ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1990

Seria: GÓRNICTWO z. 175 Nr kol. 986

Mirosław CHUDEK
Stanisław OLEKSY

WYMIAROWANIE OBUDOWY SZYBIKA ELIPTYCZNEGO

Streszczenie. Na drodze rozważań teoretycznych przedstawiono sposób określania grubości obudowy szybika eliptycznego. Przeanalizowano rozwiązanie dla równomiernego obciążenia zewnętrznego, przyjmując dla szybika na danej głębokości model pierścienia eliptycznego o prostokątnym przekroju poprzecznym. Z punktu widzenia statyki w rozpatrywanym przypadku pierścień eliptyczny zamknięty jest układem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym.

Jedną niewiadomą, którą był moment zginający, wyznaczono metodą sił. Po wyznaczeniu pozostałych wielkości nadliczbowych, tj. sił podłużnych i poprzecznych z równań rzutów, sporządzono wykres przebiegu momentów gnących w obudowie szybika. Wynika z niego, że moment gnący exstremalne wartości przyjmuje w przekrojach leżących na osiach elipsy. Wartości sił wewnętrznych, tj. momentów gnących i sił podłużnych w tych przekrojach, stanowią podstawę do sformułowania odpowiedniego warunku bezpieczeństwa, miarodajnego przy wymiarowaniu obudowy.

Wprowadzenie

Zagadnienie obliczania (wymiarowania) obudowy szybowej o kształcie eliptycznym stawia przed projektantami wiele istotnych problemów. Jest to związane z faktem, że prawie wyłącznie stosowane są w praktyce szyby i szybkiki o kształcie okrągłym, których wymiarowanie zostało przedstawione w różnych pracach [1, 2, 3, 7, 8]. Stosowanie szybów o kształcie okrągłym jest podyktowane tym, że jest to kształt racjonalny dla zewnętrznego równomiernego obciążenia obudowy.

W praktyce zachodzi czasami potrzeba budowy szybika o innym kształcie, np. eliptycznym. Z określeniem grubości obudowy szybika eliptycznego związane są następujące zagadnienia:

- ustalenie jego obciążenia,
- wyznaczenie przebiegu sił wewnętrznych w obudowie dla przyjętej konfiguracji jej obciążenia,
- określenie przekroju niebezpiecznych, w których wartości sił wewnętrznych stanowić będą podstawę do ustalenia grubości obudowy.

Przedstawimy pokrótce wyżej wymienione problemy.

Ustalenie obciążenia obudowy szybika

Przy ustalaniu obciążenia obudowy szybika oparto się na rozwiązaniach dotyczących parcia gruntu na ściany oporowe. Parcie gruntu na ściany oporowe może znajdować się jedynie między wartościami granicznymi, tj. parcie czynne (aktywne) i bierne [6]. Przyjmujemy, że obudowa szybika obciążana jest parciem czynnym, które wynosi:

$$p_n = p_{zn} \cdot tg^2(45 - \frac{\varphi_n}{2}) - 2c_n tg(45^o - \frac{\varphi}{2}) \tag{1}$$

przyjmując

$$A_n = tg^2(45^o - \frac{\varphi}{2}),$$

otrzymuje się

$$p_n = p_{zn}A_n - 2c_n\sqrt{A_n} \tag{1a}$$

gdzie:

p_n - ciśnienie boczne gruntu w n-tej warstwie,

p_{zn} - ciśnienie pionowe gruntu na głębokości n-tej warstwy od powierzchni, $p_{zn} = h_1 \cdot \gamma_1 + h_2 \cdot \gamma_2 + \ldots + h_n \cdot \gamma_n$,

A_n - współczynnik rozporu bocznego dla n-tej warstwy,

γ_n - ciężar objętościowy gruntu w n-tej warstwie,

φ_n - kąt tarcia wewnętrznego gruntu w n-tej warstwie,

c_n - spójność (kohezja) gruntu w n-tej warstwie.

