

ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Eugeniusz BARON

№. 3343 / 06



MECHANIKA PERIODYCZNYCH PŁYT ŚREDNIEJ GRUBOŚCI



Gliwice 2006

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE

NR 1734



P. 3343/06

Eugeniusz BARON

**Mechanika
periodycznych płyt
średniej grubości**

GLIWICE

2006

Opiniodawcy

Prof. dr hab. Stanisław Jan MATYSIAK
Prof. zw. dr hab. inż. Czesław WOŹNIAK

Kolegium redakcyjne

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Andrzej BUCHACZ
REDAKTOR DZIAŁU – Dr inż. Marianna GLENSZCZYK
SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta LEŚKO

Projekt okładki

Tomasz LAMORSKI

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0779

© Copyright by
Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
Gliwice 2006

SPIS TREŚCI

WYKAZ STOSOWANYCH OZNACZEŃ	7
1. WSTĘP	11
1.1. Tematyka pracy	11
1.2. Modelowanie płyt średniej grubości. Przegląd literatury problemu	12
1.3. Modelowanie płyt periodycznych	16
1.4. Motywacja, cel i zakres pracy	20
1.5. Klasyfikacja płyt periodycznych	22
2. FORMUŁOWANIE 2D-MODELI	25
2.1. Podstawy modelowania	25
2.2. Technika uśredniania tolerancyjnego	28
2.3. Modalne funkcje kształtu	34
3. PŁYTY STRUKTURALNIE BIPERIODYCZNE	43
3.1. Wyprowadzenie równań modelu	43
3.2. Zagadnienie drgań	49
3.3. Zagadnienie stateczności	52
3.4. Podsumowanie	54
4. PŁYTY MATERIAŁOWO BIPERIODYCZNE	57
4.1. Wyprowadzenie równań modelu	57
4.2. Zagadnienie drgań	60
4.3. Zagadnienie stateczności	66
4.4. Podsumowanie	68
5. PŁYTY STRUKTURALNIE UNIPERIODYCZNE	71
5.1. Wyprowadzenie równań modelu	71
5.2. Zagadnienie drgań	77
5.3. Zagadnienie stateczności	83
5.4. Stateczność dynamiczna	90
5.5. Podsumowanie	96

6. PŁYTY MATERIAŁOWO UNIPERIODYCZNE	99
6.1. Wyprowadzenie równań modelu	99
6.2. Zagadnienie drgań	103
6.3. Zagadnienie stateczności	109
6.4. Podsumowanie	112
7. PORÓWNANIE PROPONOWANYCH MODELI	115
8. UWAGI KOŃCOWE, WNIOSKI I PERSPEKTYWY BADAWCZE	119
LITERATURA	122
STRESZCZENIE.....	137

CONTENTS

LIST OF SYMBOLS.....	9
1. INTRODUCTION.....	11
1.1. Subject area of work.....	11
1.2. Modeling of medium thickness plates. Review of literature problem.....	12
1.3. Modeling of periodic plates.....	16
1.4. Motivation, object and domain of work.....	20
1.5. Partition of periodic plates.....	22
2. FORMULATION OF 2D-MODELS.....	25
2.1. Modeling assumptions.....	25
2.2. Tolerance averaging technique.....	28
2.3. Mode shape functions.....	34
3. STRUCTURAL BIPERIODIC PLATES	43
3.1. Model equations.....	43
3.2. Vibrations problem.....	49
3.3. Stability problem.....	52
3.4. Summary.....	54
4. MATERIAL BIPERIODIC PLATES.....	57
4.1. Model equations.....	57
4.2. Vibrations problem.....	60
4.3. Stability problem.....	66
4.4. Summary.....	68
5. STRUCTURAL UNIPERIODIC PLATES.....	71
5.1. Model equations.....	71
5.2. Vibrations problem.....	77
5.3. Stability problem.....	83
5.4. Dynamic stability.....	90
5.5. Summary.....	96

6. MATERIAL UNIPERIODIC PLATES.....	99
6.1. Model equations.....	99
6.2. Vibrations problem.....	103
6.3. Stability problem.....	109
6.4. Summary.....	112
7. COMPARISON OF PROPOSED MODELS.....	115
8. FINAL REMARKS, CONCLUSIONS AND SEARCH PERSPECTIVES.....	119
REFERENCES.....	122
SUMMARY.....	142

WYKAZ STOSOWANYCH OZNACZEŃ

Poniżej podano te oznaczenia, które są wspólne dla całej pracy.

$Ox_1x_2x_3$	prostokątny, kartezjański układ współrzędnych parametryzujący przestrzeń fizyczną E^3 ,
Ox_1x_2	prostokątny, kartezjański układ współrzędnych na płaszczyźnie środkowej płyty, $x_3 = 0$,
z	współrzędna x_3 ,
t	współrzędna czasowa,
$i, j, \dots, \alpha, \beta, \dots$	wskaźniki tensorowe przyjmujące wartości 1, 2, 3 i odpowiednio 1, 2 związane z prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych,
A, B, \dots, a, b, \dots	indeksy górne przebiegające odpowiednio ciąg 1, 2, ..., N, 1, 2, ..., n,
Ω	obszar zajmowany przez nieodkształconą płytę w konfiguracji wyjściowej,
Π	obszar będący płaszczyzną środkową płyty,
x, y	punkty płaszczyzny środkowej Π , $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$,
$z = \pm \delta(x)$	równanie powierzchni ograniczających płytę, dla której $2\delta(x)$ jest grubością w punkcie $x \in \Pi$,
d	stała grubość płyty,
Δ	komórka periodyczności,
l_1, l_2	wymiary komórki periodyczności i równocześnie okresy zmian parametrów płyty,
l	parametr mezostruktury, tj. średnica komórki periodyczności na płaszczyźnie Π równa $\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$,
$\langle \cdot \rangle$	operator uśredniający,
$u_i(x, z, t)$	składowe wektora przemieszczenia w kierunku osi x_i ,
$w(x, t)$	ugięcie płaszczyzny środkowej płyty (w kierunku osi x_3),
$\vartheta_\alpha(x, t)$	niezależne obroty płaszczyzny środkowej płyty (w płaszczyźnie równoległej do $x_\alpha Ox_3$,

$w^\circ, \vartheta_\alpha^\circ$	uśrednione ugięcia i obroty,
ε_{ij}	składowe tensora odkształcenia,
σ_{ij}	składowe tensora naprężenia,
A_{ijkl}	składowe tensora modułów sprężystości materiału płyty,
$\sigma_{\alpha\beta}^\circ$	wstępne napięcie w płaszczyźnie środkowej płyty,
p^+, p^-	obciążenia w kierunku osi x_3 odpowiednio dla górnej i dolnej powierzchni ograniczającej płytę,
b	stała siła masowa,
ρ	gęstość masy materiału płyty,
K	współczynnik ścinania.
$O(\varepsilon)$	wielkość rzędu ε , $\varepsilon > 0$, funkcja ciągła argumentu ε , taka, że $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon) = 0$ oraz $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} \neq 0$,
ω	częstość drgań swobodnych,
$SV_\Delta(T)$	funkcja wolnozmienna w odniesieniu do komórki Δ i systemu tolerancji T .

Pozostałe oznaczenia (oraz ewentualne zmiany) zdefiniowano w tekście.

LIST OF SYMBOLS

Below are given this denotation, which are common for all work.

$Ox_1x_2x_3$	the orthogonal Cartesian coordinate system in the physical space E^3 ,
Ox_1x_2	the orthogonal Cartesian coordinate system in the plate midplane, $x_3 = 0$,
z	coordinate x_3 ,
t	time coordinate,
$i, j, \dots, \alpha, \beta, \dots$	tensor subscripts run over 1, 2, 3 and 1, 2, respectively, related to the orthogonal Cartesian coordinate system,
A, B, \dots, a, b, \dots	superscripts run over the sequence 1, 2, ..., N, 1, 2, ..., n, respectively,
Ω	the region occupied by the un-deformed plate in its reference state,
Π	the region of the plate mid-plane,
x, y	the points of the plate mid-plane Π , $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$,
$z = \pm \delta(x)$	functions representing upper and lower plate boundary, $2\delta(x)$ is the plate thickness at point $x \in \Pi$.
d	constant plate thickness,
Δ	the periodicity cell,
l_1, l_2	the dimensions of periodicity cell and periods of the plate in-homogeneity,
l	mezostructure parameter, i. e. the diagonal of periodicity cell in the midplane Π equal $\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$,
$\langle \cdot \rangle$	averaging operator,
$u_i(x, z, t)$	components of displacement vector along x_i -axis,
$w(x, t)$	deflection of the plate midplane (along x_3 -axis),
$\vartheta_\alpha(x, t)$	independent rotations of the plate midplane (in plane parallel to $x_\alpha O x_3$),
$w^\circ, \vartheta_\alpha^\circ$	averaging deflection and rotations,
ε_{ij}	components of strain tensor,
σ_{ij}	components of stress tensor,

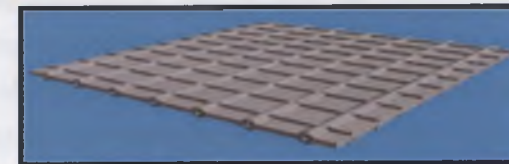
A_{ijkl}	components of the elastic modulae tensor,
$\sigma_{\alpha\beta}^0$	the prestressing tensor of the plate midplane,
p^+, p^-	surface tractions along x_3 -axis respectively for upper and lower plate boundary,
b	constant body force,
ρ	mass density scalar field,
K	shear coefficient,
$O(\varepsilon)$	term of an order ε , $\varepsilon > 0$, continuous function of argument ε , such that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon) = 0$ and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} \neq 0$,
ω	free vibration frequency,
$SV_{\Delta}(T)$	slowly varying function with respect to the periodicity cell Δ and tolerance system T .

Other denotations (and possible alterations) are defined in text.

1. WSTĘP

1.1. Tematyka pracy

Praca dotyczy liniowo-sprężystych, średniej grubości płyt o strukturze periodycznej w płaszczyznach równoległych do swej płaszczyzny środkowej. Płyty takie, zwane dalej płytami periodycznymi, można umownie podzielić na wiele powtarzalnych segmentów, tzw. komórek periodyczności, mających te same wymiary, kształt i identyczną strukturę materiałową. Płytą periodyczną jest zarówno płyta o stałej grubości periodycznie wzmocniona inkluzjami z innych materiałów, jak również jednorodna materiałowo płyta o periodycznie zmiennej grubości, np. gęsto uźebrowana lub perforowana. Wymiary komórki periodyczności, oprócz wymiarów gabarytowych w płaszczyźnie środkowej, dodatkowo charakteryzują tego typu płyty. Geometria i własności płyt periodycznych mogą być opisane periodycznymi funkcjami współrzędnych parametryzujących płaszczyznę środkową płyty. W przypadku gdy funkcje te są periodyczne względem obu współrzędnych, mówimy, że płyta posiada dwukierunkową strukturę periodyczną lub że jest *plytą biperiodyczną*, rys. 1.1. Jeżeli własności płyty są funkcjami okresowymi tylko jednej z tych współrzędnych, mamy do czynienia z płytą o jednokierunkowej strukturze periodycznej lub inaczej z *plytą uniperiodyczną*. W kierunku prostopad-



Rys. 1.1. Płyta biperiodyczna
Fig. 1.1. Biperiodic plate



Rys. 1.2. Płyta uniperiodyczna
Fig. 1.2. Uniperiodic plate

łym do kierunku periodyczności zmienność parametrów płyty uniperiodycznej może być dowolna, jednak najczęściej w praktyce mamy do czynienia z parametrami stałymi. Fragment takiej płyty, znanej w budownictwie jako płyta stalowo-betonowa, przedstawia rys.1.2.

W analizie zagadnień dynamiki i stateczności w tej rozprawie zostaną wykorzystane dobrze znane założenia teorii płyt o średniej grubości. Założenia te, w przypadku płyt periodycznych, prowadzą do układu równań różniczkowych cząstkowych o silnie oscylujących i nierzadko nieciągłych współczynnikach funkcyjnych. Rozwiązanie więc wielu problemów inżynierskich napotyka na znaczne trudności matematyczne. Dlatego też w mechanice ciał periodycznych proponowane są różne metody prowadzące do przybliżonych 2D-modeli płyt periodycznie niejednorodnych opisujących ich własności sprężyste i inercyjne w sposób uśredniony. Te uśrednione własności będziemy nazywać makromechanicznymi (w sensie mechaniki kompozytów, por. R. M. Jones (1975)). W tej pracy zastosowano *technikę tolerancyjnego uśredniania*, którą dla sprężystych kompozytów periodycznych wprowadził Cz. Woźniak (1999)¹, (2000), a podstawy teoretyczne sformułowano w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000). Zostanie ona omówiona w podrozdziale 2.2. Technika ta prowadzi do równań, które mogą być wykorzystane w praktyce inżynierskiej, a także, w odróżnieniu od innych metod, pozwala uwzględnić wpływ wielkości powtarzalnego segmentu (okresu powtarzalności) płyty na jej makromechaniczne własności. Wpływ ten będziemy dalej nazywać, zgodnie z terminologią Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000), *efektem skali*. W rozważaniach uwzględniono zarówno płyty periodyczne o okresie powtarzalności dużo większym od grubości płyty, jak również płyty, dla których okres ten jest rzędu ich grubości.

