ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: BUDOWNICTWO z. 104 Nr kol. 1695

Urszula KARASIŃSKA*
Politechnika Wrocławska

ANALIZA UTRATY STATECZNOŚCI OGÓLNEJ PRYZMATYCZNYCH BELEK STALOWYCH Z CIĄGŁYMI STĘŻENIAMI SPRĘŻYSTYMI

Streszczenie. Analizowano utratę stateczności ogólnej dla jednoprzęsłowych belek pryzmatycznych bi- oraz monosymetrycznych z ciągłymi stężeniami sprężystymi. Przytoczono jedne z pierwszych prób rozwiązania zagadnienia za pomocą równań różniczkowych oraz przedstawiono wzory, możliwe do praktycznego zastosowania, uzyskane metodą Rayleigha - Ritza. Wykonano obliczenia wartości momentów krytycznych inicjujących zwichrzenie belek o przekrojach dwuteowych podpartych widełkowo i stężonych podłużnie ciągłym tężnikiem sprężystym przy różnych schematach obciążenia.

THE ANALYSIS OF LATERAL BUCKLING OF STEAL PRISMATIC BEAM WITH THE CONTINOUS ELASTICAL BRACING

Summary. The problem of lateral buckling of simple- span prismatic beam with monosymmetric and bisymmetric cross- section has been analysed. The first attempt of solving this problem using the differential equations was quoted. The formulas obtained by aid of Rayleigh- Ritz method which can be used in practical, were presented too. There were calculated the critical moment initiating the lateral buckling of the beam with the simple support and with the continous elastical bracing.

1. Wprowadzenie

Belki stalowe są zwykle połączone z innymi elementami nośnymi nie tylko na końcach, ale także na swej długości. Elementami konstrukcyjnymi mogą być pomosty, skratowania, stężenia, elementy sufitów podwieszonych itd. Są one zazwyczaj umieszczane w płaszczyźnie mniejszej sztywności giętnej belki oraz najczęściej nie połączone w jej osi głównej. Elementy te spełniają swoje określone zadania konstrukcyjne, a jednocześnie ograniczają przemieszczenia liniowe przekrojów poprzecznych belki z płaszczyzny mniejszej sztywności.

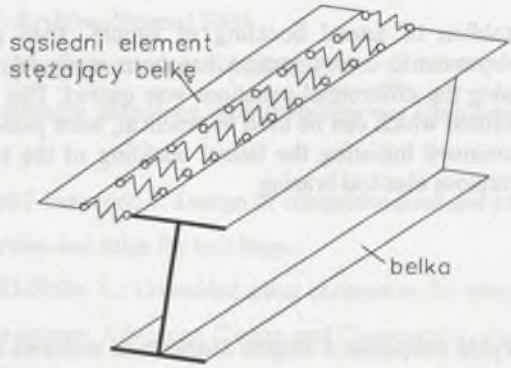
* Opiekun naukowy: Prof. dr inż. Roman Jankowiak

Mogą również ograniczać przemieszczenia kątowe w większym bądź mniejszym stopniu, zależnie od sposobu połączenia.

Problem rozwiązania stateczności ogólnej belki wraz z tężnikiem był podejmowany wielokrotnie, np.[1, 3, 4, 5, 8]. Najpełniej zagadnienie to zostało przedstawione w [4], gdzie analizowana jest nie tylko stateczność belek, ale przede wszystkim uogólniony przypadek, jakim jest pręt o stałym, monosymetrycznym przekroju otwartym, poddany ściskaniu i zginaniu w płaszczyźnie symetrii przekroju poprzecznego. Problemy stateczności sformułowano za pomocą dystrybucyjnych równań różniczkowych. Zastosowanie otrzymanych rozwiązań w praktyce inżynierskiej jest możliwe dzięki programom komputerowym, wykorzystującym np. MES.

Zagadnienie współpracy stężenia z belką przeciw utracie stateczności ogólnej ma z punktu widzenia projektowania duże znaczenie. Dąży się bowiem do minimalizacji ciężaru zasadniczych elementów nośnych konstrukcji, tak aby jednak spełnione były warunki stanu granicznego nośności oraz użytkowalności. Ograniczenie zjawiska zwichrzenia, np. przez wykorzystanie elementów pomostu, daje możliwość zmniejszenia wymiarów poprzecznych belki, a w konsekwencji jej ciężaru własnego.

