Verwendungen, so in der Integralrechnung die folgenden:

83. Berechnung von $\int e^x x^n dx$.

Durch Teilintegration erhält man

$$\int e^x x^n dx = e^x x^n - n \int e^x x^{n-1} dx;$$

es ist also das vom Parameter n abhängige Integral auf ein ähnliches mit dem Parameter $n-1$ zurückgeführt. Ist n eine positive ganze Zahl > 1 , so kann man das neue Integral ebenso behandeln, bis man schließlich zu $\int e^x dx = e^x$ kommt. Durch Einsetzen erhält man dann

$$\begin{aligned} \int e^x x^n dx &= e^x [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} \\ &\quad - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + (-1)^n n!]. \end{aligned}$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} 84. \int e^{-x} x^n dx \\ = -e^{-x} (x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!). \end{aligned}$$

¹⁾ Die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts, besonders aber Leonard Euler (1707...1783), haben reichlichen Gebrauch davon gemacht.

$$\begin{aligned}
 85. \quad \int \sin^n x dx &= \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx;
 \end{aligned}$$

zerlegt man das letzte Integral in seine zwei Bestandteile und nimmt den zweiten auf die linke Seite, so ergibt sich

$$n \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx.$$

Ist n eine gerade Zahl, so kommt man durch Fortsetzen dieses Vorgangs schließlich auf $\int dx = x$; ist n ungerade, so ist das Ende $\int \sin x dx = -\cos x$. Für das bestimmte Integral

zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ wird an beiden Grenzen $\sin^{n-1} x \cos x = 0$, man erhält daher

$$86. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \quad \text{für } n > 1.$$

Sei nun $n = 2m$ eine gerade Zahl, so erhält man schließlich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx;$$

ist $n = 2m+1$ eine ungerade Zahl, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

Da nun $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ ist, so kann man

diese Werte in die beiden Gleichungen einsetzen. Durch Division ergibt sich nach leichter Umformung

$$87. \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx}$$

Nun ist aber im Intervall $\langle 0 \dots \frac{\pi}{2} \rangle$ durchweg

$$0 < \sin^{2m+1} x \leq \sin^{2m} x \leq \sin^{2m-1} x;$$

bedenken wir jetzt die Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe, so ist, da alle Glieder positiv sind:

$$88. \quad 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx.$$

Aus den Formeln von 86 erhält man

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m}.$$

Dividieren wir daher die Ungleichung 88 durch $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx$, so ergibt sich

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} \leq 1 + \frac{1}{2m}.$$

Daraus folgt, daß der Quotient dieser beiden Integrale für $m \rightarrow \infty$ nach 1 konvergiert. Damit erhält man aus Formel 88 die von Wallis¹⁾ entdeckte merkwürdige Produktdarstellung:

$$89. \frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}$$

Wenn man die Genauigkeit der Annäherung dieser Formel an

$\frac{\pi}{2}$ für irgendein m (etwa $m = 10$) erfahren will, dann ist es zweckmäßig, die einzelnen Brüche anders darzustellen; es ist ja $\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}$

$$= 1 + \frac{1}{3}, \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} = 1 + \frac{1}{15}, \dots, \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = 1 + \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Daher wird

$$\frac{\pi}{2} \approx \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \left(1 + \frac{1}{35}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4m^2 - 1}\right).$$

Die Rechnung sieht dann, wenn man 6 Dezimalen nimmt, so aus:

m		m		m				
1	1,333333 88889	: 15	5	1,500123 10490	: 143	8	1,524312 4713	: 323
2	1,422222 40632	: 35	6	1,510613 7744	: 195	9	1,529025 3832	: 399
3	1,462854 23268	: 63	7	1,518357 5955	: 255	10	1,532857	
4	1,486122 14001	: 99						

Die Rechnung ist also recht einfach und viel bequemer, als die sonst zu jener Zeit üblichen Verfahren, bei denen Quadratwurzeln zu ziehen waren. Aber die Konvergenz gegen $\frac{\pi}{2} = 1,570796\dots$ ist sehr langsam, ja man sieht leicht, daß die Konvergenzgeschwindigkeit²⁾ mit wachsendem m immer mehr abnimmt.

Man kann die Formel 89 auch aus der Produktdarstellung des Sinus erhalten, die wir ohne Beweis hinzufügen:

¹⁾ John Wallis (1616... 1703), *Arithmetica infinitorum*.

²⁾ Die Feststellung einer solchen Konvergenzgeschwindigkeit ist Aufgabe der praktischen Mathematik.

$$90. \sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \cdots$$

Setzt man hier $x = \frac{1}{2}$, so kommt

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} = 1 &= \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \cdots \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 2n} \cdots, \end{aligned}$$

woraus sich die obige Formel ergibt.

§ 15. Einiges über die geschichtliche Entwicklung des Integralbegriffs.

Schon vor Archimedes müssen infinitesimale Methoden irgendwelcher Art von einzelnen hervorragenden Mathematikern benutzt worden sein. Ob freilich die Kulturvölker im Zweistrom- und im Nillande dergleichen kannten, ist bis jetzt noch im Dunkeln. Daß aber bei den Griechen vielleicht Demokritos, mit größerer Wahrscheinlichkeit Hippias, Dinostratos und Eudoxos infinitesimale Ansätze gehabt haben, geht aus den spärlichen Resten, die bis jetzt von ihnen bekannt sind, hervor. Der durch einen Zufall entdeckte und 1907 veröffentlichte Brief des Archimedes an Eratosthenes (die Methodenlehre) beweist, daß dieser (soweit wir wissen) größte Mathematiker des Altertums infinitesimale Methoden entwickelt hat, die nach dem Integralbegriff hinzielten. Diese Ansätze aber gingen völlig verloren. Der erste Mathematiker, der den kräftigen Anstoß zur Erfindung des Integrals gab, war Cavalieri¹⁾ (mathematicarum professor), der, wie er selbst bekennt, durch Keplers²⁾ Faßrechnung angeregt worden ist. War durch Galilei³⁾ der Begriff der Bewegung in physikalische und mathematische Betrachtungen mit Erfolg eingeführt worden, so bildete er für Cavalieri geradezu die Grundlage seiner Forschungen. Er denkt sich Flächeninhalte erzeugt durch Verschiebung veränderlicher Strecken,

¹⁾ Bonaventura Cavalieri (1598 . . . 1647): *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.*

²⁾ Vgl. die Anm. S. 9. ³⁾ Galileo Galilei, 1564 . . . 1642.

und Rauminhalte erzeugt durch Verschiebung veränderlicher ebener Flächenstücke; diese Elemente nennt er Indivisibeln und er definiert Flächen- und Rauminhalte als Summen aller Indivisibeln. Ohne auf den heftigen Kampf der damaligen Mathematiker für und gegen die Indivisibellehre einzugehen, muß erwähnt werden, daß Leibniz auch zuerst statt des Summenzeichens *omnia* schrieb und den Faktor *dx* zunächst nicht hatte; er wollte also die Ordinaten alle addieren. Aber sehr bald sah er ein, daß Flächenstreifen zu summieren sind, und so erfand er denn das uns heute geläufige Symbol $\int y dx$ und bildete den *calculus summatorius* aus, die Integralrechnung, die alle von seinen Vorgängern (Fermat, Wallis, ...) ziemlich mühsam errungenen Ergebnisse leichter und vor allem systematisch abzuleiten gestattete. In dem dann folgenden Siegeszuge des neuen *calculus*¹⁾, den man vornehmlich L. Euler²⁾ verdankt, wurde die Integralrechnung formal als Umkehrung der Differentialrechnung ausgebildet und die Summendefinition nur zu angenäherter Berechnung gewisser bestimmter Integrale benutzt. Erst Cauchy³⁾ definierte das Integral wieder als Grenzwert von Näherungssummen:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim [(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (b - x_n)f(x_n)]$$

unter der Voraussetzung eines im beschränkten, abgeschlossenen Intervall stetigen $f(x)$. Wesentlich erweitert wurde der Integralbegriff durch B. Riemann, der die oben (S. 13) benutzte Definition

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(\xi_k) \Delta x_k$$

aufstellte.

¹⁾ In England heißt die Infinitesimalrechnung heute noch so.

²⁾ Leonhard Euler 1707 ... 1783. ³⁾ A. L. Cauchy, 1789 ... 1857

Daß auch solche Funktionen ein Integral im Sinne Riemanns haben können, die im Integrationsintervall nicht durchweg stetig sind, sei zunächst an einigen Beispielen erläutert¹⁾. So hat man

$$91. \quad \mathfrak{I}g \frac{1}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ für } x \rightarrow \begin{cases} +0 \\ -0 \end{cases}$$

setzt man $y = 1 + \mathfrak{I}g \frac{1}{x}$, so erhält man an der Stelle $x = 0$

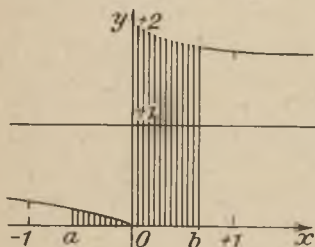


Fig. 21.

eine Sprungstelle (Fig. 21) von der Höhe 2. Setzt man $x-c$ an Stelle von x , so rückt der Sprung an die Stelle $x=c$; multipliziert man mit einer beliebigen Konstanten p und addiert eine andre Konstante q , setzt also

$$y = p \mathfrak{I}g \frac{1}{x-c} + q,$$

so erkennt man, daß man an einer beliebigen Stelle einen Sprung von jeder Sprunghöhe erzeugen kann (Fig. 22 für positives c und p und für $q > p$). Die Zeichnung läßt ohne weiteres erkennen, daß unter der Kurve bis zur x -Achse eine wohldefinierte Fläche liegt; wenn $a < c < b$ ist, so gilt (wie der Leser beweisen möge)

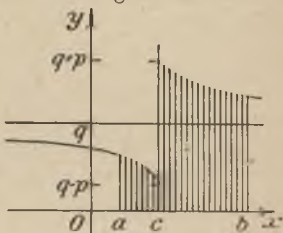


Fig. 22.

¹⁾ Nach Duichlet und Riemann bedeutet $x \rightarrow c+0$, daß sich x von größeren Werten her der Stelle c nähert, also $x=c+\delta$ für positives $\delta \rightarrow 0$ betrachtet wird; ebenso ist $x \rightarrow c-0$ abkürzend geschrieben für $x=c-\delta$ bei positiven $\delta \rightarrow 0$.

$$\int_a^x y \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow a-0} \int_a^\alpha y \, dx + \lim_{\beta \rightarrow a-0} \int_\beta^x y \, dx.$$

92. Definiert man ferner $y = [x]$ als größte in x enthaltene ganze Zahl, so hat diese Funktion unendlich viele Sprungstellen, nämlich für alle ganzzahligen Werte von x ; aber niemand kann im Zweifel sein,

daß auch (Fig. 23) $\int_a^b [x] \, dx$ einen Sinn

hat, den man ohne Mühe feststellen kann, indem man wie im vorigen Beispiel das Integral in eine endliche Anzahl von Teilintegralen zerlegt.

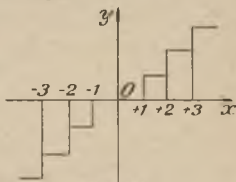


Fig. 23.

Durch genauer durchgeführte Grenzbetrachtungen erkennt man die Richtigkeit der von Riemann herrührenden Erklärung:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beschränkte Funktion integrierbar ist, besteht darin, daß man das Intervall $\langle a \dots b \rangle$ so in Teilintervalle zerlegen kann, daß die Summe aller derjenigen Teilintervalle, in denen die Schwankung größer ist als eine willkürlich angenommene positive Zahl ε , beliebig klein gemacht werden kann.

Funktionen, die dieser Bedingung genügen, können bereits sehr viele und sehr komplizierte Unstetigkeitsstellen haben. Indes kann man den Integralbegriff auf noch umfassendere Klassen von Funktionen erweitern. Die bekannteste dieser Erweiterungen rührt von H. Lebesgue her und entspricht, kurz gesagt, einer Verallgemeinerung des Inhaltsbegriffes: die betrachtete Fläche wird nicht (wie bei Riemann) durch Summen von endlich vielen, sondern durch Summen von unendlich vielen Rechtecken angenähert. Bei Einführung des Lebesgueschen Integrals wird übrigens die Aufgabe der Auffindung von Stammfunktionen zu vorgegebenem $f(x)$ auch für eine sehr allgemeine Klasse unstetiger Funktionen $f(x)$ lösbar. Näheres findet der Leser z. B. in Haupt-Aumann III.

Wir legen im folgenden stets den Riemannsches Integralbegriff zugrunde. Integrierbare Funktionen sind (daher) immer als beschränkt anzunehmen.

§ 16. Die beiden Mittelwertsätze.

Die Abschätzung eines Integralwertes geschieht mittels der beiden Mittelwertsätze, deren erster teilweise schon früher in etwas anderer Form gegeben war.

Erster Mittelwertsatz.

Es seien zwei in $a \leq x \leq b$ integrierbare Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben, von denen $\varphi(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ das Vorzeichen nicht wechselt, z. B. nicht negativ ist; ferner seien m und M die untere und die obere Grenze von $f(x)$. Bei $\varphi(x) \geq 0$ ist dann

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Ist $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ stetig, so gibt es einen Zwischenwert $x = \xi$, sodaß

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b \quad (2)$$

ist. Diese Formulierung gilt unverändert auch bei $\varphi(x) \leq 0$.

Der Beweis für die beiden Formeln (1) und (2) ergibt sich ohne weiteres aus der Integraldefinition.

Eine interessante Anwendung von (2) auf das Restglied der Taylorsche Formel (S. 43) sei hier gleich angeführt. Es war

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z) dz.$$

Wenn $f^{(n)}(z)$ in $\langle a \dots b \rangle$ stetig ist, so kann man nach (2) setzen:

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \int_a^x (x-z)^{n-1} dz = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

wir erhalten demnach das Restglied in der Form von Lagrange.

Setzt man in der Integralform $\varphi(z) = 1$, so kommt¹⁾

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) (x-\xi)^{n-1} \int_a^x dz \\ &= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) (x-\xi)^{n-1} (x-a) \\ &= \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a + \vartheta[x-a]), \end{aligned}$$

also die Restform von Cauchy.

Ist p eine ganze Zahl zwischen 0 und $n-1$, $0 \leq p \leq n-1$, so kann man nach (2) setzen

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) (x-\xi)^{n-p} \int_a^x (x-z)^{p-1} dz \\ &= \frac{(x-a)^n}{p(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}[a + \vartheta(x-a)]; \end{aligned}$$

das ist die Restform von Schlömilch, aus der übrigens für $p=1$ die Form von Cauchy, für $p=n-1$ die von Lagrange folgt.

Zweiter Mittelwertsatz.

Sei $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ integrierbar, $\varphi(x)$ einsinnig und differenzierbar mit stetiger Ableitung und sei endlich

$\int_a^x f(x) dx = F(x)$, (also $F(a) = 0$), dann ergibt sich durch

¹⁾ Der Zwischenwert ξ kann auch durch $a + \vartheta(x-a)$ ausgedrückt werden wo $0 \leq \vartheta \leq 1$ ist; dann wird $x-\xi = (x-a)(1-\vartheta)$.

Teilintegration und unter Benutzung des ersten Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= [\varphi(x) F(x)]_a^b - \int_a^b \varphi'(x) F(x) dx \\ &= \varphi(b) F(b) - F(\xi) \int_a^b \varphi'(x) dx \\ &= \varphi(b) \left[\int_a^b f(x) dx - \int_a^{\xi} f(x) dx \right] + \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx \end{aligned}$$

also wird endlich

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \\ = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx; \quad a \leq \xi \leq b. \quad (3) \end{aligned}$$

Es gibt also einen Punkt ξ im Integrationsintervall, der die durch (3) gegebene Unterteilung ermöglicht. Wenn insbesondere $\varphi(x)$ positiv und fallend ist und $A \geq \varphi(a)$ genommen wird, so gibt es eine Unterteilung des Intervalles durch einen Punkt z , sodaß

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = A \int_a^z f(x) dx$$

ist. Wenn aber $\varphi(x)$ positiv und wachsend ist und $B \geq \varphi(b)$ genommen wird, so ist (mit anderem z)

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = B \int_z^b f(x) dx.$$

Es ist wichtig, daß der zweite Mittelwertsatz auch für „böartige“, nicht differenzierbare einsinnige Funktionen $\varphi(x)$ gilt. In diesen Fällen ist er nicht mehr eine bloße Folgerung

aus dem ersten Mittelwertsatze. Der Beweis ist aber dann zu verwickelt, um ihn hier wiederzugeben. Anwendungen des zweiten Mittelwertsatzes werden wir später kennen lernen.

§ 17. Ausblick und Marschrichtung.

Wenn der Integralbegriff so allgemein wie in den letzten Nummern aufgefaßt wird, wobei man weder durch die Forderung der Stetigkeit noch der Differenzierbarkeit beschränkt zu sein braucht, so erkennt man, daß die Integration wesentlich allgemeiner und weiterreichend ist, als die Differentiation. Das heißt: die Bedingungen, die eine Funktion erfüllen muß, um integrierbar zu sein, sind einfacher und weniger scharf als die zur Differenzierbarkeit nötigen.

Die Differentialrechnung lehrt, daß jede formelmäßig gegebene Funktion differenziert werden kann. Wir haben an zahlreichen Beispielen gezeigt, daß formelmäßig gegebene Funktionen auch in geschlossener Form integriert werden können. Es ist naheliegend, zu fragen, ob jede Funktion, die in geschlossener Form durch die uns bekannten Symbole dargestellt ist, auch ein Integral in solch geschlossener Form hat. Diese Frage muß verneint werden¹⁾. Erinnern wir uns aber des auf S. 18 Gesagten, so erkennen wir, daß in den Fällen, wo die bekannten Symbole nicht ausreichen, um die doch vorhandene Funktion der oberen Grenze des Integrals auszudrücken, eben **durch das Integral eine neue Funktion definiert** wird, deren Eigenschaften zu untersuchen sind, deren Werte tabelliert werden müssen. Wir werden später einige solcher Funktionen, die große Wichtigkeit erlangt haben, behandeln. Unser nächstes Ziel ist aber, diejenigen Fälle kennen zu lernen, in denen eine geschlossene Integration (in obigem Sinne) möglich ist. Wir wenden uns daher zunächst zu den rationalen Funktionen.

¹⁾ Vgl. § 4.

Dritter Abschnitt. Integration rationaler Funktionen.**§ 18. Spezielle rationale Funktionen.**

Liegt eine ganze rationale Funktion

$$G_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

vor, so ist

$$\int G_n(x) dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + c.$$

Die Integration ganzer rationaler Funktionen bereitet also keine Schwierigkeiten.

Bei einer gebrochenen rationalen Funktion

$$\frac{\varphi_m(x)}{f_n(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}$$

wird man, wenn $m \geq n$ ist, eine ganze rationale Funktion durch Division abspalten und dann einen Bruch übrig behalten, dessen Zähler von niederem Grade ist als der Nenner. Die ganze rationale Funktion kann mühelos integriert werden, wir dürfen daher von vornherein annehmen, daß die Division bereits ausgeführt ist, und deshalb $m < n$ voraussetzen. Außerdem wollen wir annehmen, daß $\varphi_m(x)$ und $f_n(x)$ keine gemeinsamen Faktoren enthalten, also teilerfremd sind. Bevor wir zur allgemeinen Lösung der Aufgabe, eine gebrochene rationale Funktion zu integrieren, schreiten, wollen wir einige Sonderfälle betrachten, die die allgemeine Lösung erleichtern werden.

Drei Grundaufgaben¹⁾.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{x^n} = \begin{cases} \ln x & \text{für } n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

$$\text{II. } \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n}. \text{ Wir setzen } x^2 + 1 = z, 2x dx = dz, \text{ führen}$$

¹⁾ Im folgenden ist n stets ganz und positiv.

also dieses Integral auf das vorige zurück:

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) & \text{für } n = 1. \\ \frac{1}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

III. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$. Für $n = 1$ erhält man $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{arctg } x$.

Für $n > 1$ kommen wir zu einer Rückgriffsformel, indem wir beachten, daß

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$$

ist. Es wird also mit Hilfe der Teilintegration

$$\begin{aligned} J_n &= J_{n-1} - \int x \cdot \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n} \\ &= J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}, \end{aligned}$$

die Berechnung von J_n ist also auf diejenige von J_{n-1} zurückgeführt. Wenn $n-1 > 1$ ist, so wendet man auf J_{n-1} dasselbe

Verfahren an. So fährt man fort, bis man auf $J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1}$

$= \text{arc tg } x$ kommt. Man erkennt daher, wenn man alles einsetzt:

Das Integral $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ läßt sich durch rationale Funktionen und $\text{arc tg } x$ ausdrücken.

93. Sei $n = 4$. Aus der Kette von Gleichungen

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} &= \frac{x}{6(x^2 + 1)^3} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} \\ \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\ \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

folgt

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} = \frac{x}{6(x^2 + 1)^3} + \frac{5x}{24(x^2 + 1)^2} + \frac{15x}{48(x^2 + 1)} + \frac{15}{48} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

Auf eines dieser drei Integrale lassen sich nun andere zurückführen. Ist z. B. der Nenner des Integranden $(az + b)^n$, so führt man $x = az + b$ als neue Veränderliche ein; dadurch

wird $\int \frac{dz}{(az + b)^n} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^n}$ auf die Form I zurückgeleitet.

Ist der Nenner des Integranden $(az^2 + 2bz + c)^n$ mit $a \neq 0$, so setzt man $az^2 + 2bz + c = \frac{1}{a} (az + b)^2 + \frac{ac - b^2}{a}$.

Der Fall $ac - b^2 = 0$ führt auf das Integral I zurück. Ist $ac - b^2 < 0$, so läßt sich die quadratische Form $az^2 + 2bz + c$ in zwei (reelle) lineare Faktoren zerlegen, was wir später allgemeiner betrachten wollen.

Ist dagegen $ac - b^2 > 0$, so läßt sich die quadratische Form zwar auch in lineare Faktoren zerlegen, aber diese sind bekanntlich konjugiert komplex. Die quadratische Form wird daher im reellen Gebiete niemals Null, sie hat also immer einerlei Vorzeichen (das Vorzeichen von a) und heißt **definit**. Bei einer solchen Form setzen wir

$$x = \frac{az + b}{\sqrt{ac - b^2}}, \quad dx = \frac{a}{\sqrt{ac - b^2}} dz, \quad z = \frac{1}{a} [x\sqrt{ac - b^2} - b].$$

Dann wird

$$az^2 + 2bz + c = \frac{ac - b^2}{a} (x^2 + 1).$$

Man erkennt also, daß sich die Integrale mit den Zählern dz und zdz , deren Nenner eine Potenz einer definiten quadratischen Form ist, auf die Integrale II und III zurückführen lassen.

Bevor wir den allgemeinen Fall untersuchen, erwähnen wir ohne ausgeführte Beweise zwei algebraische Hilfssätze.

§ 19. Algebraische Hilfssätze.

Der erste Hilfssatz ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra. Man kann ihn in folgender Form aussprechen:

Jede ganze rationale Funktion n ten Grades

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

deren Koeffizienten a_v (reelle oder komplexe) Zahlen sind, läßt sich als Produkt von n linearen Faktoren

$$a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

darstellen, wo die α_v ebenfalls (reelle oder komplexe) Zahlen sind.

Die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein; sie heißen die Nullstellen oder Wurzeln der Funktion $f_n(x)$ bzw. der algebraischen Gleichung $f_n(x) = 0$.

Sind die Koeffizienten a_k reelle Zahlen, so können die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, falls komplexe darunter sind, nur paarweise konjugiert komplex sein. Die reelle Funktion $f_n(x)$ läßt sich demnach stets in reelle Faktoren von der Form $(x - a)^k$ und $(x^2 + 2bx + c)^k$ zerlegen, wo k die Vielfachheit der Wurzeln angibt und die quadratische Form definit ist.

Der zweite algebraische Hilfssatz lautet:

Jede echt gebrochene rationale Funktion $\varphi(x)/f(x)$ läßt sich, nachdem man den Nenner in die Produktform gebracht hat, eindeutig in eine Summe von Teilbrüchen von der Form

$$\frac{M}{(x - \alpha)^k} \quad \text{und} \quad \frac{Px + Q}{(x^2 + 2bx + c)^k}$$

zerlegen.

Zur Bestimmung der Zähler M hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem α eine einfache oder mehrfache Wurzel ist.

Ist α eine einfache Wurzel, so lautet der Teilbruch

$$\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)(x - \alpha)}$$

Sind also lauter einfache Wurzeln vorhanden, so ist die Zerlegung¹⁾

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)(x - \alpha_1)} + \frac{\varphi(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)(x - \alpha_2)} + \dots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)(x - \alpha_n)} \quad (1)$$

Sind k reelle Wurzeln untereinander gleich, etwa gleich β , so ist $f(x) = (x - \beta)^k f_1(x)$ und $f_1(x)$ enthält die Nullstelle β nicht mehr. Es ist dann

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(\beta)}{f_1(\beta)(x - \beta)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x - \beta)^{k-1} f_1(x)} \quad (2)$$

Der zweite Bruch, dessen leicht angebbarer Zähler höchstens vom Grade $m - 1$ ist, dessen Nenner aber die Wurzel β nur $(k - 1)$ -fach enthält, kann ebenso weiter behandelt werden. So erhält man eine Summe von Brüchen mit den Nennern $(x - \beta)^k, (x - \beta)^{k-1}, \dots, (x - \beta)$.

Sind $\gamma + i\delta$ und $\gamma - i\delta$ zwei einfach auftretende Nullstellen, so liefert die Partialbruchzerlegung auch konjugiert komplexe Zähler; es ist demnach

$$\frac{C + iD}{x - (\gamma + i\delta)} + \frac{C - iD}{x - (\gamma - i\delta)} = \frac{2C(x - \gamma) - 2D\delta}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} \quad (3)$$

Der Zähler dieses Bruches ist eine lineare Funktion von x , der Nenner eine definite quadratische Form. Tritt solch Wurzel paar k -fach auf, so verfährt man analog wie oben. Hat man die Zerlegung in Teilbrüche mit unbestimmten Koeffizienten in den Zählern angesetzt, so multipliziert man diese identische Gleichung mit $f(x)$ und erhält durch Vergleichung

¹⁾ Die Marken m und n seien der Kürze halber weggelassen.

der Koeffizienten gleicher Potenzen von x die Werte der unbestimmten Koeffizienten. Die folgenden Beispiele mögen alles erläutern.

$$94. \quad \frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1},$$

da $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ ist.

Multipliziert man mit $x^2 - 2x - 3$, so kommt
 $x + 5 = A(x + 1) + B(x - 3)$, also ist $A + B = 1$,
 $A - 3B = 5$, $A = 2$, $B = -1$, demnach ist

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}.$$

$$95. \quad \frac{3x-5}{(x-2)^2} = \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{x-2}$$

ergibt $3x - 5 = A_2 + A_1(x - 2)$, $A_2 = 1$, $A_1 = 3$, also ist

$$\frac{3x-5}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{x-2}.$$

$$96. \quad \frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Man erhält

$3x^2 - 10x + 4 = A(x - 2)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x - 2)$ und daraus durch Koeffizientenvergleichung $3 = A + B + C$, $-10 = B - 3C$, $4 = -4A - 2B + 2C$; demnach ist $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$, also wird

$$\frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2}.$$

Daß dieses so einfach gewonnene Ergebnis mit der Formel (1) übereinstimmt, ist sofort zu sehen; denn hier ist $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$, also wird
 $\varphi(1)/f'(1) = -3/-3 = +1$, $\varphi(2)/f'(2) = -4/4 = -1$,
 $\varphi(-2)/f'(-2) = 36/12 = 3$.

$$97. \quad \frac{4-x}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Px+Q}{x^2-2x+2}.$$

Man erhält aus $4-x = A(x^2-x^2+2) + (Px+Q)x$ die Bestimmungsgleichungen $A+P=0$, $-2A+Q=-1$, $2A=4$; also ist $A=2$, $P=-2$, $Q=3$ und es wird

$$98. \quad \frac{4-x}{x(x^2-2x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{2x-3}{x^2-2x+2}.$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2+x+1}.$$

Es ergeben sich aus $x^3+x^2+x+1 = P_1x+Q_1 + (P_2x+Q_2)(x^2+x+1)$ die Werte $P_1=0$, $Q_1=1$, $P_2=1$, $Q_2=0$; also wird

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Weitere Beispiele folgen später.

§ 20. Die Integration einer gebrochenen rationalen Funktion.

Wir stellen nach dem Vorhergehenden fest:

Eine rationale Funktion von x ist (im allgemeinen) Summe aus einem Polynom irgendwelchen Grades und einer echt gebrochenen Funktion von x . Dieser Bruch läßt sich nach Ermittlung der Nullstellen des Nenners eindeutig in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen, deren Nenner je nur von einer reellen Wurzel oder von einem Paare konjugiert komplexer Wurzeln abhängen. Im ersten Falle ist der Nenner solchen Teilbruches eine Potenz einer linearen Funktion von x , im zweiten Falle eine Potenz einer definiten quadratischen Funktion von x . Das Integral einer rationalen Funktion besteht demnach allgemein aus einem rationalen Teile, logarithmischen Gliedern und Arkustangensfunktionen.

Beispiele:

$$99. \int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-3)(x+4)} dx = A \int \frac{dx}{x-1} + B \int \frac{dx}{x-3} + C \int \frac{dx}{x+4}.$$

Nach der oben angegebenen Methode erhält man für die Vorzahlen A, B, C die Werte $-\frac{3}{10}, \frac{13}{14}, \frac{13}{35}$,

sodaß das Ergebnis

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-3)(x+4)} dx = -\frac{3}{10} \ln(x-1) + \frac{13}{14} \ln(x-3) + \frac{13}{35} \ln(x+4)$$

herauskommt.

100. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$, ein klassisches Beispiel, dessen Bewältigung Leibniz Schwierigkeiten machte.

Die Wurzeln der Gleichung $x^4 + 1 = 0$ sind die vier Werte $\sqrt[4]{-1}$; faßt man die konjugierten Wurzeln zusammen, so kommt $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$, also setzt man: $\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{P_1 x + Q_1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$. Multi-

pliziert man mit $x^4 + 1$ und vergleicht die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x , so erhält man die Gleichungen

$P_1 + P_2 = 0$	Aus ihnen folgt fast unmittelbar
$P_1\sqrt{2} - Q_1 - P_2\sqrt{2} - Q_2 = 0$	
$P_1 - Q_1\sqrt{2} + P_2 + Q_2\sqrt{2} = 0$	
$Q_1 + Q_2 = 1$	
	$P_1 = -P_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$
	$Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}.$

Damit wird ¹⁾

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx.$$

Jedes der beiden Integrale auf der rechten Seite zerlegt man in zwei Integrale mit den Zählern $x dx$ und $\sqrt{2} dx$ und erhält so nach Ausführung der Integration

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg(x\sqrt{2} - 1).$$

Man berechne die Integrale der Funktionen 94 . . . 98.