Praca zawiera wyprowadzone techniką tolerancyjnego uśredniania 2D-modele średniej grubości liniowo-sprężystych płyt periodycznych, przykłady ich zastosowania w zagadnieniach dynamiki i stateczności oraz porównanie poszczególnych modeli. Problematyka ta była po raz pierwszy rozważana w pracach autora wyszczególnionych w „Literaturze problemu” na końcu rozprawy.

1.2. Modelowanie płyt średniej grubości. Przegląd literatury problemu

Znana teoria liniowa płyt cienkich Naviera–Kirchhoffa ma ograniczony zakres stosowalności w praktyce inżynierskiej. Ograniczenia te dotyczą proporcji grubości płyty do jej rozpiętości, jak również maksymalnych ugięć w stosunku do grubości płyty. Także pominięcie wpływu sił poprzecznych na ugięcia prowadzi do wartości przemieszczeń i naprężeń, często obciążonych dużym błędem w porównaniu do wartości obliczonych na podstawie trójwymiarowych rozwiązań liniowej teorii sprężystości. Dotyczy to np. płyt średniej grubości, płyt z otworami, płyt niejednorodnych, a w szczególności płyt warstwowych, por. np. Sokołowski (1959).

Spowodowało to, że równolegle z rozwojem teorii Kirchhoffa poszukiwano także rozwiązań trójwymiarowych poszczególnych zagadnień. Powstawały stąd uściślone teorie płyt zwane też teoriami płyt o średniej grubości. W teoriach tych opisywano przestrzenne zagadnienia mechaniki za pomocą równań zależnych od dwóch współrzędnych parametryzujących powierzchnię środkową płyty, a wszystkie niewiadome wielkości miały znany lub wyznaczany rozkład na grubości płyty.

Przy opracowaniu tego podrozdziału uwzględniłem dane zamieszczone w monografii *Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok*, tom VIII, (2001), pod redakcją Cz. Woźniaka.

Najogólniej, używając terminologii stosowanej w pracy G. Jemielity (1991), teorie płyt można formułować w dwojaki sposób:

1) bezpośrednio, traktując płytę *a priori* jako powierzchnię dwuwymiarową zdolną do przenoszenia zginania, co prowadzi do modelu Cosseratów opisanego m.in. w pracach A.E. Greena i P.M. Naghdiego (1967), (1971) oraz P.M. Naghdiego (1972);

2) pośrednio, poprzez sprowadzenie zagadnienia przestrzennego do pewnego zastępczego problemu płaskiego korzystając z liniowej bądź nieliniowej teorii sprężystości symetrycznej lub niesymetrycznej.

Teorie formułowane pośrednio można z kolei podzielić na dwie podstawowe grupy:

1) teorie asymptotyczne, których konstruowanie polega na sprowadzeniu pierwotnego zagadnienia trójwymiarowego do ciągu zastępczych zagadnień dwuwymiarowych. Zwiększając lub zmniejszając liczbę wyrazów tego ciągu można uzyskać bardziej lub mniej dokładne przybliżenie rozwiązania zagadnienia trójwymiarowego zastępczym zagadnieniem dwuwymiarowym. Obszerne omówienie metod asymptotycznych teorii płyt (zwanych też teoriami płyt grubych) zawierają np. prace A.L. Gol'denvajzera (1992) i S.M. Bauera (1993). Wybrane teorie asymptotyczne można znaleźć w monografiach A.I. Lurego (1955), V.V. Vlasova (1975), L.H. Donnella (1976), A. S. Kosmodamianskiego i V.A. Shaldyrwana (1978), B.L. Pelekha i V.A. Laz'kova (1982). Zagadnień dynamicznych dotyczą m.in. prace R.D. Mindlina (1955), C. Eringena (1955), R.C. Koellera (1973) (przy rozwinięciu w szeregi potęgowe), R.D. Mindlina i M.A. Medicka (1959), K. Kelkela (1984) (przy zastosowaniu szeregów wielomianów Legendre'a), N.Z. Yakusheva i N.V. Ulanovej (1979) (metoda nieskończonych operatorów różniczkowych), J.D. Achenbacha (1969), M.W. Johnsona i O.E. Widery (1971) (metoda Birkhoffa);

2) teorie techniczne, w których sprowadzenie zagadnienia trójwymiarowego do dwuwymiarowego polega na przyjęciu *a priori* pewnych założeń upraszczających dotyczących do-

puszczalnych pól przemieszczeń bądź naprężeń lub obu tych pól jednocześnie. W grupie teorii technicznych znajdują się teorie płyt cienkich oraz teorie płyt o średniej grubości (teorie uściślone).

Teorie techniczne można podzielić wg stosowanych hipotez: statycznych, kinematycznych bądź mieszanych; metod wyprowadzania równań: bezpośrednio lub wariacyjnie; rzędu otrzymywanych równań oraz kryteriów dokładności. W odróżnieniu od jednoparametrowej teorii Kirchhoffa są to teorie wieloparametrowe (najczęściej trójparametrowe), przy czym przez pojęcie parametru rozumiemy przemieszczenia uogólnione określone na płaszczyźnie środkowej płyty. Dokładniejsze omówienie można znaleźć w pracy G. Jemielity (1991).

Historycznie, pierwszą uściśloną teorię płyt stworzył M. Lévy (1877) przyjmując założenia kinematyczne i stosując metodę bezpośrednią. Wynikający z przyjętych założeń stan naprężenia zwany jest uogólnionym płaskim stanem naprężenia w stanie zgięciowym, który posłużył A.E.H. Love'emu (1927) do budowy teorii płyt średniej grubości. Najistotniejsze w rozwoju teorii płyt o średniej grubości są prace E. Reissnera (1944), (1945), (1947), w których zakładając *a priori* rozkład naprężeń na grubości płyty (naprężeń ścinających – paraboliczny), stosując podejście wariacyjne, wyprowadza on układ równań różniczkowych, podaje warunki brzegowe i związki fizyczne swej teorii oraz przykłady ilustrujące. H. Hencky (1947) oraz L. Bolle (1947)₁, (1947)₂ przyjmują liniowy rozkład przemieszczeń i założenie płaskiego stanu naprężenia jednak przy różnych podejściach: odpowiednio wariacyjnym i bezpośrednim. Przyjęte hipotezy kinematyczne prowadzą (w obu teoriach) do stałego rozkładu naprężeń stycznych na grubości płyty. Fakt nierównomiernego ich rozkładu jest uwzględniany poprzez współczynnik poprawkowy zwany współczynnikiem poprzecznego ścinania. Wartość tego współczynnika zależy od jego zdefiniowania i jest różna u obydwu autorów. Podobieństwo i spójność tych dwóch teorii powoduje, że współcześnie operujemy pojęciem teorii Hencky'ego – Bolle'a (teorii H-B).

Teoria Reissnera oraz teoria Hencky'ego – Bolle'a były modyfikowane i uogólniane; przedstawiono ich różne zastosowania. Wielu z tych uogólnień dokonał w swoich pracach także E. Reissner, np.: (1976) – dotyczącej teorii płyt anizotropowych, (1979) – płyt warstwowych, (1981) – płyt niejednorodnych poprzecznie izotropowych. Uogólnienia teorii Reissnera na płyty ortotropowe o stałej grubości dokonali K. Girkmann i R. Beer (1958) oraz niezależnie J. Mossakowski (1959), natomiast F. Essenburg i P.M. Naghdi (1958) dokonali uogólnienia na płyty o zmiennej grubości. Symetrycznie niejednorodne płyty Reissnera rozpatrzył Y. Stavsky (1965), natomiast podłużnie niejednorodne, o zmiennej grubości –

A. Gawęcki (1972). Uogólnienia na zagadnienia stateczności dokonał D. Frederick (1963). Na bazie teorii Reissnera, T.S. Vashakmadze (1983), (1984) sformułował nieliniową teorię płyt anizotropowych i teorię liniową płyt izotropowych, a G. Jemielita (1975) techniczną teorię płyt średniej grubości.

Równoległe z rozwojem teorii Reissnera uogólniana była teoria H – B, czyli Hencky'ego – Bolle'a. Teorię tę uogólnił na zagadnienia dynamiczne Ya.S. Uflyand (1948) przy przyjęciu stałego współczynnika poprzecznego ścinania. Bazując na założeniach H – B, stosując podejście bezpośrednie (i podając wariacyjne sformułowanie teorii), R.D. Mindlin (1951) wyprowadził równanie różniczkowe ruchu płyty identyczne z równaniami uzyskanymi przez Uflyanda. Nowością tej pracy było podanie kryterium wyznaczania współczynnika poprzecznego ścinania i uzależnienie go od współczynnika Poissona materiału płyty. W niej także po raz pierwszy analizowano wpływ sił poprzecznych i bezwładności obrotowej na prędkość rozchodzenia się fal w płycie. Z. Kączkowski (1960) badał ten wpływ na częstość drgań własnych anizotropowej płyty przegubowo podpartej, natomiast P.A. Laura (1968) – na drgania płyt wzmocnionych żebrami. Liniowych zagadnień drgań płyt prostokątnych dotyczą m.in. prace R.D. Mindlina i in. (1956), M.V. Dubinkina (1958), J.S. Tomara (1963), H. Reissmanna i Y.-C. Lee (1968), H.M. Nelsona (1978), D.J. Dawe'a (1978). Wpływ sił podłużnych na częstość drgań własnych oraz wyboczenie analizowali m.in. G. Hermann i A.E. Armenaskas (1960), (1962), E.J. Brunelle (1971), E.J. Brunelle i S.R. Robertson (1974), V.L. Berdichevskij (1973), H. Irschik (1985). Obszerną i szczegółową bibliografię zagadnień drgań płyt (a także powłok) średniej grubości zawiera praca przeglądowa E.I. Grigolyuka i I.T. Selezova (1973). Wcześniej I.T. Selezov (1959) dokonał też uogólnienia teorii Uflyanda na nieliniowe zagadnienia dynamiczne. Założenia kinematyczne Hencky'ego – Bolle'a stanowią podstawę teorii płyt anizotropowych i piezoelektrycznych R.D. Mindlina (1951)₂ (1952) i niejednorodnych płyt anizotropowych J.M. Whitneya i N.J. Pagno (1970). Nieliniowe zagadnienia płyt ortotropowych rozpatrywał S.J. Medwadowski (1958), anizotropowych Y. M. Sathyamoorthy i C.Y. Chia (1980). Także E. Reissner (1980), (1983) analizował skręcanie płyt ortotropowych przy wykorzystaniu założeń H – B. Założenia te stosowali do płyt o zmiennej, niesymetrycznej grubości, poprzecznie niejednorodnych i warstwowych, S.T. Gulati i O. Ozaltin (1973), P.C. Yang, C.H. Norris i Y. Stavsky (1966), Pei Chi Chou i J. Carleone (1973), C. Berar (1984) i E. Reissner (1986)₁, (1986)₂. Problem brzegowo – początkowy sformułowany w momentach i siłach poprzecznych zawiera praca R. Wojnara (1979), gdzie podano też twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania.

Oprócz teorii płyt średniej grubości, bazujących na założeniach Reissnera bądź Hencky'ego – Bolle'a, tworzono także teorie inne. Spośród nich należy wymienić teorię A. Kromma (1953), B.F. Vlasowa (1957), S.A. Ambarcumyana (1957), (1960), Kh.M. Mushtarięgo (1959), J.N. Reddy'ego (1990)₁. Uogólnieniem założeń Vlasowa jest teoria Z. Kączkowskiego (1968), którą A. Kociołek (1972) zastosował do badania drgań i wybożenia płyt poprzecznie izotropowych, podobnie jak A.Sh. Petoyan (1966) w odniesieniu do teorii Mushtarięgo. Współczesny rozwój teorii płyt średniej grubości przedstawił w swojej pracy T. Lewiński (1986), a także J.N. Reddy (1990)₂.

Przedstawiony powyżej przegląd bibliograficzny należy traktować jako skróconą historię powstawania teorii płyt o średniej grubości ze szczególnym zwróceniem uwagi na prace wytyczające bądź inspirujące nowe kierunki badań. Wymieniono również, z uwagi na temat tej rozprawy, publikacje dotyczące zagadnień dynamiki i stateczności. Przypomnienie pewnych faktów historycznych było też konieczne, ponieważ w odróżnieniu od dobrze usystematyzowanej i uporządkowanej teorii liniowej płyt cienkich, w zbiorze teorii płyt o średniej grubości panuje duża dowolność nazewnictwa i interpretacji. Na przykład, nawet statyczne teorie wywodzące się z teorii Hencky'ego – Bolle'a wielu autorów nazywa teoriami Mindlina, a tworzone teorie i podejścia nazywa się „nowymi”, mimo że mają znacznie wcześniejszy rodowód. Szczegóły oraz próbę uporządkowania problematyki teorii płyt średniej grubości zawiera, wspomniana już, monografia *Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok*, tom VII (2001), gdzie podano również metody konstruowania teorii, ich dokładny opis oraz zamieszczono obszerną bibliografię. Z tej monografii też zaczerpnięto dane wykorzystane w tym podrozdziale.