Najwięcej analiz i rozważań przeprowadzono na przykładzie tężnika ciągłego, jakim jest stężenie wymuszające oś obrotu [1,5]. W projektowaniu belek z prostymi schematami obciążeń wpływ stężeń można uwzględnić wykorzystując wzory normowe [2, 6].



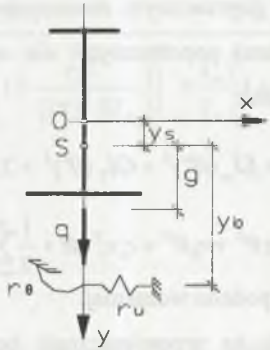
Rys. 1. Belka dwuteowa z ciągłym stężeniem sprężystym
Fig. 1. I-beam with a continuous elastical bracing

2. Momenty krytyczne belek ze stężeniami sprężystymi

Stężenia sprężyste (podatne) ciągłe ograniczają w pewnym stopniu przemieszczenia poziome przekrojów poprzecznych belki, a także ich obroty w zależności od wartości współczynników sprężystości liniowej ($0 < r_u < \infty$) oraz skręcania ($0 < r_\theta < \infty$).

Gdy wartość współczynnika sztywności liniowej tężnika r_θ dąży do nieskończoności, to występuje przypadek szczególny, jakim jest belka ze stężeniem wymuszającym oś obrotu. Przyjmuje się wtedy, że oś powstała z punktów połączenia stężenia z przekrojem poprzecznym belki nie doznaje przemieszczeń poziomych ($u_t = 0$).

Rysunek 2 przedstawia model współpracy belki monosymetrycznej z ciągłym tężnikiem podatnym, połączonym z przekrojem poprzecznym belki na wysokości równej y_b od środka ścinania i obciążonej siłą poprzeczną q zaczepioną w odległości g od środka ścinania.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny belki z zastępczymi więzami

Fig. 2. The cross-section of beam with substitutional constraints

W latach czterdziestych XX w. Własow [7] rozważył przypadek osiowo ściskanego pręta cienkościennego o przekroju otwartym, stężonego na długości. Sformułował równania różniczkowe problemu, które następnie uogólnił na pręty ściskane i zginane.

Dla pręta o przekroju pokazanym na rys. 2. równania różniczkowe przyjmą postać [7]:

$$EI_y u^{(4)} + P\left[u^{(2)} + y_s\varphi^{(2)}\right] + \left(M_x\varphi\right)^{(2)} + r_u\left[u - y_b\varphi\right] = 0 \tag{1}$$

$$\begin{gathered} EI_\omega\varphi^{(4)} + \left(Pi_s^2 - GI_T\right)\varphi^{(2)} - \left(r_x - 2y_s\right)\left[M_x\varphi^{(1)}\right]^{(1)} + \left(Py_s + M_x\right)u^{(2)} - r_u y_b \\ \left(u - y_b\varphi\right) + \left(q_y g + r_\theta\right)\varphi = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

gdzie:

E, G - moduły sprężystości podłużnej oraz poprzecznej,

I_Y, I_ω, I_T - momenty bezwładności względem osi y, wycinkowy i swobodnego skręcania,
P, M_x, q_y - siła podłużna, moment zginający oraz poprzeczne obciążenie równomiernie rozłożone,
y_s, y_b, g - współrzędne odpowiednio środka ścinania, położenia stężenia oraz obciążenia,
r_u, r_θ - współczynniki sprężystości liniowej i skrętnej stężenia,
u, φ - przemieszczenie środka przekroju względem osi x oraz kąt obrotu środka ścinania przekroju poprzecznego,
i_s - promień bezwładności względem środka ścinania,
r_x - ramię asymetrii przekroju poprzecznego.

Rozwiązanie układu równań w postaci ogólnej zamkniętej nie jest możliwe. Rozwiązania szczegółowe tego układu równań uzyskano [4] dla pręta widełkowo podpartego na obu końcach i obciążonego mimośrodowo $q_y = 0, M_x = -Py_s$.