Wichtige Anmerkungen: 1. Die Methode der Partialbruchzerlegung ist gewissermaßen die ultima ratio, d. h. sie wird nur angewendet, wenn es nicht anders geht. So wird z. B.

101. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 + 1}$ einfach durch die Bemerkung lösbar, daß $d(x^4 + 1) = 4x^3 dx$ ist; daher ist

$$\int \frac{x^3 dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1).$$

Diese Bemerkung muß überhaupt durchweg beachtet werden. Auch weiterhin werden allgemeine Methoden gegeben werden, die unter allen Umständen zum Ziele führen, von denen man aber in besonderen Fällen keinen Gebrauch macht.

2. Jedes der unbestimmten Integrale kann zur Berechnung eines bestimmten Integrals dienen, nur darf in dem Integrationsintervall $\langle a \dots b \rangle$ keine

¹⁾ Eine neue Methode rührt her von G. Kowalewski, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 40.

Nullstelle des Nenners liegen, da dort der Integrand unstetig wird. In solchem Falle muß eine besondere Untersuchung einsetzen, auf die wir später zu sprechen kommen.

Vierter Abschnitt. Integration einiger irrationaler und transzendenter Funktionen.

§ 21. Überblick.

Nachdem die Integration rationaler Funktionen von x ausnahmslos gelungen ist, werden wir bei irrationalen Funktionen nur in einigen Fällen einen ähnlichen Erfolg haben. Wir behandeln die Integration von Funktionen, die sich rational zusammensetzen aus x und folgenden Irrationalitäten: 1. n^{te} Wurzel aus einer gebrochenen linearen Funktion von x , 2. Quadratwurzel aus einer ganzen quadratischen Funktion von x , 3. Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion höheren Grades. In den ersten beiden Fällen wird es gelingen, die Aufgabe auf die Integration einer rationalen Funktion einer neuen Veränderlichen zurückzuführen. Im dritten Falle ist dies allgemein nicht mehr möglich. Dann werden uns Integranden beschäftigen, die trigonometrische, hyperbolische und Exponentialfunktionen enthalten.

§ 22. Rationale Funktionen von x und von $\sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}}$.

Bezeichnet man eine rationale Funktion durch das Symbol R , so handelt es sich hier um das Integral

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}}\right) dx.$$

Dabei muß offenbar $a\beta - b\alpha \neq 0$ sein, denn sonst wäre ja der Nenner im Zähler enthalten, und der Radikand wäre eine Konstante. Das vorgelegte Integral kann nun stets durch die Substitution

$\frac{a + bx}{\alpha + \beta x} = t^n$, $x = \frac{\alpha t^n - a}{b - \beta t^n}$, $dx = n(\alpha b - a\beta) \frac{t^{n-1}}{(b - \beta t^n)^2} dt$
in die Form

$$n(\alpha b - a\beta) \int R\left(\frac{\alpha t^n - a}{b - \beta t^n}, t\right) \cdot \frac{t^{n-1}}{(b - \beta t^n)^2} dt,$$

also in das Integral einer rationalen Funktion von t gebracht werden, womit die Aufgabe grundsätzlich gelöst ist.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 102. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx}} &= \frac{2}{b^3} \int (t^2 - a^2)^2 dt = \frac{2}{b^3} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3} at^3 + a^2 t \right) \\ &= \frac{2}{15b^3} (8a^2 - 4abx + 3b^2 x^2) \sqrt{a + bx}; \end{aligned}$$

es war zu setzen: $a + bx = t^2$, $b dx = 2t dt$, $x = \frac{1}{b} (t^2 - a)$.

$$103. \int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$104. \int \sqrt{\frac{a+x}{x}} dx = \sqrt{ax + x^2} - \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{x}}.$$

§ 23. Rationale Funktionen von x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$.

Wir führen die Integration an drei Hauptformen durch:

I. $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$.

Das Integral lautet also $J_1 = \int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$.

Setzt man $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$, so wird $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = -\frac{4t dt}{(1+t^2)^2}$. Dadurch wird J_1

in ein Integral einer rationalen Funktion von t verwandelt.

II. $a = -1$, $b = 0$, $c = +1$.

Das Integral heißt nun $J_2 = \int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$.

Setzt man $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, so sieht man leicht, daß dadurch abermals der Übergang zu dem Integral einer rationalen Funktion von t gewährleistet ist.

III. $a = +1$, $b = 0$, $c = +1$.

Es handelt sich also um das Integral

$$J_3 = \int R(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx.$$

Hier setzen wir $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x = \frac{t^2 - 1}{2t}$,

$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}$, $dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$; damit erhält man wieder

das Integral einer rationalen Funktion von t .

Wir wenden uns nun der allgemeinen quadratischen Form $a + 2bx + cx^2$ zu und zeigen, daß man in jedem Falle die Zurückführung auf eine der drei obigen Formen erreichen kann. Dabei ist der Fall $ac - b^2 = 0$ unbeachtlich, denn dann ist ja $a + 2bx + cx^2 = c \left(x + \frac{b}{c}\right)^2$, die Quadratwurzel daraus ist daher rational (und reell, wenn $c > 0$ ist). Wir haben also nur die Fälle $ac - b^2 \neq 0$ zu untersuchen.

1. Fall: $\int R(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}) dx$, $ac - b^2 < 0$, $c < 0$.

Setzt man $\xi = \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}}$, so wird

$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = \sqrt{\frac{ac - b^2}{c}} \sqrt{1 - \xi^2}$, wodurch das betreffende Integral die Form J_1 annimmt.

2. Fall: $ac - b^2 < 0$, $c > 0$.

Wir setzen $\xi = \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}}$, dann wird

$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = \sqrt{\frac{b^2 - ac}{c}} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$, das betreffende Integral ist also auf die Form J_2 gebracht.

3. Fall: $ac - b^2 > 0$, $c > 0$.

Setzen wir $\xi = \frac{b + cx}{\sqrt{ac - b^2}}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{a + 2bx + cx^2} &= \sqrt{\frac{1}{c} (b + cx)^2 + \frac{ac - b^2}{c}} \\ &= \sqrt{\frac{ac - b^2}{c}} \cdot \sqrt{\xi^2 + 1}, \end{aligned}$$

es ergibt sich demnach ein Integral von der Form J_3 .

Mitunter kann es vorteilhaft sein, die gegebene Funktion in folgender, immer möglichen Weise umzuformen:

$$R(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}) = G_1(x) + \frac{G_2(x)}{G_3(x)\sqrt{a + 2bx + cx^2}},$$

wo G_1, G_2, G_3 ganze rationale Funktionen von x sind.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 105. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \\ = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 106. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 107. \int \sqrt{2ax + x^2} dx \\ = \frac{x + a}{2} \sqrt{2ax + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + a + \sqrt{2ax + x^2}). \end{aligned}$$

$$108. \int \sqrt{2ax - x^2} dx$$

$$= \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a-x}{a}$$

Für $c > 0$ ist:

$$109. \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln (b + cx + \sqrt{c} \cdot \sqrt{a + 2bx + cx^2});$$

dabei ist \sqrt{c} mit solchem Vorzeichen zu nehmen, daß der Klammerausdruck positiv wird.

Daß man nicht immer nach den allgemeinen Regeln zu verfahren braucht, möge wenigstens ein Beispiel erläutern:

$$110. \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 - 2x)^2}};$$

wir setzen nun $1 - 2x = y$, $dx = -\frac{1}{2} dy$ und erhalten nach Beispiel 13 S. 34

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = - \arcsin (1 - 2x).$$

Ehe wir zu den Integralen einiger transzendenter Funktionen übergehen, sei die schon erwähnte Frage behandelt, ob man in geschlossener Form Integrale von Funktionen darstellen kann, bei denen die Quadratwurzel aus einer Form höheren als des zweiten Grades in x vorkommt, also etwa

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}}$$

oder $\int \sqrt{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n} dx$ mit $n > 2$.

Man kann beweisen, daß dies — abgesehen von besonderen Fällen — unmöglich ist, daß also solche Integrale neue Funktionen definieren. Insbesondere heißen die Integrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

und

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = E(k, \varphi)$$

elliptische Integrale erster und zweiter Gattung; k heißt ihr Modul. Die rechts stehende zweite Form geht ersichtlich aus der links stehenden ersten Form durch die Substitution

$$x = \sin \varphi, \quad dx = \cos \varphi d\varphi$$

hervor. Wir behandeln sie später (§ 27).

§ 24. Transzendente Funktionen.

In den Paragraphen 4, 10, 12, 13 und 14 haben wir bereits zahlreiche transzendente Funktionen integriert, so daß wir hier nur noch einiges zu ergänzen haben.

A. Bezeichnet $R(e^x)$ eine rationale Funktion von e^x , so wird das Integral $\int R(e^x) dx$ durch die Substitution $e^x = z$,

$dx = \frac{dz}{z}$ in das Integral einer rationalen Funktion von z

verwandelt. Da die hyperbolischen Funktionen selbst rationale Funktionen von e^x sind, so werden durch obige Substitution die Integrale von rationalen Funktionen der hyperbolischen Funktionen auf die Integrale von rationalen Funktionen zurückgeführt; sie bedürfen also keiner weiteren Erläuterung.

B. Ist der Integrand eine rationale Funktion der trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, so führt man $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z$ als neue Variable ein. Es lassen sich ja bekanntlich die trigonometrischen Funktionen von x und

auch dx rational durch z ausdrücken

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-z^2}{2z}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Somit ist auch hier die Sache auf das Integral einer rationalen Funktion zurückzuführen.

C. Von „gemischten“ Ausdrücken seien nur einige ausgeführt.

111. $\int e^{kx} \sin^n x dx.$

Durch Teilintegration findet man

$$\int e^{kx} \sin^n x dx = \frac{e^{kx} \sin^n x}{k} - \frac{n}{k} \int e^{kx} \sin^{n-1} x \cos x dx;$$

weiter wird

$$\int e^{kx} \sin^{n-1} x \cos x dx = \frac{e^{kx} \sin^{n-1} x \cos x}{k}$$

$$- \frac{n-1}{k} \int e^{kx} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx + \frac{1}{k} \int e^{kx} \sin^n x dx.$$

Ersetzt man hier $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$ und vereinigt man die so entstandene letzte Gleichung mit der ersten, so kommt

$$\int e^{kx} \sin^n x dx = \frac{e^{kx} \sin^{n-1} x (k \sin x - n \cos x)}{k^2 + n^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{k^2 + n^2} \int e^{kx} \sin^{n-2} x dx.$$

Ist n eine ungerade Zahl, so gelangt man durch die Fortsetzung dieses Prozesses zu dem Integral

$$\int e^{kx} \sin x dx = \frac{e^{kx} (k \sin x - \cos x)}{k^2 + 1};$$

ist n eine gerade Zahl, so kommt schließlich das Integral

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}.$$

Ganz analog verfährt man mit dem Integranden $e^{kx} \cos^n x$.

112. $\int f(x) \arcsin x \, dx$.Wenn $\int f(x) \, dx = F(x)$ bekannt ist, so ergibt Teilintegration

$$\int f(x) \arcsin x \, dx = F(x) \arcsin x - \int \frac{F(x) \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist z. B. $f(x) = x^n$, so erhält man

$$\int x^n \arcsin x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \, dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

das neue Integral läßt sich für ganzzahliges n in geschlossener Form ausdrücken.

Weiteren Beispielen transzendenter Integranden werden wir später begegnen (§ 26, § 30).

Es ist nicht Zweck eines einführenden Lehrganges der Integralrechnung, alle irgendmöglichen Arten von Integralen in der bisherigen Weise zu untersuchen. Wir wenden uns vielmehr im fünften Abschnitte zu allgemeineren Methoden, die ein neues und wichtiges Gebiet der Integralrechnung erschließen. Vorher aber noch eine beachtliche

Anmerkung: Es gibt in großer Anzahl bestimmte Integrale, die sich in geschlossener Form darstellen lassen, obwohl die zugehörigen unbestimmten Integrale das nicht gestatten. Ein solches Beispiel ist

113. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx$. Wir setzen $x = \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{dx}{1+x^2} = d\varphi$ und

verwandeln dadurch das gegebene Integral in

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} \varphi) \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos \varphi} \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 \cos \frac{\pi}{4} \, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale sind aber einander gleich, denn ein bestimmtes Integral hängt ja nicht von den Integrationsvariablen ab, sondern außer von der Form des Integranden nur von den Grenzen. Daher heben sich die beiden letzten Integrale weg, und es bleibt

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 \cos \frac{\pi}{4} d\varphi = \frac{\pi}{4} \ln \sqrt{2} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Fünfter Abschnitt. Reihenentwicklung. Uneigentliche Integrale. Differentiation und Integration nach einem Parameter.

§ 25. Allgemeines über Reihenentwicklungen und Grenzfunktionen.

In der Differentialrechnung¹⁾ ist im VI. Abschnitt die Definition für die Summe s von unendlich vielen Gliedern als Grenzwert der Summe s_n der ersten n Glieder gegeben. Besteht ein solcher Grenzwert, so heißt die Reihe konvergent. Wenn die Glieder nicht alle positiv sind, so heißt die Reihe dann absolut oder unbedingt konvergent, wenn auch die Reihe der absoluten Beträge der Glieder konvergiert, sonst bedingt konvergent.

Die Differenz zwischen dem Grenzwert s von s_n und s_n selbst heißt der Rest der Reihe: $s - s_n = R_n$, $s = s_n + R_n$.

Sind die Glieder einer Reihe Funktionen von x , $u_k = u_k(x)$, und existiert die Summe $s = \lim s_n$ für alle x eines (offenen oder abgeschlossenen) Intervalles I (also z. B. für $a < x < b$ oder $a \leq x$ u. s. w.), so heiße I ein Konvergenzintervall oder Konvergenzbereich der Reihe. Soll nun bei vorgegebenem x $|R_n(x)| < \varepsilon$ gemacht werden, so ist n größer zu nehmen als eine Zahl $N(\varepsilon, x)$, die im allgemeinen von x abhängt (vgl. Bsp. 115). Kann aber N als von x unabhängig (für alle x aus I) gewählt werden, so heiße die Reihe gleich-

¹⁾ Sammlung Götschen Bd. 87.

mäßig konvergent in I . Bei gleichmäßiger Konvergenz ist also die Anzahl n der Reihenglieder, durch deren Summation man den Grenzwert bis auf weniger als ε annähert, die gleiche für alle x (vgl. Bsp. 114).

Eine hinreichende (aber keineswegs notwendige) Bedingung für gleichmäßige Konvergenz wird geliefert durch den vielbenutzten

Satz von Weierstraß¹⁾. Eine im Intervall I konvergente Reihe $u_0(x) + u_1(x) + \dots$ konvergiert sicher gleichmäßig in I , wenn zur Reihe der absoluten Beträge der $u_n(x)$ eine konvergente Oberreihe mit konstanten positiven Gliedern angegeben werden kann.

Der Beweis ist leicht zu führen: Ist für alle x des Bereiches $|u_k(x)| \leq a_k$, wo die Größen a_0, a_1, a_2, \dots positive, von Null verschiedene Zahlen sind, deren Summe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ konvergent ist, so ist

$$|R_{n+p}(x) - R_n(x)| = |u_n(x) + \dots + u_{n+p-1}(x)| \leq a_n + \dots + a_{n+p-1}.$$

Diese letzte Summe kann aber, da die Reihe der a_k konvergiert, für genügend großes n und beliebiges $p \geq 0$ kleiner gemacht werden als jede gegebene Zahl ε . Daher ist $|R_n(x)| < \varepsilon$ für dasselbe genügend große n und für jedes x innerhalb des Bereiches, d. h. die Reihe $u_0(x) + u_1(x) + \dots$ konvergiert in dem Bereiche gleichmäßig.

So ist z. B. die Reihe

$$114. \quad \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots$$

für alle Werte von x gleichmäßig konvergent, weil die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

konvergiert.

¹⁾ Karl Weierstraß, 1815... 1897.

115. Nicht gleichmäßig konvergent ist dagegen die Reihe $\sum u_\nu(x)$, wo $u_\nu(x) = \frac{\nu x}{\nu^2 x^2 + 1} - \frac{(\nu + 1)x}{(\nu + 1)^2 x^2 + 1}$, also

$s_n(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{nx}{n^2 x^2 + 1}$ ist. Diese Reihe konvergiert

zwar für jed^e x gegen die stetige Funktion $\frac{x}{x^2 + 1}$, aber

die Konvergenz ist in keinem, den Punkt $x = 0$ enthaltenden Intervall gleichmäßig: ist nämlich $-\alpha < x < +\alpha$ ein solches, beliebig vorgegebenes Intervall,

so gibt es zu jedem n , das größer ist als $\frac{1}{\alpha}$, ein x_n aus diesem Intervall derart, daß $nx_n = \pm 1$ ist, daß also

$$R_n = \pm \frac{1}{2} \text{ wird.}$$

Wichtige Beispiele für gleichmäßige Konvergenz werden durch die sogen. Potenzreihen geliefert, d. h. die Reihen mit $u_\nu = a_\nu x^\nu$, wo a_ν konstant. Für $x = 0$ konvergiert jede Potenzreihe. Man kann zeigen (was wir hier aber übergehen): Eine Potenzreihe konvergiert im Intervalle $-|x_0| < x < |x_0|$ falls sie für x_0 konvergiert ($x_0 \neq 0$). Ferner konvergiert dann die Reihe entweder für alle x , oder es gibt eine (positive) Zahl $r > 0$, so daß $-r < x < r$ das größte offene Konvergenzintervall ist; r heißt der Konvergenzradius der Reihe. Schließlich ¹⁾:

Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das ganz in einem offenen Konvergenzintervall liegt.

Wir erläutern diese Sätze an dem einfachsten Beispiel, nämlich an der geometrischen Reihe. Bekanntlich ist

¹⁾ Vgl. dazu z. B. Haupt-Aumann I, S. 89 oder S. G. Bd. 87, § 41.

$$116. \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

und zwar gilt diese Formel bei festem n für jeden von 1 verschiedenen Wert von x .

Dagegen muß für $n \rightarrow \infty$ notwendigerweise $-1 < x < +1$ vorausgesetzt werden, da nur dann der Rest $\frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow 0$

strebt für $n \rightarrow \infty$. Nehmen wir nun innerhalb dieses Konvergenzbereiches das abgeschlossene Intervall $-0,5 \leq x \leq 0,5$ und verlangen, daß $R_n < 0,001$ sein soll, so ist dies der Fall

für $\frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{0,5^{n+1}}{0,5} = 0,5^n < \varepsilon = 0,001$, d. h. für $n \geq 10$,

also: Bei $|x| \leq 0,5$ muß man mindestens bis x^{10} summieren, damit für alle $|x| \leq 0,5$ der Fehler $s - s_n < 0,001$ ist. Die Anzahl der zu addierenden Glieder hängt also einerseits von der Genauigkeit ab, die man erreichen will, also von der gegebenen Zahl ε , andererseits von dem Intervall, das man betrachtet. Soll z. B. $|x| \leq 0,9$ sein und wieder $\varepsilon = 0,001$,

so kommt $\frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{0,9^{n+1}}{0,1} < \varepsilon = 0,001$, oder $0,9^{n+1} < 0,0001$,

also wird jetzt $n \geq 65$.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß die obige Reihe $1 + x + x^2 + \dots$ zwar in jedem abgeschlossenen Intervall innerhalb des Konvergenzgebietes $-1 < x < +1$ gleichmäßig konvergiert, dagegen nicht mehr in dem offenen Gebiete $-1 < x < +1$.

Da man jede Folge von Funktionen $f_n = f_n(x)$ auch als Folge der Teilsummen $f_0 + (f_1 - f_0) + \dots + (f_n - f_{n-1})$ der Reihe mit den Gliedern $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ darstellen kann, so übertragen sich unsere Betrachtungen ohne weiteres auf Funktionsfolgen. Der Summe der Reihe entspricht dabei die Grenzfunktion der Folge, der sich die Funktionen der Folge immer mehr nähern. Übrigens

lehren schon einfache Beispiele (vgl. das Folgende), daß dabei aus der Stetigkeit der $f_n(x)$ keineswegs die Stetigkeit der Grenzfunktion folgt. Das beruht auf der Tatsache¹⁾, daß im allgemeinen zwei Grenzübergänge nicht vertauscht werden dürfen. Das einfachste Beispiel einer Funktionenfolge bilden die polytropischen Kurven,

die wir in der Form $y = x^{\frac{1}{n}}$ schreiben wollen. Wir betrachten sie für $0 \leq x \leq 1$ und lassen die positive, ganze Zahl $n \rightarrow \infty$ gehen:

117. $y_n = x^{\frac{1}{n}}$, $0 \leq x \leq 1$, $n \rightarrow \infty$, n positiv und ganz.

Alle Funktionen y_n sind für endliches n stetig. Die Grenzfunktion $y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}}$ ist für $x = 0$ selbst gleich Null, für $0 < x \leq 1$ aber gleich 1, sie ist demnach an der Stelle $x = 0$ unstetig. Anschaulich wird die Sachlage klar, wenn man statt der Funktionen y_n und der Grenzfunktion die Kurven

$y_n = x^{\frac{1}{n}}$ und die Grenzkurve betrachtet (Fig. 24). Die Kurven ziehen sich mit wachsendem n immer näher an die Strecken OT und TE heran, bis endlich die Grenzkurve aus dem stetigen Streckenzug $OT + TE$ besteht. Aber die Annäherung ist nicht gleichmäßig, wie man schon aus der Figur erkennen kann. Nehmen wir nämlich etwa $\epsilon = 0,1$, so erkennen wir sofort, daß, wie groß man auch n nehmen möge, doch in der Nähe des Punktes $x = 0$ immer noch Punkte vorhanden sind, deren Ordinaten kleiner als 0,9 sind, so daß

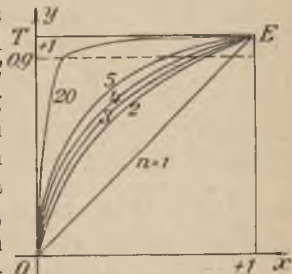


Fig. 24.

¹⁾ Allgemeines darüber s. bei Haupt-Aumann I, S. 159 ff.

die Kurve aus dem Streifen zwischen $y = 1$ und $y = 0,9$ heraustritt. Auch rechnerisch ist das sofort darzustellen.

Soll $y_\infty - y_n = 1 - x^n = \varepsilon$ sein ($0 < x \leq 1$), so folgt

$$n = \frac{\log x}{\log(1 - \varepsilon)},$$
woraus hervorgeht, daß n von x abhängt und über alle Grenzen wächst, wenn $x \rightarrow 0$ geht (ohne Null zu werden).

Eine Unstetigkeit der Grenzfunktion ist bei gleichmäßiger Konvergenz nicht möglich. Es gilt nämlich der wichtige Satz

| Eine gleichmäßig konvergierende Reihe stetiger Funktionen hat als Summe eine stetige Funktion.

Der Beweis ergibt sich aus der Betrachtung des Restes $R_n(x)$ der Reihe. Nach der Definition der gleichmäßigen Konvergenz kann man für das ganze Intervall eine Zahl n so bestimmen, daß $|R_n(x)|$ überall kleiner als ε wird. Nehmen wir nun zwei Punkte x und $x + h$ des Intervalles, so ist sicher

$$|R_n(x + h) - R_n(x)| < 2\varepsilon.$$

Schreiben wir $f(x) = s_n(x) + R_n(x)$, so ist $s_n(x)$ als Summe endlich vieler stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion; daher gilt für alle hinreichend kleinen $|h|$:

$$|s_n(x + h) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt aber sofort

$$|f(x + h) - f(x)| = |s_n(x + h) - s_n(x)| + |R_n(x + h) - R_n(x)| < 3\varepsilon.$$

Da man 3ε beliebig klein annehmen kann, so ist damit die Stetigkeit von $f(x)$ argetan.

§ 26. Das Integral einer Reihe.

Die Frage, die hier erledigt werden soll, lautet:

| Wann kann eine unendliche Reihe von Funktionen gliedweise integriert werden?

Die Antwort, die wir herleiten wollen, heißt kurz gefaßt: jedenfalls bei gleichmäßiger Konvergenz.

Wir nehmen im Intervall $\langle a \dots b \rangle$ eine unendliche Reihe stetiger Funktionen $f_k(x)$, setzen voraus, daß die Reihe konvergiert und eine durchweg stetige Funktion $F(x)$ darstellt: $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots = s_n(x) + R_n(x)$, $a \leq x \leq b$ (1)

Wir setzen:

$$(2) \quad \varphi_k(x) = \int_{x_0}^x f_k(\xi) d\xi, \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi, \quad r_n(x) = \int_{x_0}^x R_n(\xi) d\xi$$

mit $a < x_0 < b$; dann ist also

$$\Phi(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) + r_n(x) \quad (3)$$

Da die Reihe (1) konvergiert, so ist zwar $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, aber lediglich daraus folgt noch nicht, daß auch

$$r_n(x) \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Zur Klärung betrachten wir als Beispiel

$$118. \quad R_n(x) = kxe^{-kx^n}.$$

Hier ist offenbar $R_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dagegen ist für $x_0 = 0$

$$r_n(x) = \int_0^x n\xi e^{-n\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}(1 - e^{-nx^2}) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Man veranschauliche sich diesen Sachverhalt an einer Figur!

Wir müssen also verlangen, daß

$$\int_{x_0}^x \lim R_n(\xi) d\xi = \lim \int_{x_0}^x R_n(\xi) d\xi \quad (5)$$

ist, denn nur dann ist $\Phi(x)$ gleich der Summe der $\varphi_k(x)$, nur dann ist also

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \sum \int_{x_0}^x f_k(x) dx. \quad (6)$$

Geben wir nun ein beliebig kleines ε vor, dann genügt es, wenn wir ein n_0 so groß bestimmen können, daß für alle x des Intervalles $\langle a \dots b \rangle$ bei $n > n_0$ stets

$$F(x) = \sum_1^n f_k(x) + R_n(x) \quad \text{mit} \quad |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x_1 - x_0}$$

gilt. Daraus folgt aber nach dem ersten Mittelwertsatze

$$\int_{x_0}^x |R_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Das besagt aber, daß die Reihe (6) konvergiert und das Integral von $F(x)$ zur Summe hat. Die soeben verlangte Bedingung (für alle x usw.) ist aber nichts anderes als die Forderung gleichmäßiger Konvergenz für die Reihe (1). Diese war im Beispiel 118 nicht erfüllt. Allerdings sei hier nicht verschwiegen, daß die Gleichung (6) auch in manchen Fällen gilt, wo keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Wir haben also eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung vor uns. Jedenfalls können wir das Ergebnis jetzt so aussprechen:

Wenn sich eine in $\langle a \dots b \rangle$ stetige Funktion $F(x)$ in eine Reihe stetiger Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots$ entwickeln läßt, die im Bereiche $\langle a \dots b \rangle$ gleichmäßig konvergiert, so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x) dx = \sum \int_{x_0}^{x_1} f_n(x) dx; \quad (a \dots x_0 \dots x_1 \dots b).$$

Eine solche Reihe läßt sich also **gliedweise integrieren**, d. h. die Summe der Integrale ist das Integral der Summe der Glieder der Reihe. Summation und Integration dürfen bei gleichmäßiger Konvergenz vertauscht werden.

Da jede Potenzreihe in einem ganz im Innern des Konvergenzbereiches gelegenen abgeschlossenen Intervalle gleichmäßig konvergiert, so können wir weiter sagen:

Jede Potenzreihe darf in einem dem Inneren ihres Konvergenzbereiches eingelagerten abgeschlossenen Intervalle gliedweise integriert werden.

Beispiele¹⁾.

119. $\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ist $x^2 < 1$, so ist nach dem binomischen Satze

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots,$$

folglich erhält man durch Integration der Reihe

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots,$$

und zwar sicherlich für $x^2 < 1$. Aber die Reihe konvergiert auch noch für $x^2 = 1$, wo die Binomialreihe divergiert. Denn abgesehen vom ersten Gliede sind die Glieder der Reihe

$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$ kleiner als die entsprechenden Glieder der konvergenten Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots,$$

deren Wert 2 ist²⁾. Nun ist aber leicht zu beweisen der

Abelsche Grenzwertsatz: Wenn die Potenzreihe

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius r hat und sie

für $x = +r$ noch konvergent ist, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow r-0} f(x) \text{ vorhanden und gleich } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Daraus ergibt sich

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

¹⁾ Es sei daran erinnert, daß x der Einfachheit halber sowohl als Integrationsveränderliche wie auch als obere Grenze auftreten kann; vgl. § 6.

²⁾ Es ist nämlich $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^3}{6} - \dots$, was für $x = 1$ den Wert Null gibt.

Durch Reihenentwicklung können wir nun auch z. B. das elliptische Integral erster Gattung $F(k, \varphi)$ berechnen (s. § 23, S. 76). Es war

$$120. \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad (k^2 < 1).$$

Entwickelt man den Integranden nach Potenzen von $k^2 \sin^2 \varphi$, so kommt

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots;$$

also wird

$$F(k, \varphi) = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^\varphi \sin^4 \varphi \, d\varphi \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^\varphi \sin^6 \varphi \, d\varphi + \dots$$

Die Integrale sind alle durch Rückgriffsformeln (s. § 14) berechenbar. Setzt man insbesondere die obere Grenze

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{2m-1}{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} \varphi \, d\varphi = \dots \\ = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{2m(2m-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2};$$

damit erhält man für das sogenannte vollständige elliptische Integral erster Gattung

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

Wir werden in den Anwendungen¹⁾ beim Pendel auf das elliptische Integral stoßen. Ähnlich kann man mit $E(k, \varphi)$ verfahren.

Unter den einfach aussehenden Integralen, die sich trotzdem nicht durch geschlossene Ausdrücke elementarer Funktionen auswerten lassen, sei hier nur der sogenannte Integralsinus behandelt; es soll also gezeigt werden, wie man zur Berechnung dieser neuen, durch ein Integral definierten Funktion gelangt.

121. Der Integralsinus = sinus integralis = $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$.

Dabei soll dem, für $x = 0$ zunächst nicht erklärten Integranden der Wert 1 für $x = 0$ zuerteilt sein.

Aus der Entwicklung

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots$$

ergibt sich sofort die sehr gut konvergente Reihe

$$\text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + - \dots \text{ für } |x| < \infty.$$

§ 27. Uneigentliche Integrale.