1.3. Modelowanie płyt periodycznych

Dalsze rozważania stanowić będzie przegląd metod modelowania płyt o strukturze periodycznej. Modelowaniem płyt periodycznych nazwiemy w tej rozprawie procedury pozwalające dokonać przejścia od równań różniczkowych płyt sprężystych o silnie oscylujących i nierzadko nieciągłych współczynnikach, do równań o współczynnikach uśrednionych, stałych lub wolnozmiennych. Przegląd metod modelowania, poza uzasadnionymi wyjątkami, nie uwzględnia publikacji dotyczących płyt periodycznie warstwowych (laminatów), traktowanych jako odrębna klasa płyt o strukturze periodycznej. Wyróżnione będą opracowania dotyczące periodycznych płyt średniej grubości. Główny nacisk będzie położony na omówienie metod modelowania opisujących wpływ wielkości powtarzalnej komórki na uśrednione własności mechaniczne płyty, czyli efekt skali.

Sposoby modelowania płyt periodycznych zależą od tego, czym spowodowana jest ich periodyczność. Dla płyt z otworami (perforowanych), w których wymiary otworów są dużo większe niż szerokość pasma, między nimi korzystano z metod mechaniki budowli. Płytę sprowadzano do schematu obliczeniowego płaskiego rusztu o węzłach przegubowo lub sztywno połączonych. Tego typu podejście stosowali m.in. H. Frąckiewicz (1970), W. Gutkowski (1964) (1965), S. Makosz (1985), W. Nowacki (1954) (1960). S.G. Nomachi (1966). Dla płyt perforowanych, w których wymiary otworów były rzędu szerokości pasm między nimi, stosowano metody teorii płyt, zastępując strukturę siatkową płyty, złożoną z bardzo wielu powtarzalnych elementów, pewnym modelem ciągłym. Dokonywano tego poprzez uśrednienie w obrębie powtarzalnego elementu funkcji opisujących własności płyty. Od przyjętych założeń odnośnie do przemieszczeń i uogólnionych obrotów zależał rodzaj otrzymanego modelu płyty. Na przykład, Z. Kączkowski (1956) i S. Woinowski – Krieger (1957) uzyskali model płyty anizotropowej, A. Gomuliński i M. Witkowski (1972) – średniej grubości płyty izotropowej, Cz. Woźniak (1970), a także T. Lewiński (1984) – płyty Cosseratów.

Płyty periodycznie zbrojone inkluzjami z innych materiałów lub też periodycznie uzebrowane modelowano metodami prowadzącymi do tzw. anizotropii konstrukcyjnej. Na współczesny rozwój tych metod modelowania, a także na rozwój teorii płyt anizotropowych, zasadniczy wpływ miały prace T.M. Hubera (1914), (1921), (1929), (1954). Oprócz wprowadzenia pojęcia anizotropii konstrukcyjnej, uzyskał podstawowe rozwiązania, a także uśrednione sztywności płyt periodycznie niejednorodnych, koncentrując się głównie na płytach żelbetowych. Idea tej procedury modelowania polega na przejściu od płyty periodycznie niejednorodnej lub o periodycznie zmiennej grubości do pewnej płyty jednorodnej lub stałej grubości wykonanej z materiału anizotropowego. Wzory pozwalające obliczać sztywności płyt o różnej budowie i wykonanych z różnych materiałów zamieścili w swoich pracach lub monografiach m.in. N.J. Huffington (1956), S. Timoshenko i S. Woinowsky-Krieger (1962), G. Lekhnitskii (1968), S.A. Ambartsumyan (1969), R. Szilard (1974), M.S. Troitsky (1976), a stałe materiałowe w ramach modelu Cosseratów podał Cz. Woźniak (1970). Obliczając uśrednione sztywności metodą bezpośrednią, dochodzimy do modelu płyty konstrukcyjnie ortotropowej, por. np. Z. Kączkowski (1956) (1968), Z. Mazurkiewicz (1960) (1962), M. Sokołowski (1957). Zagadnienia dynamiki i stateczności płyt ortotropowych są omawiane także w pracach N.J. Huffingtona i W.H. Hoppmanna (1958), S.M. Dickinsona (1969).

Spośród współczesnych koncepcji modelowania struktur periodycznych wyróżnić trzeba te, które korzystają z teorii homogenizacji równań różniczkowych z silnie oscylującymi pe-

riodycznymi współczynnikami. Podstawy tej teorii znajdują się m.in. w monografiach: A. Bensoussan, J.L. Lions i G. Papanicolau (1978), V.V. Jikov, S.M. Kozlov i O.A. Oleinik (1994), T. Lewiński i J.J. Telega (2000), E. Sanchez-Palencia (1980). W otrzymanych metodą homogenizacji modelach płytę o periodycznej strukturze opisują równania zawierające stałe współczynniki nazywane modułami efektywnymi. Moduły efektywne są określane niezależnie dla każdej struktury periodycznej poprzez rozwiązanie pewnego periodycznego zagadnienia sformułowanego dla powtarzalnej komórki. Przy różnych założeniach dotyczących przemieszczeń dla płyt periodycznych moduły efektywne wyznaczali: D. Caillerie (1982), (1987), D. Chacha i E. Sanchez-Palencia (1992), R.V. Kohn i M. Vogelius (1984), (1985), (1986), T. Lewiński (1991), M.V. Reztsov (1990) i inni. Obszerny przegląd bibliografii modelowania płyt Kirchhoffa z zastosowaniem metod homogenizacyjnych zawiera rozprawa habilitacyjna J. Jędrysiaka (2001). Zagadnienia płyt von Kármána analizowali m.in. G. Duvaut (1977), T. Lewiński i J.J. Telega (2000). Płyty periodyczne średniej grubości, przy założeniach Henccky'ego-Bolle'a lub Reissnera rozpatrywali: A. Bourgeat i R. Tapiéro (1983), T. Lewiński (1991), (1992), T. Lewiński i J.J. Telega (1988), J.J. Telega (1992), J.J. Telega i T. Lewiński (1988) i inni.

Techniki homogenizacyjne korzystające z asymptotycznej analizy dają bardzo dobre rezultaty w zakresie statyki płyt periodycznych, jednak w zagadnieniach dynamicznych ich stosowanie napotyka na pewne ograniczenia. Na podstawie tak zbudowanych modeli nie potrafimy badać zagadnień dyspersji fal i opisać drgań wyższego rzędu, gdyż pomijają one wpływ wielkości powtarzalnej komórki na dynamikę płyty, czyli efekt skali (w sensie podanym w podrozdziale 1.1). Pod kątem analizy propagacji fal w periodycznych strukturach materiałowych proponowane są alternatywne podejścia do modelowania, pozwalające uwzględnić efekt skali. W podejściach tych najczęściej dokonuje się przejścia od równań różniczkowych mechaniki z periodycznie zmiennymi współczynnikami do równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach reprezentujących pewien ośrodek z mikrostrukturą. Należy tu wymienić prace J.D. Achenbacha i G. Hermann (1968) (w ramach tzw. teorii sztywności efektywnych) i G.A. Hegemiera (1972) (w ramach teorii ośrodków współdziałających), a także: A.C. Eringen i E.S. Suhubi (1964), R.D. Mindlina (1964), H.B. Mühlhaua (1995), Cz. Woźniaka (1967)₁, (1967)₂, (1969). Inne metody modelowania w dynamice ciał periodycznych proponowano w ramach teorii mieszanin, np. H. Murakami i G.A. Hegemier (1986), A. Toledano i H. Murakami (1987). Dane bibliograficzne przedstawione w tym akapicie zaczerpnięto z monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000).

Na przestrzeni ostatnich lat rozwijana jest nowa nieasymptotyczna teoria modelowania zagadnień dynamicznych i pewnych procesów stacjonarnych w ośrodkach periodycznych będąca rozszerzeniem metod homogenizacyjnych. Teoria ta została zaproponowana w pracach Cz. Woźniaka (1993)₁ i (1993)₃, kontynuowana w pracach Cz. Woźniaka (1995) (1997), M. Wagrowskiej i Cz. Woźniaka (1996), Cz. Woźniaka i M. Woźniak (1995), (1997), E. Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (2000)₂, oraz podsumowana i ujednolicona w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000), gdzie nazwano ją *techniką tolerancyjnego uśredniania (tolerance averaging technique, TAT)*. Jej cechą charakterystyczną jest, że uwzględnia tzw. efekt skali, który tu i dalej rozumiemy jako wpływ wielkości komórki periodyczności na makroskopowe uśrednione własności ciała. Należy zaznaczyć, że efektu tego nie opisuje klasyczna teoria homogenizacji w sensie podanym powyżej, tj. w której mamy do czynienia z modułami efektywnymi. Technika ta jest w dalszym ciągu rozwijana, a także modyfikowana m.in. w pracach Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2004), M. Woźniak, E. Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (2002), E. Wierzbickiego, Cz. Woźniaka i M. Woźniak (2001), (2003), M. Woźniak, Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2004).

Technikę tolerancyjnego uśredniania stosowano dotychczas przede wszystkim w modelowaniu cienkich płyt periodycznych w pracach J. Jędrysiaka (1998)₁, (1998)₂, (1999), (2000)₁, (2000)₂, (2003)₁, (2003)₂, (2004), Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2004), W. Nagórko i Cz. Woźniaka (2002). Płyt periodycznie pofałdowanych dotyczą prace B. Michalaka, Cz. Woźniaka i M. Woźniak (1996), B. Michalaka (1998), (1999), (2000), (2002). Pewnych zagadnień wspólnych dla modelowania płyt cienkich i średniej grubości dotyczy praca K. Mazur-Śniady, Cz. Woźniaka i M. Woźniak (2004).

Modelowanie techniką uśredniania tolerancyjnego średniej grubości płyt periodycznych zostało zapoczątkowane pracą E. Barona i Cz. Woźniaka (1995), gdzie zamieszczono pewien sposób wyprowadzania równań płyty uwzględniających efekt skali, podano przykład wyznaczania częstości drgań własnych dla zagadnienia jednowymiarowego oraz porównano wyniki z modelem zhomogenizowanym. Wymieniona praca, jak również dalsze publikacje E. Barona (1995), (1999)₂, (2006)₁ oraz E. Barona i J. Jędrysiaka (1998), zawierające porównanie z modelem Kirchhoffa, dotyczyły dynamiki płyt o dwukierunkowej strukturze periodycznej. Publikacje autora niniejszej rozprawy (1999)₁, (2002), (2003), (2003), (2005)₁, (2005)₂, (2005)₃ dotyczą dynamiki i stateczności średniej grubości płyt uniperiodycznych. Podsumowanie i porównanie wszystkich, a także tezy niniejszej rozprawy stanowią rozdział monografii „Selected Topic in Unhomogeneous Media” (2006)₂.

Technika tolerancyjnego uśredniania będzie omówiona w rozdziale 2, gdzie zostaną też przedstawione możliwości jej zastosowań.

1.4. Motywacja, cel i zakres pracy

2D-modele średniej grubości płyt periodycznych były dotychczas formułowane przy wykorzystaniu metod homogenizacyjnych (por. podrozdział 1.3). Zastosowanie w praktyce inżynierskiej tych modeli, szczególnie w zagadnieniach dynamiki, napotyka na pewne ograniczenia. Uniemożliwia np. analizę zagadnienia dyspersji fal oraz opisanie drgań wyższego rzędu. Dlatego też jako narzędzie formułowania 2D-modeli periodycznych płyt średniej grubości wybrano nieasymptotyczną technikę uśredniania tolerancyjnego, którą, jak to będzie wykazane, można w niektórych przypadkach uznać za rozszerzenie metod homogenizacyjnych.

Wszystkie publikacje dotyczące modelowania płyt periodycznych (w znaczeniu podanym w podrozdziale 1.1) metodami nieasymptotycznymi korzystają z założeń Kirchhoffa. Wyjątkiem są prace autora tej rozprawy. Prace J. Jędrysiaka (2001), a także np. Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2004), M. Woźniak, E. Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (2004) upoważniają do stwierdzenia, że sformułowano już teorię cienkich płyt periodycznych uwzględniającą efekt skali. Skłoniło to autora tej rozprawy do podjęcia działań w podobnym kierunku, ale w odniesieniu do płyt o średniej grubości. Jest to tym bardziej konieczne, że kryteria zakresu stosowalności teorii Kirchhoffa są dość precyzyjnie określone, ale tylko dla płyt jednorodnych. Nawet przy stosunkowo cienkich płytach niejednorodnych często zachodzi konieczność zastosowania teorii płyt średniej grubości, por. *Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok* pod red. Cz. Woźniaka (2001), str. 325-328. Tak więc usystematyzowanie i ujednoczenie wyników powyżej wymienionych prac autora może stanowić istotne uzupełnienie i rozszerzenie zakresu stosowalności teorii płyt periodycznych z efektem skali.

Celem pracy jest:

- usystematyzowanie, ujednoczenie i uogólnienie dotychczasowych opracowań dotyczących nieasymptotycznego modelowania liniowo – sprężystych, średniej grubości płyt, o płaskiej strukturze periodycznej,
- uzasadnienie fizycznej poprawności przyjętego sposobu postępowania,
- wykazanie, że efekt skali odgrywa ważną rolę w badaniu zachowania się średniej grubości płyt periodycznych zarówno w procesach dynamicznych, jak i quasi-stacjonarnych,

- porównanie proponowanych modeli wraz z podaniem zakresu ich stosowalności.