W przypadku występowania poza ścianą oporową wody gruntowej w gruntach sypkich przyjmuje się poniżej zwierciadło wody zamiast γ ciężar objętościowy gruntu pod wodą γ', zaś ciśnienie wody obliczyć według zależności:

$$p_w = \gamma_w \cdot h_w \tag{2}$$

gdzie:

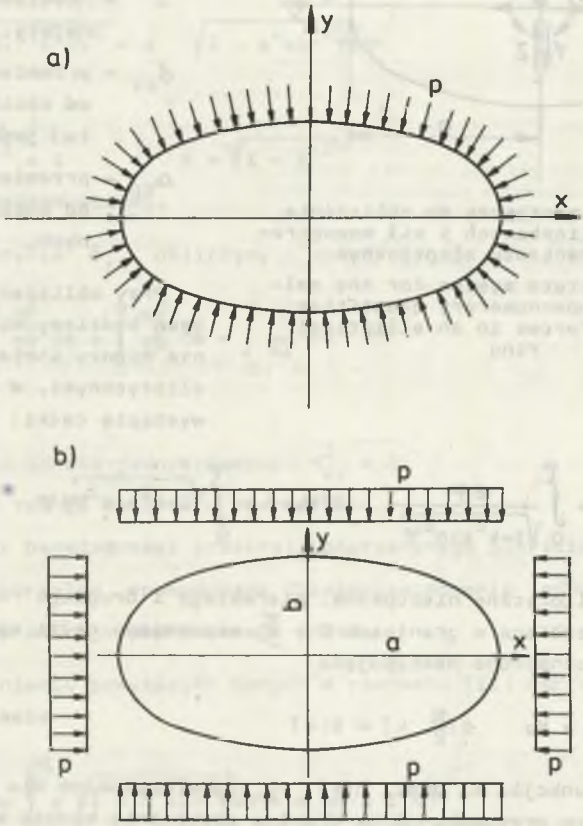
h_w - wysokość słupa piezometrycznego wody w rozpatrywanym punkcie na ścianie oporowej.

W przypadku równomiernego obciążenia ciągłego q naziomu, wartość jednostkowego parcia czynnego wzrasta w każdej warstwie o $q\,A_{ni}$, a wzór (1) przyjmuje postać:

$$p_1 = (p_{zn} + q) \cdot A_n - 2c_n\sqrt{A_n} \tag{3}$$

Wyznaczenie sił wewnętrznych w obudowie szybika

Dla rozważań z obudowy szybika wyodrębniamy pierścień o jednostkowej wysokości. W tym przypadku z punktu widzenia statyki obudowa szybika stanowi pierścień eliptyczny zamknięty znajdujący się pod działaniem zrównoważonego obciążenia zewnętrznego, które przyjmuje się, że jest ciągłe, równomiernie rozłożone i skierowane prostopadle do jego powierzchni (rys. 1a). Obciążenie to zastępujemy równoważnym mu obciążeniem równomiernym względem dwóch jego osi (rys. 1b).



Rys. 1. Schemat obciążenia obudowy szybika
Fig. 1. Diagram of the loading of a small shaft lining

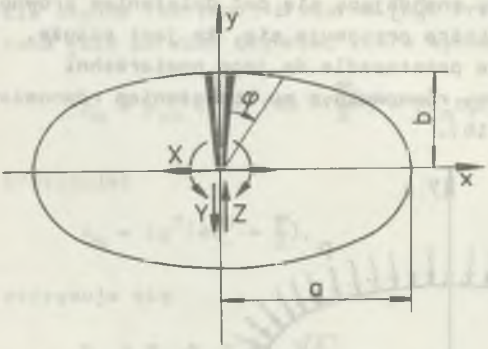
W rozpatrywanym przypadku symetrii układu i obciążenia względem dwóch osi, pierścień jest układem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym. Siły poprzeczne w przekrojach pokrywających się z osiami symetrii są równe zeru, a siły podłużne w tych przekrojach oblicza się z równań rzutów na oś symetrii sił działających na połowę pierścienia [5].

Jedną niewiadomą, którą jest moment zginający, wyznaczamy z równania (4) rozpatrując układ zastępczy przedstawiony na rys. 2, w którym biegun sprężysty jest w miejscu przecięcia osi elipsy

$$\delta_{zz} Z + \Delta_{zp} = 0 \qquad Z = -\frac{\Delta_{zp}}{\delta_{zz}} \tag{4}$$

gdzie:

- Z - niewiadomy moment zginający,
- δ_{zz} - przemieszczenie (obrót) od obciążenia (momentu) jednostkowego,
- Δ_{zp} - przemieszczenie (obrót) od obciążeń zewnętrznych.