Wir hatten früher (S. 56) gesehen, daß unter Benutzung der Riemannschen Definition der Integralbegriff auch auf gewisse unstetige Funktionen ausgedehnt werden kann; indes waren diese Funktionen sämtlich beschränkt, wie denn überhaupt das Riemannsche Integral nur für beschränkte Funktionen erklärt ist. Aber auch gewissen unbeschränkten Funktionen läßt sich ein Integral zuordnen. Man erkennt dies

z. B. bei Betrachtung der von $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $0 < x \leq 1$ begrenzten Fläche oberhalb der x -Achse; die in ihr enthaltene,

¹⁾ In Bd. 147 der Sammlung Göschen.

über $\varepsilon < x \leq 1$, $\varepsilon > 0$ stehende Fläche hat ja den Inhalt $2(1 - \sqrt{\varepsilon})$ und dieser Inhalt konvergiert mit $\varepsilon \rightarrow 0$ (wachsend) gegen 2. Man wird daher nicht anstehen, 2 als Inhalt der

fraglichen Fläche zuzuordnen, obwohl $x^{-\frac{1}{2}}$ über alle Grenzen wächst, die Fläche sich also nach oben ins Unendliche erstreckt¹⁾. Allgemein gesprochen liegt hier der Fall vor, daß

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert ($\varepsilon > 0$), obwohl $f(x)$ für $x \rightarrow a+0$

nicht beschränkt bleibt; dabei soll $f(x)$ in jedem Intervall $a + \varepsilon \leq x \leq b$ integrierbar sein. Wir erklären in einem solchen Falle den Limes der (betrachteten) Integrale als uneigentliches Integral von $f(x)$ über $\langle a \dots b \rangle$; in

Zeichen $\int_a^b f(x) dx$. Entsprechend bezeichnet man z. B. mit

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ den Limes, falls vorhanden, von $\int_a^b f(x) dx$ für $b \rightarrow +\infty$;

dabei ist $f(x)$ als integrierbar in jedem Intervall $a \leq x \leq b$

vorausgesetzt. Entsprechend ist $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ oder $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ zu ver-

stehen, ferner $\int_a^b f(x) dx$, wobei $f(x)$ für $x \rightarrow b$ nicht beschränkt bleibt.

Wir wollen nun hinreichende Bedingungen finden dafür, daß das Integral von $f(x)$ konvergiert, d. h. daß das uneigentliche Integral existiert, falls $f(x)$ im Integrationsintervall nicht beschränkt bleibt oder auch falls das Integrationsintervall nicht endlich ist. Falls das Integral von $f(x)$ nicht

¹⁾ Der erste, der entdeckte, daß eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche einen endlichen Inhalt haben kann, war Evangelista Torricelli, 1608 ... 1647, Schüler Galileis, 1564 ... 1642.

konvergiert, sagen wir auch, das Integral von $f(x)$ divergiere oder existiere nicht. Zunächst beweisen wir einige Hilfssätze.

§ 28. Größenordnung des Null- und Unendlichwerdens von Funktionen.

Wir nehmen an, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ für $x \rightarrow b$ beide Null oder beide Unendlich werden. Früher ¹⁾ wurde eine einfache Methode angegeben, wie man dann den Grenzwert des Quotienten $f(b):g(b)(=0:0)$ für $x \rightarrow b$ bestimmen kann. Wir setzen jetzt fest:

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ für $x \rightarrow b$ beide Null werden, der Quotient $f(x):g(x)$ aber für $x \rightarrow b$ dem Werte Null zustrebt, dann sagen wir, daß $f(x)$ von höherer Ordnung Null wird als $g(x)$; wächst aber der Quotient für $x \rightarrow b$ über alle Grenzen $-\infty$, so wird $g(x)$ von höherer Ordnung Null als $f(x)$.

Wenn ferner für $x \rightarrow b$ sowohl $f(x) \rightarrow \infty$ als auch $g(x) \rightarrow \infty$ geht, der Quotient $f(x):g(x)$ dagegen nach Null, so sagen wir, daß $f(x)$ von niedriger Ordnung Unendlich wird als $g(x)$; strebt der Quotient aber nach Unendlich, so wird $g(x)$ von niedriger Ordnung Unendlich als $f(x)$.

Erhalten wir als Grenzwert einen von Null oder Unendlich verschiedenen bestimmten ²⁾ endlichen Wert des Quotienten, dann werden $f(x)$ und $g(x)$ für $x = b$ von derselben Ordnung Null oder Unendlich.

Das einfachste Beispiel ist $f(x) = x^\alpha, g(x) = x^\beta, \alpha > \beta > 0$. Dann ist für $x \neq 0$ der Quotient $f(x):g(x) = x^{\alpha-\beta}$, für $x \rightarrow 0$ erhält man $f(x):g(x) \rightarrow 0$. Es wird also nach unserer Festsetzung $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ von höherer Ordnung Null als $g(x)$. Lassen wir $x \rightarrow \infty$ gehen, so erkennen wir, daß

¹⁾ Sammlung Götschen Bd. 87. § 34.

²⁾ Erhält man keinen bestimmten Wert, dann kann man nichts aussagen.

$f(x) : g(x) = x^{\alpha-\beta} \rightarrow \infty$ geht, also wird $f(x) = x^\alpha$ auch von höherer Größenordnung unendlich als $g(x) = x^\beta$. Setzen wir in diesem Beispiel $x - b$ an Stelle von x , so ist $x = b$ die Nullstelle, und setzen wir $1 : (x - b)$ an Stelle von x , so erhalten wir zwei Funktionen, die für $x \rightarrow b$ nach Unendlich gehen.

Es sei nun $f(x)$ irgendeine Funktion, die für $x \rightarrow b$ unendlich wird. Wenn es dann eine positive Zahl r gibt, so daß $f(x) \cdot (x - b)^r$ für $x \rightarrow b$ einem von Null verschiedenen endlichen Grenzwert zustrebt, so sagt man, daß $f(x)$ für $x \rightarrow b$ von der Größenordnung r unendlich wird. Wenn für $x \rightarrow \infty$ die Funktion $f(x) \rightarrow \infty$ geht, so wird sie von der Größenordnung r unendlich, falls $f(x) : x^r$ einem bestimmten Grenzwert $\neq 0$ zustrebt. Man erkennt leicht, daß man analoge Aussagen über die Größenordnung des Nullwerdens machen kann. So wird z. B. $\sin x$ für $x \rightarrow 0$ von der ersten Ordnung Null, denn wir wissen, daß $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist.

Damit ist aber keineswegs gesagt, daß man für jede beliebige Funktion $f(x)$ einen solchen Exponenten r bestimmen kann. Zwei wichtige Beispiele werden uns darüber aufklären.

Wir untersuchen die Exponentialfunktion a^x ($a > 1$) für $x \rightarrow \infty$. Gibt es einen Exponenten r , so daß für $x \rightarrow \infty$ $a^x : x^r$ einem bestimmten Grenzwert $\neq 0$ zustrebt? Nach Bd. 146, S. 76 ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r : a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r!}{(\ln a)^r} a^x = 0.$$

Also folgt:

Die Exponentialfunktion a^x ($a > 1$) wird stärker unendlich als jede Potenz von x .

Machen wir dasselbe Experiment mit $\ln x$ ($x > 0$), so ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{rx^r} = 0, \quad \text{d. h. :}$$

Der Logarithmus wird schwächer unendlich als jede noch so niedrige Potenz mit positivem Exponenten.

Ganz ebenso beweist man:

Die Funktion $\frac{1}{\log |x|}$ verschwindet für $x \rightarrow 0$ von geringerer Ordnung, die Funktion $a^{-\frac{1}{|x|}}$ ($a > 1$) verschwindet für $x \rightarrow 0$ von höherer Ordnung als jede Potenz.

Wie man für $x \rightarrow b$ statt für $x \rightarrow 0$ oder $x \rightarrow \infty$ zu verfahren hat, ist schon oben gezeigt.

§ 29. Integrale von Funktionen mit Unendlichkeitsstellen.

Wenn für $x \rightarrow b$ die Funktion $f(x) \rightarrow \infty$ geht, so definieren wir, $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert vorhanden ist. Wir haben also einen doppelten Grenzübergang, erst denjenigen, der von der Summe zum Integral führt, und darauf den für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Beispiele:

122. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\nu}$ ($\nu > 0$); der Integrand $1 : x^\nu$ wird an der unteren Grenze unendlich. Wir bilden ($\nu \neq 1$)

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\nu} = \frac{1}{1-\nu} (1 - \varepsilon^{1-\nu}) \text{ und lassen } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ gehen.}$$

Ist $\nu > 1$, so wird $I_\varepsilon \rightarrow \infty$, das Integral existiert nicht.

Ist $\nu < 1$, so wird $I_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{1-\nu}$ und wir setzen nun

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\nu} = \frac{1}{1-\nu}$$

Im Falle $\nu = 1$ wird $I_\varepsilon = -\log \varepsilon \rightarrow \infty$.

123. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Da $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ ist, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

(vgl. S. 87).

124. $\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Ar Coj } x - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Ar Coj}(1+\varepsilon)$

$$= \text{Ar Coj } x - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(1 + \varepsilon + \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2})$$

$$= \text{Ar Coj } x - \ln 1 = \text{Ar Coj } x.$$

125. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$. Da $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ist, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \infty,$$

d. h. das Integral ist divergent, es existiert nicht.

Um diese Angelegenheit allgemein zu erörtern, beweisen wir den folgenden Satz, den man aus den Beispielen schon ahnt:

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $a \leq x < b$ positiv und $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ ist, so existiert das Integral

$\int_a^b f(x) dx$, wenn $f(x)$ an der Stelle $x = b$ von geringerer als der ersten Ordnung unendlich wird.

In diesem Falle gibt es nämlich eine positive Zahl $r < 1$, so daß $f(x)(b-x)^r$ in dem Intervall $a \leq x < b$ unterhalb einer von x unabhängigen Schranke M bleibt! Dann ist aber

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^r} dx, \quad 0 < \varepsilon < b-a.$$

Das letzte Integral hat aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ einen leicht angebbaren endlichen Grenzwert, das erste Integral nimmt für $\varepsilon \rightarrow 0$ einsinnig zu, strebt also ebenfalls nach einem endlichen Grenzwert, es konvergiert.

Genau ebenso beweist man, daß das Integral $\int_a^b f(x) dx$ divergiert, wenn $f(x)$ an der Stelle $x=b$ von mindestens der ersten Ordnung unendlich wird.

Als Beispiel eines Integrals, dessen Integrand im Innern des Integrationsbereiches unendlich wird, diene

126.
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$
 für positive $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Man erhält sofort
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Allgemein können wir sagen:

Liegt eine Unendlichkeitsstelle von $f(x)$ innerhalb des Integrationsbereiches, etwa für $x=c$, wo ($a \dots c \dots b$), so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

falls diese Grenzwerte vorhanden sind.

Übrigens ist es auch möglich, daß zwar nicht die einzelnen Limes für $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ existieren, wohl aber der Limes der Summe der beiden Integrale, sobald man $\delta = \varepsilon$ fordert und

dann den Grenzübergang $\delta = \varepsilon \rightarrow 0$ ausführt. Erklärt man jetzt den so erhaltenen Limes (sog. Cauchyschen¹⁾ Hauptwert, bei dem also der zugelassene Grenzübergang eingeschränkt wird) als uneigentliches Integral (in abgeändertem Sinne) von $f(x)$, so wird damit der Begriff des uneigentlichen Integrals insofern erweitert, als die Klasse der in diesem Sinne integrierbaren Funktionen größer ist als vorher.

Als Beispiel sei angeführt

$$127. \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \text{ für positives } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Man erkennt, daß die beiden Integrale entgegengesetzt gleich sind, so daß Null als Grenzwert herauskommt. Geometrisch sind die Ergebnisse der beiden letzten Beispiele sofort klar.

§ 30. Unendlicher Integrationsbereich.

Nach dem Früheren wird folgender Satz einleuchten:

Das Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergiert sicher, wenn $f(x)$

im Unendlichen von höherer als der ersten Ordnung verschwindet, vorausgesetzt, daß $f(x)$ im Integrationsbereiche nirgends unendlich wird.

Zunächst ein Beispiel:

$$128. \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\nu}} = \frac{1}{\nu a^\nu}, \quad a > 0, \nu > 0. \text{ Ist nämlich } \omega > a, \text{ so wird}$$

$$\int_a^\omega \frac{dx}{x^{1+\nu}} = \frac{1}{\nu a^\nu} - \frac{1}{\nu \omega^\nu}, \text{ woraus für } \omega \rightarrow \infty \text{ die Behauptung folgt.}$$

¹⁾ Augustin Louis Cauchy, 1789 ... 1857.

Für die genauere Betrachtung, die uns zugleich nebenbei wichtige Ergebnisse aufdeckt, benutzen wir das Maclaurin-Cauchysche Vergleichskriterium. Wir nehmen eine positive, einsinnig fallende Funktion $f(x)$, teilen auf der x -Achse von einem Punkte $x = n$ (ganzzahlig) bis zu einem Punkte $x = N$ die Punkte $n + 1, n + 2, \dots, N$ ab.

Vergleichen wir nun das Integral von n bis N als Fläche unter der Kurve (Fig. 25) mit der vorwärts genommenen Treppe, so ergibt sich

$$\int_n^N f(x) dx \leq \sum_{\nu=n}^{N-1} f(\nu), \text{ also erst recht } \leq \sum_{\nu=n}^N f(\nu). \quad (1)$$

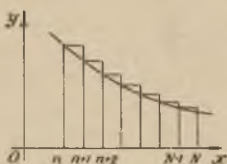


Fig. 25.

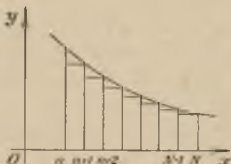


Fig. 26.

Durch Vergleich mit der rückwärts genommenen Treppe (Fig. 26) folgt

$$\sum_{\nu=n+1}^N f(\nu) \leq \int_n^N f(x) dx.$$

Addiert man beiderseits $f(n)$, so kommt

$$\sum_{\nu=n}^N f(\nu) \leq f(n) + \int_n^N f(x) dx. \quad (2)$$

Faßt man (1) und (2) zusammen, so erhält man

$$\int_n^N f(x) dx \leq \sum_{\nu=n}^N f(\nu) \leq f(n) + \int_n^N f(x) dx. \quad (3)$$

Lassen wir nun $N \rightarrow \infty$ gehen, so erkennt man, daß das

Integral $\int_n^{\infty} f(x)dx$ und die Reihe $\sum_{\nu=n}^{\infty} f(x)$ gleichzeitig konvergieren oder divergieren.

Als wichtiges Beispiel vergleichen wir $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$ mit $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$. Beim Integral wissen wir (vgl. Beispiel 128), daß es nur für $s > 1$ konvergiert, also konvergiert auch die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$ nur für $s > 1$, sie divergiert für $s = 1$ (harmonische Reihe) und für $s < 1$. Man nennt übrigens jene Reihe für $s > 1$ die Riemannsche Zetafunktion:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = \zeta(s), \quad s > 1. \quad (4)$$

Sie spielt in der Funktionentheorie und in der Theorie der Primzahlen eine wichtige Rolle. Hier sei nur ohne Beweis erwähnt, daß folgende merkwürdige Beziehungen ¹⁾ bestehen:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}; \text{ usw.}$$

Zu einer bemerkenswerten Beziehung kommen wir für $s = 1$. Da folgt aus den obigen Ungleichungen:

$$\int_1^N \frac{dx}{x} \leq \sum_1^N \frac{1}{\nu} \leq 1 + \int_1^N \frac{dx}{x}, \text{ oder } \ln N \leq \sum_1^N \frac{1}{\nu} \leq 1 + \ln N.$$

Daher ist

$$0 \leq \sum_1^N \frac{1}{\nu} - \ln N \leq 1.$$

Bildet man den zwischen Null und Eins liegenden Ausdruck für $N = 1, 2, 3, \dots$, so erhält man eine (wie wir hier nicht beweisen) absteigende, beschränkte Folge, die deshalb einen

¹⁾ Herleitungen dieser Sätze z. B. bei R. Rothe, Höhere Mathematik II, S. 116, 117, wo auch die mit π zusammenhängenden Werte der entsprechenden alternierenden Reihen abgeleitet sind. Für ungerades s ist es noch nicht gelungen, ähnliche einfache Formeln zu finden.

Grenzwert hat. Dieser mit C bezeichnete Grenzwert heißt die Eulersche Konstante. Ihr Wert ist

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N \right) \\ = 0,57721\ 56649\ 01532 \dots \quad (5)$$

Wir werden ihr noch weiterhin begegnen.

$$129. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \text{ Es ist nämlich}$$

$$\int_0^{\omega} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} 0. \text{ (Vgl. § 10, Beisp. 24.)}$$

$$130. \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-e^{-\omega} + e^0) = 1.$$

$$131. \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (n > 0). \text{ Hier gelingt es nicht, für beliebige}$$

nicht ganzzahliges n den Wert des Integrals einfach hinzuschreiben, wohl aber können wir beweisen, daß für $n > 0$ das Integral immer konvergent ist. Wir brauchen ja nur nachzuweisen, daß der Integrand $e^{-x} x^{n-1}$ von höherer als der ersten Ordnung an der oberen Grenze verschwindet. Das aber ist sicher der Fall, da ja e^{-x} für $x \rightarrow \infty$ von höherer Ordnung Null wird als jede Potenz x^{-m} ($m > 0$). Ferner wird der Integrand für $x \rightarrow 0$ nicht zu stark unendlich (vgl. § 29). Wir können daher das Integral als Funktion des Parameters n auffassen. Man bezeichnet sie mit dem Buchstaben Γ , nennt sie Gammafunktion¹⁾, setzt also

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n). \quad (6)$$

¹⁾ Auch zweites Fulersches Integral.

An diesem Beispiel soll gezeigt werden, wie man Eigenschaften einer durch ein Integral definierten neuen Funktion auffinden kann.

Teilintegration des unbestimmten Integrals liefert

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \int e^{-x} x^{n-2} dx;$$

daher gilt für $n > 1$ (andernfalls würde x^{n-2} zu stark unendlich):

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx$$

$$\text{oder} \quad \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1). \quad (7)$$

Da nach Beisp. 130

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{sog. Anfangsbedingung})$$

ist, so folgt für ganzzahliges¹⁾ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (8)$$

Ist dagegen $n = m + \nu$, wo $0 < \nu < 1$ und m ganzzahlig und ≥ 1 ist, so folgt

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots \nu \Gamma(\nu); \quad (9)$$

beispielsweise ist

$$\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) = \Gamma\left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Kennt man also die Werte der Γ -Funktion etwa für die Argumente zwischen 1 und 2, so kann man leicht die Werte für $n > 2$ berechnen (s. nebenstehende Tafel). Vergleicht man die Formeln (8) und (9), so erkennt man, daß die Γ -Funktion eine Interpolationsfunktion der Fakultäten ist.

n	$\Gamma(n)$	Unter diesem Gesichtspunkt ist die Γ -Funktion von Euler eingeführt worden, um also
1,0	1,000	den zunächst nur für $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ erklärten Fakultäten $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4!$
1,1	0,951	$= 24, \dots$ auch für nicht ganzzahlige n einen
1,2	0,918	Sinn beizulegen, geometrisch gesprochen; um
1,3	0,898	durch die Punkte $(1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24), \dots$
1,4	0,887	eine Kurve von einfachem Gesetz hindurchzulegen. Eine solche Kurve wird durch
1,5	0,886	$y = \Gamma(x + 1)$ geliefert.
1,6	0,894	
1,7	0,909	
1,8	0,931	
1,9	0,962	
2,0	1,000	

¹⁾ Bekanntlich definiert man $0! = 1$.

Ferner wird durch die Funktionalgleichung

$$x^{-1}\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \quad (10)$$

diese Funktion auch für negative x „analytisch fortgesetzt“,

z. B. ist $\Gamma(-\frac{1}{3}) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{-\frac{1}{3}}$. Hierbei treten für $x = 0, -1,$

$-2, \dots$ Unendlichkeitsstellen auf, und es ergibt sich für den Gesamtverlauf der Γ -Funktion das Bild (Fig. 27) mit „haarnadelförmigen“ Ästen.

Ohne Beweis seien noch einige Sätze über die Γ -Funktion angeführt.

Der Ergänzungssatz:

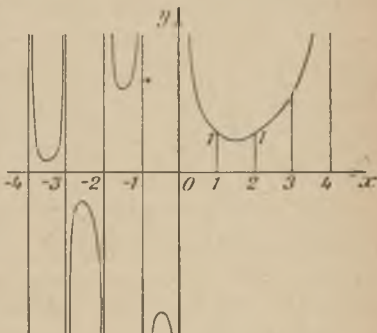


Fig. 27.

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}; \quad (11)$$

für $x = \frac{1}{2}$ folgt daraus

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\pi}. \quad (12)$$

Ferner ergibt sich aus (11) z. B.

$$\Gamma(\frac{2}{3}) \Gamma(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

also wird

$$\Gamma(\frac{8}{3}) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{3} \Gamma(\frac{1}{3})}.$$

Man braucht also die Werte von $\Gamma(x)$ nur für $0 < x \leq \frac{1}{2}$ zu berechnen, die Werte für $\frac{1}{2} < x < 1$ folgen dann aus (11).

Ferner hat Gauß¹⁾ den Multiplikationssatz aufgestellt:

$$\Gamma(mx) = \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{m}\right) \cdots \Gamma\left(x + \frac{m-1}{m}\right) \cdot \frac{m^{x-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13)$$

Daraus folgt der Legendresche²⁾ Satz

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x). \quad (14)$$

Endlich sei noch die Stirlingsche³⁾ Formel erwähnt

$$\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}} \rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow +\infty.$$

Hierfür schreibt man mit einem Zeichen \sim für „asymptotische Annäherung“ oft auch

$$\Gamma(x) \sim x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}. \quad (15)$$

Ist n eine sehr große ganze Zahl, so folgt aus (15)

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}, \quad (16)$$

eine vielgebrauchte Formel für die Abschätzung der Fakultäten großer Zahlen, z. B. in den Koeffizienten von Reihenentwicklungen.

Dafür einige Beispiele:

$$5! = 120,$$

$$5^5 \sqrt{5} e^{-5} \sqrt{2\pi} \approx 118,02 \quad \text{Fehler } 1,65\%$$

$$10! = 3628800,$$

$$10^{10} \sqrt{10} e^{-10} \sqrt{2\pi} \approx 3598696, \dots \quad \text{Fehler } 0,83\%$$

$$20! \approx 2432902 \cdot 10^{12},$$

$$20^{20} \sqrt{20} e^{-20} \sqrt{2\pi} \approx 2422788 \cdot 10^{12} \quad \text{Fehler } 0,42\%.$$

Man sieht deutlich das Kleinerwerden des prozentischen Fehlers mit wachsendem n .

¹⁾ C. F. Gauß (1777 . . . 1855), der princeps mathematicorum; man hat in seinem Nachlaß die wunderbarsten Voraussetzungen von späteren Entdeckungen anderer Mathematiker gefunden.

²⁾ A. M. Legendre, 1752 . . . 1833.

³⁾ J. Stirling, 1696 . . . 1770.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\pi}$ läßt sich in beachtenswerter

Weise umformen, wenn man $\sqrt{x} = t$ setzt:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad \text{Es ist also}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (17)$$

Dieses Integral spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Theorie der zufälligen Beobachtungsfehler eine große Rolle (Gaußsches Fehlerintegral).

Man sieht aus dem Vorhergehenden, daß sich über bestimmte Integrale oft wertvolle Aussagen machen lassen, ohne daß man das entsprechende unbestimmte Integral „ausführen“ kann (s. auch § 24, S. 78). Es ist deshalb eine besondere Lehre von speziellen bestimmten Integralen entstanden. In ihr bildet die Theorie der Gammafunktion, des zweiten Eulerschen Integrales, einen Hauptpunkt¹⁾.

132. Das sog. erste Eulersche Integral ist

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0.$$

Ersetzt man hierin x durch $1-y$, so kommt

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_1^0 y^{q-1} (1-y)^{p-1} dy \\ &= \int_0^1 y^{q-1} (1-y)^{p-1} dy = B(q, p), \end{aligned}$$

das Integral ist also in p und q symmetrisch.

¹⁾ Vgl. E. Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Hamburg 1931. Eine Zusammenstellung von über 8000 bestimmten Integralen gibt D. Bierens de Haan, Nouvelles tables d'intégrales définies, Leiden 1867. Ausführliche Tafeln unbestimmter Integrale bei W. Láska, Sammlung von Formeln aus der reinen und angewandten Mathematik, Braunschweig (F. Vieweg) 1888/94.

Wenn $p \geq 1$, $q \geq 1$ ist, so ist $B(p, q)$ ein eigentliches Integral, andernfalls ein uneigentliches, das durch den existierenden Grenzwert

$$\int_{\delta}^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad 0 < \delta \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon \rightarrow 0$$

definiert wird. Es sei hier nur angeführt, daß dieses Integral mit dem zweiten Eulerschen Integral (Gammafunktion) zusammenhängt:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

So ist z. B.

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi,$$

was sich auch über das unbestimmte Integral erledigen ließe.

Für ganzzahlige $p = 1, 2, \dots$ und $q = 1, 2, \dots$ kann man $B(p, q)$ durch Teilintegration elementar auswerten.

Überraschend ist vielleicht die Tatsache, daß $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ nicht nach Null zu konvergieren braucht, damit das Integral konvergiert. Ein solches Beispiel ist das Fresnelsche¹⁾ Integral:

133. $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$, bei dem der Integrand immer zwischen $+1$ und -1 oszilliert. Das Integral ist konvergent; denn bei der Substitution $x^2 = t$ wird

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

¹⁾ A. J. Fresnel (1788 ... 1827), neben Huygens (1629 ... 1695) der Begründer der Undulationstheorie des Lichtes.

Nach dem Muster von Beispiel 135 überzeugt man sich von der Konvergenz.

Man könnte denken, daß die Konvergenz des Fresnelschen Integrales von den Zeichenwechseln von $\sin(x^2)$ herrührt. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man an dem konvergenten Integral

134. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x}$, dessen Integrand sein Zeichen bewahrt und der für $x = kt$ gleich $k\pi$ ist.

135. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x)$ (s. § 26, Beispiel 121, S. 89).

Ist $\omega = n\pi + \alpha$ (n ganzzahlig, $\alpha < \pi$), so wird

$$\int_0^{\omega} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \dots + \int_{n\pi}^{n\pi + \alpha} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Vergleicht man zwei aufeinanderfolgende Integrale dieser Reihe

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{und} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

und setzt beim zweiten Integrale $y = x - \pi$, so erhält man

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(y + \pi)}{y + \pi} dy = - \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{y + \pi} dy.$$

Die Integrale sind daher von abwechselnden Vorzeichen, sie nehmen mit wachsendem k ihrem Betrage nach ab und konvergieren nach Null; also hat für $\omega \rightarrow \infty$ die unendliche Reihe nach dem Leibnizschen Satze¹⁾ über alternierende Reihen

einen endlichen Wert, den wir — ohne Beweis — zu $\frac{\pi}{2}$

¹⁾ Sammlung Götschen Bd. 87, S. 115.

angeben:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Weil $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ divergiert (Beweis durch den Mittel-

wertsatz), nennt man $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ bedingt konvergent.

136. Der Integrallogarithmus = logarithmus integralis x ist

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x}, \quad 0 < x < 1.$$

Setzt man

$$x = e^{-z}, \text{ so wird } \text{Li}(x) = \text{Li}(e^{-z}) = \int_{\infty}^z \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (z > 0).$$

Da nun für $z \neq 0$

$$\frac{e^{-z}}{z} = \frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} - \dots,$$

so wird wegen der in jedem endlichen Intervall gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $-1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$ jedenfalls

$$\int_z^{z_0} \frac{e^{-z}}{z} dz = L(z) - L(z_0), \quad 0 < z < z_0,$$

wo $L(z) = \ln z - z + \frac{z^2}{2! \cdot 2} - \frac{z^3}{3! \cdot 3} + \frac{z^4}{4! \cdot 4} - \dots$

gesetzt ist. Da ferner die linke Seite für $z_0 \rightarrow +\infty$ konvergiert, so existiert auch

$$C = - \lim_{z_0 \rightarrow \infty} L(z_0);$$

übrigens ist C gleich den Eulerschen Konstanten (S. 99).

Zusatz: Zur angenäherten Berechnung von C kann folgende Bemerkung dienen¹⁾:

Setzt man $f(z) = \frac{e^c - e^z}{c}$, $\varphi(z) = L(z) - L(c)$, $c > 0$, so gilt
 $f'(z) = \frac{e^{-z}}{c}$, $\varphi'(z) = \frac{e^{-z}}{z}$, $f(c) = \varphi(c) = 0$. Für $z > c$ ist somit $f'(z) > \varphi'(z) > 0$, also $f(z) > \varphi(z) > 0$, so daß für $z \rightarrow \infty$ schließlich folgt:

$$\frac{e^{-c}}{c} > -C - L(c) > 0 \text{ oder } -L(c) > C > -L(c) - \frac{e^{-c}}{c}.$$

Daher ist $-L(c)$ größer als C und zwar um weniger als $\eta = \frac{e^{-c}}{c}$.

Da z. B. $\eta > 5 \cdot 10^{-6}$ für $c = 10$, so liefert $-L(10)$ die Konstante C auf 5 Dezimalen genau.

§ 31. Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Wir haben schon mehrfach Integranden kennen gelernt, die außer der Variablen x noch eine andre von x unabhängige Zahl enthalten, der man innerhalb gewisser Grenzen beliebige Werte beilegen kann. Z. B. hängen die elliptischen Integrale auch von k , dem Modul ab. Man nennt eine derartige, von x unabhängige Veränderliche allgemein einen **Parameter**, und wir wollen ihn mit p bezeichnen. Ein bestimmtes Integral ist dann also bei festen Grenzen a und b eine Funktion des Parameters p :

$$\int_a^b f(x, p) dx = F(p). \quad (1)$$

Leibniz hat die Regel

$$F'(p) = \frac{\partial}{\partial p} \int_a^b f(x, p) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dx \quad (2)$$

aufgestellt, d. h. es wird behauptet:

¹⁾ Nach Ferdinand Minding, 1806 . . . 1885 in Dorpat.

Statt die Ableitung des Integrals nach p zu berechnen, kann man auch das Integral der partiellen Ableitung des Integranden nach dem Parameter bilden, kurz gesagt: man kann die Ableitung nach p und die Integration nach x vertauschen, oder noch kürzer: man darf unter dem Integralzeichen differenzieren.