W pracy analizowane są zagadnienia dynamiki (drżania) i zagadnienia stacjonarne (stateczność), średniej grubości, liniowo sprężystych płyt periodycznych. Wyprowadzone równania 2D-modeli dotyczą płyt prostokątnych o kierunkach periodyczności równoległych do krawędzi płyty. W procedurze modelowania techniką uśredniania tolerancyjnego wykorzystano hipotezę kinematyczną Hencky'ego – Bolle'a. Współczynnik poprzecznego ścinania przyjmowano wg teorii Uflyyanda. W przykładach zastosowań otrzymanych równań badano wyłącznie płyty prostokątne lub pasma płytowe swobodnie podparte na przeciwległych brzegach. Przyjmowane dane materiałowe i wymiary geometryczne odpowiadają płytom stosowanym w inżynierii budowlanej.

Rozprawa ta jest podsumowaniem, usystematyzowaniem i uogólnieniem dotychczasowych prac autora dotyczących nieasymptotycznego modelowania średniej grubości płyt o strukturze periodycznej. Po raz pierwszy zaadaptowano i wykorzystano do tego celu technikę uśredniania tolerancyjnego. W literaturze tą techniką były dotychczas modelowane wyłącznie płyty spełniające założenia Kirchhoffa (por. podrozdział 1.2).

Za elementy oryginalne tej rozprawy można uznać:

- wyprowadzenie równań 2D-modeli liniowo-sprężystych średniej grubości płyt periodycznych. Równania te umożliwiają uwzględnienie wpływu powtarzalnej komórki na uśredniony opis zachowania się płyty w zagadnieniach dynamicznych i problemach stateczności. 2D-modele średniej grubości płyt (także uniperiodycznych) o okresie periodyczności rzędu grubości są w tej rozprawie prezentowane po raz pierwszy,
- wykazanie możliwości efektywnego zastosowania otrzymanych równań do analizy pewnych zagadnień dynamiki i stateczności płyt periodycznych, ze szczególnym uwzględnieniem płyt stosowanych w budownictwie,
- klasyfikacja średniej grubości płyt periodycznych z podaniem zakresu stosowalności proponowanych 2D-modeli,
- nowe jakościowo rezultaty, jak np. wyznaczenie wyższej częstości drgań własnych, dodatkowej siły krytycznej związanej z efektem skali,
- wskazanie możliwości wykorzystania w niektórych zagadnieniach założeń technicznej anizotropii (ortotropii) przy obliczaniu współczynników uzyskanych równań nieasymptotycznych 2D-modeli.

Zastosowanie zmodyfikowanej techniki uśredniania tolerancyjnego w modelowaniu średniej grubości płyt o strukturze periodycznej pozwala uzyskać nowe jakościowo wyniki w porównaniu do dotychczas powszechnie stosowanych metod homogenizacyjnych. Proponowane 2D-modele są niesprzeczne z modelami homogenizacyjnymi, ale umożliwiają analizę szerszej klasy zagadnień. Można więc mówić o pewnym uogólnieniu modelu zhomogenizowanego.

W zakresie inżynierskich konstrukcji budowlanych, przy stosowanych aktualnie rozwiązaniach technicznych i materiałowych, proponowane modele prowadzą do uściślenia wyników uzyskanych w modelach zhomogenizowanych, a wpływ efektu skali nie ma praktycznego znaczenia. Natomiast w przypadku płyt wykonanych z materiałów o bardzo wysokiej wytrzymałości, przenoszących drgania o wysokich częstotliwościach, wyniki uzyskiwane w ramach proponowanych 2D-modelei mogą już mieć wpływ na wymiarowanie konstrukcji.

1.5. Klasyfikacja płyt periodycznych

Periodyczna struktura płyty może być spowodowana okresową zmiennością własności mechanicznych, inercyjnych, wymiarów geometrycznych lub wszystkich tych czynników jednocześnie. Zmienność własności oraz geometria mogą być opisane periodycznymi funkcjami współrzędnych prostokątnego układu kartezjańskiego, parametryzujących płaszczyznę środkową płyty. Ze względu na te funkcje, por. też podrozdział 1.1, można dokonać podziału na:

- płyty biperiodyczne, gdy funkcje są periodyczne względem obu współrzędnych,
- płyty uniperiodyczne, gdy wymienione funkcje są periodyczne względem jednej współrzędnej,

Podstawowym kryterium klasyfikacji płyt periodycznych jest iloraz okresu periodyczności i grubości płyty, por. R. V. Kohn i M. Vogelius (1984). Możemy więc wyróżnić:

- płyty o okresie dużo większym od jej grubości, które można traktować jako złożone z płytowych komórek o periodycznej strukturze; nazwano je *plytami strukturalnie periodycznymi*,
- płyty o okresie rzędu grubości, którymi najczęściej są płyty niejednorodne; nazwano je *plytami materiałowo periodycznymi*,
- płyty o okresie dużo mniejszym od grubości.

Iloraz okresu periodyczności i grubości płyty determinuje jednocześnie sposób modelowania. Modelując nieasymptotycznie zagadnienia średniej grubości płyt *strukturalnie periodycznych*, technikę uśredniania tolerancyjnego stosujemy bezpośrednio do równań płyty

uśrednionych po grubości. Jak już wspomniano, są to równania różniczkowe cząstkowe o silnie oscylujących i nierzadko nieciągłych współczynnikach funkcyjnych. W wyniku zastosowania proponowanej techniki uzyskujemy uśrednione po okresie równania tj. równania różniczkowe cząstkowe o współczynnikach stałych. Sformułowany w ten sposób 2D-model średniej grubości płyty periodycznej uwzględnia efekt skali oraz pozwala *a posteriori* ustalić błąd popełniony przy obliczaniu wartości liczbowych niewiadomych funkcji.

Ostabiając założenia przed przystąpieniem do procedury modelowania, tzn. przyjmując, że płyta ma strukturę periodyczną w jednym kierunku i dowolną (ale oczywiście identyczną w każdej komórce) zmienność parametrów w kierunku prostopadłym, uzyskujemy równania 2D-modelu średniej grubości *plyt strukturalnie uniperiodycznych*. Są to w ogólnym przypadku równania o współczynnikach zmiennych, ale nie będących już silnie oscylującymi funkcjami. Najczęściej jednak w praktyce inżynierskiej, w tym i w budownictwie, stosowane płyty uniperiodyczne mają stałe parametry geometryczne i materiałowe w kierunku prostopadłym do kierunku periodyczności. Dla tego typu płyt uzyskujemy równania różniczkowe cząstkowe o stałych współczynnikach.

Dla sprężystych *plyt materiałowo periodycznych* punktem wyjścia w procedurze modelowania są równania trójwymiarowej liniowej teorii sprężystości ośrodka o strukturze periodycznej w kierunkach równoległych do płaszczyzny środkowej. Stosując technikę uśredniania tolerancyjnego do tych równań w obrębie odpowiedniej dwuwymiarowej komórki periodyczności, uzyskujemy układ równań różniczkowych cząstkowych o współczynnikach stałych 3D-modelu płyt periodycznych. Stosując z kolei do tych równań hipotezę kinematyczną Henckego-Bolle'a, otrzymujemy równania 2D-modelu średniej grubości płyt *materiałowo periodycznych*. Analogicznie jak w przypadku omawianym powyżej, ostabiając założenia wyjściowe, dochodzimy do równań 2D-modelu płyt *materiałowo uniperiodycznych*. Dla tej grupy płyt periodycznych rozważania ograniczymy tylko do płyt o stałej grubości.

W przedstawionej tu pracy nie rozpatrujemy przypadku, w którym grubość płyty jest dużo większa od charakterystycznego wymiaru komórki periodyczności. Należy wtedy zhomogenizować materiał płyty, bowiem efekt skali jest pomijalny.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że równania 2D-modelu średniej grubości płyt o dwukierunkowej strukturze periodycznej i strukturze uniperiodycznej (bez względu na iloraz okresu periodyczności i grubości płyty) trzeba wyprowadzać niezależnie. Jest to jakościowo inna sytuacja niż przy zastosowaniu metod homogenizacyjnych, gdzie model płyty uniperiodycznej jest przypadkiem szczególnym płyty o periodyce dwukierunkowej.

2. FORMUŁOWANIE 2D-MODELI

2.1. Podstawy modelowania

Niech $Ox_1x_2x_3$ będzie prostokątnym kartezjańskim inercyjnym układem współrzędnych parametryzującym przestrzeń fizyczną. Gdy oznaczymy przez $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i $z = x_3$, to obszar Ω , zajmowany przez niezdeformowaną płytę średniej grubości w konfiguracji wyjściowej, zdefiniujemy jako $\Omega = \{(\mathbf{x}, z) : -\delta(\mathbf{x}) < z < +\delta(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Pi\}$, gdzie Π jest płaszczyzną środkową, natomiast $z = \pm\delta(\mathbf{x})$ są równaniami powierzchni ograniczających płytę. Tak więc $2\delta(\mathbf{x})$ jest grubością płyty w punkcie $\mathbf{x} \in \Pi$. Należy zaznaczyć, że funkcja $\delta(\mathbf{x})$ może być dla pewnych $\mathbf{x} \in \Pi$ nieciągła, a tym samym jest ona określona tylko w tych punktach płaszczyzny Π w których jest ciągła. W następnych rozdziałach obszar Π zawężymy do prostokąta o bokach L_1 i L_2 (leżących na płaszczyźnie Ox_1x_2), tj. $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$.

W całej pracy obowiązuje konwencja sumacyjna. Odstępstwa od niej będą zaznaczone w tekście. Wskaźniki i, j, k, l, \dots będą przyjmować wartości 1, 2, 3 natomiast wskaźniki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ przyjmować wartości 1, 2. Wskaźniki a, b, \dots oraz A, B, \dots przebiegają ciąg 1, 2, ..., n i odpowiednio 1, 2, ..., N . Ujęcie pary wskaźników w nawias oznacza ich symetryzację. Kropka nad symbolem (literą) oznacza różniczkowanie względem czasu.

Przez $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ oznaczono kolejno składowe pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w 3D-liniowej teorii płyt. Przez p^+ i p^- określono działające w kierunku osi z obciążenia powierzchni ograniczających płytę $z = \pm\delta(\mathbf{x})$. Niech b będzie stałą siłą masową (w kierunku osi z), $\rho = \rho(\mathbf{x}, z)$ - gęstością masy materiału płyty, a $A_{ijkl}(\mathbf{x}, z)$ będą składowymi tensora sztywności sprężystej. Przyjęto, że $A_{ijkl}(\cdot)$ oraz $\rho(\cdot)$ są parzystymi funkcjami zmiennej z .

Zakładając, że płaszczyzny $z = \text{const}$ są płaszczyznami symetrii sprężystej, zdefiniowano:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta 33} A_{33\gamma\delta} (A_{3333})^{-1}, \quad (2.1)$$

$$B_{\alpha\beta} = A_{\alpha 3 \beta 3}$$

Związki geometryczne przyjęto z uwzględnieniem członu nieliniowego (równania będą zlinearyzowane)

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} + \frac{1}{2} u_{ki} u_{k,j} \quad (2.2)$$

Natomiast zależności między naprężeniami i odkształceniami przyjęto w postaci

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^0 + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad \sigma_{\alpha 3} = 2B_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta 3}, \quad (\sigma_{33} = 0) \quad (2.3)$$

gdzie $\sigma_{\alpha\beta}^0$ jest wstępnym napięciem w płaszczyźnie środkowej płyty (zależnym co najwyżej od czasu).

Do dalszych rozważań przyjęto hipotezę kinematyczną Hencky'ego - Bolle'a

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) &= z \vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t), \\ u_3(\mathbf{x}, z, t) &= w(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie $w(\mathbf{x}, t)$ jest przemieszczeniem (ugięciem) punktów płaszczyzny Π , natomiast $\vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ - są niezależnymi od ugięcia obrotami, t jest współrzędną czasową. Przemieszczenia $u_\alpha(\cdot)$ są liczone od stanu wstępnego odkształcenia płyty wywołanego przez naprężenia początkowe $\sigma_{\alpha\beta}^0$.

Uwzględniając relacje (2.1) – (2.4), stosując np. zasadę prac przygotowanych (por. Baron (2001)₁), dokonując uśrednienia po grubości płyty oraz linearyzacji otrzymanych równań, przy założeniu że $\left(\int_{-\delta}^{+\delta} \sigma_{\alpha\beta}^0 dz \right)_\beta = 0$, uzyskujemy następujący układ równań różniczkowych cząstkowych dla podstawowych niewiadomych $\vartheta_\alpha(\cdot)$ i $w(\cdot)$:

$$\begin{aligned} (G_{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{\gamma,\delta})_{,\beta} - D_{\alpha\beta} \vartheta_\beta - J \vartheta_\alpha &= 0, \\ N_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha\beta} + [D_{\alpha\beta} (\vartheta_\beta + w_{,\beta})]_{,\alpha} - \mu \ddot{w} + p &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

W równaniach (2.5) oznaczono przez

$$\mu(\mathbf{x}) = \int_{-\delta}^{\delta} \rho(\mathbf{x}, z) dz, \quad J(\mathbf{x}) = \int_{-\delta}^{\delta} z^2 \rho(\mathbf{x}, z) dz,$$

uśrednioną po grubości gęstość masy i inercję obrotową oraz przez

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}) &= \int_{-\delta}^{\delta} z^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}, z) dz, \quad D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \int_{-\delta}^{\delta} K_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, z) dz, \\ p(\mathbf{x}) &= p^+(\mathbf{x}) + p^-(\mathbf{x}) + b\mu(\mathbf{x}), \quad N_{\alpha\beta}^0 = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_{\alpha\beta}^0 dz, \end{aligned}$$

uśrednione sztywności i obciążenie płyty.