Rys. 2. Układ zastępczy do obliczenia wielkości nadliczbowych i sił wewnętrznych w pierścieniu eliptycznym

Fig. 2. Substitute system for the calculation of supernumerary quantities and internal forces in an elliptical ring

Przy obliczaniu przemieszczeń będziemy mieli do czynienia między innymi z całkami eliptycznymi. W szczególności wystąpią całki:

$$F(\varphi,k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad E(\varphi,k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \tag{5}$$

Są to całki eliptyczne niezupełne, pierwszego i drugiego rodzaju. Jeżeli całkowanie przebiega w granicach $0 - \frac{\pi}{2}$, wspomniane całki nazywają się zupełnymi i są oznaczone następująco:

$$F(\tfrac{\pi}{2}, k) = K; \qquad E(\tfrac{\pi}{2}, k) = E(k) \tag{6}$$

Wartości funkcji K oraz $E(k)$ są stabelaryzowane dla φ od 0 do $\frac{\pi}{2}$ [4]. W rozpatrywanym przypadku górna granica całkowania będzie większa niż $\frac{\pi}{2}$, dlatego w celu korzystania z tablic niezbędna jest znajomość następujących związków

$$\begin{aligned} F(n\pi \pm \varphi, k) &= 2nK \pm F(\varphi,k) \\ E(n\pi \pm \varphi, k) &= 2nE(k) \pm E(\varphi,k) \end{aligned} \tag{7}$$

Po tych wstępnych wyjaśnieniach przystępujemy do obliczania przemieszczeń $-\delta_{zz}$ i Δ_{zp}.

Równanie elipsy (rys. 2) ma postać:

$$y = k'\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad k' = \frac{b}{a} \tag{8}$$

Wprowadzamy współrzędne biegunowe (eliptyczne):

$$\begin{aligned} x &= a \sin\varphi \qquad & dx &= a \cos\varphi d\varphi \\ y &= k' a \cos\varphi \qquad & dy &= -k' a \sin\varphi d\varphi \end{aligned} \tag{9}$$

W związku z tym pomocnicza wielkość jaką jest ds - długość elementu łuku elipsy wyniesie:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} d\varphi \tag{10}$$

gdzie:

$$k^2 + k'^2 = 1 \qquad k = \sqrt{1 - k'^2}$$

k - mimośród elipsy.

Przemieszczenie δ_{zz} obliczymy z uproszczonego wzoru Maxwella i Mohra

$$\delta_{zz} = \int_0^s \frac{M_z^2}{EI} ds = \int_0^s \frac{N_z^2}{EF} ds = \int_0^s \frac{M_z^2}{EI} ds \tag{11}$$

gdzie:

M_z - moment od sił jednostkowych $M_{zz}^2 = 1$,

E - moduł Younga materiału pierścienia,

I - moment bezwładności przekroju poprzecznego pierścienia,

N_z - siła normalna spowodowana działaniem momentu jednostkowego $N_z = 0$,

F - pole przekroju poprzecznego pręta.

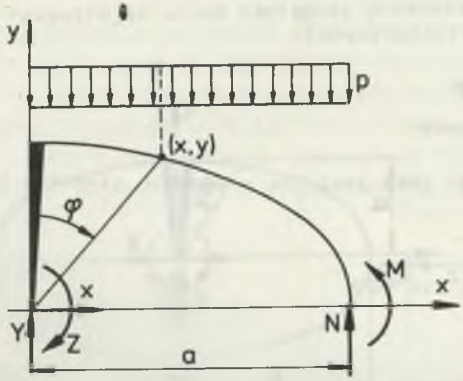
Po uwzględnieniu powyższych danych w równaniu (11) wartość współczynnika δ_{zz} wyniesie

$$\delta_{zz} = \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} d\varphi = 4 \frac{1}{EI} a E(k) \tag{12}$$