Die Behauptung läßt sich unter folgenden Bedingungen beweisen¹⁾:

1. Die Funktion $f(x, p)$ ist für alle Wertpaare (x, p) in einem Bereiche $a \leq x \leq b$ und $p_1 \leq p \leq p_2$ stetig — dann ist nämlich $F(p)$ auch in $p_1 \leq p \leq p_2$ eine stetige Funktion von p .
 2. $f(x, p)$ hat für alle gemäß 1. zugelassenen Wertpaare (x, p) eine stetige partielle Ableitung $\partial f(x, p) / \partial p = f_p(x, p)$.
137. Bei der Γ -Funktion ist das „Fehlerintegral“

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ erwähnt worden. Es folgt daraus}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}. \text{ Differenziert man partiell nach } p, \text{ so}$$

$$\text{kommt } \int_0^{\infty} -2p t^2 e^{-p^2 t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2p^2}, \text{ was man leicht}$$

$$\text{umformt in } \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \text{ Weiterdifferenzieren}$$

ergibt noch mehr interessante Formeln.

Noch wichtiger als die Differentiation ist die Integration nach einem Parameter. Der Satz, um den es sich handelt, lautet:

Man kann unter gewissen Bedingungen die Integration nach p und die Integration nach x vertauschen,

¹⁾ Der Beweis wird mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes geführt; er sei hier ausgelassen. Der Leser lege ihn sich zurecht.

oder in Zeichen

$$\int_{p=p_1}^q \left(\int_{x=a}^b f(x, p) dx \right) dp = \int_{x=a}^b \left(\int_{p=p_1}^q f(x, p) dp \right) dx. \quad (3)$$

Bezeichnen wir die beiden Integrale mit $F_1(q)$ und $F_2(q)$, so folgt aus (2) $F_1'(q) = F_2'(q) = \int_{x=a}^b f(x, p) dx$. Daher können sich $F_1(q)$ und $F_2(q)$ nur um eine additive Konstante unterscheiden. Da aber $F_1(p_1) = F_2(p_1) = 0$ ist, so ist jene Konstante selbst Null, d. h. es ist, wie oben behauptet, $F_1(q) = F_2(q)$; die Gleichung (3) ist also bewiesen. Zu beachten ist, daß $f(x, p)$ für $p_1 \leq p \leq q$, $a \leq x \leq b$ stetig sein muß. Wir gehen nicht weiter darauf ein, wann man diesen Satz auch auf uneigentliche Integrale ausdehnen darf; es sei nur kurz erwähnt, daß man dabei gleichmäßige Konvergenz verlangen wird.

Da es auf die Bezeichnung des Parameters nicht ankommt, so kann man ihn auch y nennen und daher schreiben:

$$\int_{x=a_1}^{a_2} \left(\int_{y=b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=b_1}^{b_2} \left(\int_{x=a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right) dy, \quad (4)$$

wobei wir überall feste Grenzen gesetzt haben.

Ist $f(x, y)$ das Produkt zweier Funktionen, deren eine nur von x , die andere nur von y abhängt: $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, so erhält man das „Doppelintegral“ als Produkt zweier einfacher Integrale

$$\begin{aligned} \int_{x=a_1}^{a_2} \left(\int_{y=b_1}^{b_2} \varphi(x)\psi(y) dy \right) dx &= \int_{x=a_1}^{a_2} \left(\varphi(x) \int_{y=b_1}^{b_2} \psi(y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=a_1}^{a_2} \varphi(x) dx \cdot \int_{y=b_1}^{b_2} \psi(y) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir werden uns später (§ 33) noch genauer mit Doppelintegralen befassen.

Sechster Abschnitt. Mehrfache Integrale.

§ 32. Das Linienintegral (Kurvenintegral).

Wir hatten die anschauliche Deutung von $\int_a^b f(x)dx$ in der xy -Ebene dadurch gewonnen, daß wir $y = f(x)$ als Kurve auffaßten und das Integral als Fläche unter der Kurve zwischen den Ordinaten a und b erklärten: Man kann aber auch folgende Deutung annehmen: Wir betrachten die Punkte der Strecke $b - a$ und belegen jeden Punkt mit der Masse $f(x)$; oder anders gesagt: wir denken uns die Strecke von $x = a$ bis $x = b$ so mit Masse belegt, daß die Dichte an der Stelle x gerade $f(x)$ ist. Dann ist obiges Integral die Gesamtmasse der Strecke. Diese Auffassung läßt eine wichtige Erweiterung zu.

Es sei eine Kurve $AB = c$ durch die Parametergleichungen

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

gegeben; für $t = a$ möge der Punkt A , für $t = b$ der Punkt B entstehen. Nun „belegen“ wir die Kurve dadurch, daß wir dem x eine Funktion $P(x, y)$ und dem y eine Funktion $Q(x, y)$ zuordnen. Dann versteht man unter dem Linienintegral

über die Kurve $AB = c$, in Zeichen $\int_A^B \underbrace{(P(x, y)dx + Q(x, y)dy)}_c$

das Integral

$$I. \quad \int_{t=a}^b \left\{ P(x, y) \frac{dx}{dt} + Q(x, y) \frac{dy}{dt} \right\} dt,$$

wobei x und y als Funktionen von t einzuführen sind. Damit dieses Linienintegral existiert, ist notwendig und hinreichend, daß der in Klammern stehende Ausdruck eine integrable Funktion von t ist. Die Kurve c heißt der Integrationsweg.

Aus der Definition I. folgt ohne weiteres

$$\text{II.} \quad \int_A^B \underbrace{(P dx + Q dy)}_c = - \int_B^A \underbrace{(P dx + Q dy)}_c.$$

Ferner ergibt sich:

$$\text{III.} \quad \int_A^B \underbrace{(P dx + Q dy)}_{c_1} + \int_B^C \underbrace{(P dx + Q dy)}_{c_2} = \int_A^C \underbrace{(P dx + Q dy)}_{c_1 + c_2}.$$

Fällt der Punkt B mit A zusammen, ist also der Integrationsweg eine geschlossene Kurve, so schreibt man meist¹⁾ \oint . Es liegt nahe, nach dem Wert eines Linienintegrals zu fragen,

das über einen geschlossenen Linienzug erstreckt wird. Ehe wir zur allgemeinen Erledigung dieser Frage schreiten, seien zwei Beispiele durchgerechnet.

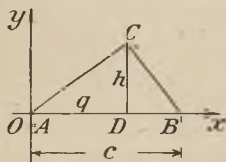


Fig. 28.

Der geschlossene Weg sei das Dreieck ABC mit der Grundlinie $AB = c$ auf der x -Achse, der Höhe $CD = h$ und dem Höhenabschnitt $AD = q$; A falle mit O zusammen (Fig. 28). Als Parameter nehmen wir x selbst.

Dann ist $y = 0$ für AB ,

$$y = \frac{h}{c - q} (c - x) \quad \text{„} \quad BC,$$

$$y = \frac{h}{q} x \quad \text{„} \quad CA.$$

Wir haben zu bilden $\oint = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^A$. Es sei nun

$$138. \quad P = -y, \quad Q = +x, \quad \text{der Integrand also } -y dx + x dy;$$

dann wird $\int_A^B = 0,$

¹⁾ Der Pfeil gibt den Umlaufsinn; es ist $\oint = -\oint$, vgl. S. 21.

$$\int_B^C (-y dx + x dy)$$

$$= \int_c^q \left[-\frac{h}{c-q} (c-x) + x \left(-\frac{h}{c-q} \right) \right] dx$$

$$= -\frac{h}{c-q} \int_c^q c dx = -hc \frac{q-c}{c-q} = hc,$$

$$\int_C^A (-y dx + x dy) = \int_q^c \left[-\frac{hx}{q} + \frac{hx}{q} \right] dx = 0.$$

Wir erhalten daher $\oint = hc$, also den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

139. Es sei ferner für dieselbe Figur $P = x$, $Q = y$, der Integrand also $x dx + y dy$; dann wird

$$\int_A^B = \int_0^c x dx = \frac{c^2}{2},$$

$$\int_B^C (x dx + y dy) = \int_c^q \left[x - \frac{h^2}{(c-q)^2} (c-x) \right] dx$$

$$= \int_c^q \left[\left(1 + \frac{h^2}{(c-q)^2} \right) x - \frac{h^2 c}{(c-q)^2} \right] dx$$

$$= \left(1 + \frac{h^2}{(c-q)^2} \right) \frac{q^2 - c^2}{2} - \frac{h^2 c}{(c-q)^2} (q - c)$$

$$= \frac{q^2 - c^2}{2} + \frac{h^2}{2}$$

$$\int_C^A = \int_q^0 \left[x + \frac{hx}{q} \cdot \frac{h}{q} \right] dx$$

$$= \left(1 + \frac{h^2}{q^2} \right) \int_q^0 x dx = - \left(1 + \frac{h^2}{q^2} \right) \frac{q^2}{2}.$$

Daher kommt endlich

$$\oint = \frac{c^2}{2} + \frac{q^2 - c^2}{2} + \frac{h^2}{2} - \frac{q^2}{2} - \frac{h^2}{2} = 0.$$

Aus diesen beiden Beispielen ersieht man, daß es — wie von vornherein zu vermuten war — ganz auf die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ ankommt, welchen Wert das Linienintegral über eine geschlossene Kurve hat. Aber das letzte Beispiel veranlaßt uns zu der besonderen Frage, wann ist das Linienintegral über eine geschlossene Kurve Null?

Wir nehmen (Fig. 29) auf der geschlossenen Kurve zwei Punkte A und B an, die den Integrationsweg in zwei Teile c_1 und c_2 zerlegen. Soll das über die geschlossene Kurve erstreckte Linienintegral Null sein, so folgt aus

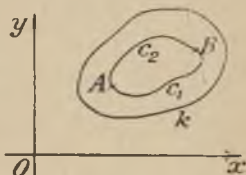


Fig. 29.

$$\oint = \int_A^B \underbrace{(P dx + Q dy)}_{c_1} + \int_B^A \underbrace{(P dx + Q dy)}_{c_2} = 0$$

die Beziehung

$$\int_A^B \underbrace{(\quad)}_{c_1} = \int_A^B \underbrace{(\quad)}_{c_2}.$$

d. h., es kommt dasselbe heraus, ob man von A nach B über c_1 oder über c_2 integriert. Das Verschwinden des Linienintegrals über jede, die Punkte A und B enthaltende geschlossene Kurve ist gleichbedeutend mit der Unabhängig-

keit des Linienintegrals zwischen den festen Punkten A und B vom Integrationswege zwischen A und B .

Diese Unabhängigkeit tritt nur ein, wenn $P dx + Q dy$ das vollständige Differential $d\Phi$ einer Funktion $\Phi(x, y)$ ist, wenn also $P(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $Q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ gilt. Hierfür ist notwendig

$$\text{IV.} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Umgekehrt ist diese Bedingung des vollständigen Differentials auch hinreichend für die Unabhängigkeit vom Wege. Dann kann ja

$$\text{V.} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_A^B (P dx + Q dy) &= \int_A^B \underbrace{d\Phi(x, y)}_c = \int_a^b d\Phi(x(t), y(t)) \\ &= \Phi(x(b), y(b)) - \Phi(x(a), y(a)) = \Phi_B - \Phi_A \end{aligned} \right.$$

gerechnet werden. (Vgl. auch S. 126.) Genauer soll der Beweis des für die Funktionentheorie, für die Anwendungen der Mathematik auf die Potentialtheorie, Hydrodynamik usw. grundlegenden Satzes hier nicht durchgeführt werden.

Der Satz von der Unabhängigkeit des Linienintegrals vom Wege erfordert (in einer für unsere Zwecke völlig ausreichenden Fassung) drei Voraussetzungen:

1) Der Definitionsbereich D in der x, y -Ebene sei berandet von einer geschlossenen, sich selbst nicht treffenden Kurve; er sei also einfach zusammenhängend.

2) Die in Betracht kommenden „Wege“ $x = \psi(t)$, $y = \varphi(t)$ seien im Innern von D gelegen und es seien ψ und φ stetig differenzierbar nach t .

3) Es seien $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ in D stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen versehen.

Dann lautet der Satz :

1) Unter diesen Voraussetzungen ist für die Wegunabhängigkeit von $\int_A^B (Pdx + Qdy)$ für beliebige A und B in D notwendig und hinreichend, daß $P'_y = Q'_x$ überall in D ist.

2) Aus $P'_y = Q'_x$ folgt insbesondere die Existenz einer Funktion $\Phi(x, y)$ in D mit $\Phi'_x = P$, $\Phi'_y = Q$ und umgekehrt.

Bei unserem Beispiel 139 sind die Bedingungen sämtlich erfüllt; es ist $P = x$, $Q = y$, also $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ mit $\partial\Phi/\partial x = x$, $\partial\Phi/\partial y = y$, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x = 0$. Daher muß beim Linienintegral über den Umfang des Dreiecks ABC Null herauskommen. Es hätte also der obigen umständlichen Rechnung gar nicht bedurft; sie wurde nur angestellt, um das Wesen des Linienintegrals über die einzelnen Seiten des Dreiecks zu erläutern. Im Beispiel 138 dagegen ist die Bedingung $P'_y = Q'_x$ nicht erfüllt; deshalb verschwindet das Integral über den Umfang des Dreiecks nicht; warum da der doppelte Flächeninhalt herauskommt, wird uns später (§ 36) beschäftigen.

Schließlich sei noch angemerkt, daß der Wert eines Linienintegrals unabhängig ist sowohl von der Lage der Kurve gegen das Koordinatensystem, als auch von der Art der Parameterdarstellung der Kurve.

Anm.: In der Thermodynamik ist die Wärmeänderung $c dT + p dV$ eines idealen Gases ($c =$ spez. Wärme, $T =$ absolute Temperatur, $p =$ Druck, $V =$ Volumen) kein vollständiges Differential; ihr Integral über einen „Kreisprozeß“ ist daher $\neq 0$; hingegen ist die Entropieänderung

$dS = \frac{c dT}{T} + \frac{p dV}{T}$ ein vollständiges Differential, ihr Integral über einen Kreisprozeß ist Null. Hierin liegt die Bedeutung der Entropie.

§ 33. Das Doppelintegral.

Grundlegende Untersuchungen über das Doppelintegral verdankt man Riemann. Sie werden ähnlich geführt wie beim einfachen Integral. Wir nehmen eine Funktion $f(x, y)$, die in einem gewissen Bereich \mathfrak{B} der xy -Ebene eindeutig erklärt und dort überall stetig ist. Der Bereich \mathfrak{B} sei etwa durch eine zu \mathfrak{B} gehörige Kurve begrenzt; am einfachsten nehmen wir ein Rechteck R , dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind: $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$. Diesen Bereich zerlegen wir durch eine Einteilung E irgendwie in endlich viele abgeschlossene Rechtecke R_1, \dots, R_n . Als Feinheitsgrad von E bezeichnen wir die größte Diagonale der R_1, \dots, R_n . Der Inhalt von R_ν , $\nu = 1, \dots, n$ sei $\Delta_\nu = \Delta x_\nu \cdot \Delta y_\nu$. Wir betrachten nun die Summen

$$E_\varepsilon = f(\xi_1, \eta_1)\Delta_1 + \dots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta_n,$$

wobei (ξ_ν, η_ν) einen beliebigen Punkt aus R_ν bezeichnet. Ist m_ν bzw. M_ν das Minimum bzw. Maximum von f in R_ν und setzen wir wieder $\sum m_\nu \Delta_\nu = \underline{E}$, $\sum M_\nu \Delta_\nu = \overline{E}$, so gilt $\underline{E} \leq E_\varepsilon \leq \overline{E}$. Da die im abgeschlossenen Rechteck R stetige Funktion dort auch gleichmäßig stetig ist, so folgt wieder, daß $0 \leq \overline{E} - \underline{E} < \varepsilon$ wird für jede hinreichend feine Einteilung. Da ferner \underline{E} bzw. \overline{E} bei Verfeinerung der Einteilung nicht zu- bzw. nicht abnimmt, so folgt durch genau die entsprechenden Überlegungen wie früher:

Satz. Es sei $f(x, y)$ stetig im abgeschlossenen Rechteck R . Mit unbegrenzt wachsender Feinheit der Einteilung streben die (Näherungs-)Summen $\sum_\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu) \Delta x_\nu \Delta y_\nu$ einem Grenzwert zu, der mit $\int \int_R f(x, y) dx dy$ bezeichnet und bestimmtes Integral von $f(x, y)$ über R genannt wird.

Beweis und Satz übertragen sich fast wörtlich auf den Fall, daß erstens der Definitionsbereich \mathfrak{B} lediglich der Be-

dingung genügt beschränkt und abgeschlossen zu sein, sowie einen Flächeninhalt zu haben, daß ferner zweitens als „Einteilungen“ auch Zerlegungen in endlich viele, beliebige abgeschlossene Teile, die einen Inhalt haben, zugelassen werden.

Eine geometrische Deutung des Doppelintegrals liegt nahe. Errichtet man über jedem Punkte x, y des Bereiches \mathfrak{B} als Raumkoordinate das Lot $z = f(x, y)$, so kann das Doppelintegral gedeutet werden als das Volumen des zylindrischen Körpers, der von der Fläche $z = f(x, y)$, dem Mantel über den Rand des Bereiches und von der Fläche B des Bereiches \mathfrak{B} der xy -Ebene begrenzt wird. Dabei ist $f \geq 0$ angenommen.

Von der Ausdehnung des Integrationsbereiches ins Unendliche sowie von den Fällen, in denen $f(x, y)$ unstetig oder unbestimmt wird, wollen wir hier nur sagen, daß sie ganz entsprechend wie beim einfachen Integral behandelt werden.

§ 34. Sätze über das Doppelintegral.

Ist $f(x, y) = 1$, so gibt

$$\int\int_{\mathfrak{B}} dx dy = B$$

offenbar den Flächeninhalt des Bereiches \mathfrak{B} . Man überlege sich, daß keine Vorzeichenschwierigkeiten auftreten!

Sind M und m der größte und der kleinste Wert der stetigen Funktion $f(x, y)$ in \mathfrak{B} , so ist nach der Definition des Doppelintegrals

$$mB = \int\int_{\mathfrak{B}} m dx dy \leq \int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y) dx dy \leq \int\int_{\mathfrak{B}} M dx dy = MB, \quad (1)$$

und wegen der Stetigkeit

$$\int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y) dx dy = Bf(\xi, \eta) \quad (2)$$

für einen Punkt ξ, η in \mathfrak{B} .

Hat die stetige Funktion $\varphi(x, y)$ in \mathfrak{B} überall dasselbe Vorzeichen und ist $f(x, y)$ stetig in \mathfrak{B} , so ist

$$\int\int_{\mathfrak{B}} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \int\int_{\mathfrak{B}} \varphi(x, y) dx dy \quad (3)$$

für einen Punkt ξ, η in \mathfrak{B} . Man bezeichnet die Formel (3), vorzüglich den Sonderfall (2), als **Mittelwertsatz** des Doppelintegrals.

Um zu einer Berechnung des Doppelintegrals zu gelangen, gehen wir von der Doppelsumme

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} f(x_k, y_l)(x_{k+1} - x_k)(y_{l+1} - y_l), \quad \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \alpha \leq y \leq \beta \end{array}$$

aus und fassen zunächst alle Glieder zusammen, die denselben Faktor $y_{l+1} - y_l$ haben. Dadurch kann man $S_{n,m}$ in die Form bringen

$$S_{n,m} = \sum_0^{m-1} (y_{l+1} - y_l) \left[\sum_0^{n-1} f(x_k, y_l)(x_{k+1} - x_k) \right].$$

Nehmen wir jetzt für $f(x_k, y_l)$ das Maximum $M_{k,l}$ von f im betrachteten Rechteck, so enthalten wir

$$E = \sum_{l=0}^{m-1} (y_{l+1} - y_l) \sum_{k=0}^{n-1} M_{kl} (x_{k+1} - x_k) \geq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ebenso ergibt sich das rechtsstehende Integral als nicht kleiner als E . Und da man in gleicher Weise für $\int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx$ schließen kann, so erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right] dx. \quad (4) \end{aligned}$$

Dabei möge daran erinnert werden, daß vorausgesetzt wurde: $f(x, y)$ muß in dem ganzen Bereiche einschließlich des Randes eindeutig, endlich und stetig sein. Auf Verallgemeinerungen dieser Bedingungen wollen wir nicht eingehen.

Die Formel (4) lehrt:

|| Ein Doppelintegral kann man durch zwei nacheinander ausgeführte einfache Integrationen berechnen.

Nur wenn der Bereich, wie oben angenommen, ein Rechteck mit den Seiten $b - a$ und $\beta - \alpha$ ist, bleiben die Grenzen auch bei den Integrationen so wie in Formel (4). Wenn dagegen der Integrationsbereich \mathfrak{B} anders gestaltet ist, wenn z. B. der Rand die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, so hat man das bei den Grenzen zu berücksichtigen. In dem Fall der Ellipse hat man offenbar:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} f(x, y) dx dy &= \int_{-a}^{+a} \left[\int_{y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right] dx & (5) \\ &= \int_{-b}^{+b} \left[\int_{x = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{x = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} f(x, y) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Ist (Fig. 30) der Bereich \mathfrak{B} ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC , so läuft x von a bis b , y aber jedesmal von a bis x ; oder es läuft y von a bis b und für jeden Wert von y läuft x von y bis b . Daher ist

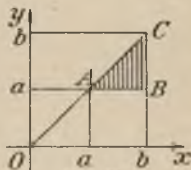


Fig. 30.

$$\begin{aligned} \iint_{(ABC)} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_a^x f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_y^b f(x, y) dx \right] dy, & (6) \end{aligned}$$

eine Formel, die man manchmal mit Dirichlets¹⁾ Namen verbindet. Sie lehrt z. B., wenn $f(x, y) = f(y)$ eine Funktion von y allein ist:

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(y) dx \right) dy = \int_a^b (b - y) f(y) dy,$$

was für die wiederholte Integration einer Funktion von einer Veränderlichen wichtig ist. Man sieht, daß das Integral des Integrals als statisches Moment ausgedeutet werden kann.

§ 35. Einführung neuer Veränderlicher; Bemerkungen über dreifache Integrale.

Statt den Bereich \mathfrak{B} mit Hilfe zweier Scharen von parallelen Geraden (nämlich der Parallelen $x = v = \text{konst}$, bzw. $y = u = \text{konst}$ zur y - bzw. zur x -Achse) zu zerlegen, kann man dazu auch zwei allgemeinere Kurvenscharen $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ nehmen, die durch $v = \text{konst}$ bzw. $u = \text{konst}$ definiert werden (φ und ψ stetig in $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$). Wir wollen dabei voraussetzen, daß diese Kurvengleichungen eindeutig und stetig nach u und v auflösbar sind: $u = \Phi(x, y), v = \Psi(x, y)$. Die u - und v -Kurven (d. h. die Kurven $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$) sind dann offenbar umkehrbar eindeutige und stetige Bilder der Parallelen zur v - bzw. u -Achse eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems in der u, v -Ebene im Innern des Quadrates $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. Daher trifft jede u - bzw. v -Kurve sich selbst nicht, zwei verschiedene u - bzw. v -Kurven haben keine gemeinsamen Punkte, und durch jeden Punkt von \mathfrak{B} geht nur eine u - und eine v -Kurve, die außer diesem keine Punkte gemein haben. In Fig. 31 sind in grober Weise zwei Paare solcher Kurven angedeutet. Verbindet man die Eckpunkte

¹⁾ Lejeune-Dirichlet, 1805 . . . 1850.

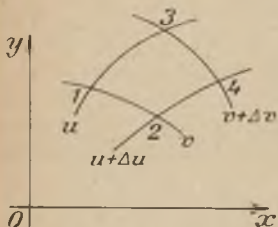


Fig. 31.

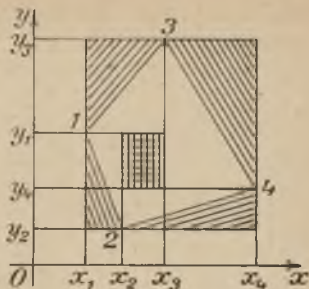


Fig. 32.

1, 2, 3, 4 durch die Sehnen zu einem Viereck, so erkennt man aus Fig. 32, daß die doppelte Vierecksfläche ausgedrückt werden kann durch

$$\begin{aligned} & (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_4 - x_3)(y_3 - y_4) + (x_4 - x_2)(y_4 - y_2) \\ & + (x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + 2(x_3 - x_2)(y_1 - y_4) \\ & = (x_4 - x_1)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_4 - y_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} x_4 - x_1 &= \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v) - \varphi(u, v), \\ x_2 - x_3 &= \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v + \Delta v), \\ y_4 - y_1 &= \psi(u + \Delta u, v + \Delta v) - \psi(u, v), \\ y_3 - y_2 &= \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u + \Delta u, v). \end{aligned}$$

Wenn φ und ψ im ganzen Bereiche stetige partielle Ableitungen haben, so unterscheiden sich die obigen Differenzen von den Differentialen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} du - \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \\ & \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv, & -\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \end{aligned}$$

nur um Glieder höherer Ordnung in Δu und Δv . Entsprechendes gilt für den Unterschied des Ausdruckes (1) der Vierecksfläche von dem folgenden Differentialausdruck:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du dv.$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist die „Funktionaldeterminante“¹⁾)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Sie muß sinngemäß ihrem absoluten Werte nach eingesetzt werden.

Wenn die Einteilung durch das u, v -Kurvennetz überhaupt zweckvoll sein soll, darf die Funktionaldeterminante natürlich nicht identisch verschwinden. Indem wir summieren und einen Grenzübergang ausführen, der gleichzeitig den Ersatz der Differenzen durch die Differentiale rechtfertigt, dessen Begründung aber hier übergangen werden muß, erhalten wir endlich

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(\varphi, \psi) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| du dv. \quad (2)$$

In dieser Formel²⁾) liegt die praktisch äußerst wichtige Regel für die **Transformation der Veränderlichen** in einem Doppelintegral analog der Regel

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi) \varphi'(u) du$$

beim einfachen Integral.

Führt man z. B. statt der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten ein durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta, \quad \text{so wird}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos \vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\varrho \sin \vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin \vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \varrho \cos \vartheta,$$

deshalb wird die Funktionaldeterminante gleich ϱ , und man erhält

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) \varrho d\varrho d\vartheta. \quad (3)$$

¹⁾ Vgl. Sammlung Göschen Bd. 402: Fischer, Determinanten.

²⁾ die unter sehr schwachen Voraussetzungen gültig bleibt (vgl. Hauptmann III, S. 143-145, auch II, S. 150).

Man mache sich das auch anschaulich klar, indem man $\rho d\rho d\vartheta$ als Näherungswert für ein von zwei konzentrischen Kreisen und zwei Radienvektoren begrenztes „Flächenelement“ der xy -Ebene deutet.

Wir werden später bei den Anwendungen erkennen, daß oft andere Koordinaten zur Auswertung der Integrale geeigneter sind als die rechtwinkligen. Dafür jetzt nur ein besonders interessantes Beispiel ¹⁾, das Fehlerintegral:

140. Berechnung von $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Wir setzen $\int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx = J$ und bilden das Quadrat

$$J^2 = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx \int_{-a}^{+a} e^{-y^2} dy = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

Da die Exponentialfunktion niemals negativ werden kann, so ist das Doppelintegral um so größer, je größer der Bereich ist, über den es genommen wird. Es ist also kurz geschrieben (Fig. 33)

$$\iint_{\text{Inkreis}} < J^2 < \iint_{\text{Umkreis}} .$$

Da nun

$$\iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint e^{-\rho^2} \rho d\rho d\vartheta$$

ist, so ergibt sich aus der Ungleichung

$$\int_0^{a\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\vartheta < J^2 < \int_0^{a\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\vartheta$$

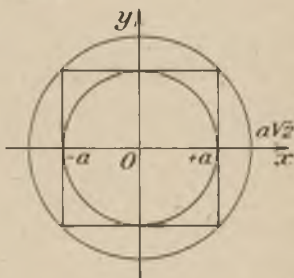


Fig. 33.

¹⁾ Nach Poisson, 1781 . . . 1840.

oder

$$2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-e^2} \right]_0^a < J^2 < 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-e^2} \right]_0^a \sqrt{2},$$

also

$$\pi (1 - e^{-a^2}) < J^2 < \pi (1 - e^{-2a^2}).$$

Läßt man jetzt $a \rightarrow \infty$ gehen, so geht $J^2 \rightarrow \pi$, $J \rightarrow \sqrt{\pi}$, daher wird ¹⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Nur kurz sei erwähnt, daß ganz analoge Betrachtungen wie für das Doppelintegral auch für dreifache (allgemein für n -fache) Integrale durchgeführt werden können. Auch diese werden zur Berechnung auf drei (bzw. n) hintereinander zuführende einfache Integrationen zurückgeführt.

§ 36. Der Satz von Green ²⁾.

Wir nehmen einen Bereich \mathfrak{B} (Fig. 34), dessen Randkurve von jeder Parallelen zur y -Achse zwischen $x = x_0$ und $x = x_1$ in zwei Punkten geschnitten wird und für x_0 und x_1 senkrechte

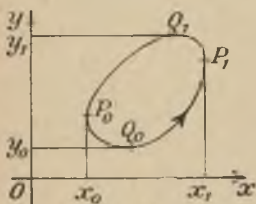


Fig. 34

Tangenten hat. Ebenso soll sie von jeder Parallelen zur x -Achse zwischen y_0 und y_1 nur in zwei Punkten geschnitten werden und für y_0 und y_1 horizontale Tangenten haben. Allgemein sei zugelassen, daß die Randkurve aus mehreren Teilkurven zusammengesetzt ist, die an den Zusammenstoßpunkten nicht dieselbe

Tangente zu haben brauchen; z. B. kann die Randkurve ein Streckenzug sein ³⁾. \mathfrak{B} werde so umlaufen, daß das

¹⁾ Vgl. S. 103.

²⁾ G. Green, 1793 . . . 1841.

³⁾ Sind in P_0 zwei Tangenten vorhanden, deren keine der y -Achse parallel ist, so ist die Gerade $x = x_0$ lediglich „Stützgerade“ der Randkurve.