W wyrażeniu na sztywność ścinania $D_{\alpha\beta}$ nie obowiązuje konwencja sumacyjna względem α, β , natomiast $K_{\alpha\beta}$ jest współczynnikiem poprzecznego ścinania, por. G. Jemielita (1991).

Równania (2.5) są równaniami 2D-modelu średniej grubości płyty przy założeniach Hencky'ego–Bolle'a. Dla średniej grubości płyt periodycznych są to równania o silnie oscylujących, nierzadko nieciągłych współczynnikach funkcyjnych wywołanych zmiennością rozkładu masy (czyli funkcji $A_{ijkl}(\cdot)$ i $\rho(\cdot)$ oraz (lub) grubości $\delta(\cdot)$). Bezpośrednie korzystanie z tych równań, nawet przy zastosowaniu metod numerycznych, wymaga skomplikowanych i czasochłonnych obliczeń, a przez to ogranicza ich zastosowanie w praktyce inżynierskiej, por. A. Bensoussan, J. Lions, G. Papanicolau (1978). Model ten może jednak stanowić punkt wyjścia do sformułowania modelu uśrednionego, w którym równania mają współczynniki stałe. Dzięki temu uzyskujemy znaczące uproszczenie i przyspieszenie procedur obliczeniowych przy jednoczesnym zachowaniu wystarczającej dla celów projektowania dokładności wyników liczbowych. Równania (2.5) będą podstawą modelowania średniej grubości płyt strukturalnie periodycznych (o okresie dużo większym niż grubość płyty) w rozdziałach 3 i 5.

Modelując płyty materiałowo periodyczne i uniperiodyczne (o okresie rzędu grubości) skorzystamy z wyrażonego w składowych pola przemieszczeń u_i funkcjonału działania $\Lambda(\mathbf{u})$ dla ciała periodycznego zajmującego obszar Ω w przestrzeni E^3 obciążonego wyłącznie wstępnym napięciem $\sigma_{ij}^0(t)$, por. M. Woźniak, E. Wierzbicki i Cz. Woźniak (2004). Uwzględniając uprzednie oznaczenia (b_i są stałymi siłami masowymi) oraz założenia symetrii tensorów $A_{ijkl}(\cdot)$ i $\sigma_{ij}^0(\cdot)$, funkcjonał działania $\Lambda(\mathbf{u})$ przyjmijemy w następującej postaci:

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{1}{2} A_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - \sigma_{ij}^0 (u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i,j} u_{i,j}) + \rho b_i u_i \right] dV$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_i)$, $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, Ω_0 jest zbiorem środków komórek periodyczności leżących wewnątrz obszaru Ω .

Z warunku koniecznego, minimum $\delta\Lambda(u_i) = 0$ funkcjonału, stacjonarności działania $\Lambda(\mathbf{u})$ tj. $\delta u_i(\cdot, t_0) = \delta u_i(\cdot, t_1) = 0$, otrzymujemy przemieszczeniowe równania ruchu ciała periodycznego w obszarze Ω_0 :

$$(A_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \sigma_{ij}^0 w_{i,jk} - \rho \ddot{u}_i + \rho b_i = 0 \quad (2.6)$$

Równania (2.6) z uwagi na funkcje $A_{ijkl}(\cdot), \rho(\cdot)$ (nawet przy założeniu stałej grubości płyty) są równaniami o silnie oscylujących nieciągłych współczynnikach. Podobnie jednak jak w przypadku równań (2.5) mogą stanowić dogodny punkt wyjścia do sformułowania modelu uśrednionego. Uśrednienia możemy dokonywać metodą homogenizacji asymptotycznej lub

też techniką nieasymptotyczną. Zgodnie z motywacją przedstawioną w podrozdziale 1.4, w tej pracy stosować będziemy nieasymptotyczną *technikę uśredniania tolerancyjnego*.

2.2. Technika uśredniania tolerancyjnego

Technika uśredniania tolerancyjnego równań teorii sprężystości i teorii przewodnictwa ciepła ciał periodycznych została szczegółowo przedstawiona w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000). Technika ta wykorzystuje pojęcia i własności *systemu tolerancyjnego, funkcji wolnozmiennnej oraz funkcji periodyzującej*. Celem ułatwienia lektury pracy w podrozdziale tym przytoczono jej najważniejsze założenia i twierdzenia w postaci zaadaptowanej do modelowania średniej grubości płyt periodycznych. Zamieszczono też bibliografię jej zastosowań. Korzystano tu z cytowanej powyżej monografii.

Pojęcie systemu tolerancyjnego jest uogólnieniem pojęcia przestrzeni tolerancji zaproponowanej przez Zeemana (1965) w badaniu topologii mózgu. Koncepcja tolerancji, pod inną nazwą, została też wykorzystana w pracy G. Fichery (1992) dotyczącej fizycznego uzasadnienia parabolicznego równania przewodnictwa ciepła. Najprostszym przykładem tolerancji jest para $(\mathbf{R}, \overset{\varepsilon}{\equiv})$, gdzie \mathbf{R} jest zbiorem liczb rzeczywistych z określoną jednostką miary, natomiast $\overset{\varepsilon}{\equiv}$ jest tolerancją zdefiniowaną na \mathbf{R} za pomocą liczby $\varepsilon > 0$. Liczba ε , którą nazywamy parametrem tolerancji, jest w rozważanym zagadnieniu daną, która określa dokładność obliczania wartości liczb wchodzących do zbioru \mathbf{R} , przy czym

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbf{R} : r_1 \overset{\varepsilon}{\equiv} r_2 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| \leq \varepsilon.$$

Niech $f(\cdot)$ będzie funkcją (określoną na płaszczyźnie Π), której wartości (z ustaloną jednostką miary) są obliczane z pewną dokładnością ε . Wtedy dla każdego $x \in \Pi$ i $y = (y_1, y_2) \in \Pi$ przyjmujemy $f(x) \overset{\varepsilon}{\equiv} f(y) \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Relacja $f(x) \overset{\varepsilon}{\equiv} f(y)$ oznacza, że przy znanej dokładności obliczania wartości funkcji $f(\cdot)$, wartość $f(x)$ może być zastąpiona $f(y)$ i odwrotnie. Jeżeli przez \mathbf{F} oznaczymy zbiór wszystkich funkcji $f(\cdot)$ występujących w rozpatrywanym zagadnieniu (określonych w Π łącznie z ich pochodnymi), natomiast przez $\varepsilon(\cdot)$ zbiór parametrów tolerancji ε_f obliczania funkcji $f(\cdot)$, to parę $T = (\mathbf{F}, \varepsilon(\cdot))$ nazywamy systemem tolerancyjnym.

Oznaczmy przez Δ powtarzalny w płaszczyźnie Π fragment płyty, czyli tzw. komórkę periodyczności, a przez l_α jej wymiary liniowe wzdłuż osi Ox_α . Wprowadźmy również parametr $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ będący przekątną komórki Δ . Dla płyty uniperiodycznej przyjmijmy, że w kierunku osi Ox_1 komórka periodyczności Δ jest odcinkiem, natomiast $l = l_1$. Zakładamy także, iż w każdym przypadku $l \ll L_{\min}$, gdzie L_{\min} jest najmniejszym charakterystycznym wymiarem gabarytowym płyty w płaszczyźnie Π . Tak więc podstawową komórkę periodyczności dla płyt o średniej grubości przyjęto w postaci

$$\Delta = \Delta_1 = (-l_1/2, l_1/2) \text{ - dla płyt uniperiodycznych,}$$

$$\Delta = \Delta_2 = (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2) \text{ - dla płyt biperiodycznych.}$$

Oznaczmy dalej przez $\Delta(x) = x + \Delta$ dowolną komórkę lub przedział periodyczności o środku w punkcie $x \in \Pi$ oraz przez $\Pi_\Delta = \{x : \Delta(x) \in \Pi\}$ - zbiór wszystkich tych środków komórek (przedziałów) periodyczności. Dla dowolnej całkowalnej funkcji $f(\cdot)$, zdefiniowanej w Π , wprowadzamy operator uśredniający

$$\langle f \rangle(x) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(x)} f(y) dy, \quad x \in \Pi_\Delta, \quad (2.7)$$

gdzie

$$1^\circ \text{ jeśli } \Delta = \Delta_1, \text{ to } y = (y_1, x_2), dy = dy_1, |\Delta| = l_1 \text{ (płyta uniperiodyczna),}$$

$$2^\circ \text{ jeśli } \Delta = \Delta_2, \text{ to } y = (y_1, y_2), dy = dy_1 dy_2, |\Delta| = l_1 l_2.$$

W przypadku gdy funkcja $f(\cdot)$ określona prawie wszędzie w Π jest funkcją Δ -periodyczną, czyli dla $\Delta = \Delta_1$, $f(x_1, x_2) = f(x_1 \pm l, x_2)$, a dla $\Delta = \Delta_2$, $f(x_1, x_2) = f(x_1 \pm l_1, x_2) = f(x_1, x_2 \pm l_2) = f(x_1 \pm l_1, x_2 \pm l_2)$, wartości uśrednień (2.7) są odpowiednio bądź niezależne od x_1 , bądź liczbami stałymi. Operację opisaną (2.7) nazwiemy Δ -uśrednieniem funkcji $f(\cdot)$.

Przyjmijmy system tolerancyjny $T = (\mathbf{F}, \varepsilon(\cdot))$ i komórkę periodyczności Δ opisaną parametrem l . Zdefiniowaną na Π ciągłą i ograniczoną funkcję $F(\cdot) \in \mathbf{F}$ będziemy nazywać Δ -wolnozmienną (slowly varying) ze względu na T i l , jeżeli

$$(\forall (x, y) \in \Pi) \left[|x - y| \leq l \Rightarrow F(x) \overset{\varepsilon}{\equiv} F(y) \right].$$

Jeżeli funkcja $F(\cdot)$, zależna także od czasu t jest różniczkowalna, a wszystkie jej ciągłe po-

chodne (także podług czasu) należą do zbioru \mathbf{F} i spełniają powyższą zależność, stosujemy oznaczenie $F(\cdot) \in SV_\Delta(T)$.

Dowolną różniczkowalną funkcję $\varphi(\cdot)$ będziemy nazywać Δ -*periodyzującą* (*periodic like*) ze względu na T i Δ , $\varphi \in PL_\Delta(T)$, jeżeli $\langle \varphi \rangle(\cdot) \in SV_\Delta(T)$ oraz dla każdej komórki periodyczności $\Delta(x)$ istnieje Δ -periodyczna funkcja $\varphi_x(\cdot)$ aproksymująca $\varphi(\cdot)$, czyli

$$(\forall x \in \Pi_\Delta)(\exists \varphi_x \in F)(\forall y) \left[|x - y| \leq l \Rightarrow \varphi(y) \stackrel{\varepsilon}{\cong} \varphi_x(y) \right].$$

Tak więc funkcja Δ -periodyzująca dla $x \in \Pi_\Delta$ w ramach tolerancji może być uważana za Δ -periodyczną, tzn. przyjmującą na przeciwległych brzegach komórki jednakowe (prawie) wartości.

Należy tu zwrócić uwagę, że definicja funkcji Δ -wolnozmiennnej $F(\cdot)$ i periodyzującej $\varphi(\cdot)$ jest związana z wyborem tolerancji ε_f i wielkością komórki l . Tak więc procedura modelowania struktur periodycznych, w których korzystamy z pojęcia tolerancji jest całkowicie odmienna od procedur homogenizacji asymptotycznej, gdzie wymiar l jest traktowany jako mały parametr, por. K. Kohn, M. Vogelius (1984).

Jeżeli ρ - jest Δ -periodyczną dodatnią funkcją a $\psi \in PL_\Delta(T)$, to funkcję ψ nazywać będziemy Δ -*oscyłującą z wagą* ρ , gdy spełnia ona warunek $\langle \rho\psi \rangle(x) \stackrel{\varepsilon}{\cong} 0$ dla każdego $x \in \Pi_\Delta$; zbiór takich funkcji zapiszemy jako $PL_\Delta^0(T)$ lub $PL_\Delta^1(T)$, gdy $\rho = \text{const}$ i $\langle \psi \rangle \stackrel{\varepsilon}{\cong} 0$. Można udowodnić, por. monografia Woźniaka i Wierzbickiego (2000), że istnieje rozkład funkcji periodyzującej $\psi \in PL_\Delta(T)$ na część uśrednioną i oscylującą

$$\varphi(\cdot) = \varphi^o(\cdot) + \varphi^*(\cdot) \quad (2.8)$$

gdzie $\varphi^o(\cdot) = \langle \rho\varphi \rangle(\cdot) [\langle \rho(\cdot) \rangle]^{-1} \in SV_\Delta(T)$, $\varphi^*(\cdot) \in PL_\Delta^0(T)$.