Przy obliczaniu przemieszczeń od obciążeń zewnętrznych skorzystamy z zasady superpozycji, rozpatrując oddzielenie działanie obciążenia p na półosie a i b elipsy pierścienia. Wtedy

$$\Delta_{zp} = \Delta_{zp}^a + \Delta_{zp}^b \tag{13}$$

W oznaczeniach powyższych wskaźnik "a" u góry symbolu współczynnika oznacza, że jest to przemieszczenie spowodowane obciążeniem ⊥ od osi a, a wskaźnik "b" obciążeniem ⊥ do osi b. Bierzemy pod uwagę fragment pierścienia przedstawiony na rys. 3. Moment zginający od obciążenia zewnętrznego wyrazi się związkiem



Rys. 3. Schemat do obliczania przemieszczeń spowodowanych obciążeniem prostopadłym do osi a

Fig. 3. Diagram for the calculation of the displacements caused by the load perpendicular to axis a

$$M_p^a = -\frac{px^2}{2} \tag{14}$$

$$x = a \cdot \sin\varphi$$

stąd

$$M_p^a = -\frac{1}{2}\, pa^2 \sin^2\varphi$$

Przemieszczenie Δ_{zp}^a będzie miało następującą wartość

$$\Delta_{zp}^a = \int_0^s \frac{M_p^a M_z}{EI}\, ds = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\, pa^2 \sin^2\varphi\, a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{EI}\, pa^3 \left[-\frac{1}{3}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2k^2-1}{3k^2}\, E(\varphi,k) + \right.$$

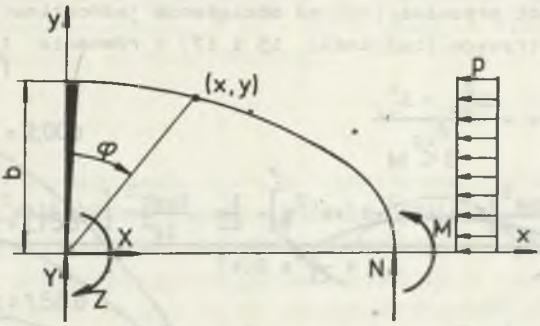
$$\left. + \frac{k'^2}{3k^2}\, F(\varphi,k) \right]_0^{\pi}$$

$$\Delta_{zp}^a = -\frac{1}{EI}\, \frac{2p\, a^3}{3k^2} \left[(2k^2 - 1)E(k) + k'^2 K \right] \tag{15}$$

Przemieszczenie Δ_{zp}^b określimy rozpatrując fragment pierścienia przedstawiony na rys. 4.

Równanie momentów od obciążenia zewnętrznego przyjmuje postać:

$$M_p^b = -\frac{p}{2}(b - y)^2 = -\frac{p}{2}(b - k' a\cos\varphi)^2 \tag{16}$$



Rys. 4. Schemat do obliczania przemieszczeń spowodowanych obciążeniem prostopadłym do osi b

Fig. 4. Diagram for the calculation of the displacements caused by the load pepedicular to axis b

Mając określone równanie momentów obliczamy przemieszczenie Δ^b_{zp}

$$\Delta^b_{zp} = \int_0^s \frac{M^b_p M_z}{EI}\, ds = 2\,\frac{1}{EI}\int_0^{\pi} -\frac{p}{2}(b - k'a\cos\varphi)^2 a\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

Obliczamy kolejno całki występujące w powyższym wyrażeniu

$$\int_0^{\pi} ab^2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2ab^2E(k)$$

$$-\int_0 2a^2bk'\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = -2a^2bk'\left[\frac{\sin\varphi}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2k}\arcsin(k\sin\varphi)\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} a^3k'^2\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a^3k'^2\left[E(\varphi,k) + \frac{1}{3}\sqrt{1-k^2\sin\varphi}\sin\varphi\cos\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{2k^2-1}{3k^2}E(\varphi,k) - \frac{k'^2}{3k^2}F(\varphi,k)\right]_0^{\pi} = 2k'^2a^3\left[E(k)\left(1 - \frac{2k^2-1}{3k^2}\right) - \frac{k'^2}{2k^2}K\right]$$