W pracy [8] do oceny wpływu tężników na wartości momentów krytycznych belek z widełkowymi warunkami podparcia wykorzystano metodę Rayleigha-Ritza. Energia potencjalna belki o przekroju poprzecznym monosymetrycznym obciążonej momentami skupionymi na końcach i siłami poprzecznymi nie zaczepionymi w środkach ścinania przekroju poprzecznego ma postać:

$$\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[EI_y(u'')^2 + EI_\omega(\theta'')^2 + GI_T(\theta')^2 + 2M(z)\theta \cdot u'' - 2k_x M(z)(\theta')^2 + \\ + qg\theta^2 + r_\theta\theta^2 + r_u u_t^2\Big]dz + \frac{1}{2}\sum_{v=1}^{n} Q_v g_v \theta^2 \tag{3}$$

gdzie poszczególne oznaczenia podano wcześniej.

Stężenie sprężyste pozwala na przemieszczenie boczne punktów połączenia belki z tężnikiem. Wartość takiego przemieszczenia można opisać równaniem (4a)

$$u_t = u - y_b\theta \tag{4a}$$

Dla belki podpartej na końcach widełkowo funkcje, wykorzystane w wyrażeniu (3), które opisują warunki brzegowe, są postaci:

$$u = u_o \sin\frac{i\pi z}{L} \qquad \theta = \theta_o \sin\frac{i\pi z}{L} \tag{4b}$$

W pracy [8] przyjęto, że dla stężenia sprężystego najmniejszą wartość obciążenia krytycznego inicjującego zwichrzenie można określić dla osi ugiętej w kierunku osi x w kształcie kilku półfal i. Wyprowadzone wyrażenie w [8] na moment krytyczny dla belki ze stężeniem ciągłym sprężystym ma postać:

$$M_{cr} = \dot{Z}_1 \frac{(i\pi)^2 EI_y}{L^2} \left\{ (\dot{Z}_{2q} g + \dot{Z}_{2Q} g_v + \dot{Z}_3 k_x) \left(1 + \frac{r_u L^4}{(i\pi)^2 EI_y} \right) + \right.$$

$$+ \sqrt{\left[(\dot{Z}_{2q} g + \dot{Z}_{2Q} g_v + \dot{Z}_3 k_x) \left(1 + \frac{r_u L^4}{(i\pi)^2 EI_y} \right) \right]^2 + \frac{I_\omega}{I_y} \left[1 + \frac{GI_T L^2}{(i\pi)^2 EI_\omega} + \frac{r_\theta L^2}{(i\pi)^4 EI_\omega} + \frac{r_u y_b^2 L^2}{(i\pi)^4 EI_\omega} - \left(\frac{r_u L^4}{(i\pi)^2 EI_y} \right) \left(\frac{r_u y_b^2 L^4}{(i\pi)^4 EI_\omega} \right) \right]} \left. \right\} \tag{5}$$

gdzie:

$\dot{Z}_1, \dot{Z}_{2q}, \dot{Z}_{2Q}, \dot{Z}_3$ - wartości współczynników zależne od schematu obciążenia wyznaczone w [8].

Gdy stężenie umieszczone zostanie na wysokości środka ścinania przekroju poprzecznego belki, czyli gdy $y_b = 0$, to wyrażenie (5) uprości się do postaci:

$$M_{cr} = \dot{Z}_1 \frac{(i\pi)^2 EI_y}{L^2} \left\{ (\dot{Z}_{2q} g + \dot{Z}_{2Q} g_v + \dot{Z}_3 k_x) \left(1 + \frac{r_u L^4}{(i\pi)^2 EI_y} \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left[(\dot{Z}_{2q} g + \dot{Z}_{2Q} g_v + \dot{Z}_3 k_x) \left(1 + \frac{r_u L^4}{(i\pi)^2 EI_y} \right) \right]^2 + \frac{I_\omega}{I_y} \left[1 + \frac{GI_T L^2}{(i\pi)^2 EI_\omega} + \frac{r_\theta L^2}{(i\pi)^4 EI_\omega} \right]} \right\} \tag{6}$$