Wprowadźmy także pojęcie *funkcji silnie oscylującej* (*highly oscillating*), $h \in HO_\Delta(T)$, czyli różniczkowalnej funkcji $h(\cdot)$, która jeśli $h \in PL_\Delta(T)$ dla dowolnej funkcji $F \in SV_\Delta(T)$ spełnia warunek

$$\langle \nabla(Fh) \rangle(x) \stackrel{\varepsilon}{\cong} \langle F\nabla h \rangle(x) \quad x \in \Pi_\Delta$$

gdzie $\nabla = \partial/\partial x_1$ dla $\Delta = \Delta_1$, a dla $\Delta = \Delta_2$ $\nabla = \partial/\partial x_\alpha$.

Omawiana w tym podrozdziale technika formułowania modeli matematycznych ciał periodycznych korzysta z własności funkcji Δ -oscyłującej i Δ -periodyzującej. W każdym

rozpatrywanym zagadnieniu występuje też system tolerancyjny $T = (F, \varepsilon(\cdot))$, gdzie F jest zbiorem niewiadomych funkcji wolnozmiennych, a $\varepsilon(\cdot)$ jest odwzorowaniem przyporządkowującym funkcjom $F(\cdot)$ parametry tolerancji ε_f . Niech $F(\cdot) \in SV_\Delta(\cdot)$, $\varphi(\cdot) \in PL_\Delta(\cdot)$, a ponadto niech $f(\cdot)$ będzie dowolną Δ -periodyczną i ograniczoną funkcją, natomiast $h(\cdot)$ - dowolną różniczkowalną Δ -periodyczną taką, że $\sup\{|h(y)| : y \in \Delta\} \leq l$. Można wykazać, a zrobiono to w cytowanej powyżej monografii, że dla każdego $x \in \Pi_\Delta$ zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} \langle fF \rangle(x) &\stackrel{\varepsilon}{\cong} \langle f \rangle F(x) && \text{dla } \varepsilon = \langle |f| \rangle \varepsilon_f, \\ \langle f\varphi \rangle(x) &\stackrel{\varepsilon}{\cong} \langle f\varphi_x \rangle(x) && \text{dla } \varepsilon = \langle |f| \rangle \varepsilon_\varphi, \\ \langle f\nabla(hF) \rangle(x) &\stackrel{\varepsilon}{\cong} \langle fF\nabla h \rangle(x) && \text{dla } \varepsilon = \langle |f| \rangle (\varepsilon_f + l\varepsilon_{\nabla F}), \\ \langle f\nabla(h\varphi) \rangle(x) &\stackrel{\varepsilon}{\cong} -\langle f\varphi\nabla h \rangle(x) && \text{dla } \varepsilon = \varepsilon_\varphi + l\varepsilon_{\nabla\varphi}, \Phi = \langle hf\varphi \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie dla $\Delta = \Delta_1$ $\nabla = \partial/\partial x_1$ (płyta uniperiodyczna), a dla $\Delta = \Delta_2$ $\nabla = \partial/\partial x_\alpha$, natomiast ε jest parametrem tolerancji definiującym daną relację.

W dalszej części pracy, korzystając ze wzorów (2.9), będziemy pomijać ε traktując je jako określone w każdym zagadnieniu poprzez system tolerancyjny.

Uśrednieniem tolerancyjnym (*tolerance averaging-TA*) nazywamy procedurę aproksymowania lewych stron (2.9) - ich stronami prawymi. Oznacza to, że (2.9) są pewnymi dopuszczalnymi przybliżeniami z błędem, który określa parametr tolerancji ε . Ponieważ w większości zagadnień funkcje F i φ są poszukiwanymi rozwiązaniami, wielkość tego błędu może być oszacowana dopiero *a posteriori*.

Pojęcie funkcji wolnozmiennnej i funkcji periodyzującej względem systemu tolerancyjnego $T(\cdot)$ i komórki Δ oraz operacji uśredniania stanowią podstawę sposobu modelowania stosowanego w dalszej części pracy, nazwanego *techniką uśredniania tolerancyjnego* (*tolerance averaging technique-TAT*). Zastosowanie tej techniki do budowania modeli średniej grubości płyt periodycznych (z uwzględnieniem hipotezy kinematycznej Hencky'ego-Bolle'a) wymaga jej uzupełnienia o dwa dodatkowe heurystyczne założenia. Założenia te mają na celu zawężenie klasy poszukiwanych pól przemieszczeń do pewnej podklasy. Ta podklasa pól przemieszczeń obejmuje ruchy o długościach fal rzędu lub dużej od wymiaru komórki periodyczności l , na które nałożone są zaburzenia przemieszczeń spowodowane periodycznie nie-

jednorodną strukturą materiałową oraz (lub) geometrią płyty opisaną silnie oscylującymi funkcjami $\rho(\cdot)$, $A_{ijkl}(\cdot)$, $\delta(\cdot)$.

Oznaczmy teraz symbolem $u_i^0(\cdot)$ składowe uśrednionego pola przemieszczeń

$$u_i^0(\cdot) = \langle \rho \rangle^{-1} \langle \rho u_i \rangle(\cdot)$$

oraz zdefiniujmy pola $u_i^*(\cdot)$, które nazwiemy częścią residualną pola przemieszczeń

$$u_i^*(\cdot) = u_i(\cdot) - u_i^0(\cdot).$$

1 założenie. W analizowanej klasie zagadnień średniej grubości płyt periodycznych uśrednione przemieszczenia $u_i^0(\cdot)$ są dla każdego czasu t funkcjami wolnozmiennymi, $u_i^0(\cdot, t) \in SV_\Delta(T)$, natomiast części residualne składowych przemieszczeń $u_i^*(\cdot)$ są funkcjami silnie oscylującymi, $u_i^*(\cdot, t) \in HO_\Delta(T)$. Należy zauważyć, że w tej sytuacji $\langle \rho u_i^* \rangle = 0$.

2 założenie. Residualne części składowych przemieszczeń, $u_i^*(\cdot, t)$ wywołane periodycznie-niejednorodną strukturą płyty są zgodne z tą strukturą. Jest to tzw. założenie zgodności umożliwiające w każdej komórce $\Delta(x)$, każdą składową pola $u_i^*(\cdot, t)$ niezależnie, aproksymować funkcją Δ -periodyczną.

W procedurze modelowania przyjęto aproksymację w postaci skończonych sum ($A=1,2,3,\dots,N$, obowiązuje konwencja sumacyjna)

$$u_i^*(x, z, t) = h_i^A(y) V^A(x, z, t), \quad y \in \Delta(x), x \in \Pi_\Delta. \quad (2.10)$$

gdzie $V^A(\cdot, t) \in SV_\Delta(T)$, natomiast każde h_i^A jest układem Δ -periodycznych liniowo niezależnych funkcji spełniających warunek $\langle \rho h_i^A \rangle = 0$. Funkcje h_i^A mogą być w ogólnym przypadku nieparzystymi funkcjami współrzędnej x_3 . Mając na uwadze cel i zakres tej pracy, przyjęto dalej, że są od tej współrzędnej niezależne.

Funkcje $V^A(\cdot, t)$ są nowymi niewiadomymi kinematycznymi, które nazwiemy amplitudami zaburzeń, natomiast funkcje $h_i^A(\cdot)$ są w każdym rozpatrywanym zagadnieniu traktowane jako dane i nazywane są modalnymi funkcjami kształtu,

Modalne funkcje kształtu są rozwiązaniem pewnego zagadnienia własnego na komórce Δ przy periodycznych warunkach brzegowych. Opisują one postać możliwych drgań swobodnych wykonywanych przez powtarzalną komórkę płyty. Jeden ze sposobów ich wyznaczenia zostanie przedstawiony w podrozdziale 2.3 tej pracy. Najczęściej jednak funkcje $h_i^A(\cdot)$ przyjmujemy w sposób przybliżony, jako kombinacje funkcji trygonometrycznych, których wartości są mniejsze od parametru l , natomiast ich pochodne są od tego parametru niezależne, czyli

$$\max |h_i^A(y)| \leq l, \quad \nabla h_i^A(y) \in O(1), \quad y \in \Delta(x),$$

gdzie dla $\Delta = \Delta_1$ $\nabla = \partial / \partial x_1$ (płyta uniperiodyczna), a dla $\Delta = \Delta_2$ $\nabla = \partial / \partial x_\alpha$.

Technika uśredniania tolerancyjnego stanowi bardzo dogodny i efektywny narzędzie w badaniu materiałów i struktur periodycznych. Świadczy o tym zakres i różnorodność zastosowań oraz uzyskiwane rezultaty.

W rozdziale 1 przedstawiono prace, w których modelowano techniką uśredniania tolerancyjnego periodyczne płyty cienkie, płyty średniej grubości i płyty pofałdowane. Technika tę zastosowała w analizie belek m.in. K. Mazur-Śniady (1993), (2001), a w analizie periodycznych powłok np. Cz. Woźniak (1999)₂, B. Tomczyk (1999), (2003). Przykładem zastosowania w modelowaniu laminatów i struktur laminowanych mogą być prace S. Matysiaka i W. Nagórko (1995), E. Wierzbickiego (1993), (1995), E. Wierzbickiego i innych (1995), (1997), (2001). Spośród bardzo bogatej literatury z zakresu modelowania periodycznych kompozytów i struktur kompozytowych należy wymienić publikacje Cz. Woźniaka (2002) - (dot. kompozytów o różnych okresach periodyczności w danym kierunku), I. Cieleckiej (1995), (1999), I. Cieleckiej i innych (1998), - (dot. struktur dyskretnych), S. Koniecznego i M. Woźniak (1995), G. Mielczarka i Cz. Woźniaka (1995) - (dot. periodycznie zbrojonych kompozytów włóknistych), E. Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (1999), (2000)₁, I. Cieleckiej i innych (2000) (dot. kompozytów o strukturze plastra miodu), M. Wągrowskiej i Cz. Woźniaka (1996) - (dot. periodycznych materiałów lepkosprężystych), Dell'Isoli i innych (1997), (1998) - (dot. ciał z mikroperiodycznymi ciekłymi inkluzjami), Cz. Woźniaka (1993) (dot. pewnych zagadnień nieliniowych), J. Rychlewskiej, J. Szymczyk i Cz. Woźniaka (1999), (2000), (dyskretny model periodycznych kompozytów). V. Pauk i Cz. Woźniak (1999) zastosowali technikę uśredniania tolerancyjnego do problemu periodycznych powierzchni kontaktu. Bardzo bogata jest literatura dotycząca modelowania zagadnień termodynamicznych. Jak można zauważyć, pierwsze zastosowania TAT były związane z propagacją ciepła w mikroperiodycznych kompozytach. Należy tu wymienić prace J. Ignaczaka i Z. Baczyńskiego (1997), Cz. Woźniaka, E. Wierzbickiego i M. Woźniak (2002), E. Wierzbickiego, Cz. Woźniaka i M. Woźniak (1996), (2002), J. Ignaczaka (2003), (2004), a także Ł. Łacińskiego, (2005), gdzie dokonano analizy numerycznej i porównania modelu uzyskanego za pomocą TAT z modelem homogenizowanym asymptotycznie i modelem Fouriera. Zdecydowana większość wymienionych wyżej publikacji dotyczy dynamiki materiałów bądź struktur periodycznych. W niektórych przypadkach TAT umożliwia analizę efektu skali w zagadnieniach stacjonarnych, np. stateczności płyt, co wykazano w pracach B. Michalaka (1998), (1999) - (dla płyt pofałdowanych), J. Jędrysiaka (2000) - (dla cienkich płyt uniperio-

dycznych), E. Barona (2005)₁, (2005)₂ - (dla płyt uniperiodycznych średniej grubości). Jednakże w większości zagadnień quasi-statycznych amplitudy zaburzeń redukują grubość do nakże w większości zagadnień quasi-statycznych amplitudy zaburzeń redukują się do tzw. parametrów mikrolokalnych, por. np. Cz. Woźniak (1987), S. J. Matysiak 1995), S. J. Matysiak i W. Nagórko (1989). Pełny wykaz publikacji (do roku 2000), w których zastosowano w modelowaniu TAT, można znaleźć w cytowanej już wcześniej monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000); z niej też korzystano opracowując ten akapit.

W ostatnim okresie bardzo dobre wyniki daje zastosowanie techniki uśredniania tolerancyjnego w modelowaniu laminatów z materiału o strukturze gradientowej (ang. FGM - *functionally gradient materials*). Świadczą o tym prace J. Rychlewskiej i in. (2005), (2006), J. Szymczyk i Cz. Woźniaka (2006) oraz przyjęte do druku artykuły J. Szymczyk i Cz. Woźniaka i J. Rychlewskiej i Cz. Woźniaka. Jest to tym istotniejsze, że w dalszej perspektywie zamierzeniem autora jest modelowanie średniej grubości płyt z materiałów gradientowych,

2.3. Modalne funkcje kształtu

Z punktu widzenia techniki uśredniania tolerancyjnego istotny staje się problem wyznaczania (bądź postulowania) modalnych funkcji kształtu. W pierwszym z powyższych przypadków funkcje te stanowią rozwiązanie pewnego zagadnienia własnego na komórce periodyczności przy periodycznych warunkach brzegowych. Ściślej mówiąc, jest to układ liniowo niezależnych, Δ - periodycznych funkcji określających postać możliwych drgań swobodnych wykonywanych przez komórkę płyty. Funkcje te w każdym zagadnieniu są traktowane jako dane. Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że w większości rozpatrywanych zagadnień wystarczające jest pierwsze przybliżenie rozwiązania, a co z tym idzie - ograniczenie się do uwzględnienia pierwszej modalnej funkcji kształtu dla drgań swobodnych I rzędu.