Innere zur Linken bleibt. Die Punkte P_0 und P_1 zerlegen den mit Durchlaufungssinn versehenen Rand in einen unteren und einen oberen Teil. Die untere Kurve sei durch die Gleichung $y = \varphi(x)$, die obere durch $y = \psi(x)$ dargestellt; φ und ψ sollen stückweise glatt (stückweise stetig differenzierbar) sein. Wir betrachten jetzt eine Funktion $u(x, y)$, die samt ihrer partiellen Ableitung $u_y(x, y)$ stetig ist im Innern eines Bereiches, in welchem \mathfrak{B} einschließlich seines Randes enthalten ist. Dann hat man

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} u_y(x, y) dx dy &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u_y(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} u(x, \psi(x)) dx - \int_{x_0}^{x_1} u(x, \varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck ist das zweite Integral das Linienintegral (s. § 32), erstreckt über die Kurve φ (wie wir kurz sagen wollen):

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x, \varphi(x)) dx = \int_{\varphi} \underbrace{u(x, y)}_{\varphi} dx;$$

im ersten Integral ist dx gegen die Pfeilrichtung der Kurve ψ gekehrt, daher ist

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x, \psi(x)) dx = - \int_{\psi} \underbrace{u(x, y)}_{\psi} dx.$$

Zusammenfassend ist demnach

$$\iint_{\mathfrak{B}} u_y(x, y) dx dy = - \oint u(x, y) dx. \quad (1)$$

Genau analog verfahren wir mit einer Funktion $v(x, y)$, die nebst ihrer partiellen Ableitung $v_x(x, y)$ in \mathfrak{B} und auf dem Rande stetig ist. Es ergibt sich also ¹⁾

$$\iint_{\mathfrak{B}} v_x(x, y) dx dy = \oint v(x, y) dy. \quad (2)$$

¹⁾ Das positive Vorzeichen steht hier, da die linke Kurve Q_0Q_1 gegen die Pfeilrichtung, die rechte Kurve Q_1Q_0 in der Pfeilrichtung durchlaufen wird.

Subtrahiert man (1) von (2), so erhält man endlich

$$\iint_{\mathfrak{B}} (v_x - u_y) dx dy = \oint (u dx + v dy). \quad (3)$$

Diese Formel heißt die Greensche Formel. Wir sehen also:

Durch die Greensche Formel wird ein Doppelintegral über einen Bereich durch ein Linienintegral über seine Berandung ersetzt und umgekehrt.

Wir gehen nicht darauf ein, daß sich die Voraussetzungen über den Bereich \mathfrak{B} noch verallgemeinern lassen. Wir wollen hier nur noch einige Sonderfälle betrachten.

Setzen wir z. B. in (1) $u = y$, so kommt

$$\iint_{\mathfrak{B}} dx dy = - \oint y dx; \quad (4)$$

setzen wir in (2) $v = x$, so kommt

$$\iint_{\mathfrak{B}} dx dy = \oint x dy. \quad (5)$$

Nehmen wir die halbe Summe von (4) und (5), so wird

$$\iint_{\mathfrak{B}} dx dy = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx). \quad (6)$$

Nun ist aber (S. 117) das linksstehende Doppelintegral der Flächeninhalt B von \mathfrak{B} ; dieses kann also durch eins der drei rechts stehenden Linienintegrale ersetzt werden. Dabei ist die Umlaufsrichtung, wie in Fig. 35 angegeben, „links herum“; die Fläche liegt zur linken Hand, wenn man auf der Kurve in der Pfeilrichtung um \mathfrak{B} herumgeht. Bekanntlich nennt man das den positiven Umlaufssinn, und wir sehen, daß die Fläche B dann positiv zu nehmen ist. Daher mußten wir im Beispiel 138 die doppelte Fläche des Dreiecks ABC herausbekommen!

Betrachten wir zum Schluß noch die Greensche Formel (3), so erkennen wir ohne weiteres, daß das Linienintegral verschwindet, wenn $v_x = u_y$ ist. Das ist aber gerade die früher (S. 114) aufgestellte Bedingung, daß $u dx + v dy$ ein vollständiges Differential ist und daß das Linienintegral

von $u dx + v dy$ erstreckt über eine geschlossene Kurve verschwindet.

Die Greensche Formel ist grundlegend für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, insbesondere für die Potentialtheorie. Auch im Raume gibt es eine entsprechende Formel. Ferner gehören hierher der Gaußsche und der Stokessche ¹⁾ Integralsatz, die ebenfalls Raum- oder Volumenintegrale über Raumstücke durch Oberflächen- oder Hüllenintegrale ersetzen. Am kürzesten und dem anschaulich-physikalischen Gehalt am meisten angemessen sind sie in der Sprache der Vektorrechnung auszudrücken ²⁾.

Siebenter Abschnitt. Fouriersche Reihen und Integrale ³⁾.

§ 37. Die Fourierschen Reihen.

Es sei eine Funktion von x definiert für $a \leq x \leq b$. Wenn wir

$$x = \frac{b-a}{2\pi} t + a, \quad t = \frac{2\pi}{b-a} (x-a)$$

setzen, so erhalten wir eine Funktion $f(t)$, die für $0 \leq t \leq 2\pi$ erklärt ist. Diese Funktion kann unter gewissen, später zu besprechenden Bedingungen durch eine Fouriersche ⁴⁾ Reihe dargestellt werden, die nach \cos und \sin der ganzzahligen Vielfachen von t fortschreitet:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots \\ + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots \quad (1)$$

Allgemein nennt man eine solche Reihe eine trigonometrische Reihe; die Fouriersche Reihe ist dadurch

¹⁾ G. G. Stokes, 1819 . . . 1903.

²⁾ Vgl. als bestes Werk über diese wichtige mathematische Disziplin M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig (Akad. Verlagsges.) 1928.

³⁾ Für diesen Abschnitt bin ich Herrn A. Walther, Darmstadt, zu besonderem Danke verpflichtet.

⁴⁾ J. E. Fourier, 1768 . . . 1830. Die Reihen und die Formeln für die Koeffizienten hatte schon Euler (1707 . . . 1783).

gekennzeichnet, daß ihre Koeffizienten a_k, b_k sich leicht durch die Funktion $f(t)$ ausdrücken lassen.

Anm.: Man vergleiche die nach Potenzen von x fortschreitenden Potenzreihen; die Taylorsche Reihe hat zu Koeffizienten im wesentlichen die aufeinanderfolgenden Ableitungen von $f(x)$. Die Bezeichnung des Absolutgliedes mit $\frac{1}{2} a_0$ geschieht aus Zweckmäßigkeitgründen, vgl. S. 129.

Wir kümmern uns zunächst ¹⁾ nicht um die Konvergenzbedingungen der Reihe (1), sondern stellen als Bedingung für $f(t)$ die Integrierbarkeit von 0 bis 2π auf und nehmen an, daß (1) gleichmäßig konvergiert ²⁾. Integrieren wir (1) gliedweise nach t von 0 bis 2π , so verschwinden rechts alle Integrale bis auf das erste, und wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 \cdot 2\pi, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt. \quad (2)$$

Alsdann multiplizieren wir (1) mit $\cos kt$ ($0 < k$) und integrieren wieder von 0 bis 2π ; nach den Orthogonalitätsbedingungen (S. 49) sind alle Integrale der rechten Seite Null bis auf das über $\cos kt \cos kt$, das den Wert π hat. Demnach wird gerade „herausdestilliert“

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt = \pi a_k, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt. \quad (3)$$

Multipliziert man (1) mit $\sin kt$, so ergibt die Integration ebenso

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = \pi b_k, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt. \quad (4)$$

Die Konstante a_0 geht offenbar aus a_k in Formel (3) für $k = 0$ hervor; das Absolutglied von (1) selbst lautet

¹⁾ Historisch sei angemerkt, daß Newton (summus Neutonius, wie ihn Gauß nannte) bei seinen zahlreichen Reihenentwicklungen nie vergaß, hinzuzufügen „wenn sie besteht“.

²⁾ Vgl. die Bemerkungen am Ende dieses Paragraphen.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

ist also der Mittelwert von $f(t)$ im Intervall $0 \dots 2\pi$. Nimmt man b_k auch für $k=0$, so ergibt sich Null. Deshalb kann man zusammenfassend schreiben

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos kt}{\sin kt} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Diese Ausdrücke, die „Fourierschen Koeffizienten“, lassen sich für jede in $\langle 0 \dots 2\pi \rangle$ nur als integrierbar vorausgesetzte Funktion $f(t)$ bilden. Wir müssen also nun fragen:

Welchen Zusammenhang hat die mit jenem a_k, b_k gebildete Reihe (1) mit $f(t)$? Ist sie konvergent und stellt sie $f(t)$ dar?

Wir wollen beweisen, daß eine endliche trigonometrische Summe (ein trigonometrisches Polynom)

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) = & \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \dots + \alpha_n \cos nt \\ & + \beta_1 \sin t + \beta_2 \sin 2t + \dots + \beta_n \sin nt \end{aligned} \quad (6)$$

dann in gewissem Sinne die „beste“ Annäherung an $f(t)$ liefert, wenn statt der beliebigen Vorzahlen α_k, β_k gerade die Fourierschen Koeffizienten (5) genommen werden. Als Gütemaßstab für die Annäherung benutzen wir dabei nach der Gaußschen Fehlertheorie die Summe der Fehlerquadrate¹⁾,

also in unserem Falle das Integral $\int_0^{2\pi} \{f(t) - \varphi_n(t)\}^2 dt$. „Beste Näherung“ liegt vor, wenn dieses Integral ein Minimum ist. Unsere Forderung heißt also:

¹⁾ Durch die Quadratbildung macht man sich vom Vorzeichen des Fehlers frel.

Es werden die Vorzahlen α_k, β_k gesucht, für die

$$\int_0^{2\pi} \{f(t) - \varphi_n(t)\}^2 dt \\ = \int_0^{2\pi} \left\{ f(t) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right\}^2 dt$$

ein Minimum wird.

Das rechts in Klammern stehende Quadrat ist keinesfalls negativ. Führen wir es aus, so kommt

$$f(t)^2 - \alpha_0 f(t) - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k f(t) \cos kt + \beta_k f(t) \sin kt) \\ + \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right)^2.$$

Nehmen wir nun die Integration vor, so ergibt sich unter Beachtung von (5) leicht

$$\int_0^{2\pi} \{f(t) - \varphi_n(t)\}^2 dt = \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt - \pi \alpha_0 a_0 - 2\pi \sum_{k=1}^n (a_k \alpha_k + b_k \beta_k) \\ + \frac{\pi}{2} \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Addiert und subtrahiert man rechts $\pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$, so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} \{f(t) - \varphi_n(t)\}^2 dt \quad (7) \\ = \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt + \pi \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \right\} \\ - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\}.$$

Lediglich der mittlere Teil ist von den Vorzahlen α_k, β_k abhängig. Man sieht sofort, daß er am kleinsten wird, daß

man also das gewünschte Minimum erhält, wenn $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$ wird. Denn dann wird jener nicht negative Teil Null.

Die beste Annäherung der integrierbaren Funktion $f(t)$ durch ein trigonometrisches Polynom (6) wird also erzielt, wenn für die Vorzahlen α_k, β_k die Fourierschen Koeffizienten gesetzt werden.

Man bemerke, daß jede Vorzahl unabhängig von allen anderen ist; man darf Glieder herauslassen oder, wenn die Annäherung noch nicht genügt, weitere Glieder hinzunehmen, ohne daß sich die übrigen Vorzahlen ändern.

Zur Fourierschen Reihe gelangt man durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$. Es ist noch zu zeigen, daß die so entstehende Reihe unter gewissen Bedingungen konvergiert.

Wir gehen dazu von der Gleichung (7) aus, in der wir $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) setzen. Dann ergibt sich als trigonometrischer Näherungsausdruck die Teilsumme

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt \\ + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt$$

und

$$\int_0^{2\pi} \{f(t) - f_n(t)\}^2 dt = \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\}. \quad (8)$$

Da die linke Seite keinesfalls negativ ist, folgt die Besselsche¹⁾ Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt. \quad (9)$$

Die rechte Seite dieser Beziehung ist eine von n unabhängige bestimmte Zahl. Daher bleibt die Beziehung richtig für beliebig große n , d. h. die linke Seite konvergiert mit

¹⁾ F. W. Bessel, 1784 . . . 1846.

wachsendem n gegen eine endliche Größe, die höchstens gleich der rechten Seite ist; es ist also

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt. \quad (10)$$

Da bei einer konvergenten Reihe die Glieder gegen Null konvergieren müssen, folgt

$$a_k \rightarrow 0, \quad b_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty:$$

Die Fourierschen Koeffizienten jeder integrierbaren Funktion $f(t)$ nehmen für $k \rightarrow \infty$ gegen Null ab, daher auch die Glieder der Fourierschen Reihe (1) selbst. Hieraus folgt natürlich noch keineswegs, daß die Fouriersche Reihe jeder integrierbaren Funktion konvergent sein müßte. Denn, um eine Analogie anzuführen, bei der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ geht ja das allgemeine Glied auch gegen Null, und die Reihe divergiert doch. In der Tat braucht die mit den Fourierschen Koeffizienten formal gebildete Reihe (1) nicht einmal konvergent zu sein, wenn man die viel schärfere Forderung der Stetigkeit an $f(t)$ stellt. Es gibt Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierscher Reihe.

Es ist ein noch offenes Problem, welche hinreichenden und notwendigen Bedingungen eine Funktion $f(t)$ erfüllen muß, um in eine Fouriersche Reihe entwickelbar zu sein. Vielleicht ist es in dieser Wendung überhaupt unlösbar. Vielleicht ist nämlich diese Entwickelbarkeit eine ähnliche, nicht weiter auf einfachere Eigenschaften zurückführbare Eigenschaft wie etwa die Differenzierbarkeit einer stetigen Funktion — nach Weierstraß gibt es ja im ganzen Bereiche stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind.

Hinreichende Bedingungen kann man in mannigfaltiger Art angeben. Ohne Beweis sei die praktisch bequemste angeführt:

Die mit den Fourierschen Koeffizienten gebildete Reihe (1) konvergiert für alle stückweise glatten Funktionen. Stückweise glatt nennt man eine stückweise stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung. Ihr Kurvenbild entspricht dem, was man sich gewöhnlich unter einer Funktionskurve vorstellt, bis auf etwaige Ecken (Knickstellen) und Sprünge. Die Konvergenz erfolgt absolut und gleichmäßig in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen von $f(t)$ nach dem Werte von $f(t)$, ungleichmäßig dagegen in der Umgebung etwaiger Sprungstellen a nach dem arithmetischen Mittel $\frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}$ der Grenzwerte der Funktion von

links und von rechts. — Historisch berühmt sind namentlich die Dirichletschen hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz der Fourierschen Reihe.

Während Konvergenz der Fourierschen Reihe bei einer lediglich stetigen Funktion $f(t)$ nicht vorhanden zu sein braucht, läßt sich zeigen, daß für jede stetige oder auch nur stückweise stetige Funktion $f(x)$ immer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \{f(t) - f_n(t)\}^2 dt = 0$$

ist, daß also in bezug auf die Fehlerquadratsumme „im Mittel“, wie man zu sagen pflegt, $f(t)$ durch $f_n(t)$ bei wachsendem n immer besser angenähert wird. Dabei braucht $f_n(t)$ an $f(t)$ nicht durchweg beliebig nahe heranzukommen, was gewöhnliche Konvergenz besagte, sondern kann sich von $f(t)$ um schmale, aufgesetzte „Nadeln“ unterscheiden, die zum Integral beliebig wenig beitragen.

Die „Konvergenz im Mittel“ ist gleichbedeutend mit der aus der Besselschen Ungleichung (9) für stetige oder auch nur stückweise stetige Funktionen $f(t)$ hervorgehenden

„Vollständigkeitsrelation“ oder Parsevalschen¹⁾ Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

Angemerkt sei noch, daß zwar, wie erwähnt, die Fouriersche Reihe einer stetigen Funktion $f(t)$ keineswegs zu konvergieren braucht, daß dies aber nach Fejér (1904) bei den arithmetischen Mitteln der Teilsummen (statt der Teilsummen selbst) sehr wohl der Fall ist, und zwar nach dem Werte $f(t)$.

Eine knapp gehaltene Monographie von Axel Harnack²⁾ über die Fourierschen Reihen steht als Anhang zum zweiten Bande von Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (Leipzig, B. G. Teubner). Eine auf den Lebesgueschen Integralbegriff begründete Theorie findet sich bei A. Zygmund, Trigonometrie Series, Warschau 1925. Entwickelt hat sie Lebesgue selbst, wohl in der Hoffnung, durch seinen Integralbegriff notwendige Konvergenzbedingungen zu finden. Nach der spezifisch mathematischen Seite, die Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen für möglichst „böartige“ Funktionen zu entwickeln, geht Rogosinski, Fouriersche Reihen, Sammlung Götschen Bd. 1022. Wertvolle Ausführungen liest man bei Felix Klein, Elementar-Mathematik I und III; ferner seien besonders erwähnt: K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl. 1931, sowie Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Kap. 2 (beides Verlag J. Springer).

§ 38. Darstellung periodischer Funktionen durch Fouriersche Reihen.

Wir hatten zuerst eine Funktion $f(x)$ angenommen, die für den Bereich $a \dots b$ erklärt war; sodann transformierten wir sie in eine Funktion $f(t)$ für den Bereich $0 \dots 2\pi$. Für diese Funktion $f(t)$ im Intervall $0 \dots 2\pi$ haben wir unsere bisherigen Untersuchungen durchgeführt und deren Ergebnisse ausgesprochen. Nun sind aber die Glieder der Reihe

¹⁾ M. A. Parseval, 1806.

²⁾ Axel Harnack, 1851 . . . 1888.

(1) (S. 127) samt und sonders periodische Funktionen, die mit 2π oder mit ganzen Teilen von 2π periodisch sind. Es ist daher durch die Periodizität der Reihenglieder geboten, auch die dargestellte, zunächst für $0 \leq t \leq 2\pi$ erklärte Funktion $f(t)$ als periodisch mit der Periode 2π vorauszusetzen, wobei in 0 und 2π gegebenenfalls zusätzliche Sprung- oder Knickstellen hereinkommen.

Die Integration für die Koeffizienten (Formel (5) S. 129) kann dann offenbar statt über das Intervall $0 \dots 2\pi$ auch über ein beliebiges anderes Intervall $\alpha \dots \alpha + 2\pi$ von der Länge 2π , z. B. über das Intervall $-\pi \dots +\pi$, erstreckt werden. Wir geben nun einige einfache Beispiele, wobei wir x an Stelle von t schreiben.

141. $y = f(x) = x$. Da wir eine ungerade Funktion haben, sind alle a_k Null; für die b_k kann man schreiben

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

Durch Teilintegration erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx &= \left[-\frac{x}{k} \cos kx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\pi}{k}; \end{aligned}$$

daher wird $b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$, und es kommt die Reihe

$$f(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \dots \right).$$

Setzt man hier $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Leibnizsche

Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Zeichnet man die durch die obige Reihe dargestellte Funktion, so erhält man (Fig. 35) lauter unter 45° gegen die Achsen geneigte Strecken, die eben die Periodizität ausdrücken. Nur im Bereiche $-\pi \dots +\pi$ gilt $y = x$, im Bereiche $\pi \dots 3\pi$ ist $y = x - 2\pi$ usw. An den Sprungstellen $\pm k\pi$ gibt die Reihe, wie schon S. 133 angeführt, das arithmetische Mittel $\frac{\pi - \pi}{2} = 0$ der jeweiligen beiden Grenzwerte.

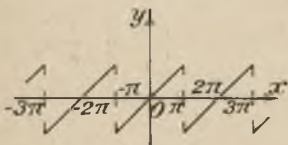


Fig. 35.

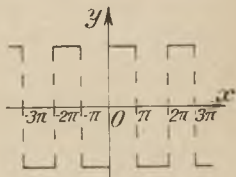


Fig. 36.

142. Die Funktion $f(x)$ sei erklärt für $-\pi \dots 0$ zu $-c$, für $0 \dots \pi$ zu $+c$; für die Sprungstelle 0 ist sie zunächst unbestimmt. Die periodische Fortsetzung zeigt die Figur 36. Da die Funktion ungerade ist, so verschwinden alle a_k . Für die b_k erhält man

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{c}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin kx \, dx + \frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \\ &= \frac{2c}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{2c}{k\pi} [\cos kx]_0^{\pi}; \end{aligned}$$

ist k gerade, so wird $b_k = 0$, für ungerades k ist

$$b_k = +\frac{4c}{k\pi}.$$

Die Fouriersche Reihe wird demnach

$$f(x) = \frac{4c}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right\}.$$

An den Sprungstellen $\pm k\pi$ gibt die Reihe $f(x) = 0$, also das arithmetische Mittel aus den jeweiligen beiden Grenzwerten.

143. Für $-\pi \dots 0$ sei $y = -x$, für $0 \dots \pi$ sei $y = +x$. Dann ergibt sich für $a_0 = \pi$, für ungerades k kommt $a_k = -\frac{4}{\pi k^2}$, für gerades k wird $a_k = 0$, und es werden alle $b_k = 0$. Daher lautet die Reihe

$$y = f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right).$$

Die Fig. 37 zeigt das Bild der Funktion, einen Linienzug mit Knickstellen. Für $x = 0$ folgt die bemerkenswerte Formel

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Durch Integration der Reihe für $f(x)$ kann man noch weiter interessante For-

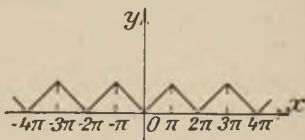


Fig. 37.

meln gewinnen, worauf wir aber nicht eingehen wollen.

In den drei Beispielen gab die entwickelte Reihe eine nichtanalytische Funktion als Summe analytischer Funktionen. Als Fourier 1807 derartige Beispiele zuerst bekannt machte und behauptete, daß man eine ganz willkürliche Funktion, die z. B. durch eine Zeichnung gegeben ist, durch seine Reihe darstellen könne, war das Lagrange¹⁾, dem damaligen Haupt der französischen Mathematiker, so unerwartet, daß er dieser Behauptung auf das entschiedenste entgegentrat²⁾. Es widersprach ja dem von Euler und Lagrange erklärten Funktionsbegriff³⁾. Das Studium der Fourierschen Reihen war in der Folgezeit eine Haupttriebfeder

¹⁾ J. L. Lagrange, 1736 . . . 1813. ²⁾ Vgl. Riemanns Werke S. 219.

³⁾ Wertvolle Aufklärung über die Entwicklung des Funktionsbegriffs bietet der „Riesenbericht“ von Brill und Noether in Jahresber. d. D. Math.-Ver. Bd. 3, Berlin 1894. Ferner: H. Burkhardt, Trigonometrische Reihen und Integrale. Encykl. d. math. Wiss. II A 12, Nr. 28.

zur Entwicklung des modernen Funktionsbegriffs überhaupt, insbesondere bei Dirichlet.

Überlegt man sich, daß die Koeffizienten a_k, b_k bestimmte Integrale sind, so folgt, daß sie sich als Flächen unter gewissen Kurven auffassen lassen. Daraus schöpft man die Gewißheit, daß diese Koeffizienten stets — wie auch die Funktion gegeben sein mag — empirisch bestimmbar sind. Man hat seit einem halben Jahrhundert eine ganze Reihe von mechanischen Vorrichtungen⁴⁾ ersonnen, um bei gezeichnet vorliegender Funktion die Fourierschen Koeffizienten der zugehörigen Reihe zu ermitteln. Ferner gibt es graphische Methoden und rechnerische Schemata zur praktischen Bestimmung der Fourierschen Koeffizienten einer graphisch gegebenen Funktion⁵⁾, die auf Runge⁶⁾ zurückgehen.

Zum Schluß sei darauf aufmerksam gemacht, daß bei der früheren Darstellung einer Funktion durch eine unendliche Reihe, nämlich durch eine Potenzreihe nach dem Taylorschen Satze — abgesehen von den viel engeren Bedingungen — für das ganze Konvergenzintervall das Verhalten der Funktion an nur einer Stelle maßgebend war; es waren ja die Vorzahlen der Potenzreihe die Werte der Ableitungen an der betreffenden Stelle. Bei der Fourierschen Entwicklung dagegen hängen die Vorzahlen von dem Verhalten der Funktion in dem ganzen Intervall ab. Das macht sich auch in der Art der Annäherung durch die endlichen Summen $f_n(x)$ geltend. Die f_n bei der Potenzreihe, die sog. Schmiegungsparabeln, entfernen sich von der Kurve $y = f(x)$ um so mehr, je weiter man sich vom Ausgangspunkt der Entwick-

⁴⁾ Vgl. z. B. Henrici, Über Instrumente zur harmonischen Analyse, Katalog math. u. math.-phys. Modelle usw. herausg. v. W. Dyck, München 1892. Ferner: Galle, Math. Instrumente, Leipzig 1912; Willers, Math. Instrumente, Sammlung Göschens Bd. 9:22; Der harmonische Analysator Mader-Ott, Druckschrift Ad. 341 des Math.-mech. Instituts A. Ott, Kempten (Allgäu).

⁵⁾ Vergl. v. Sanden, Praktische Analysis, Leipzig, B. G. Teubner; Willers, Methoden der praktischen Analysis, Göschens Lehrbücher Bd. 12; Tercebsi, Rechenschablonen für harmon. Analyse und Synthese nach C. Runge, Berlin 1930, J. Springer.

⁶⁾ C. Runge, 1856 . . . 1927.

lung wegbegibt. Bei der Fourierschen Entwicklung dagegen nähern sich die f_n im ganzen Bereiche der gegebenen Kurve immer mehr. Besonders interessant ist die Näherung in der Umgebung von Sprungstellen. Dabei schießen die Näherungsfunktionen bei wachsendem n über die Grenzordinaten der Funktion von rechts und links hinaus; es bilden sich aufgesetzte schmale „Türmchen“ aus (Wilbraham-Gibbssche Erscheinung)¹⁾.

§ 39. Die harmonische Analyse.

Es könnte so scheinen, als ob die Darstellung einer periodischen Funktion durch eine Fouriersche Reihe nur eine vielleicht interessante mathematische Spielerei mit Formeln sei, zumal ja doch die wirkliche Ausrechnung einer unendlichen Reihe unmöglich ist; man nimmt ja gezwungenermaßen immer nur soviel Glieder, wie die geforderte Genauigkeit verlangt. Aber dem ist nicht immer so. Es gibt zahlreiche Fälle der Praxis, wo diese Entwicklung einen wesentlichen Sinn hat, nämlich dann, wenn die einzelnen Glieder dieser Reihe eine physikalische oder technische Bedeutung haben. Das ist z. B. der Fall bei der harmonischen Analyse — wie man diese Entwicklung auch nennt — eines musikalischen Klanges oder eines von einer Dynamomaschine gelieferten Wechselstromes. Ja, man untersucht z. B. meteorologische Erscheinungen, erdmagnetische Ströme usw. durch harmonische Analyse, um herauszubekommen, ob eine irgendwie erklärbare Periodizität (wenigstens angenähert) besteht.

Überall bei Schwingungsvorgängen, z. B. an rotierenden Maschinen, hat sich die harmonische Analyse zur Aufklärung der Erscheinungen bewährt. Unser Ohr ist ein harmonischer Analysator, indem es neben dem Grundton noch die Obertöne, die den einzelnen Gliedern der Fourierschen Reihe ent-

¹⁾ Vgl. F. Klein, Elementar-Math. I, S. 214—215, III, S. 80.

sprechen, hört. Die großartigste und aufschlußreichste Anwendung findet die harmonische Analyse in der Spektralanalyse; das Prisma und das Beugungsgitter des Spektroskops wirken geradezu als harmonische Analysatoren der Lichterscheinungen, wenn auch die Gesetze der trigonometrischen Reihen dabei anders sind, als bei den Fourierschen Reihen. Doch das steht hier nicht zur Diskussion.

Wir nehmen an, daß ein Punkt irgendwelche periodischen Schwingungen um eine Ruhelage macht. Ist T die Zeit einer vollen Periode, also die Schwingungsdauer, so benutzen wir zur Zerlegung der Schwingung die Fouriersche Entwicklung

$$y = f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{T} t + \dots \\ + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{T} t + \dots, \quad (1)$$

wobei y die zur veränderlichen Zeit t vorhandene Entfernung des schwingenden Punktes von der Ruhelage ist. Man führt meist die Bezeichnungen ein

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \text{Kreisfrequenz} \\ \nu &= \frac{1}{T} = \text{Frequenz} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Jedes Glied der Reihe (1) mit Ausnahme von $\frac{1}{2} a_0$ stellt eine sog. harmonische Schwingung dar; bei $a_k \cos k\omega t$ und $b_k \sin k\omega t$ sind a_k und b_k die Schwingungsweiten (Amplituden). Man kann einfach zusammenfassen

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = c_k \sin (k\omega t + \varphi_k), \quad (3)$$

wo die Amplitude c_k und die Phasenverschiebung φ_k durch die Gleichungen

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \frac{a_k}{c_k} = \sin \varphi_k, \quad \frac{b_k}{c_k} = \cos \varphi_k, \quad \frac{a_k}{b_k} = \operatorname{tg} \varphi_k \quad (4)$$

bestimmt sind. Anschaulich am einfachsten ersieht man

das an dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 38), das mit der Winkelgeschwindigkeit $k\omega$ rotiert.

Die Funktion

$y = f(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots$ (5)

erscheint dann aufgebaut aus gegeneinander phasenverschobenen Sinusschwingungen mit den Amplituden c_1, c_2, \dots und den Kreisfrequenzen $\omega, 2\omega, \dots$, die dem konstanten Gliede $c_0 = \frac{1}{2} a_0$ überlagert sind und in der Schwingungszeit $T=2\pi/\omega$ einmal, zweimal, ... voll ausschlagen. Das Glied

$$c_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

heißt die Grundschwingung, die

folgenden Glieder stellen die Oberschwingungen dar.

Bei den Klangschwingungen, die durch die menschliche Stimme oder durch Musikinstrumente hervorgebracht werden, treten zu den Schwingungen der Fourierschen Entwicklung noch unharmonische Obertöne, sog. Formanten hinzu (Eigentöne des Instruments): sie sind mathematisch auch harmonische Schwingungen, nur ist ihre Frequenz unabhängig von den Frequenzen der Reihe. Man hat neuerdings eine akustisch-elektrische Methode entwickelt, um in Zeit von wenigen Minuten alle Obertöne und Formanten eines Klanges zu ermitteln.