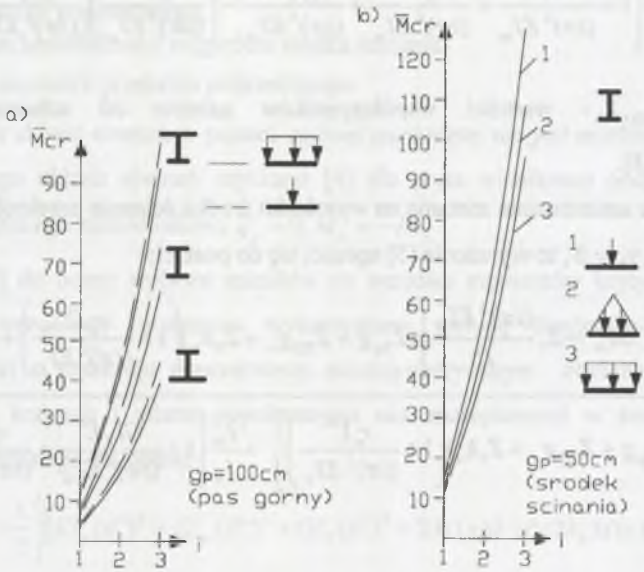
3. Przykłady obliczeniowe

Obliczenia wykonano dla belki ze stali St3S podpartej widełkowo na końcach ($\mu_y = \mu_\omega = 1{,}0$). Kolejne obciążenia przykładano do pasa górnego, środka ścinania i pasa dolnego. Zastosowano trzy rodzaje stężenia sprężystego ($r_u = 10\ kN/m$ i $r_\theta = 10\ kNm/m$; $r_u = 10\ kN/m$ i $r_\theta = 100\ kNm/m$; $r_u = 100\ kN/m$ i $r_\theta = 100\ kNm/m$) połączonego z belką na poziomie pasa dolnego.

Rysunek 3 obrazuje wpływ liczby półfal i na wartość momentu krytycznego przedstawionego w postaci bezwymiarowej $\overline{M}_{cr}$. Z analizy krzywych wynika, że wartość obciążenia krytycznego gwałtownie rośnie przy większej, niż jednej, półfali. Dla belki dwuteowej bisymetrycznej wzrasta ona ośmiokrotnie przy obciążeniu równomiernie rozłożonym, a przy sile skupionej działającej w środku rozpiętości dziesięciokrotnie dla $i = 3$. W przypadku belki o przekroju monosymetrycznym, gdy pole poprzeczne pasa ściskanego

(górnego) jest większe niż rozciąganego, krotności wynoszą odpowiednio 8,6 i 9,1. Natomiast gdy pole poprzeczne pasa rozciąganego jest większe, wtedy otrzymuje się krotności 11,5 przy obciążeniu równomiernie rozłożonym i 11,6 przy sile skupionej.

Z rysunku 3b wynika, że wartości momentów krytycznych belek ze stężeniami sprężystymi zależą od schematów obciążenia.



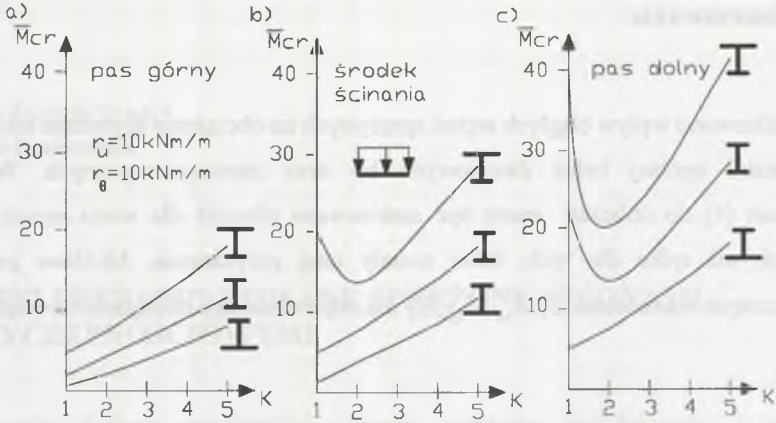
Rys. 3. Zależność bezwymiarowego momentu krytycznego od ilości półfal dla różnych przekroi poprzecznych belki z ciągłym stężeniem sprężystym ($r_u = 100\ kN/m, r_\theta = 100\ kNm/m$) oraz różnych obciążeń

Fig. 3. $M_{cr} - i$ curve for the beams with the different cross-section with the continous elastical bracing ($r_u = 100\ kN/m, r_\theta = 100\ kNm/m$), for the different loads