W szczególnych przypadkach funkcje kształtu można postulować *a priori*, kierując się pewnymi wskazaniami heurystycznymi. Podejście takie jest powszechnie stosowane przy modelowaniu periodycznych struktur laminowanych, przyjmując np. funkcje kształtu typu „piła”. Odpowiednie przykłady można znaleźć w książce Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000) oraz w licznych pracach dotyczących termomechaniki laminatów.

Dla większej przejrzystości opisu i znacznego uproszczenia obliczeń skoncentrujemy się na wyznaczeniu modalnych funkcji kształtu płyt uniperiodycznych. Dla tego typu płyt komórka periodyczności redukuje się do przedziału, a wyznaczone funkcje zależą tylko od jednej współrzędnej. W efekcie prowadzi to do rozwiązania zagadnienia opisywanego równa-

niami różniczkowymi zwyczajnymi, a nie cząstkowymi, jak to ma miejsce w przypadku płyt biperiodycznych. Procedura postępowania jest przy tym dla obu typów płyt identyczna. Pewne różnice pojawiają się natomiast przy wyznaczaniu modalnych funkcji kształtu dla płyt strukturalnie i materiałowo periodycznych.

• Płyty strukturalnie periodyczne

Dla płyt strukturalnie periodycznych komórkę periodyczności można traktować jako średniej grubości płytę opisaną np. równaniami (2.5) z periodycznymi warunkami brzegowymi. Załóżmy, że poszukujemy modalnych funkcji kształtu dla jednorodnej, izotropowej i jednokierunkowo periodycznie uźebrowanej płyty o gęstości masy ρ oraz module Younga E i współczynnika Poissona ν . Komórka periodyczności jest wtedy jednowymiarowa $\Delta = \Delta = (-l/2, l/2)$, reprezentując pasmo płytowe o stałych własnościach materiałowych. Rozwiązanie zagadnienia zależy wtedy tylko od jednej współrzędnej, np. x_1 . Oznaczając odcińkowo stałe sztywności zginania i ścinania odpowiednio przez

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G_o = \frac{Ed}{2(1+\nu)}K$$

gdzie d jest grubością płyty, a K – współczynnikiem ścinania,

po rozdzieleniu zmiennych

$$w(x_1, t) = \bar{w}(x_1) \exp(i\omega t), \quad \vartheta_1(x_1, t) = \bar{\vartheta}(x_1) \exp(i\omega t)$$

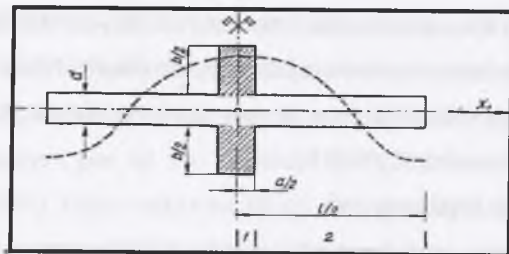
gdzie ω jest częstością drgań własnych, przy pominięciu inercji obrotowej i obciążenia p , równania (2.5) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} D\bar{\vartheta}_{11} - G_o(\bar{\vartheta} + \bar{w}_1) &= 0 \\ G_o(\bar{\vartheta} + \bar{w}_1) + \rho d\omega^2 \bar{w} &= 0 \end{aligned}$$

z których z kolei dochodzimy do równania amplitud średniej grubości pasma płytowego

$$\bar{w}_{1111} + \frac{\rho d}{G_o} \omega^2 \bar{w}_{11} - \frac{\rho d}{D} \omega^2 \bar{w} = 0. \quad (2.11)$$

Ciąg rozwiązań równania (2.11) $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ odpowiadający wartościom własnym $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots$ określa postać możliwych drgań swobodnych wykonywanych przez komórkę płyty, a więc rozwiązania te mogą być przyjęte jako modalne funkcje kształtu. Procedura taka jest stosowana przy rozwiązywaniu różnych zagadnień dynamiki, por. np. Vibrations (1992) pod red. S. Kaliskiego. Jak już uprzednio zaznaczono, ograniczymy się do określenia tylko pierwszej modalnej funkcji kształtu odpowiadającej częstości $\bar{\omega}_1^2$.



Rys. 2.1. Płyta-komórka periodyczności
Fig. 2.1. Plate-periodicity cell

Z uwagi na przyjętą tu symetrię komórki periodyczności (rys.2.1), można zakładać symetryczną lub antysymetryczną postać funkcji kształtu. Po wprowadzeniu bezwymiarowych parametrów

$$\lambda_0^2 = \frac{\rho d l^2}{2G_0} \omega_1^2, \quad \varepsilon = \frac{d}{l},$$

bezwymiarowej współrzędnej

$$\eta = \frac{x_1}{l} \quad \eta \in (-1/2, 1/2,),$$

oraz oznaczając

$$k_{11}^2 = -1 + \sqrt{1 + \frac{12(1-\nu)}{\varepsilon^2 \lambda_0^2}}, \quad k_{12}^2 = k_{11}^2 + 2, \quad (2.12)$$

rozwiązanie równania (2.11) przyjęto w postaci

$$\bar{w} = A_1 \cosh(\lambda_0 k_{11} \eta) + A_2 \cos(\lambda_0 k_{12} \eta) \quad (2.13)$$

natomiast wyrażenia na moment zginający i siłę poprzeczną odpowiednio

$$\begin{aligned} M &= D \frac{\lambda_0^2}{l^2} \left[-k_{12}^2 A_1 \cosh(\lambda_0 k_{11} \eta) + k_{11}^2 A_2 \cos(\lambda_0 k_{12} \eta) \right], \\ Q &= -2G_0 \left[\frac{1}{k_{11}} A_1 \sinh(\lambda_0 k_{11} \eta) + \frac{1}{k_{12}} A_2 \sin(\lambda_0 k_{12} \eta) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie A_1 i A_2 są nieznanymi, dowolnymi stałymi.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie własne dla komórki periodyczności będącej pasmem płytowym (a ściślej: odcinkiem jego płaszczyzny środkowej wzmocnionym zębem o wymiarach $a \times (b+d)$, rys. 2.1. W ogólnym przypadku płyta i zebro mogą być wykonane z różnych materiałów; tu jednak przyjmujemy, że $\rho, E, \nu = \text{const}$. Wprowadźmy dwa dodatkowe parametry geometryczne $\kappa = \frac{a}{l}, \quad m = \frac{b}{d}$.

Założenie symetrii z oczywistych względów umożliwia przedstawienie rozwiązania zagadnienia w postaci dwóch funkcji i zawężenie dziedziny do $\eta \in (0, 1/2)$:

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= A_1 \cosh[k_{11} \lambda_0 (\frac{1}{2} - \eta)] + A_2 \cos[k_{12} \lambda_0 (\frac{1}{2} - \eta)], & \eta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \bar{w}_1 &= A_3 \cosh(k_{13} \lambda_0 \eta) + A_4 \cos(k_{14} \lambda_0 \eta), & \eta \in (0, \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdzie k_{11} i k_{12} są zdefiniowane relacjami (2.13), natomiast

$$k_{13}^2 = -1 + \sqrt{1 + \frac{12(1-\nu)}{(1+m)^2 \lambda_0^2 \varepsilon^2}}, \quad k_{14}^2 = k_{13}^2 + 2.$$

Rozwiązanie (2.15)₁ spełnia periodyczne warunki brzegowe, w tym $\bar{w}_{2,1}(\frac{1}{2}) = 0$. Stałe A_1, A_2, A_3, A_4 wyznaczamy z warunków ciągłości funkcji \bar{w} , jej pochodnych oraz momentów zginających i sił poprzecznych $\bar{w}_1(\frac{1}{2}) = \bar{w}_2(\frac{1}{2}), \bar{w}_{1,1}(\frac{1}{2}) = \bar{w}_{2,1}(\frac{1}{2}), M_1(\frac{1}{2}) = M_2(\frac{1}{2}), Q_1(\frac{1}{2}) = Q_2(\frac{1}{2})$. Należy tu zwrócić uwagę, że warunek ciągłości sił poprzecznych jest równoważny dodatkowemu warunkowi dla modalnych funkcji kształtu $\langle \rho \bar{w} \rangle = 0$.

Podstawiając prawe strony równości (2.15) do warunków brzegowych uzyskujemy układ czterech równań algebraicznych jednorodnych dla A_1, \dots, A_4 . Stosując dalej standardowy tryb postępowania, z warunku zerowania się wyznacznika głównego układu równań (2.15) wyznaczamy bezwymiarową pierwszą wartość własną λ_0 , a następnie odrzucając jedno równanie i dzieląc każde z pozostałych przez A_2 określamy wartości proporcji amplitud $\alpha_1 = \frac{A_1}{A_2}$,

$\alpha_3 = \frac{A_3}{A_2}, \alpha_4 = \frac{A_4}{A_2}$. Poszukiwaną modalną funkcję kształtu można teraz zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= \alpha_1 \cosh[k_{11} \lambda_0 (\frac{1}{2} - \eta)] + \cos[k_{12} \lambda_0 (\frac{1}{2} - \eta)], & \eta \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \bar{w}_1 &= \alpha_3 \cosh(k_{13} \lambda_0 \eta) + \alpha_4 \cos(k_{14} \lambda_0 \eta), & \eta \in (0, \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Określona wzorami (2.16) funkcję kształtu w pracy E. Barona (2003)₂ aproksymowano funkcją

$$g(x_1) = l \left(\cos^{\frac{2\pi}{l}} x_1 + c \right) \quad (2.17)$$

a stałą c wyznaczono z warunku $\langle \rho_0 g \rangle = 0, \quad c = -\frac{\psi_M r}{1 + \psi_M}$,

gdzie $\psi_M = m\kappa, \quad r = \frac{\sin(\pi\kappa)}{\pi\kappa}$.

Wprowadzono także dalsze uproszczenie, traktując zebro jako obciążenie masą skupioną.

Wtedy $r \rightarrow 1$, natomiast $c = \frac{\psi_M}{1 + \psi_M}$.

Przeprowadzone obliczenia numeryczne mają na celu porównanie funkcji kształtu danej wzorami (2.16) i traktowanej jako rozwiązanie ścisłe (przy przyjętych założeniach) z jej aproksymacją w postaci (2.17). Obliczenia wykonano programem MATLAB dla parametrów: $\varepsilon = 0,05; 0,10; 0,20$, $\kappa = 0,10; 0,20; 0,50$, $m = 1,0; 2,0; 4,0$ oraz $l = 1$. Wykresy funkcji \bar{w} (linia przerywana) i g (linia ciągła) przedstawiono na rys.2.2. Kryterium oceny stanowiło porównanie wartości liczbowych uzyskanych z relacji na częstość drgań własnych wywołaną periodyczną strukturą płyty, a wyprowadzonej w cytowanej powyżej pracy:

$$\omega^2 = \frac{g_1^2 G_0}{g^2 \rho_0} \quad (2.18)$$

Definiując bezwymiarową częstość drgań jako

$$\Omega^2 = \frac{\rho l^2 d}{G_0}$$

możemy wyprowadzić wzory na porównywane częstości:

- dla rozwiązania ścisłego (2.16)

$$\Omega_0^2 = \frac{(1+\psi/\kappa) \int_0^{\pi/\kappa} (\bar{w}_1)^2 d\eta + \int_0^{\pi/\kappa} (\bar{w}_1)^2 d\eta}{(1+\psi/\kappa) \int_0^{\pi/\kappa} \bar{w}_1^2 d\eta + \int_0^{\pi/\kappa} \bar{w}_2^2 d\eta}$$

gdzie $\bar{w}' = \frac{d\bar{w}}{d\eta}$,

- dla aproksymacji danej wzorem (2.17)

$$\Omega_1^2 = 4\pi^2 \frac{(1+\psi_M - r\psi_M \cos(\pi\kappa))(1+\psi_M)}{1+\psi_M(2+r\cos(\pi\kappa)) + \psi_M^2(1+r\cos(\pi\kappa) - 2r^2)}$$