Sumując otrzymane wielkości oraz podstawiając $k' = \frac{b}{a}$ otrzymujemy

$$\Delta^b_{zp} = -\frac{1}{EI}\,\frac{2p\,b^2a}{3k^2}\left[E(k)(4k^2+1) - k'^2K\right] \tag{17}$$

Znając wartości przemieszczeń od obciążenia jednostkowego (zależność 9) i obciążeń zewnętrznych (zależność 15 i 17) z równania 1 wyznaczamy Z

$$Z = -\frac{\Delta_{zp}}{\delta_{zz}} = -\frac{\Delta_{zp}^{a} + \Delta_{zp}^{b}}{\delta_{zz}}$$

$$Z = -\frac{\frac{1}{EI}\,\frac{2pa^3}{3k^2}\left[E(k)(2k^2-1)+k'^2K\right] - \frac{1}{EI}\,\frac{2pab^2}{3k^2}\left[E(k)(4k^2+1)-k'^2K\right]}{4\,\frac{1}{EI}\,a\,E(k)}$$

$$= \frac{p}{6k^2E(k)}\left\{a^2\left[E(k)(2k^2-1)+k'^2K\right] + b^2\left[E(k)(4k^2+1)-k'^2K\right]\right\} \qquad (18)$$

Obliczamy pozostałe wielkości nadliczbowe, tj. X i Y.

Z równania rzutów na oś poziomą sił działających na fragment pierścienia (rys. 4) wynika, że

$$X = pb \qquad (19)$$

Natomiast Y jako siła poprzeczna leżąca w przekroju pokrywającym się z osią symetrii (y) jest równa zero

$$Y = 0 \qquad (20)$$

Po wyznaczeniu wielkości nadliczbowych obliczamy interesujący nas moment wewnętrzny w dowolnym przekroju pierścienia, stosując następującą zależność

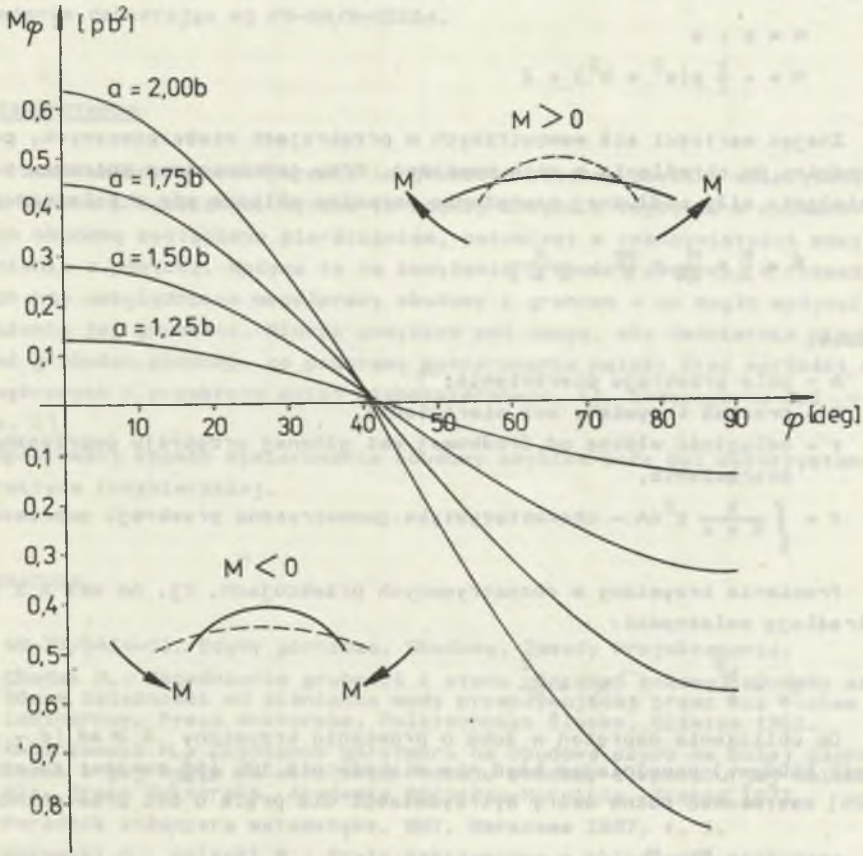
$$M = M_p^a + M_p^b - Xy + Z \qquad (21)$$