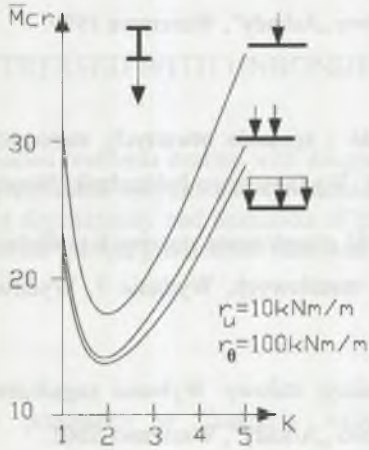
Na rysunku 4 przedstawiono wyniki analizy belki z tężnikami podatnymi obciążonej równomiernie na całej długości poprzez pas górny, środek ścinania oraz pas dolny. Przyjęto trzy przekroje poprzeczne belki dwuteowej połączone ze stężeniem każdorazowo poprzez pas dolny ze zmiennym parametrem K, który wyznaczono według poniższego wzoru:

$$K = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_\omega}{GI_T L^2}} \tag{7}$$

Zauważyć można, że następuje wzrost momentu krytycznego, gdy obciążenie jest przyłożone do pasa dolnego w stosunku do przypadku, gdy obciążenie to jest przekazywane na pas górny. Zależność ta dotyczy wszystkich analizowanych przekroi belek, niezależnie od zastosowanego stężenia i obciążenia.



Rys. 4. Krzywe – bezwymiarowy moment krytyczny-parametr K dla belek bi- i monosymetrycznych
Fig. 4. Critical moment- parameter K curve of the beams with bi- and monosymetrical cross-section



Rys. 5. Krzywe – moment krytyczny-parametr K dla belki bisymetrycznej
Fig. 5. Critical moment - parameter K curve of the I-beam

Na rysunku 5 pokazano krzywe, obrazujące zmiany wartości momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej dwuteowej ze stężeniem o wartościach $r_u = 10\ kN/m$ i $r_\theta = 100\ kNm/m$ Przyjęte do obliczeń obciążenie, w postaci równomiernie rozłożonego, siły skupionej w środku rozpiętości belki oraz dwóch sił- każda w odległości 1/3 od końca belki, działa w środku ścinania przekroju poprzecznego. Największe wartości momentów krytycznych występują, gdy belka jest obciążona równomiernie na długości, a najmniejsze przy obciążeniu siłą skupioną położoną w środku rozpiętości.

4. Podsumowanie

Analizowano wpływ ciągłych stężeń sprężystych na obciążenie krytyczne inicjujące utratę stateczności ogólnej belek dwuteowych bi- oraz monosymetrycznych. Wykorzystane wyrażenie (4) do obliczeń może być zastosowane również dla wielu innych schematów obciążeń, niż tylko dla tych, które zostały tutaj przytoczone. Możliwe jest to dzięki wyznaczonym wartościom $\dot{Z}_1, \dot{Z}_{2q}, \dot{Z}_{2Q}, \dot{Z}_3$ dla odpowiedniego obciążenia zewnętrznego.

LITERATURA

1. Bródka J., Garncarek R., Miłaczewski K.: Blachy fałdowe w budownictwie stalowym, Wydanie 1, Wydawnictwo „Arkady", Warszawa 1999.
2. DIN 18800-2.
3. Gosowski B.: Skręcanie i zginanie otwartych, stężonych elementów konstrukcyjnych metalowych, Wydanie 1, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.
4. Gosowski B.: Stateczność przestrzenna stężonych podłużnie i poprzecznie pełnościennych elementów konstrukcji metalowych, Wydanie 1, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992.
5. Pałkowski Sz.: Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania, Wydanie 1, Wydawnictwo „Arkady", Warszawa 2001.
6. PN-90/B-03200 Konstrukcje stalowe. Obliczenia i projektowanie. Wydanie 2 poprawione.
7. Własow V. Z.: Tonkostennye uprugie sterzni. Wydanie 1, Moskwa 1959.
8. Żmuda J.: Problemy niestateczności w projektowaniu dźwigarów stalowych, Wydanie 1, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole 2004.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Szymon Pałkowski