40. Das Fouriersche Integral.

Die Fouriersche Reihe einer mit der endlichen Periode T periodischen Funktion $f(t)$

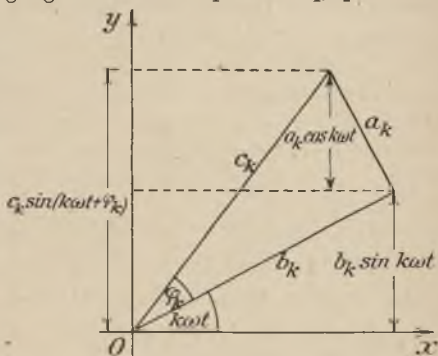


Fig. 38.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (1)$$

kann folgendermaßen aufgefaßt werden:

Man sucht für die „diskreten“ Kreisfrequenzen $n \frac{2\pi}{T}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) die Amplituden a_n und b_n der entsprechenden Schwingungen $\cos n \frac{2\pi}{T} t$ und $\sin n \frac{2\pi}{T} t$. Diese Amplituden werden aus dem Verlaufe von $f(t)$ durch die Formeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(z) \cos n \frac{2\pi}{T} z \, dz \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(z) \sin n \frac{2\pi}{T} z \, dz \end{aligned} \quad (2)$$

bestimmt. Sie bilden in Abhängigkeit von n das diskontinuierliche „Amplitudenspektrum“ von $f(t)$ zu den diskreten Kreisfrequenzen $n \frac{2\pi}{T}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Man kann

das „Linienspektrum“ von $f(t)$ entwerfen, indem man zu jeder Kreisfrequenz als Abszisse die zugehörige cos- und sin-Amplitude als Ordinate aufträgt. So erhält man für Beispiel 142 (Fig. 36) das Linienspektrum der Fig. 39. Durch Überlagerung der „abzählbar“ unendlich vielen Schwingungen

(vgl. Σ') zu den markierten Kreisfrequenzen und Amplituden entsteht $f(t)$. Das Fouriersche Integral leistet dieselbe „Spektralanalyse“ von $f(t)$ für eine unendlich

große Periode T , also für nichtperiodisches $f(t)$. Unter den Voraussetzungen, daß $f(t)$ in jedem endlichen Intervall stück-

weise glatt (S. 132) ist und daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt$ existiert, gilt

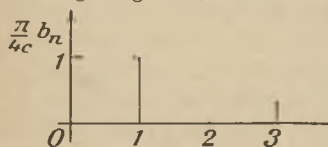


Fig. 39.

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \frac{\cos \omega z}{\sin \omega z} \, dz. \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \frac{\sin \omega z}{\cos \omega z} \, dz. \end{aligned} \quad (4)$$

D. h. $f(t)$ wird dargestellt als Überlagerung (3) von „kontinuierlich“ unendlich vielen Schwingungen (vgl. f statt Σ) $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ zu den zwischen 0 und ∞ stetig veränderlichen Kreisfrequenzen ω , wobei die zu ω gehörigen Amplituden $a(\omega)$ und $b(\omega)$ durch (4) aus dem Gesamtverlaufe von $f(t)$ gewonnen werden. In Abhängigkeit von ω aufgetragen, bilden die „Spektraldichten“ $a(\omega)$ und $b(\omega)$ das „kontinuierliche Spektrum“ von $f(t)$, aus dem man abliest, mit welcher Intensität jede Teilschwingung zu $f(t)$ beiträgt.

Man erhält das Fouriersche Integral — zunächst heuristisch — am natürlichsten, indem man die Ausdrücke (2) in (1) einsetzt (hierbei ist das Intervall $-\frac{T}{2} \dots + \frac{T}{2}$ bequemer als $0 \dots T$), zusammenrechnet, $T \rightarrow \infty$ gehen läßt und an die Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe denkt. Dadurch entsteht zunächst die meist gegebene Gestalt

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \omega (z - t) \, dz \right] d\omega$$

des Fourierschen Integrals. Sie sieht zuerst als eine recht nutzlose, wegen des Vorkommens von $f(t)$ links und rechts „sich in den Schwanz beißende“ Beziehung aus. Ihre eigentliche Bedeutung enthüllt sich erst durch die Schreibweise (3) und (4). Durch strenge Betrachtung werden dann auch die Gültigkeitsvoraussetzungen festgelegt. An etwaigen Sprungstellen gibt das Fouriersche Integral das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerte von $f(t)$ von links und von rechts her.

Bei geradem $f(t)$ fällt $b(\omega)$ heraus und es bleibt nur

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega z dz \quad \text{mit} \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(z) \cos \omega z dz.$$

Man kann sagen, daß sich diese beiden „reziproken Integralgleichungen“ gegenseitig auflösen.

Ein Mangel bei der Spektralanalyse einer Funktion $f(t)$ durch das Fouriersche Integral liegt darin, daß $f(t) \rightarrow 0$ streben muß für $|t| \rightarrow \infty$, was z. B. bei weißem Licht, bei Geräuschen, Erdbeben- und Wasserwellen als unnatürlich erscheint.

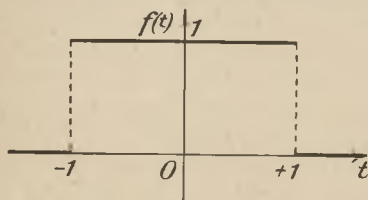


Fig. 40.

Beispiele:

144. Dirichlets „diskontinuierlicher Faktor“ (Fig. 40).

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \\ -1 < t < +1, \\ f(t) = 0 \quad \text{außerhalb.}$$

$f(t)$ ist eine gerade

Funktion, deshalb ist $b(\omega) = 0$ für alle ω und

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \cos \omega z dz = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega},$$

wir haben daher ein kontinuierliches Spektrum, das durch die Kurve $\sin \omega/\omega$ dargestellt werden kann (Fig. 41). Es ist

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

Insbesondere hat man für $t = 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2},$$

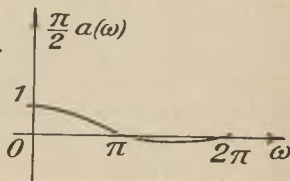


Fig. 41.

was schon S. 105 erwähnt war.

In der Wechselstromtelegraphie entspricht Dirichlets-Faktor offenbar einem Punkte oder Strichzeichen der Morse-schrift. Die Spektralzerlegung zeigt, mit welchen Intensitäten kontinuierlich viele Wechselstromschwingungen das Zeichen aufbauen.

Durch Umrechnung kann man auch die Funktion (Fig. 42)

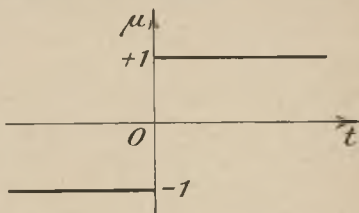


Fig. 42.

$$145. \quad \mu(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ +1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

erhalten, obwohl $\mu(t)$ nicht $\rightarrow 0$ geht für $|t| \rightarrow \infty$.

Hieraus entsteht als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mu(t - t_1)$ der „Spannungssprung“, der einer für $t = t_1$ plötzlich einsetzenden Gleichspannung entspricht, $\mu(t) = 0$ für $t < t_1$ und $\mu(t) = 1$ für $t > t_1$ (Fig. 43).

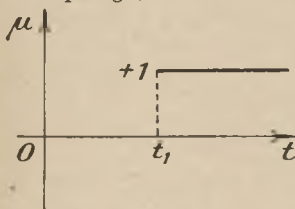


Fig. 43.

Das Fouriersche Integral ist grundlegend wichtig für die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen (theoretische Telegraphie, Wärmeleitung).

Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

Achter Abschnitt. Anwendungen auf die Geometrie der Ebene.

§ 41. Quadratur der Kurven in rechtwinkligen Koordinaten.

A. Die „Quadratur“ einer durch ein Kurvenstück, die beiden Endordinaten und das dazwischenliegende Stück der

x -Achse begrenzten Fläche war der historische Ausgangspunkt der Integralrechnung. Wir haben hierfür die Formel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{mit} \quad f(x) = F'(x)$$

aufgestellt und untersucht. Sie soll jetzt auf einige einfache Kurven angewandt werden.

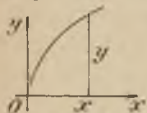


Fig. 44.

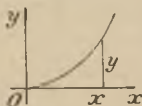


Fig. 45.

146. Die Fläche F unter der Parabel $y^2 = 2px$ zwischen den Grenzen 0 und x zu bestimmen (Fig. 44).

Es ist

$$F = \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{2px} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{2px} \cdot x \right]_0^x = \frac{2}{3} xy.$$

Für die Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ (Fig. 45) ist $F = \int_0^x y dx = \frac{1}{3} xy$.

Beide Ergebnisse hatte bereits Archimedes. Wie lauten sie in Worten? Sie finden nützliche Anwendung bei der zeichnerischen Integration, indem man die gegebene Kurve abteilungsweise durch Parabeln annähert¹⁾.

147. Die Fläche der Neilschen (halbkubischen) Parabel $y^2 = a^2x^3$ ist bestimmt durch

$$F = a \int_0^x x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} ax^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} xy.$$

148. Die Fläche der Parabel $y^n = ax^m$, m und n ganze positive Zahlen, ist gegeben durch

$$F = a^{-\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} a^{-\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} xy.$$

¹⁾ Vgl. z. B. Fr. A. Willers, Graphische Integration. Sammlung Göschen Bd. 801.

149. Die Fläche F unter der kubischen Parabel

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ zu berechnen

Man erhält:

$$F = c_0(b - a) + c_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + c_2 \frac{b^3 - a^3}{3} + c_3 \frac{b^4 - a^4}{4}. \quad (1)$$

Wendet man auf diesen Fall die Simpsonsche Formel¹⁾ in der einfachsten Form (Keplersche Faßregel)

$$F \approx \frac{b - a}{6} \left[f(a) + 4 f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (2)$$

an, so erhält man nach einfacher Rechnung

$$F = \frac{b - a}{6} [6c_0 + 3c_1(a + b) + 2c_2(a^2 + ab + b^2) + \frac{3}{2}c_3(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)],$$

was ohne weiteres auf (1) zurückführt.

Die Simpsonsche Formel gilt also bei der kubischen (und ebenso für $c_3 = 0$ bei der quadratischen) Parabel genau. Bei allen Kurven von höherem Grade und erst recht bei Kurven, die nicht durch algebraische Ausdrücke definiert sind, gibt sie eine Annäherung insoweit, als sich die Kurve durch eine kubische Parabel ersetzen läßt. Vorteilhaft hierbei wirkt noch der glättende Einfluß der Integration überhaupt: Die Flächeninhaltskurve verläuft auch bei stark schwankenden Kurven viel regelmäßiger als die Kurve selbst. Wenn also auch die Kurve selbst vielleicht noch gar nicht besonders gut durch die kubische Parabel angenähert wird, kann doch für den Flächeninhalt der Ersatz vorzüglich sein. Daher die praktisch ausgezeichneten Ergebnisse mit der Simpsonschen Regel. Vgl. auch die Restgliedformeln § 2, S. 9.

¹⁾ S. § 2, S. 9.

150. Der Flächeninhalt F des in Fig. 46 gestrichelten Sektors OPS der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ ist die Differenz des Dreiecks OPQ und der Fläche SPQ unter der Hyperbel. Also ist

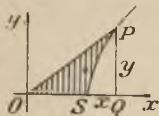


Fig. 46.

$$F = \frac{1}{2} xy - \int_0^x y dx.$$

Bildet man dF/dx , so ergibt sich $\frac{1}{2} (xy' - y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}$, also wird¹⁾

$$F = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{1+s}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \text{Ar Cos } x.$$

Daraus erklärt sich die Bezeichnung $\text{Ar} = \text{Area} = \text{Flächeninhalt}^2)$. Man überlege jetzt genau die geometrischen Analogien zwischen den trigonometrischen und den Hyperbelfunktionen.

151. Das Stück der Fläche der Ellipse $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ im Bereiche $0 \dots x$ ist

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[\frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2} \right]_0^x \\ &= \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Demnach ist die Fläche der rechten oberen Vierteilellipse³⁾

$$\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi ab}{4} \text{ und die Fläche der Vollellipse } \pi ab.$$

¹⁾ s. S. 94, Beispiel 124.

²⁾ Sammlung Götschen Bd. 87, § 10.

³⁾ Man beachte, daß man zur Erzielung einer eindeutigen Funktion y vorsichtig vorgehen muß; man darf zunächst nur die obere Halbellipse berücksichtigen. Analoges Verfahren bei dem nächsten Beispiel.

Für den Sonderfall $b = a$ erhält man die y Kreisfläche.

152. Die von der Kurve $9ay^2 = x(3a - x)^2$ umschlossene Schleife (Fig. 47) ist

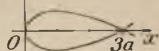


Fig. 47.

$$2 \int_0^{3a} \frac{3a-x}{3} \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{2}{3\sqrt{a}} \left[2ax\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} \right]_0^{3a} = \frac{8}{5}a^2\sqrt{3}.$$

B. Soll die Fläche F berechnet werden, die oben von der Kurve $y = f(x)$, unten von $y = \varphi(x)$ und seitlich von den Ordinaten in a und b begrenzt wird (Fig. 48), so erhält man offenbar

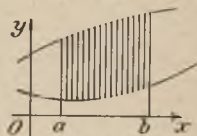


Fig. 48.

$$F = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx.$$

Beispiele:

153. Die Gerade $y = x$ schneidet von der Parabel $y^2 = 2px$ das Segment F ab:

$$F = \int_0^{2p} (\sqrt{2px} - x) dx = \frac{2}{3}p^2.$$

154. Die zwischen der x -Achse und der Kurve $y = \sin x$ im Bereiche $0 \dots \pi$ liegende Fläche wird durch die Gerade $y = \frac{1}{2}$ in einen oberen Teil F_1 und einen unteren Teil F_2 zerlegt. Man erhält

$$F_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= -\cos \frac{5}{6}\pi + \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3},$$

$$F_2 = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}, \quad \text{und} \quad F_1 + F_2 = 2.$$

Eine Verallgemeinerung von B. ist

C. Berechnung von Flächen, die von geschlossenen Kurven begrenzt werden.

Diese Aufgabe führt auf das früher besprochene Linienintegral. Wir wollen zuerst die Leibnizsche Sektorformel ableiten. Für den Sektor $S = OAB$ (Fig. 49 und 50) erhält man zwei Gleichungen

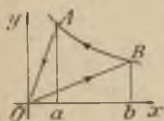


Fig. 49.

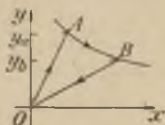


Fig. 50.

$$S = \frac{1}{2} a y_a - \frac{1}{2} b y_b - \int_{x=a}^b y dx,$$

$$-S = \frac{1}{2} a y_a - \frac{1}{2} b y_b - \int_{y(a)}^{y(b)} x dy,$$

wobei wir des früher (S. 111) Gesagten über die Abhängigkeit des Vorzeichens einer Fläche von dem Umlaufsinn ihrer Umrandung eingedenk sind. Subtrahiert man die untere Gleichung von der oberen, so kommt

$$2S = - \int_{x=a}^b y dx + \int_{x=a}^b x dy = \oint (x dy - y dx),$$

daher wird

$$S = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx).$$

Früher war diese Formel für die Berechnung einer Fläche (§ 36, S. 126) hergeleitet worden, die von irgendeinem Rande (der sich nicht selbst schneidet) vollständig begrenzt wird; sie gilt also nicht nur für Sektoren. Insbesondere ist die Formel dann zweckmäßig, wenn x und y als Funktionen eines Parameters t gegeben sind, $x = x(t)$, $y = y(t)$. Wird ein voller Umlauf des Randes der Fläche erreicht, wenn t von t_0 bis t_1 läuft, ist also $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$, dann ist die umlaufene Fläche

$$F = \frac{1}{2} \oint_{t_0}^{t_1} (x y' - y x') dt.$$

Wir sehen hier abermals, warum in Beispiel 138 (S. 112) gerade die doppelte Dreiecksfläche herauskommen mußte.

Eine beachtenswerte Eigenschaft der Parameterdarstellung möge zunächst ein Beispiel erläutern:

155. Schreiben wir für die Ellipse die Parametergleichungen $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, so wird die ganze Ellipse einmal in positivem Sinne umlaufen, wenn t von 0 bis 2π läuft. Daher wird die Ellipsenfläche

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t) dt$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

Man sieht also, daß bei der Parameterdarstellung keinerlei Schwierigkeiten wie auf S. 148 auftreten; es macht gar nichts aus, daß zu einem x zwei y gehören. Das ist der große grundsätzliche Vorteil der Parameterdarstellung von Kurven. Man sagt: Die mehrdeutige Funktion y von x wird durch die Einführung eines Parameters t „uniformisiert“, indem x und y beide als eindeutige Funktion von t ausgedrückt werden. Auch das nächste Beispiel lehrt dasselbe.

156. Für die Astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ist $x' = -3a \cos^2 t \sin t$, $y' = +3a \sin^2 t \cos t$, also wird

$$xy' - yx' = 3a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t)$$

$$= 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t;$$

daher ist

$$F = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2;$$

die Fläche der Astroide ist also $\frac{3}{8}$ der Fläche des Kreises, der durch ihre Spitzen geht.

§ 42. Quadratur in Polarkoordinaten.

Wir nehmen der Einfachheit halber zunächst an, daß die Fläche von der Kurve ohne Schleife berandet ist, daß der Anfangspunkt O im Inneren der Fläche liegt und daß die

Kurve durch die Gleichung $r = \varphi(\vartheta)$ mit eindeutigem stetigen φ gegeben ist. Wir zerlegen die Fläche durch Strahlen von O aus, deren Richtungen je um $\Delta\vartheta$ voneinander abweichen, und durch Kreise um O , deren Halbmesser je um $\Delta\rho$ wachsen — wobei die $\Delta\vartheta$ und ebenso die $\Delta\rho$ untereinander verschieden sein können. Dadurch wird die Fläche in Zellen zerlegt, deren eine in Fig. 51 gestrichelt ist. Der Inhalt einer solchen Zelle ist angenähert gleich $\rho\Delta\vartheta \cdot \Delta\rho = \rho\Delta\rho\Delta\vartheta$. Durch Addition aller dieser Ausdrücke erhalten wir demnach eine Annäherung an die ganze Fläche. Gehen wir nun in der üblichen Weise ¹⁾ zur Grenze über, indem wir alle $\Delta\vartheta \rightarrow 0$ und alle $\Delta\rho \rightarrow 0$ gehen lassen, so erhalten wir, wie wir nicht weiter beweisen, für die Fläche selbst das Doppelintegral ²⁾:

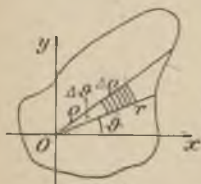


Fig. 51.

$$\iint_{00}^{2\pi r} \rho \, d\rho \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, d\vartheta.$$

Man deute $\frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ als angenäherten Inhalt eines schmalen Kurvensektors. Ferner verschaffe man sich die Formel auch durch Transformation von $\frac{1}{2} \int (x \, dy - y \, dx)$ auf Polarkoordinaten.

157. Die Lemniskate hat die Gleichung $r^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta$ (Fig. 52); sie hat die Eigenschaft, daß die Abstände r_1 und r_2 jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten, deren Entfernung $2a$ ist, das konstante Produkt a^2 haben; die Lemniskate gehört also zu den Cassinischen ³⁾ Kurven mit der Eigenschaft $r_1 r_2 = \text{konst.}$ ⁴⁾. Der

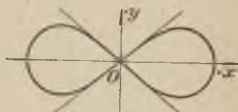


Fig. 52.

¹⁾ Man wird auch hier erst zwei Summen M und m herstellen usw.

²⁾ Vgl. auch S. 123.

³⁾ G. D. Cassini, 1625 . . . 1712.

⁴⁾ Welche Kurven sind durch $r_1 + r_2 = \text{konst.}$, $r_1 - r_2 = \text{konst.}$, $r_1 : r_2 = \text{konst.}$ gekennzeichnet?

Nullpunkt O ist die Mitte der beiden festen Punkte, deren Verbindungslinie die Polarachse $\vartheta = 0$ ist. Die Fläche eines Sektors der Lemniskate ist demnach

$$S = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 d\vartheta = a^2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos 2\vartheta d\vartheta = \frac{a^2}{2} (\sin 2\vartheta_2 - \sin 2\vartheta_1).$$

Die gesamte Fläche besteht aus zwei symmetrisch zu den rechtwinkligen Achsen gelegenen Teilen, deren Größe für $\vartheta_1 = -\frac{\pi}{4}$ und $\vartheta_2 = +\frac{\pi}{4}$ gefunden wird, demnach a^2 ist.

158. Für die Kardioide (Herzlinie) ist $r = 2a(1 + \cos \vartheta)$, Fig. 53, daher erhält man für den von der Achse aus genommenen Sektor

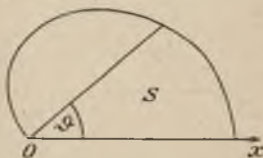


Fig. 53.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} 4a^2(1 + \cos \vartheta)^2 d\vartheta \\ &= 2a^2 \int_0^{\vartheta} (1 + 2\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta) d\vartheta \\ &= 3a^2 \vartheta + 4a^2 \sin \vartheta + a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Für $\vartheta = \pi$ erhält man die halbe Kardioidenfläche $\frac{1}{2}F$, daher ist $F = 6\pi a^2$.

§ 43. Die Länge einer Kurve.

Die Länge des Bogens einer Kurve bestimmen nennt man auch: den Bogen rektifizieren oder (zu einer Geraden) strecken. Schon Archimedes hatte den Kreisumfang dadurch angenähert berechnet, daß er die Umfänge von regelmäßigen In- und Umekken mit wachsender Seitenzahl als irrationale Vielfache des Radius darstellte und zeigte, daß man — wie wir heute sagen — hier zwei beschränkte

einsinnige Zahlenfolgen hat, eine steigende und eine fallende, mit gemeinsamem Grenzwert.

Inzwischen haben wir Hilfsmittel kennen gelernt, die Aufgabe allgemein zu lösen¹⁾.

Sei eine Kurve durch die Gleichung $y = f(x)$ gegeben, so fordern wir zunächst, daß $f(x)$ in $\langle a \dots b \rangle$ eine stetige Ableitung $f'(x)$ hat. Wir teilen nun die Strecke $b - a$ der x -Achse durch die Punkte $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ in n Teile $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Die Ordinaten dieser Punkte enden

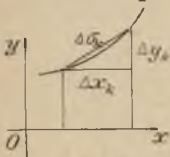


Fig. 54.

auf der Kurve in den Punkten $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_n = B$. Diese Punkte verbinden wir geradlinig, so daß der Sehnenzug $P_0 P_1 \dots P_n$ entsteht, der der Kurve eingezeichnet ist. Die (positiven oder negativen) Zuwüchse y heißen Δy ,

$y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$. Dann ist nach dem pythagoreischen²⁾ Lehrsatz für die Sehne $\Delta \sigma_k$ (Fig. 54)

$$\Delta \sigma_k^2 = \Delta x_k^2 + \Delta y_k^2.$$

Es wird demnach die Summe σ der Sehnen

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sum_1^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Wenn wir hier $n \rightarrow \infty$ gehen lassen, während alle $\Delta x \rightarrow 0$ konvergieren, so kann ein von der Einteilung x_k und von der Art des Grenzüberganges unabhängiger Grenzwert herauskommen. Ist dies der Fall, so definieren wir als Bogenlänge $\widehat{AB} = s$ diesen Grenzwert

$$s = \lim \sigma = \lim \sum_1^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Nun hatten wir angenommen, daß $f'(x)$ vorhanden und stetig in $\langle a \dots b \rangle$ sein sollte; daher ist nach dem Mittelwertsatz³⁾ der Differentialrechnung $\Delta y_k / \Delta x_k = f'(\xi_k)$, wo ξ_k

¹⁾ Vgl. auch Sammlung Götschen Bd. 87, Differentialrechnung, S. 158.

²⁾ Dies die richtige Schreibweise, nicht pythagoräisch!

³⁾ Sammlung Götschen Bd. 87.

einen Zwischenwert im Intervall Δx_k bedeutet, $x_{k-1} < \xi_k < x_k$. Macht man daher den oben erwähnten Grenzübergang, so geht die Summe in das bestimmte Integral über, man erhält also für die Bogenlänge

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

Wir haben mithin den Satz:

Jede Kurve $y = f(x)$ mit stetiger Ableitung $f'(x)$ ist streckbar; die Bogenlänge von $x = a$ bis $x = b$ ist durch die Formel (1) gegeben.

Wenn die Gleichung der Kurve in Parameterform $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben ist, so wird der Integrand $\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Man kann daher schreiben:

$$s(a, x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{t_a}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

wobei der Bogen s als einsinnig wachsende Funktion der oberen Grenze erscheint. Dadurch wird es möglich, den Bogen s als Parameter einer Kurve einzuführen. Das ist für die Kurventheorie meist die natürlichste Parameterwahl, die die einfachsten Formeln liefert. Ist $f(x)$ nicht überall stetig, sondern sindeine endliche Anzahl Sprungstellen vorhanden, hat also der Bogen Ecken, so muß man das Integral von Ecke zu Ecke in Teilintegrale zerlegen. Die Bogenlänge existiert auch für gewisse lediglich stetige, nicht differenzierbare Kurven „vonbeschränkter Variation“. Auf diese „pathologischen“ Fälle soll aber hier nicht eingegangen werden. (Vgl. Haupt-Aumann I, S. 102ff., II, S. 96ff).
Beispiele:

159. Die Astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ergibt für den im ersten Quadranten gelegenen Bogen

$$s = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{3}{2} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3}{2} a;$$

daher ist der gesamte Umfang der Astroide $6a$.

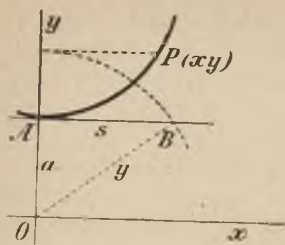


Fig. 55.

160. Die Kettenlinie hat die

$$\text{Gleichung } y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

$$\text{Es ist } y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

Demnach ist (Fig. 55) der Bogen vom tiefsten Punkte $A(x=0, y=a)$ bis zu einem Punkte $P(x, y)$

$$\begin{aligned} s(0, x) &= \frac{1}{2} \int_0^x (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) \\ &= \sqrt{y^2 - a^2} = AB; \end{aligned}$$

man kann also die Kettenlinie bequem und exakt auf der Tangente in A abwickeln. Man schreibe die Formeln auch mit Hyperbelfunktionen.

161. Die Zyклоide ist bestimmt durch die Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

daher hat man für die Länge eines vollen Bogens ($t=0$ bis $t=2\pi$)

$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a,$$

also ist s gleich dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises.

162. Für die Parabel $y^2 = 2px$ erhält man vom Scheitel bis zum Punkte $P(x, y)$ die Bogenlänge

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \left| \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \right|.$$

163. Die Kardioide $r = 2a(1 + \cos \vartheta)$ ergibt für die Bogenlänge

$$\begin{aligned} s(0, \vartheta) &= 2a \int_0^{\vartheta} \sqrt{2(1 + \cos \vartheta)} \, d\vartheta \\ &= 4a \int_0^{\frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta = 8a \sin \frac{\vartheta}{2} ; \end{aligned}$$

demnach ist der halbe Umfang ($\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$) $8a$, der ganze Umfang also $16a$.

164. Der Ellipsenumfang. Sind a und b die Halbachsen ($a > b$) und bezeichnet man mit ε die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$, so ist $x = a \cos t$ $y = b \sin t$ und ein Ellipsenbogen wird

$$s(0, t) = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \, dt = E\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2} - t\right).$$

Daher nennt man dieses Integral elliptisch (vgl. S. 76). Entwickelt man den Integranden nach dem binomischen Satze, so erhält man (wegen $0 \leq \varepsilon < 1$) eine bezüglich t gleichmäßig konvergierende Reihe, die also gliedweise integrierbar ist:

$$\begin{aligned} s(0, t) &= a \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \cos^4 t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \cos^6 t - \dots \right) dt \\ &= a \left\{ t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t \cos^2 t \, dt - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben früher (S. 51) Rückgriffsformeln abgeleitet; ebenso können die hier auftretenden Integrale durch t und trigonometrische Funktionen von t ausgedrückt werden.

Ist insbesondere $t = \frac{\pi}{2}$, so wird $s\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ der vierte Teil des Ellipsenumfangs, der ganze Umfang U ist demnach

$$U = 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \frac{(1 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 4)} \frac{\varepsilon^4}{3} - \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6)} \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots \right\}.$$

Näherungsformeln. Sind a und b wenig voneinander verschieden, so ist der Ellipsenumfang $U \approx \pi \left\{ \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right\}$; eine erstaunlich genaue Näherungsformel bei beliebigen Werten von a und b ist

$$U = \pi \left\{ 3 \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right\},$$

wie man durch Reihenentwicklung von $\frac{a+b}{2} = a \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2}$

und $\sqrt{ab} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ beweisen kann. Wir werden diese Formel später noch benutzen (S. 174).

Neunter Abschnitt. Anwendungen der Integralrechnung auf die Geometrie des Raumes.

§ 44. Der Rauminhalt von Körpern.

Vorbemerkung. Die allgemeine Theorie, die zur Berechnung des Rauminhaltes (Kubatur) und der Oberfläche (Komplanation) von beliebig begrenzten Körpern führt, erfordert eine eingehendere Betrachtung von mehrfachen Integralen; sie kann hier nicht gegeben werden¹⁾. Wir müssen uns zunächst mit dem begnügen, was früher über Doppelintegrale und dreifache Integrale gesagt ist. Später (§ 49) sollen einige allgemeine Bemerkungen folgen. Jetzt beschränken wir uns auf diejenigen einfachen Fälle, bei denen wir wesentlich mit den bisherigen Methoden auskommen.

¹⁾ Vgl. Haupt-Aumann III; dort findet man auch eine ausführliche Erörterung über den Begriff des Rauminhaltes, des Oberflächenmaßes usw.

Wir nehmen zunächst einen Körper (Raumteil) vor (Fig. 56), der von zwei parallelen Ebenen und einer gesetzmäßig gestalteten krummen Fläche (oder auch von ebenen Vielecken) begrenzt ist. Die eine Ebene sei die xy -Ebene; in ihr liege die Grundfläche, begrenzt von der geschlossenen Kurve $f(x, y, 0) = 0$; die obere parallele Ebene $z = h$ enthalte die Deckfläche, begrenzt von der geschlossenen Kurve $f(x, y, h) = 0$. Wir wählen auf der z -Achse die einsinnig steigenden Punkte



Fig. 56.

$z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = h$ und legen durch sie Ebenen parallel der xy -Ebene, die den Körper in geschlossenen Kurven mit den Flächeninhalten U_0, U_1, \dots, U_n treffen sollen und ihn dadurch in Scheiben zerschneiden. Die U_k wollen wir Querschnitte nennen. Zwischen zwei solchen aufeinanderfolgenden Querschnitten U_k und U_{k+1} können wir uns noch beliebig viele Querschnitte denken, unter denen ein größter und ein kleinster vorhanden ist; ihre Differenz nennen wir die Schwankung von U in dem Bereiche $\langle z_k \dots z_{k+1} \rangle$. Die weitere Entwicklung geht nun fast wörtlich so weiter, wie S. 14 bei der Erklärung des bestimmten Integrales; an Stelle von x und $y = f(x)$ treten hier z und U . Die genaue Durchführung kann daher dem Leser überlassen werden. Man erhält demnach unter analogen Bedingungen wie früher durch Grenzübergang das bestimmte Integral

$$V = \int_0^h U_z dz,$$

das den Rauminhalt V des Körpers definiert. Wir bemerken nur noch, daß die Ermittlung von U_z durch Integration oder auf elementarem Wege vorausgesetzt wird.