Po wstawieniu do powyższej zależności wyprowadzonych wyrażeń na M_p, X i Z przyjmuje ona następującą postać:

$$M = -\frac{1}{2}\,p\left[a^2\sin^2\varphi + (b-k'a\cos\varphi)^2\right] - pabk'\cos\varphi +$$

$$+ \frac{p}{6k^2E(k)}\left\{a^2\left[E(k)(2k^2-1)+k'^2K\right] + b^2\left[E(k)(4k^2+1) - k'^2K\right]\right\} \qquad (22)$$

Opierając się na wyprowadzonej zależności (22) sporządzamy przebieg momentów gnących w obudowie szybika. Przebieg ten ograniczony ze względu na symetrię układu do jednej ćwiartki pierścienia przedstawiony jest na rys. 5. Wynika z niego, że moment gnący exstremalne wartości przyjmuje w przekrojach leżących na osiach przyjętego układu współrzędnych, tj. dla $\varphi = 0^o$ i $\varphi + 90^o$, a jego wartość zależy od wielkości obciążenia obudowy i stosunku półosi elipsy.



Rys. 5. Przebieg momentów gnących w obudowie szybika dla wybranych stosunków półosi

Fig. 5. Plot of the bending moments in a small shaft lining for the selected semi-axesrations

Ustalenie grubości obudowy szybika

Punktem wyjściowym do ustalenia grubości obudowy szybika przy określonych jego wymiarach jest wartość sił wewnętrznych w przekrojach niebezpiecznych, które wynoszą:

- w przekroju leżącym na osi y, tj. dla $\varphi = 0$

$$N = pb$$
$$M = -pb^2 + Z \tag{23}$$

- w przekroju leżącym na osi x, tj. dla $\varphi = 90^{o}$

$$N = p \cdot a$$
$$M = -\frac{1}{2} p(a^2 + b^2) + Z \tag{24}$$

Znając wartości sił wewnętrznych w przekrojach niebezpiecznych, przechodzimy do określenia w nich naprężeń. Przy jednoczesnym zginaniu i działaniu siły podłużnej naprężenia normalne oblicza się z zależności

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{Mz}{Y} \cdot \frac{R}{R + z} \tag{25}$$

gdzie:

A - pole przekroju pierścienia,

R - promień krzywizny osi pierścienia,

z - odległość włókna od środkowej osi głównej przekroju poprzecznego pierścienia,

$Y = \int_A \frac{R}{R + z} z^2 dA$ - charakterystyka geometryczna przekroju poprzecznego.

Promienie krzywizny w rozpatrywanych przekrojach, tj. na osi x i y, określają zależności:

$$R_x = \frac{b^2}{a} \qquad R_y = \frac{y^2}{b} \tag{26}$$

Do obliczania naprężeń w łuku o promieniu krzywizny $R \geqslant 4d$ (d - grubość obudowy) popełniając błąd nie większy niż 10% [5] zamiast zależności (25) zastosować można wzory wytrzymałości dla pręta o osi prostoliniowej

$$\sigma_{z/w} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \tag{27}$$

gdzie:

W - wskaźnik zginania,

A - pole przekroju poprzecznego.

Odpowiedni warunek bezpieczeństwa, miarodajny przy wymiarowaniu obudowy, przybierze postać

$$\frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \leqslant \sigma_{dop} \tag{28}$$

Warunek ten w przytoczonej formie może służyć w praktyce do sprawdzania wymiarów przekroju, z góry przyjętych [9]. Najczęściej stosowanym rodzajem obudowy szybów jest obudowa murowa. W rozpatrywanym przypadku szybika o tarczy eliptycznej przy równomiernym obciążeniu jego obudowy wystąpią w niej momenty gnące i związane z nimi naprężenia rozciągające, które

wykluczają zastosowanie obudowy murowej. Opierając siłę na znanych wartościach sił wewnętrznych w przekrojach niebezpiecznych możemy zastosować obudowę żelbetową przyjmując z góry jej grubość, a klasę betonu i stopień zbrojenia dobierając wg PN-84/B-03264.