Beispiele:

165. Ein Pyramidenstumpf oder Kegelstumpf mit der Grundfläche G , der ihr parallelen Deckfläche g und der Höhe h ¹⁾ habe in der Höhe z den Querschnitt U_z . Verlängert man die Mantellinien, bis sie sich in der Spitze S des Kegels schneiden und bezeichnet man mit k den Abstand der Spitze S von der Deckfläche g , so folgt aus der Ähnlichkeit der genannten Flächen

$$g : U_z : G = k^2 : (k + h - z)^2 : (k + h)^2,$$

und hieraus durch leichte Rechnung

$$\sqrt{U_z} = \left(1 - \frac{z}{h}\right) \sqrt{G} + \frac{z}{h} \sqrt{g}.$$

Demnach wird der Rauminhalt nach einfacher Umrechnung

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h U_z dz = \frac{h}{3} (\sqrt{G} - \sqrt{g})^2 - h(G - \sqrt{Gg}) + Gh \\ &= \frac{h}{3} [G + \sqrt{Gg} + g] \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten elementaren Formel.

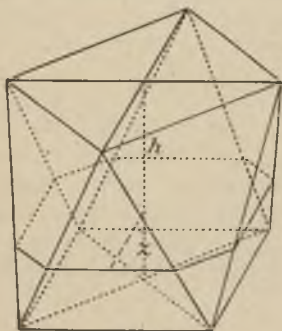


Fig. 57.

166. Ein Prismatoid habe als Grundfläche ein Quadrat mit der Seite a , als Deckfläche ein kongruentes Quadrat, dessen Seiten den Diagonalen des unteren Quadrates parallel sind. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate liegen im Abstände h senkrecht übereinander (Fig. 57).

¹⁾ Die Grundfläche des Kegels kann eine beliebige geschlossene Linie sein, sofern sie nur einen Flächeninhalt G bestimmt. Es werde ferner angenommen, daß sich die Mantelflächen nicht durchsetzen.

Die Seitenflächen sind Dreiecke, die sich nicht durchsetzen. Wir erhalten durch elementare Rechnung für den Querschnitt U_z in der Höhe z den Ausdruck

$$U_z = \frac{a^2}{h^2} [h^2 + 2z(h-z)(-1 + \sqrt{2})];$$

demnach wird das Volumen

$$V = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h [\dots] dz = \frac{a^2 h}{3} (2 + \sqrt{2}),$$

eine Formel, die sich, wenngleich nicht so bequem, auch elementarer ableiten läßt.

167. Ein Konoid habe als Grundfläche die Ellipse mit den Halbachsen a und b ; im Abstand h von der Grundfläche liegt die Leitlinie von der Länge $2a$ senkrecht über der großen Achse der Ellipse. Senkrecht zur Leitlinie gleitet an ihr und an der Ellipse eine Gerade, die das Konoid bildet. Der Querschnitt in der Höhe z ist eine Ellipse mit der Halbachse a und $\frac{b}{h}(h-z)$, ihre Fläche ist also $\frac{\pi ab}{h}(h-z)$, das Volumendes Konoids ist daher

$$\frac{\pi ab}{h} \int_0^h (h-z) dz = \frac{1}{2} \pi ab h.$$

168. Die Gleichung $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ stellt ein Paraboloid dar, das die xy -Ebene im Anfangspunkte berührt, die xz -Ebene in der Parabel $x^2 = \frac{a^2}{c}z$, die yz -Ebene in der Parabel $y^2 = \frac{b^2}{c}z$ schneidet. Ein Querschnitt im Abstand z von der xy -Ebene ist eine Ellipse mit dem Inhalt

$\pi \frac{ab}{c} z$. Daher ist der Rauminhalt des Paraboloids bis zum Querschnitt in der Höhe z

$$V_z = \frac{\pi ab}{c} \int_0^z z \, dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{ab}{c} \cdot z^2.$$

169. Das dreiachsige Ellipsoid mit der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0$ wird von einer Ebene im Abstand z parallel zur xy -Ebene in der Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2}$, $\frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2}$ geschnitten, ihre Fläche ist also $\frac{\pi ab}{c^2} (c^2 - z^2)$. Daher ist das Volumen des Ellipsoids

$$V = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^{+c} (c^2 - z^2) \, dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

170. Für das einmantelige Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ erhält man ebenso

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi ab}{c^2} \int_0^h (c^2 + z^2) \, dz = \frac{\pi ab}{c^2} \left(c^2 h + \frac{h^3}{3} \right) \\ &= \pi ab h \left(1 + \frac{h^2}{3c^2} \right) \end{aligned}$$

als Volumen für das Stück von der xy -Ebene bis zu einem Querschnitt im Abstände $z = h$.

§ 45. Kubatur von Rotationskörpern.

Dreht sich die Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse, so ist jeder Querschnitt senkrecht zur x -Achse ein Kreis mit dem Radius y und der Fläche $\pi y^2 = \pi (f(x))^2$. Der Rauminhalt

des Drehkörpers von $x = a$ bis $x = b$ ist also, wie nicht näher gezeigt wird, das bestimmte Integral

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (1)$$

171. Die Gerade $y = \frac{r}{h} x$ umhüllt bei der vollen Drehung um die x -Achse von $x=0$ bis $x=h$ einen Kegel des Inhaltes

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

172. Die Parabel $y = px^2$ erzeugt bei voller Drehung um die x -Achse einen Rotationskörper, der zwischen $x = 0$ und x den Inhalt

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^x p^2 x^4 dx \\ &= \frac{\pi}{5} p^2 x^5 = \frac{\pi}{5} xy^2 \end{aligned}$$

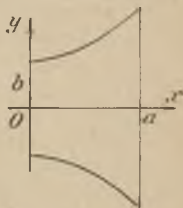


Fig. 58.

hat.

173. Die Parabel $y = px^2 + b$ erzeugt bei Rotation um die x -Achse von $x = 0$ bis $x = a$ einen düsenartigen Körper (Meridianschnitt Fig. 58); dessen Inhalt ist

$$V = \pi \int_0^a (px^2 + b)^2 dx = \pi a \left(\frac{p^2 a^4}{5} + \frac{2}{3} p a^2 b + b^2 \right).$$

174. Die Astroide $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} = 0$ erzeugt bei der Drehung um die x -Achse einen Körper, dessen Inhalt von $x = 0$ bis x gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^x (a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}})^2 dx \\ &= \pi x \left[a^2 - \frac{9}{5} \sqrt{a^4 x^2} + \frac{9}{7} \sqrt{a^2 x^4} - \frac{1}{3} x^2 \right]. \end{aligned}$$

Der Inhalt des ganzen, durch Drehung entstandenen Körpers ist demnach

$$2V_a = 2\pi a \cdot \frac{16}{105} a^2 = \frac{8}{35} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3,$$

also $\frac{8}{35}$ der Kugel, die durch die Spitzen geht.

175. Ein Zweig der Zykloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ umhüllt bei Drehung um die x -Achse einen olivenartigen Körper mit zwei Ecken.

Es ist $dx = a(1 - \cos t) dt$, daher ist

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^x y^2 dx = \pi a^3 \int_0^t (1 - \cos t)^3 dt \\ &= \pi a^3 \left| t - 3 \sin t + \frac{3}{2} (t + \sin t \cos t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \sin t \cos^2 t - \frac{2}{3} \sin t \right|_0^t. \end{aligned}$$

Das Volumen des ganzen Körpers ist demnach

$$V_{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

176. Die Kurve $y^2 = \frac{1}{1+x^2}$ von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ erzeugt bei der Drehung um die x -Achse einen sich beiderseits ins Unendliche erstreckenden Körper von endlichem Rauminhalt

$$V = 2\pi \int_0^\infty y^2 dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x]_0^\infty = \pi^2.$$

§ 46. Kubatur von zylindrisch begrenzten Raumteilen.

Gegeben sind die Kurven $y = f(x)$ in der xy -Ebene und $z = \varphi(x)$ in der xz -Ebene. Gesucht ist der Rauminhalt V , der von den Zylinderflächen durch $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$

und den beiden parallelen Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird (Fig. 59). Eine zur x -Achse senkrechte Ebene schneidet den Körper in einem Rechteck vom Inhalt $yz = f(x)\varphi(x)$. Der gesuchte Inhalt ist daher

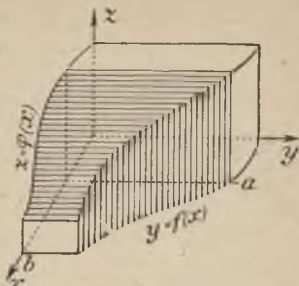


Fig. 59.

$$V = \int_a^b yz \, dx = \int_a^b f(x)\varphi(x) \, dx$$

unter der Voraussetzung, daß dieses Integral existiert.

Beispiele:

177. Es sei $y = \sqrt{2px}$, $z = a - x$, dann ist der Raumteil, den diese Flächen von $x = 0$ bis $x = a$ begrenzen:

$$V = \int_0^a yz \, dx = \int_0^a (a - x)\sqrt{2px} \, dx = \frac{4}{15} a^2 \sqrt{2pa}.$$

178. Den Raumteil zu berechnen, der von der Ebene $z = y \operatorname{tg} \alpha$, der Zylinderfläche $x^2 + y^2 = a^2$, der xz -Ebene und der yz -Ebene eingeschlossen wird (Fig. 60). Es ist

$$V = \int_0^a xz \, dy = \operatorname{tg} \alpha \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} \, dy = \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

179. Der Raumteil, der von den beiden Zylinderflächen $x^2 + y^2 = a^2$ und $y^2 + z^2 = a^2$ eingeschlossen wird (Fig. 61), ist bestimmt durch

$$V = 8 \int_0^a xz \, dy = 8 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2} \, dy = \frac{16}{3} a^3.$$

§ 47. Berechnung der Oberflächen von Rotationskörpern.

Wird die Kurve $y = f(x)$ um die x -Achse gedreht, so durchläuft irgendein Kurvenpunkt $P(x, y)$ einen Kreis, dessen Umfang $2\pi y$ ist. Das Linienelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

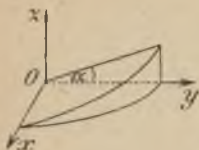


Fig. 60.

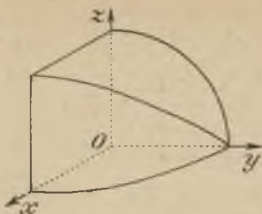


Fig. 61.

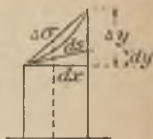


Fig. 62.

auf der Tangente im Punkte P überstreicht den Mantel eines Kegelstumpfes, dessen Oberfläche $2\pi(y + \frac{1}{2} dy) ds$ ist, die Sehne $\Delta\sigma = PP_1$ bestreicht die Oberfläche $2\pi(y + \frac{1}{2} \Delta y) \Delta\sigma$. (Fig. 62). Summiert man über eine Folge von Kurvenpunkten P, P_1, P_2, \dots , so erhält man die beiden Summen:

$$2\pi \Sigma (y + \frac{1}{2} dy) ds \quad \text{und} \quad 2\pi \Sigma (y + \frac{1}{2} \Delta y) \Delta\sigma;$$

läßt man nun alle Strecken dx nach Null gehen, so gehen jene beiden Summen nach demselben Grenzwert M :

$$M = 2\pi \int_{s_a}^{s_b} y ds.$$

Es muß ersichtlich dabei vorausgesetzt werden, daß $y = f(x)$ streckbar ist; s_a und s_b sind die zu $x = a$ und $x = b$ gehörenden Werte von s . Setzt man für ds seinen Wert $dx \sqrt{1 + y'^2}$ ein, so erhält man für den Mantel M der Drehfläche:

$$M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ist die Kurvengleichung durch Parameterdarstellung oder in Polarkoordinaten gegeben, so sind die entsprechenden Werte für y , ds , y' und dx einzusetzen.

Beispiele:

180. Berechnung einer Kugelzone. Die Kugel entstehe durch Drehung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ um die x -Achse.

Dann ist $y ds = a dx$, wie man leicht findet. Daher ist die Oberfläche der Zone von $x = 0$ bis $x = h$

$$2\pi \int_0^h a dx = 2\pi ah.$$

181. Für die Astroide $x = a \cos^3 t$ $y = a \sin^3 t$ ist $ds = 3a \sin t \cos t dt$, daher wird die gesamte Oberfläche O

$$O = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt;$$

setzt man $\sin t = u$, so wird $du = \cos t dt$, also kommt

$$O = 12\pi a^2 \int_0^1 u^4 du = \frac{12}{5} \pi a^2 = \frac{3}{5} \cdot 4\pi a^2,$$

d. h. $\frac{3}{5}$ der Kugeloberfläche, die durch die Spitzen geht.

182. Ein voller Bogen der Zykloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ bildet bei Drehung um die x -Achse die Oberfläche

$$O = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{16}{3} \cdot 4\pi a^2,$$

also ist diese Oberfläche $16/3$ der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius a .

183. Die Oberfläche des Rotationsellipsoids. Läßt man die Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a > b$ um die x -Achse rotieren, so erhält man das verlängerte Rotationsellipsoid; rotiert sie um die y -Achse, so entsteht das abgeplattete. Für die Oberfläche O_a gilt

$$O_a = 4\pi \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} y ds = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Setzt man $\varepsilon^2 = (a^2 - b^2) : a^2$, so kommt

$$O_a = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt.$$

Mit $\cos t = u$ wird

$$\begin{aligned} O_a &= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2} du \\ &= 4\pi ab \left[\frac{u}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon u \right]_0^1, \end{aligned}$$

also endlich

$$O_a = 2\pi ab \left(\frac{b}{a} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

Ähnlich ist

$$O_b = 4\pi \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} x ds = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 t} dt;$$

setzt man $\sin t = v$, so wird für $\varepsilon' = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

$$\begin{aligned} O_b &= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 + \varepsilon'^2 v^2} dv \\ &= 2\pi ab \left[v \sqrt{1 + \varepsilon'^2 v^2} + \frac{1}{\varepsilon'} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \varepsilon' v \right]_0^1 \end{aligned}$$

und

$$O_b = 2\pi ab \left[\frac{a}{b} + \frac{1}{\varepsilon'} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \varepsilon' \right].$$

§ 48. Berechnung von Zylinderflächen.

Ist $y = f(x)$ die Grundkurve eines auf der xy -Ebene stehenden geraden Zylinders, so stellt dieselbe Gleichung auch jeden Querschnitt parallel zur xy -Ebene dar; man

faßt demnach $y = f(x)$ zugleich als Gleichung des Zylinders auf; z kommt in der Gleichung nicht vor, ist also beliebig. Ebenso ist $z = \varphi(x)$ die Gleichung eines geraden Zylinders, der auf der xz -Ebene steht, dessen Mantellinien also der y -Achse parallel sind. Die beiden Zylinderflächen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ schneiden sich in einer Raumkurve. Es sollen die Flächenteile der beiden Zylinderflächen berechnet werden, die zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ und der Raumkurve liegen (Stirnfläche und Scheitelfläche, Fig. 59). Man erhält für die Bogenelemente der beiden Leitkurven unmittelbar $\sqrt{1 + y'^2} dx$ und $\sqrt{1 + z'^2} dx$; daher hat man für die Stirnfläche $O_{x,y}$ und für die Scheitelfläche $O_{x,z}$:

$$O_{x,y} = \int_a^b z \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^b \varphi(x) \sqrt{1 + f'^2} dx,$$

$$O_{x,z} = \int_a^b y \sqrt{1 + z'^2} dx = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \varphi'^2} dx,$$

falls diese Integrale existieren.

Ist an Stelle der Zylinderfläche $z = \varphi(x)$ die Fläche $z = F(x, y)$ gegeben, die von der Zylinderfläche $y = f(x)$ in einer Raumkurve geschnitten wird, so ist die Stirnfläche des außerdem von $x = a$ und $x = b$ begrenzten Körpers gegeben durch

$$O = \int_{x=a}^b z ds = \int_a^b F(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

wo $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ ist.

Beispiele:

184. Rauminhalt, Stirn- und Scheitelfläche eines Oktanten des gemeinsamen Teiles der beiden Zylinder $y^2 = ax - x^2$, $z^2 = 4ax$ zu berechnen.

$$\text{Inhalt } V = \int_{x=0}^a yz dx = 2 \int_0^a x \sqrt{a^2 - ax} dx = \frac{8}{15} a^3,$$

$$\text{Stirnfläche } O_{xy} = \int_{x=0}^a z ds = a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2,$$

$$\text{Scheitelfläche } O_{xz} = \int_{x=0}^a y ds = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

185. Durchdringung von Kreiszyylinder $y = \sqrt{ax - x^2}$ und Kugel $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

$$\text{Die Stirnfläche ist } O = \int_{x=0}^a z ds = \frac{a\sqrt{a}}{2} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = a^2.$$

§ 49. Ausblick.

Anhangsweise seien einige Bemerkungen über das allgemeine Problem¹⁾ der Volumen- und Oberflächenberechnung angefügt.

Sei $F(x, y, z) = 0$ in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung einer Fläche. Sie kann geschlossen sein, wie ein Ellipsoid; wenn nicht, so grenzen wir durch Parallelebenen zu den Koordinatenebenen oder auf andere Weise ein geschlossenes Raumstück ab. Dieses Raumstück füllen wir möglichst vollständig mit Quadern $\Delta x \Delta y \Delta z$ aus — die Kanten $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ können alle voneinander verschieden sein. Wenn nun die Summe dieser Quader $\sum \Delta x \Delta y \Delta z$ für $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ einem bestimmten Grenzwert zustrebt, so soll dieser Grenzwert das Volumen des Raumstückes heißen, und wir schreiben

$$V = \iiint dx dy dz.$$

Dieses Raumintegral, dessen Existenz an gewisse Eigenschaften der Funktion F gebunden ist, wird der Berechnung unter anderem zugänglich, wenn man es durch drei aufeinanderfolgende einfache Integrationen zurückführen kann.

¹⁾ Vgl. Haupt-Aumann III,

Zwei Beispiele zur Erläuterung:

186. Das Volumen des Ellipsoides $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$.

Wir wollen $\iiint dx dy dz$ erst nach z , dann nach y und zuletzt nach x integrieren, und zwar für einen Oktanten des Ellipsoids. Die Grenzen von z bei konstanten x

und y sind 0 und $+c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$; die Grenzen

für y bei konstantem x sind dann 0 und $+b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$,

die Grenzen für x sind endlich 0 und $+a$. So erhält man

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}} dz \\ &= 8c \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}. \end{aligned}$$

Setzt man hier $b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \alpha$, so ist zu berechnen

$$\frac{1}{b} \int_0^{\alpha} dy \sqrt{\alpha^2 - y^2} = \frac{\pi}{4} \frac{\alpha^2}{b}. \quad \text{Daher wird}$$

$$V = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Der Faktor $\frac{4}{3}\pi$ ist derselbe wie beim Kugelinhalt.

187. Zwei kongruente Kreiszyylinder durchdringen sich axial und rechtwinklig; wie groß ist das gemeinsame Stück?

Die Gleichungen der Zylinder sind $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} V &= \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \sqrt{a^2-y^2} \\ &= \int_0^a dy (a^2 - y^2) = \frac{2}{3} a^3; \end{aligned}$$

also ist $V = \frac{1}{3} a^3 = \frac{2}{3} \cdot (2a)^3$.

Würde man hier in anderer Reihenfolge integrieren:

$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz$, so wäre die Rechnung wesentlich unständlicher.

Eine zweite Möglichkeit der Berechnung eines Volumens läßt sich folgendermaßen skizzieren: Wir nehmen in der xy -Ebene eine von einer Kurve umschlossene Fläche Φ an. In jedem Punkte dieser Fläche und der Kurve errichten wir ein Lot $z = f(x, y)$; die Endpunkte dieser Lote bestimmen eine Fläche¹⁾. Es soll das Volumen des so definierten zylindrischen Körpers berechnet werden. Wir zerlegen die Fläche Φ etwa durch die zwei Geradenscharen $x = \alpha$, $y = \beta$, wo α im Bereiche $a_0 \dots a_1$, β im Bereiche $b_0 \dots b_1$ eine Folge von Zahlen durchläuft. Die so entstandenen Rechtecke mögen $\Delta\Phi$ heißen; über jedem $\Delta\Phi$ erhebt sich ein vierkantiges Prisma, in dessen Innern und auf dessen Rande die verschiedenen Ordinaten z stehen. Sei G die größte, g die kleinste Ordinate z eines solchen $\Delta\Phi$, dann hat man für das Volumen V des zylindrischen Raumes

$$\Sigma G \Delta\Phi > V > \Sigma g \Delta\Phi.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß die beiden Summen nach einem gemeinsamen Grenzwert V unabhängig von der Art der Zerlegung von Φ konvergieren, ist (Bew.!)

$$\lim \Sigma (G - g) \Delta\Phi = 0.$$

¹⁾ $f(x, y)$ möge in Φ stetig sein.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist $V = \lim \sum z \Delta\Phi$, wo z irgendeine Ordinate von $\Delta\Phi$ bedeutet. Dann ist also das Volumen

$$V = \iint z d\Phi.$$

In ähnlicher Weise kann man für die Berechnung einer krummen Oberfläche vorgehen. Wir zerlegen aber jetzt die Fläche Φ der xy -Ebene in Dreiecke $\Delta\Phi (= \frac{1}{2} \Delta x \Delta y)$. Senkrecht über den Eckpunkten eines Dreiecks liegen die Punkte der zu berechnenden Oberfläche O . Wir legen durch diese drei Punkte eine Ebene, die mit der xy -Ebene den Winkel α bilde. Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks ΔO dieser drei Punkte gegeben durch

$$\Delta O = \frac{\Delta\Phi}{\cos \alpha},$$

und es ist

$$\Sigma \Delta O = \Sigma \frac{\Delta\Phi}{\cos \alpha}.$$

Wenn wir zur Grenze übergehen, so läßt sich unter gewissen Bedingungen¹⁾ zeigen, daß

$$O = \iiint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d\Phi$$

ist. Die Quadratwurzel ist der Kehrwert von $\cos \tau$, wo τ den Winkel bedeutet, den die Tangentialebene eines Punktes von O mit der xy -Ebene bildet.

188. Wendet man dieses allgemeine Verfahren auf das dreiachsige Ellipsoid an, so kann man nach mehrfacher Einführung neuer Veränderlicher schließlich zeigen, daß die Berechnung der Oberfläche mit Hilfe der elliptischen Integrale $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ geleistet werden kann. Indessen kann man durch folgende Überlegung zu einer brauchbaren Annäherungsformel gelangen: Wir erinnern uns, daß die Kugeloberfläche $4\pi r^2 = 2\pi r \cdot 2r$, d. h. gleich dem Mantel eines geraden Kreiszyinders ist, der die Kugel längs eines

¹⁾ Vgl. Haupt-Aumann III, S. 147 ff.

Hauptkreises berührt und die Höhe $2r$ hat. Wir legen nun um das dreiaxige Ellipsoid drei Zylinder; der eine berührt das Ellipsoid längs der Ellipse mit den Halbachsen b und c und hat die Höhe $2a$. Seinen Mantel M_a berechnen wir angenähert mit der Formel von S. 158.

$$M_a \approx 2\pi a \left\{ 3 \frac{b+c}{2} - \sqrt{bc} \right\}.$$

Ebenso finden wir für die Mäntel der zwei anderen berührenden Zylinder

$$M_b \approx 2\pi b \left\{ 3 \frac{a+c}{2} - \sqrt{ac} \right\},$$

$$M_c \approx 2\pi c \left\{ 3 \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right\}.$$

Bilden wir das lineare Mittel $\frac{1}{3}(M_a + M_b + M_c)$, so ist zu vermuten, daß dadurch ein brauchbarer Annäherungswert für die Oberfläche O des Ellipsoids herauskommt. Wir setzen also

$$O \approx 2\pi [ab + ac + bc - \frac{1}{3} \sqrt{abc} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})].$$

Genauere Untersuchung zeigt, daß dieser Ausdruck in der Tat die Ellipsoidoberfläche mit einer Annäherung darstellt, die für viele praktische Zwecke ausreichend ist.

Setzt man in obiger Formel $a = b = c$, so kommt genau die Kugelfläche $4\pi a^2$ heraus; setzt man $c = 0$, so erhält man $2\pi ab$, d. h. die doppelte Fläche (Oberseite und Unterseite) der Ellipse mit den Halbachsen a und b .

§ 50. Die Bogenlänge von Raumkurven.

Eine Raumkurve kann als Schnittlinie oder als Teil einer Schnittlinie zweier Flächen betrachtet werden. Die erzeugenden Flächen können etwa Zylinderflächen sein, die auf den Koordinatenebenen senkrecht stehen; dann lauten die Gleichungen, die die Raumkurve bestimmen: $y = f(x)$, $z = g(x)$. Sind die Koordinaten eines Raumpunktes als Funktionen eines Parameters t ausgedrückt, so wird eine Raumkurve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (1)$$

dargestellt.

In genau derselben Weise, wie bei den ebenen Kurven, ist hier das Bogenelement

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt, \quad (2)$$

und durch dieselben Schlußweisen wie früher erhält man für die Bogenlänge s die Formel

$$s = \int_a^t \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2} dt = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx. \quad (3)$$

Beispiele:

189. Die Schraubenlinie $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$.

Man erhält $x' = -r \sin t$, $y' = r \cos t$, $z' = \frac{h}{2\pi}$, also

ist die Länge eines Ganges der Schraubenlinie

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2},$$

was man ja auch auf elementarem Wege durch Abwicklung des Zylinders und Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes finden kann.

190. Die Länge der Schnittkurve der beiden Flächen

$$y = \frac{2x^3}{3a^2}, \quad z = \frac{x^2}{a}$$

vom Ursprung bis zum Punkt $P(x, y, z)$ zu ermitteln.

Es ist $ds = \sqrt{1 + \frac{4x^4}{a^4} + \frac{4x^2}{a^2}} dx = \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right) dx$,

also wird

$$s = \int_0^x \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right) dx = x + \frac{2x^3}{3a^2} = x + y.$$



Namensverzeichnis.

Abel 87
 Archimedes 17, 54, 146
 Artin 103
 Aumann 4, 14, 57, 81, 83,
 122, 158, 170
 Barrow 27
 Bessel 131
 Bierens de Haan 103
 Brill 137
 Cassini 152
 Cauchy 55, 96, 97
 Cavalieri 54
 Deinostratos 54
 Dirichlet 56, 120, 144
 Emde 19
 Eratosthenes 54
 Eudoxos 54
 Euler 50, 55, 99
 Fejér 134
 Fermat 17, 54
 Fischer, P. B. 122
 Fourier 127
 Fresnel 104

Galilei 54, 90
 Galle 137
 Gauß 102, 127
 Gibbs 138
 Green 124
 Harnack 134
 Haupt 4, 14, 57, 81, 83,
 122, 158 170
 Hayashi 19
 Henrici 138
 Hippias 54
 Huygens 104
 Jahnke 19
 Kepler 9, 54
 Klein, F. 37, 134, 139
 Kowalewski 70
 Lagally 127
 Lagrange 137
 Láska 103
 Lebesgue 57
 Legendre 102
 Leibniz 13, 55, 69, 150
 Maclaurin 97
 Mader-Ott 137

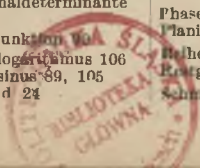
Mercator, Nicolaus 37
 Minding 107
 Newton 8, 27, 128
 Noether 137
 Parseval 134
 Pascal 17
 Poisson 123
 Riemann 15, 56, 98, 116,
 137
 Roberval 17
 Rothe, R. 98
 Runge 138
 v. Sanden 29
 Simpson 8
 Stirling 101
 Stokes 127
 Terebesi 137
 Torricelli 90
 Wallis 17, 53, 54
 Walther, A. 29, 127
 Weierstraß 80
 Willers, Fr. A. 9, 10, 29,
 138, 146

Sachverzeichnis (mit Ausnahme der Überschriften).