Zakończenie

Przedstawiony sposób określania grubości obudowy szybika eliptycznego daje wyniki przybliżone. Wynika to między innymi z tego, że w rozważaniach obudowę zastąpiono pierścieniem, natomiast w rzeczywistości mamy do czynienia z powłoką. Wpływa to na zawyżenie grubości obudowy. W rozważaniach nie uwzględniono współpracy obudowy z gruntem - co mogło wpłynąć na obniżenie jej grubości. Biorąc powyższe pod uwagę, aby nadmiernie nie zawyżać grubości obudowy, za podstawę wymiarowania należy brać wartości sił wewnętrznych z przekroju mniej niebezpiecznego, tj. leżącego na osi y (rys. 2).

Opracowany sposób wymiarowania obudowy szybika może być wykorzystany w praktyce inżynierskiej.

LITERATURA

[1] NB-72/0434-03. Szyby górnicze. Obudowa. Zasady Projektowania.

[2] Chudek M.: Zagadnienie grubości i stanu naprężeń kołowej obudowy szybów w zależności od ciśnienia wody przepływającej przez nią ruchem laminarnym. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1962.

[3] Kwaśniewski M.: Ciśnienie górotworu na obudowę szybu na dużej głębokości i jej wpływ na ustalenie rodzaju obudowy i sposobu jej obliczania. Praca doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 1973.

[4] Poradnik inżyniera matematyka. WNT, Warszawa 1987, t. 1.

[5] Rakowski G., Solecki R.: Pręty zakrzywione - obliczenia statyczne. Wyd. Arkady, Warszawa 1965.

[6] Lambe T.W., Whitman R.V.: Mechanika gruntów. Wyd. Arkady, Warszawa 1977, cz. 1.

[7] Unrug K.: Zasady obliczania obudowy betonowej i żelbetowej szybów w świetle badań modelowych. Zeszyty Naukowe AGH nr 333, Górnictwo z. 38, Kraków

[8] Wichur A.: Nowa metodyka obliczania obudowy szybowej w świetle opracowanym norm branżowych. "Budownictwo Górnicze" 1972, nr 2.

[9] Walczak J.: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. PWN, Warszawa 1973, t. 1.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan Walaszczyk

Wpłynęło do Redakcji w czerwcu 1988 r.

ПРОСТАНОВКА РАЗМЕРОВ КРЕПИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ШУРФА

Р е з ю м е

В результате теоретических рассуждений представлен способ определения толщины крепи эллиптического шурфа. Проанализировано решение для равномерной внешней нагрузки, принимая для шурфа на данной глубине модель эллиптического кольца с прямоугольным поперечным сечением. С точки зрения статики, в рассматриваемом случае эллиптическое кольцо замкнуто системой однократно статически необозначенной.

Единственную неизвестную, которой является изгибающий момент, определено методом сил. По остальным величинам, т.е. продольным и поперечным силам определенным из уравнения проекций, составлены графики изгибающих моментов в крепи шурфа. Из этого следует, что изгибающий момент экстремальные значения принимает в сечениях лежащих на осях эллипса. Величины внутренних сил, т.е. изгибающих моментов и продольных сил в этих сечениях, являются условием формулировки соответствующих условий безопасности, необходимых при простановке размеров крепи.

DEMENSIONING AN ELLIPTICAL SMALL SHAFT LINING

S u m m a r y

On the basis of some theoretical considerations, a method of determining the thickness of a small shaft lining has been presented.

A solution for an uniform external load has been analysed assuming, for the small shaft at the giben depth, a model of an elliptical ring of rectangular cross-section. From the view point of statics, the elliptical ring in the case considered is included in a once-statically undeterminable system.

The only unknown which was the bending moment has been determined by the forces method. After the determination of the remaining supernumerary quantities i.e., longitudinal and transverse forces from the equations of projections, a chart of the bending moments in the small shaft lining has been made. It results that the bending moment assumes the extreme values in the sections lying on the ellipse axes.

The values of the internal forces i.e., the bending moments and longitudinal forces in these sections are the basis for the formulation of a suitable safety condition, valid when dimensioning the lining.