Amplitudenspektrum 142
 Arithmetisches Mittel 5
 Asymptotische Annähe-
 rung 102
 Bestimmtes Integral, De-
 finition 13
 Diskontinuierlicher Fak-
 tor 144
 Elliptische Integrale 76,
 88, 157
 Entropie 115
 Eulersche Konstante 99,
 106
 Fehlerintegral 103, 108,
 124
 Formanten 141
 Frequenz 140
 Fundamentalsatz 29
 Funktionaldeterminante
 122
 Gammafunktion 90
 Integrallogarithmus 106
 Integralsinus 89, 105
 Integrand 24

Integrationskonstante 25
 Integrationsweg 110
 Keplersche Faßregel 9, 147
 Konvergenz 79
 Kreisfrequenz 140
 Mittelwertsätze 20, 118
 Modul d. ell. Int. 76
 Näherungsformeln für El-
 lipse und Ellipsoid 158,
 174
 Natürlicher Logarithmus
 37
 Normierungsgleichungen
 49
 Oberschwingungen 141
 Orthogonalitätsgleichun-
 gen 49
 π 53
 Phasenverschiebung 140
 Planimeter 10
 Reihenentwicklung 18
 Restglied 43, 59
 Schmiegeparabeln 138

Schwankung 15, 116, 159
 Schwingungsdauer 140
 Sehnentrapezformel 7
 Sektorformel 150
 Simpsonsche Regel 8
 Sprungstellen 24, 56
 Stammkurve 30
 stückweise glatt 133
 Stufenkurve 11
 Tangententrapezformel 7
 Taylorsches Restglied 43,
 58
 Treppe 11
 Uniformisierung 151
 vollständiges Differential
 114
 Vollständigkeitsrelation
 134
 Vorzeichen einer Fläche
 20, 21
 Zetafunktion, Riemann-
 sche 98
 Zwickelabgleich 10



Mathematische und verwandte Literatur in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 85

a) AUS DER SAMMLUNG GÖSCHEN

- Geschichte der Mathematik.** Von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner. 2 Bände.
I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 196 Seiten. Neudruck 1939. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. Neudruck 1939. (Samml. Göschen Nr. 226, 875)
Geb. je RM. 1.62
- Fünfstellige Logarithmen.** Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Professor A. Adler. Zweite Aufl. Neudruck. 1942. 117 S. u. 1 Taf. (Samml. Göschen Bd. 423)
Geb. RM. 1.62
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt.** Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 181 Seiten. Neue, verbesserte Auflage. 1940. (Samml. Göschen Bd. 81) Geb. RM. 1.62
- Mathematische Formelsammlung.** Von Professor O. Th. Bürkli \dagger . Vollständig umgearbeitete Neuauflage von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 1939. (Sammlung Göschen Bd. 51) Geb. RM. 1.62
- Formelsammlung zur praktischen Mathematik.** Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 147 S. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62
- Mengenlehre.** Von Professor Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren. 160 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 999) Geb. RM. 1.62
- Arithmetik.** Von Studienrat Prof. Paul B. Fischer. Mit 19 Abbildungen. 152 Seiten. 1938. (Sammlung Göschen Bd. 47) Geb. RM. 1.62
- Elementare Algebra vom höheren Standpunkt.** Von Dr. Wolfgang Krull, o. Professor an der Universität Bonn. Mit 6 Zeichnungen. 143 Seiten. 1939. (Sammlung Göschen Bd. 930.) Geb. RM. 1.62
- Höhere Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.
I: Lineare Gleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931) Geb. RM. 1.62
II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 158 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zur höheren Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082) Geb. RM. 1.62
- Einführung in die Zahlentheorie.** Von Dr. Arnold Scholz, Dozent der Mathematik an der Universität Kiel. 136 Seiten. 1939. (Sammlung Göschen Band 1131) Geb. RM. 1.62
- Determinanten.** Von Studienrat Professor Paul B. Fischer. Dritte, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1932. (Samml. Göschen Bd. 402) Geb. RM. 1.62

- Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. B. in Dresden. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 95 Figuren und 200 Beispielen. 202 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . Geb. RM. 1.62
- Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. B. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 62 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1940. (Samml. Göschen Bd. 88) . . . Geb. RM. 1.62
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Von Professor Dr. A. Witting. Zweite, neubearb. Auflage. Mit 57 Figuren und 415 Beispielen und Aufgaben. 145 Seiten. 1942. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . Geb. RM. 1.62
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 32 Figuren und 309 Beispielen. 121 Seiten. 1942. (Samml. Göschen Bd. 147).
Geb. RM. 1.62
- Elementare Reihenlehre.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . Geb. RM. 1.62
- Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) . Geb. RM. 1.62
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. Dritte, neubearbeitete Auflage. 126 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 920)
Geb. RM. 1.62
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. Zweite, neubearbeitete Auflage. 1942. (Samml. Göschen Bd. 1003). Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. G. Hohelsel. 148 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1059) . . . Geb. RM. 1.62
- Integralgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hohelsel. 136 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 1099) . . . Geb. RM. 1.62
- Variationsrechnung I.** Von Dr. Lothar Koschmieder, o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 21 Fig. 128 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1074) . . . Geb. RM. 1.62
- Elemente der Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 1109.) . . . Geb. RM. 1.62
- Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 668) . . . Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Fünfte, neu bearbeitete Auflage. 130 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 703) . . . Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 186 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 877)
Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1942. (Samml. Göschen Bd. 878)
Geb. RM. 1.62

- Einführung in die konforme Abbildung.** Von Dr. Ludwig Bleiberbaeh, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Dritte Auflage. Mit 42 Zeichnungen. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 768). Geb. RM. 1.62
- Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 39 Figuren. Vierte Auflage, unveränderter Neudruck. 171 Seiten. 1940. (Samml. Göschen Bd. 99) Geb. RM. 1.62
- Analytische Geometrie der Ebene.** Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Dritte Auflage. Mit 60 Figuren. 164 Seiten 1942. (Samml. Göschen Bd. 65) Geb. RM. 1.62
- Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur Analytischen Geometrie der Ebene mit den vollständigen Lösungen.** Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Zweite, unveränd. Auflage. Mit 22 Figuren im Text. 139 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 356).
Geb. RM. 1.62
- Analytische Geometrie des Raumes.** Von Dr. Robert Haußner o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 36 Figuren im Text. 132 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 89) Geb. RM. 1.62
- Nichteuclidische Geometrie.** Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) . . Geb. RM. 1.62
- Algebraische Kurven.** Neue Bearbeitung von Prof. Dr. H. Wieleitner.
Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 435) Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. 123 Seiten. Neudruck 1939. (Samml. Göschen Bd. 436) Geb. RM. 1.62
- Projektive Geometrie.** Von Professor Dr. Karl Doehlemann. Neue einbändige Ausgabe von Dr. H. Timerding, Prof. an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 37 Figuren. 131 Seiten. 1937 (Samml. Göschen Bd. 72) Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie.** Von Dr. H. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 65 Figuren. 140 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1060). . . . Geb. RM. 1.62
- Differentialgeometrie I: Raumkurven und Anfänge der Flächentheorie.** Von Dr. Rudolf Rothe, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 32 Abbildungen. 132 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 1113) Geb. RM. 1.62
- Vektoranalysis.** Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Fünfte, erneut durchges. Auflage. 136 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 354) . Geb. RM. 1.62
- Darstellende Geometrie.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.
Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Fünfte, unveränderte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1940. (Samml. Göschen Bd. 142) Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Perspektiv ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 143) Geb. RM. 1.62
Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 65 Figuren im Text. 141 S. 1931. (Sammlung Göschen Bd. 144)
Geb. RM. 1.62

Darstellende Geometrie. Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kotierte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Professor für Mathematik an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1068) Geb. RM. 1.62

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Professor Wilhelm Weitbrecht. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1938. (Samml. Göschen Bd. 802) Geb. RM. 1.62

II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) Geb. RM. 1.62

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Böhm, Professor an der Universität München.

I. Elemente der Versicherungsrechnung. 2., vermehrte u. verbesserte Auflage. 144 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 180) Geb. RM. 1.62

II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917) Geb. RM. 1.62

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. I. Runge. Mit 71 Abbildungen. 149 Seit. 1931. (Samml. Göschen Bd. 728) Geb. RM. 1.62

Numerische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) Geb. RM. 1.62

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405). Geb. RM. 1.62

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) . . . Geb. RM. 1.62

Geodäsie (Landesvermessung u. Erdmessung). Von Prof. Dr. Gustav Förster. Mit 33 Figuren. 122 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 102) Geb. RM. 1.62

Vermessungskunde. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister.

I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 145 Figuren. Siebente Auflage. 165 Seiten. 1942. (Samml. Göschen Bd. 468). Geb. RM. 1.62

II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Fünfte Auflage. 151 Seiten. 1942 (Samml. Göschen Bd. 469). Geb. RM. 1.62

III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Topographie. Mit 63 Figuren. Vierte Auflage. 144 Seiten. 1942. (Samml. Göschen Bd. 862) Geb. RM. 1.62

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Baulingenieur und Studienrat an der Bau-gewerkschule in Erfurt. 2 Teile. 2. Auflage. Unverändert. Neudruck. 1940/41. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695). Geb. je RM. 1.62

- Statik.** I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Berlin. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) Geb. RM. 1.62
- Dynamik.** Von Prof. Dr. Wilhelm Müller. I: Dynamik des Einzelkörpers. Mit 70 Figuren. 160 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 902) Geb. RM. 1.62
 II: Dynamik von Körpersystemen. Mit 51 Figuren. 137 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 903) Geb. RM. 1.62
- Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) Geb. RM. 1.62
- Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Eßlin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) Geb. je RM. 1.62
- Einführung in die geometrische Optik.** Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) Geb. RM. 1.62
- Technische Tabellen und Formeln.** Von Prof. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 105 Figuren. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Neudruck. 151 Seiten. 1941. (Samml. Göschen Bd. 579) Geb. RM. 1.62

b) WEITERE LITERATUR

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von Helmut Hasse. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155 u. 156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumspannband I/II), Band 159—166 je RM. 36.—, Band 167 RM. 56.—, Band 168 RM. 36.—, Band 169 RM. 35.—, Band 170 RM. 35.—, Band 171—184 je RM. 30.—.

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben ab Band 51 von der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Jeder der neueren Jahrgänge umfaßt etwa 10 Hefte à 10 Druckbogen. Preis jedes Heftes RM. 18.—. Die Preise der früheren Jahrgänge werden auf Wunsch mitgeteilt.

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der Mathematik und ihrer wichtigsten Anwendungen. Auch die Geschichte und die Grundlagen der Mathematik finden sorgfältige Berücksichtigung.

Geschichte der Mathematik. II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. in Ganzleinen RM 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI 220 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64) Geb. in Ganzleinen RM. 9.50

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Oberstudiendirektor i. R., Berlin. Lexikon-Oktav.

- Band 1: Rechnen. VII, 222 Seiten. 8. Aufl., 1930.
RM. 12.—, geb. in Halbleinen RM. 13.20
- Band 2: Allgemeine Arithmetik IV, 266 Seiten. 8. Aufl., 1933.
RM 12.—, geb. in Halbleinen RM 13 20
- Band 3: Proportionen, Gleichungen IV 239 Seiten. 3., verbesserte u. vermehrte Aufl., 1937. RM 10 — geb. in Halbleinen RM. 11.—
- Band 4: Ebene Geometrie. 3., verbesserte und vermehrte Auflage, besorgt von Dr. Kurt Vogel IV, 316 Seiten. 1940
RM. 12.— geb. in Halbleinen RM. 13.—
- Band 5: I. Ebene Trigonometrie II Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 2. Aufl., 1923
RM. 7.50, geb. in Halbleinen RM. 8.50
- Band 6: Analysis. Analytische Geometrie IV 169 Seiten. 2. Aufl. 1924.
RM. 7.—, geb. in Halbleinen RM. 8.—
- Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse V 128 Seiten. 2. Aufl. 1924.
RM 6.50, geb. in Halbleinen RM. 7.50

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav 37 Seiten. 1923 RM. 0.80
Dasselbe in englischer Sprache. 1923 RM. 0.80

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format VI 500 Seiten. 1909 Geb. in Ganzleinen RM 20.—
Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben Geb. in Ganzleinen je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe, besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1938 Geb. in Halbleinen RM. 21.60
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor Geb. in Ganzleinen je RM 22.—

Rechen-Resultate. Tabellen zum Ablesen der Resultate von Multiplikationen und Divisionen bis $100 \times 1000 = 100\,000$ in Bruchteilen und ganzen Zahlen sowie für Rechnen mit Zahlen jeder Größe, Radizieren (Wurzelsuchen) nach vereinfachtem Verfahren. Von F. Triebel, Technischem Oberinspektor der Reichsdruckerei i. R. Sechste Auflage, 21.—25 Tausend. Mit Stellenregistern. 290 Seiten. (Technischer Verlag Herbert Cram, Berlin) Geb. in Halbleinen RM. 17.80

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 98 Seiten. 1912 Geb. in Ganzleinen RM. 7.—

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Professor Dr. F. August. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931.

Geb. in Halbleinen RM. 2.—

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Professor Dr. Max Zacharias und Dr. Paul Meth. Groß-Oktav. 43 Seiten. 1927.

Geb. in Ganzleinen RM. 1.50

Logarithmische Rechentafeln. Laboratoriums-Taschenbuch für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster † Neubearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. 51.—55. Auflage. Oktav. 278 Seiten. 1941.

Geb. in Halbleinen RM. 7.80

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1941.

RM. 9.—

Mathematische Mußstunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert, neubearbeitet von Professor Dr. F. Fitting, München-Gladbach. 8. u. 9. Auflage. Oktav. 260 Seiten. 1941.

Geb. in Ganzleinen RM. 4.80

Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. Georg Scheffers. Mit 438 Fig. Neunte Aufl. Lex.-Okt. VIII, 743 Seiten. 1941 Geb. in Halbleinen RM. 14.80

Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen, bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. 1933. Jeder Band ist einzeln käuflich. . . . Geb. in Ganzleinen je RM. 3.80

I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.

II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.

III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen. Differentialgeometrie. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik, insbesondere für Ingenieure und Naturforscher. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 40 Figuren. Groß-Oktav. 156 Seiten. 1938 Geb. in Ganzleinen RM. 5.—

Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. X, 197 Seiten. 1926. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6) RM. 9.—, geb. in Ganzleinen RM. 10.50

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8).

Geb. in Ganzleinen RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Figuren. VIII, 261 S. 1933. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9)

Geb. in Ganzleinen RM. 9.50

- Einführung in die Determinantentheorie** einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Dritte, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten 1925. RM. 14.—, geb. in Ganzleinen RM. 15.50
- Grundlehren der neueren Zahlentheorie.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Dritte, neu durchgesehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haußner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. XVI, 252 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8).
RM. 9.50, geb. in Ganzleinen RM. 10.50
- Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 276 Seiten. 1925. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4).
RM. 10.—, geb. in Ganzleinen RM. 12.—
- Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 RM. 2.50
- Irrationalzahlen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, durchges. Aufl. VIII, 199 Seiten. 1939 (Göschens Lehrbücherei Bd. 1) Geb. in Ganzleinen RM. 9.80
- Komplex-Symbolik, eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume.** Von Prof. Dr. Roland Weitzenböck. (Sammlung Schubert Band LVII.) Gr. 8°. VI, 191 S. 1908.
Geb. in Ganzleinen RM. 6.40
- Allgemeine Formen- und Invariantentheorie.** Von Prof. Dr. W. Franz Meyer. I. Band: Binäre Formen. (Sammlung Schubert Band XXXIII.) Gr. 8°. VIII, 376 S. 1909 Geb. in Ganzleinen RM. 11.70
- Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik.** Von Dr. Josef Lense, o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 80 Abbildungen. 178 Seiten. 1888. Geb. in Ganzleinen RM. 9.50
- Lehrbuch der Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. Heinrich Liebmann. Mit zahlreichen Figuren. VI, 226 Seiten. 1901 RM. 6.—
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, em. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Dritte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 195 Seiten. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10).
Geb. in Ganzleinen RM. 10.50
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, em. o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14)
RM. 11.—, geb. in Ganzleinen RM. 12.—
- Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung** nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto. 19. Auflage. Oktav. 214 Seiten. 1940. (Verlag von Alfred Töpelmann, Berlin W 85.) RM. 1.95
- Integralgleichungen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 18).
RM. 15.—, geb. in Ganzleinen RM. 16.50
- Differential- und Integralrechnung.** Unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse. Von Dr. Otto Haupt, Professor an der Universität Erlangen. Unter Mitarbeit von Dr. Georg Aumann, Professor an der Universität Frankfurt (Main). Groß-Oktav. 1938.
1. Band: Einführung in die reelle Analysis. Mit 2 Figuren. 196 Seiten.
Geb. in Ganzleinen RM. 11.20
2. Band: Differentialrechnung. 168 Seiten.
Geb. in Ganzleinen RM. 9.80
3. Band: Integralrechnung. 183 Seiten. Geb. in Ganzleinen RM. 10.60
(Göschens Lehrbücherei Band 24, 25, 26.)

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 RM. 6.—, geb. in Ganzleinen RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 RM. 9.—, geb. in Ganzleinen RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 RM. 14.—, geb. in Ganzleinen RM. 15.50

Elliptische Funktionen. Von Dr. B. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928 (Göschens Lehrbücherel Bd. 11) RM. 18.—, geb. in Ganzleinen RM. 14.50

Elliptische Funktionen. Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten. Neudruck 1930. (Samml. Schubert Bd. 30).

Geb. in Ganzleinen RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61)

Geb. in Ganzleinen RM. 7.80

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923 RM. 3.50, geb. in Ganzleinen RM. 4.—

Elemente der Stereometrie. Von Gustav Holzmüller. 4 Teile. Oktav.

1. Teil. Die Lehrsätze und Konstruktionen. Mit 282 Fig. X, 383 Seiten. 1900 RM. 6.—, geb. in Ganzleinen RM. 6.60

2. Teil. Die Berechnung einfach gestalteter Körper. Mit 156 Fig. und zahlr. Übungsbeispielen. XV, 477 S. 1900.

RM. 10.—, geb. in Ganzleinen RM. 10.80

3. Teil. Die Untersuchung und Konstruktion schwieriger Raumgebilde. Guldinsche Drehungskörper und Drehungsflächen mit ihren Verallgemeinerungen. Schraubenflächen, Röhrenflächen und ihre Verallgemeinerungen nebst ihren Inversionsverwandten. Krümmungslinien und isothermische Kurvenscharen auf diesen Flächen. Konforme Abbild. Mit 126 Fig. XII, 333 Seiten. 1902.

RM. 9.—, geb. in Ganzleinen RM. 9.80

4. Teil. Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen. Berechnung und stereometrische Darstellung von statischen, Trägheits- und Zentrifugal-Momenten homogener Raumgebilde. Simpsonsche Regel, verallgemeinerte Schichtenformel, gewisse Zuordnungen und konforme Abbildungen im Dienste solcher Bestimmungen. Nachtrag über das Katenoid, seine Krümmungsverhältnisse und sphärische Abbildung und über seinen Zusammenhang mit der Gaußschen Pseudosphäre und der Minimal-Schraubenregelfläche. Mit 89 Fig. XI, 311 S. 1902.

RM. 9.—, geb. in Ganzleinen RM. 9.80

Grundlagen der Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherel Bd. 17) RM. 6.50, geb. in Ganzleinen RM. 7.80

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2) Geb. in Halbleinen RM. 3.90

- Einführung in die analytische Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav VIII, 360 Seiten. 1929 . . . Geb. in Ganzleinen RM. 11.20
- Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16).
RM. 13.—, geb. in Ganzleinen RM. 14.50
- Analytische Geometrie auf der Kugel.** Von Dr. Richard Heger, Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Mit 4 Figuren. (Sammlung Schubert Bd. LIV.) Gr.-Oktav. VII, 152 S. 1908.
Geb. in Ganzleinen RM. 5.20
- Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. Alfred Lotze, Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13).
RM. 12.—, geb. in Ganzleinen RM. 13.—
- Kreis und Kugel.** Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X. 169 S. 1916.
RM. 4.40, geb. in Ganzleinen RM. 5.50
- Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Heinrich Liebmann. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 40 Fig. 150 S. 1923.
RM. 6.—, geb. in Ganzleinen RM. 7.—
- Liniengeometrie mit Anwendungen.** Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII. 280 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) Geb. in Ganzleinen RM. 18.—
II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51)
Geb. in Ganzleinen RM. 9.50
- Projektive Liniengeometrie.** Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 36 Abbild. Groß-Oktav. 194 Seiten. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 23) . Geb. in Ganzleinen RM. 9.—
- Geometrische Transformationen.** Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15).
RM. 13.—, geb. in Ganzleinen RM. 14.50
- Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 S. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 19).
RM. 15.50, geb. in Ganzleinen RM. 17.—
- Affine Differentialgeometrie.** Von Dr. Erich Salkowski, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Groß-Oktav. Mit 28 Figuren 200 Seiten. 1934. (Göschens Lehrbücherei Bd. 22). Geb. in Ganzleinen RM. 10.—
- Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Professor Dr. Georg Scheffers. I. Mit 107 Figuren Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923. RM. 13.—, geb. in Ganzleinen RM. 14.50
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI. 582 Seiten. 1922.
RM. 15.—, geb. in Ganzleinen RM. 16.50
- Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.** Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. V. Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. K. Kommerell in Tübingen. I: Krümmung der Raumkurven und Flächen. Vierte Auflage. Mit 38 Figuren. 205 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 20)
Geb. in Ganzleinen RM. 10.—
II: Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. Vierte Auflage. Mit 22 Figuren. 194 Seiten. 1931.
Geb. in Ganzleinen RM. 10.—

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, welfand Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat. Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vleiflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. Neudruck 1932 Geb. in Ganzleinen RM 18.90

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten. Mit 118 Figuren. Neudruck. 1932

Geb. in Ganzleinen RM. 8.55

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . Geb. in Ganzleinen RM. 12.—

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd 65).

Geb. in Ganzleinen RM. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd 66).

Geb. in Ganzleinen RM. 7.50

Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Von Dr. H. de Vries, Professor an der Universität zu Amsterdam. Mit 25 Figuren. Lex.-8° 178 S. 1905 RM. 3.—

Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. I. Bd. Von Professor E. Grimsehl. Mit 74 Fig. [Sammlung Schubert Bd. XXXVIII.] Gr. 8° VII, 219 S. 1905 Geb. in Ganzleinen RM 7.40

Methoden der praktischen Analysis. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 132 Figuren, 344 Seiten 1928. (Göschens Lehrbücher Bd. 12) RM. 20.—, geb. in Ganzleinen RM. 21.50

Wahrscheinlichkeitsrechnung für Nichtmathematiker. Von Dr. Karl Dörge, o. Professor an der Universität Köln, unter Mitwirkung von Hans Klein. Groß-Oktav. 113 Seiten. 1939 Geb. in Ganzleinen RM. 6.—

Flugtechnisches Handbuch. Unter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von Roland Eisenlohr.

4 Bände. I: Aerodynamik und Flugzeugbau. II: Flugzeugführung, Luftverkehr und Segelflug. III: Triebwerk und Sondergebiete des Flugwesens. IV: Flugwetterkunde, Ballone, Luftschiffe.

Jeder Band kart. RM. 7.50

Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Von Professor Dr. Harry Schmidt Mit 81 Figuren. VII, 258 Seiten, 1929 RM. 15.—, geb. in Pappe RM. 16.30

Photogrammetrie. Von Dr. Richard Finsterwalder, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 103 Abb. u. 17 Tab. 237 S. 1939. Geb. in Ganzleinen RM. 14.—

Ballistik. Von Theodor Vahlen. Zweite Auflage. Neubearbeitet und herausgegeben von Alfred Klose. Groß-Oktav. X, 267 Seiten. Mit 65 Abbildungen. 1942 Geb. in Halbleinen RM. 18.—

ALLE WISSENSGEBIETE

finden Sie vertreten in der Zeitschrift

GEISTIGE ARBEIT

Zeitung aus der wissenschaftlichen Welt

Die „Geistige Arbeit“ will nicht eine „Fachzeitschrift“ sein, sondern einen Querschnitt geben durch das wissenschaftliche und geistige Leben. Zu diesem Zweck bringt die Zeitschrift u. a. regelmäßige Berichte über Leistungen, Fortschritte und Probleme einzelner Gebiete der Wissenschaft, über die historische Entwicklung, den Stand und die Organisation in- und ausländischer Forschung, sie bringt biographische und historische Rückblicke und gibt eine Übersicht über die wichtigsten Neuerscheinungen durch zusammenhängende Besprechungen.

Die „Geistige Arbeit“ kostet jährlich RM. 6.—, vierteljährlich RM. 1.50, monatlich RM. —.50. Besser als alle Worte unterrichtet Sie eine Probenummer über Sinn und Ziele der Zeitschrift. Diese Probenummer stellen wir Ihnen auf Wunsch gern zur Verfügung.

WALTER DE GRUYTER & CO / BERLIN W 35

Erwin Lohr

Vektor- und Dyadenrechnung

Für Physiker und Techniker

Oktav. XV, 411 Seiten. Mit 34 Figuren im Text. 1939.

Gebunden in Ganzleinen RM. 18.—

Die Vektor- und Dyadenrechnung ist für den Physiker und Techniker von außerordentlicher Bedeutung. Für diese ist das Buch bestimmt. Es zeigt ihnen, daß und wie sie alle früheren Kenntnisse im Bereiche der Vektor- und Dyadenrechnung verwenden können und wie vorteilhaft das wirkliche Rechnen mit Vektoren, Dyaden und extensiven Gebilden noch höheren Ranges ist. Das Buch vermittelt zunächst eine ausreichende und tragfähige mathematische Grundlage des vorgetragenen Rechenverfahrens und bringt in einem besonderen Teil physikalische und technische Anwendungen aus allen Gebieten der theoretischen Physik. Damit nimmt das Buch in der neuen Sammlung „Arbeitsmethoden der modernen Naturwissenschaften“ einen besonderen Platz ein.

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35

Photogrammetrie

Von Dr. - Ing. Richard Finsterwalder

a. o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover

Mit 103 Abbildungen und 17 Tabellen

Groß-Oktav. 237 Seiten. 1939

Gebunden in Ganzleinen RM. 14.—

Dieses Buch gibt in lehrbuchartiger Form eine Einführung in das Gesamtgebiet der Photogrammetrie: der Erd- und besonders der Luftbildmessung, einschließlich der Entzerrung. Da es namentlich für Studierende der Hoch- und Fachschulen sowie die in der Praxis tätigen Vermessungsingenieure bestimmt ist, stellt es die Arbeitsverfahren und Instrumente sowie ihre geodätischen und topographischen Anwendungen in möglichst einfacher und klarer Form dar. Um für das Verständnis und die praktische Anwendung der neuen photogrammetrischen Methoden eine sichere Grundlage zu geben, wurden die geometrischen und mathematischen Ableitungen mitbehandelt, wobei überall eine leicht faßliche, wenig Vorkenntnisse voraussetzende Form gewählt ist. Das Ziel des Buches ist, den Leser über das in den letzten Jahren rasch entwickelte, mit neuartigen Hilfsmitteln arbeitende Verfahren der Photogrammetrie so zu unterrichten, daß er es zweckmäßig anzuwenden und den kommenden Entwicklungen auf diesem Gebiet, das heute noch nicht als abgeschlossen gelten kann, zu folgen vermag.

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35

Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung

Von

Dr. phil. Egon Hiedemann

a. o. Professor für Physik an der Universität Köln

Mit 232, z. T. noch unveröffentlichten Abbildungen und
einer Farbtafel

IX, 287 Seiten. 1939. Geb. in Ganzleinen RM. 24.—

Ein Buch, nach Inhalt und Anlage von gleicher
Bedeutung für Physiker, Chemiker, Biologen,
Mediziner und Techniker.

„... Es ist zu begrüßen, daß der Verfasser des vorliegenden Buches nunmehr den Versuch unternommen hat, über eine Berichterstattung hinausgehend eine systematische und kritische Darstellung der Ultraschallforschung sowie ihrer grundlegenden Gedanken vom Standpunkt des Physikers aus zu geben. Es kann wohl gesagt werden, daß dieser Versuch vollkommen gelungen ist. Der Verfasser gibt nicht nur eine kritische Darstellung der Verfahren und Ergebnisse der Ultraschallforschung, sondern führt den Leser auch an die noch offenen Probleme heran. Eine große Zahl guter Abbildungen erleichtert das Verständnis.“

Deutsche Bergwerks-Zeitung | Techn. Blätter v. 26. 11. 1939.

Ein ausführlicher Prospekt steht kostenlos zur Verfügung.

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35

Handbuch der neuzeitlichen Wehrwissenschaften

Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Gesellschaft für Wehrpolitik und Wehrwissenschaften und unter Mitarbeit zahlreicher Sachverständiger von
HERMANN FRANKE, Generalmajor a. V.

4 Bände. Lexikon-Oktav.

Bisher sind erschienen:

1. B a n d: Wehrpolitik und Kriegführung. Mit 81 farbigen und schwarzen Tafeln und 147 Skizzen im Text. XIII, 749 Seiten. 1936.

2. B a n d: Das Heer. XII, 804 Seiten. 1937.

Subskriptionspreis für Band 1 und 2 bei Bezug des Gesamtwerkes gebunden in Ganzleinen je RM. 32.—
bei Einzelbezug gebunden in Ganzleinen je RM. 36.—

3. B a n d: 1. Teil: Die Kriegsmarine. Mit 27 farbigen und schwarzen Tafeln und 113 Abbildungen bzw. Skizzen im Text. XII, 451 Seiten. 1938.

2. Teil: Die Luftwaffe. Mit 46 farbigen und schwarzen Tafeln und 105 Abbildungen bzw. Skizzen im Text. XII, 451 Seiten. 1938.

Subskriptionspreis für Band 3, 1. und 2. Teil bei Bezug des Gesamtwerkes geb. in Ganzleinen je RM. 27.—
bei Einzelbezug geb. in Ganzleinen je RM. 30.—

In Vorbereitung befindet sich:

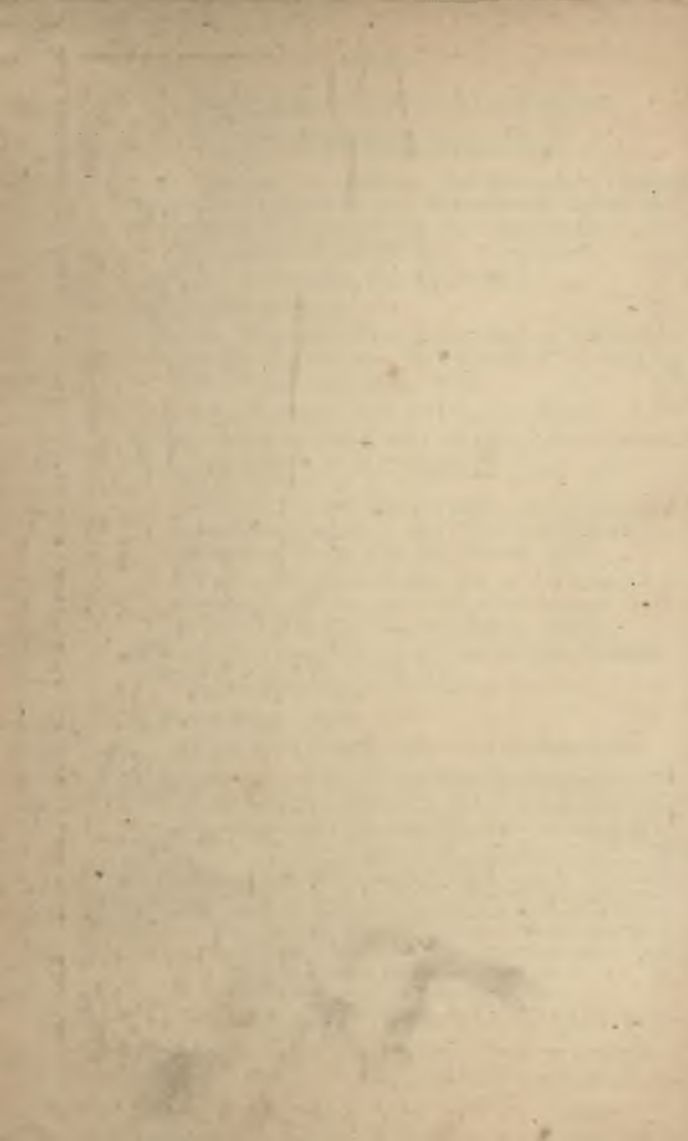
B a n d 4: Wehrwirtschaft und Wehrtechnik.

„... Insgesamt kann man von diesem ausgezeichneten, mit ungewöhnlichem Fleiß und Verständnis aufgebauten Nachschlagewerk, das alle Fragen der Wehrpolitik und Kriegführung beantwortet, nur wünschen, daß es die allerweiteste Verbreitung finden möge. Dankenswerterweise hat der Verlag eine ratenweise Bezahlung zugewilligt, so daß auch der junge Offizier und jeder kriegswissenschaftlich interessierte Leser sich das Werk beschaffen kann. Es ist dabei zu bemerken, daß der Band bei der Fülle des Inhalts, insbesondere in Ansehung der vielen kostspieligen Skizzen, als preiswert zu bezeichnen ist, da das Werk die Beschaffung vieler Bücher erübrigt.“

General d. Inf. Wetzell im Militär-Wochenblatt Nr. 37, 1936.

Das Werk wird durch Ergänzungshefte vor dem Veralten geschützt.

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 35



e. 4,50

18,72

BG Politechniki Śląskiej

nr inw.: 102 - 141170



Dyr.1 141170