- dla (2.17), traktując żebro jako obciążenie masą skupioną

$$\Omega_2^2 = 4\pi^2 \frac{1+\psi_M}{1+3\psi_M}$$

Błędy aproksymacji są określone relacjami

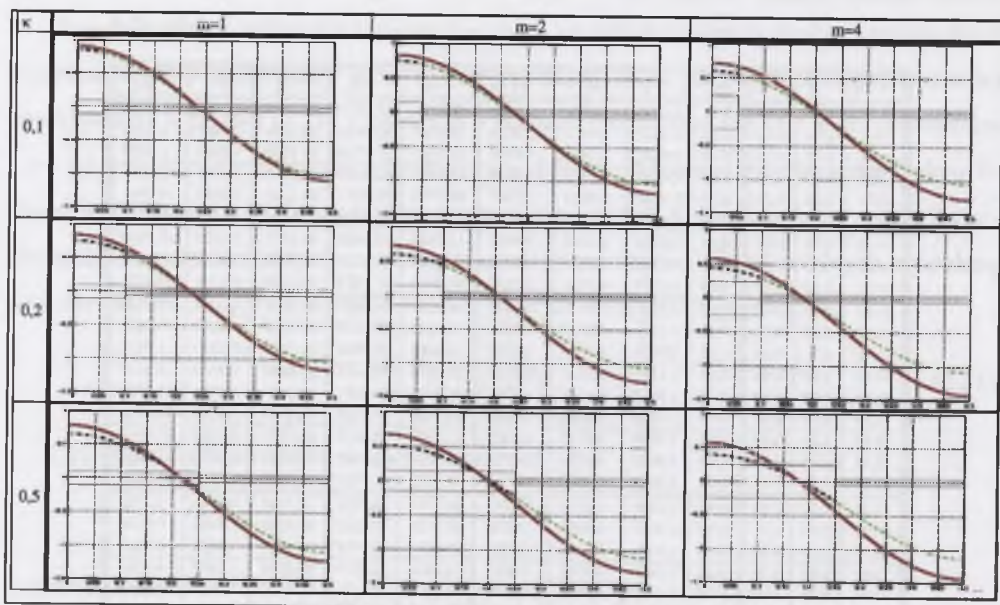
$$\Delta_1 = \frac{|\Omega_0^2 - \Omega_1^2|}{\Omega_0^2}, \quad \Delta_2 = \frac{|\Omega_0^2 - \Omega_2^2|}{\Omega_0^2}$$

Tablica 2.1

d	m	κ	ε_m	Ω_0	Ω_1	Ω_2	Ω_0^2	Ω_1^2	Ω_2^2	Δ_1	Δ_2
0.05	1.00	0.10	0.10	0.6230	5.9772	6.0418	33.1505	33.7879	33.4048	1.0085	0.1365
0.05	2.00	0.10	0.20	0.5884	5.8105	5.8698	29.8096	30.2343	29.6088	1.4217	0.6736
0.05	4.00	0.10	0.40	0.5437	5.5875	5.6402	25.5899	26.0759	25.1226	1.8995	1.8258
0.05	1.00	0.20	0.20	0.6028	5.8804	5.9119	31.6352	32.0168	29.6088	1.2081	6.4056
0.05	2.00	0.20	0.40	0.5640	5.6901	5.7457	28.4726	28.8271	25.1226	1.2149	11.7637
0.05	4.00	0.20	0.80	0.5222	5.4773	5.5209	26.1500	26.4469	20.9003	1.1352	20.0753
0.05	1.00	0.50	0.50	0.6732	6.2106	6.2832	41.7040	43.3859	23.6871	4.0330	43.2019
0.05	2.00	0.50	1.00	0.6732	6.2106	6.2832	46.5089	49.5116	19.7392	6.4590	57.5582
0.05	4.00	0.50	2.00	0.6732	6.2106	6.2832	50.2898	61.7094	16.9193	9.6281	69.9425
0.10	1.00	0.10	0.10	1.2108	5.8016	6.0490	33.1531	33.7879	33.4048	1.0007	0.1444
0.10	2.00	0.10	0.20	1.1471	5.6529	5.8811	29.8148	30.2343	29.6088	1.4072	0.6907
0.10	4.00	0.10	0.40	1.0638	5.4518	5.6556	25.5965	26.0759	25.1226	1.8730	1.8514
0.10	1.00	0.20	0.20	1.1736	5.7153	5.9514	31.6372	32.0168	29.6088	1.2000	6.4113
0.10	2.00	0.20	0.40	1.1017	5.5444	5.7592	28.4762	28.8271	25.1226	1.2321	11.7766
0.10	4.00	0.20	0.80	1.0235	5.3512	5.5435	26.1553	26.4469	20.9003	1.1147	20.0915
0.10	1.00	0.50	0.50	1.3023	6.0072	6.2832	41.7497	43.3859	23.6871	3.9192	43.2641
0.10	2.00	0.50	1.00	1.3023	6.0072	6.2832	46.6225	49.5116	19.7392	6.1906	57.6617
0.10	4.00	0.50	2.00	1.3023	6.0072	6.2832	50.5244	61.7094	16.9193	9.1731	70.0672
0.20	1.00	0.10	0.10	2.1901	5.2251	6.0741	33.4618	33.7879	33.4048	0.9745	0.1703
0.20	2.00	0.10	0.20	2.0947	5.1283	5.9210	29.8321	30.2343	29.6088	1.3483	0.7485
0.20	4.00	0.10	0.40	1.9661	4.9886	5.7111	25.6198	26.0759	25.1226	1.7805	1.9405
0.20	1.00	0.20	0.20	2.1345	5.1184	5.9851	31.6153	32.0168	29.6088	1.1802	6.4295
0.20	2.00	0.20	0.40	2.0248	5.0524	5.8074	28.4877	28.8271	25.1226	1.1915	11.8123
0.20	4.00	0.20	0.80	1.9015	4.9169	5.6042	26.1729	26.4469	20.9003	1.0469	20.1451
0.20	1.00	0.50	0.50	2.3224	5.3564	6.2832	41.8955	43.3859	23.6871	3.5573	43.4616
0.20	2.00	0.50	1.00	2.3224	5.3564	6.2832	46.9843	49.5116	19.7392	5.3790	57.9876
0.20	4.00	0.50	2.00	2.3224	5.3564	6.2832	57.2670	61.7094	16.9193	7.7575	70.4533

Wyniki obliczeń numerycznych zamieszczono w tablicy 2.1. Upoważniają one do stwierdzenia, że w rozpatrywanym zagadnieniu przyjęcie przybliżonej postaci modalnej funkcji kształtu (2.17), daje wystarczająco dokładne wyniki, jeżeli szerokość żebra jest rzędu 0,2 rozpiętości komórki ($\kappa \leq 0,2$), przy każdej rozpatrywanej wysokości żebra opisanej parametrem m . Błąd wzrasta wraz ze wzrostem m i κ , ale nie przekracza 1,9%.

Nawet przy $\kappa = 0,5$ (dla każdego m) wyznaczona z błędem w granicach 6-10% częstość drgań własnych może być wystarczająco dokładna z praktycznego punktu widzenia. Jeżeli szerokość żebra jest rzędu do 0,10 długości komórki ($\kappa \leq 0,10$), to bardzo dokładne wyniki otrzymujemy traktując żebro jako masę skupioną. Przy większych wartościach parametru κ , niezależnie od m , błąd już znacząco rośnie, a uzyskane wartości częstości mogą być uważane co najwyżej jako orientacyjne. Parametr grubości $\varepsilon = \frac{d}{l}$ nie ma praktycznie żadnego wpływu na ocenę poprawności aproksymacji modalnej funkcji kształtu przez funkcję (2.17). Wskazuje to, że można wykorzystać ścisłą postać modalnych funkcji kształtu wyznaczoną dla płyt Kirchhoffa, por. np. J.Jędrzyński (2001), w zagadnieniach płyt średniej grubości.



Rys. 2.2. Wykresy modalnych funkcji kształtu: g —, \bar{w} - - -
Fig. 2.2. Diagrams of mode shape functions g —, \bar{w} - - -

• Płyty materiałowo periodyczne

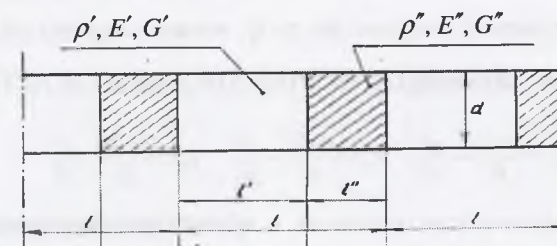
Procedura wyznaczania modalnych funkcji kształtu dla płyt materiałowo periodycznych (uniperiodycznych) jest identyczna, jak opisano uprzednio dla płyt o strukturalnie periodycznych. Określmy więc pierwszą modalną funkcję kształtu dla płyty o stałej grubości d , jednorodnej materiałowo i quasi-izotropowej o modułach Younga E' i E'' oraz module Kirchhoffa G . Periodyka tej płyty jest wywołana zmiennością modułu Younga E . Odpowiada to np. płycie klejonej z drewnianych elementów ciętych wzdłuż i w poprzek włókien.

Zagadnienie drgań takiej płyty rozpatrzono np. w pracy E. Barona (2005)₃, (2006)₁ i zamieszczono w rozdziale 6 niniejszego opracowania.

Dla komórki periodyczności przedstawionej na rys.2.3 założono, że funkcja kształtu jest antysymetryczna i wprowadzono, oprócz uprzednio zdefiniowanych $\varepsilon = \frac{d}{l}$ i $\kappa = \frac{a}{l}$, także parametry materiałowe

$$\beta_1 = \frac{E'}{GK}, \quad \beta_2 = \frac{E''}{GK},$$

gdzie K jest współczynnikiem ścinania.



Rys. 2.3. Komórka periodyczności
Fig. 2.3. Periodicity cell

Bezwymiarowa częstość jest zdefiniowana relacją

$$\lambda_0^2 = \frac{\rho l^2}{GK} \omega_1^2, \quad (2.19)$$

natomiast współczynniki k :

$$k_{11}^2 = -1 + \sqrt{1 + \frac{24}{\varepsilon^2 \lambda_0^2 \beta_1}}, \quad k_{12}^2 = k_{11}^2 + 2,$$

$$k_{22}^2 = -1 + \sqrt{1 + \frac{24}{\varepsilon^2 \lambda_0^2 \beta_2}}, \quad k_{24}^2 = k_{23}^2 + 2.$$

Przy tych założeniach i oznaczeniach rozwiązanie zagadnienia własnego danego (2.11) można zapisać w postaci:

$$\bar{w}_1 = A_1 \sinh(k_{11} \lambda_0 \eta) + A_2 \sin(k_{12} \lambda_0 \eta) \quad \text{dla } \eta \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle,$$

$$\bar{w}_2 = A_3 \sinh[k_{23} \lambda_0 (\frac{1}{2} - \eta)] + A_4 \sin[k_{24} \lambda_0 (\frac{1}{2} - \eta)] \quad \text{dla } \eta \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \quad (2.20)$$

gdzie $\eta = \frac{x}{l}$, $\eta \in (-1/2, 1/2)$.

Funkcje (2.20) spełniają periodyczne warunki brzegowe oraz tożsamościowo dodatkowy warunek $\langle \rho \bar{w} \rangle = 0$. Uwzględniając warunki ciągłości funkcji i jej pochodnej oraz sił wewnętrznych, stosując tok postępowania identyczny jak opisany dla płyt strukturalnie periodycznych, po wyznaczeniu proporcji amplitud uzyskujemy modalne funkcje kształtu dla rozpatrywanego zagadnienia.

Przybliżoną postać modalnej funkcji kształtu dla zagadnień płyt materiałowo periodycznych można uzyskać stosując np. metodę Galerkin. Załóżmy więc przybliżone rozwiązanie zagadnienia opisanego równaniem (2.11) w postaci szeregu potęgowego

$$h_1 = \frac{1}{\kappa} A \eta - \frac{1}{3\kappa^3} B \eta^3 + \frac{1}{5\kappa^5} C \eta^5, \quad \text{dla } \eta \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$$

$$h_2 = \frac{1}{\kappa-1} A (\eta - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3(\kappa-1)^3} B (\eta - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5(\kappa-1)^5} C (\eta - \frac{1}{2})^5, \quad \text{dla } \eta \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \quad (2.21)$$

Spełnia ono periodyczne warunki brzegowe dla $\eta = 1/2$, warunek ciągłości dla $\kappa = 1/2$ oraz dodatkowy warunek $\langle \rho h \rangle = 0$. Oznaczając

$$k_2 = \frac{(\kappa-1)^2}{\beta_1} \frac{\kappa^2}{\beta_2}, \quad k_4 = \frac{(\kappa-1)^4}{\beta_1} \frac{\kappa^4}{\beta_2}, \quad k_6 = \frac{(\kappa-1)^6}{\beta_1} \frac{\kappa^6}{\beta_2}$$

i zachowując pozostałe wprowadzone oznaczenia, w tym (2.19), po ortogonalizacji otrzymamy liniowy układ równań algebraicznych dla nieznanych współczynników A, B, C :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{20} & -10 \frac{2\kappa-1}{\kappa^2(\kappa-1)^2} \frac{\epsilon^2}{\lambda_0^2 k_2} + \frac{3}{7 \cdot 2^4} \\ 1 & \frac{1}{2}(2\kappa-1) \frac{\epsilon^2}{k_4} + \frac{3}{28} & \frac{25}{84}(2\kappa-1) \frac{\epsilon^2}{k_4} + \frac{1}{9 \cdot 2^4} \\ 1 & \frac{1}{2} [(\kappa-1)^4 - \kappa^4] \frac{\epsilon^2}{k_6} + \frac{7}{36} & 10(2\kappa-1) \frac{\epsilon^2}{\lambda_0^2 k_6} - \frac{35}{54} [(\kappa-1)^4 - \kappa^4] \frac{\epsilon^2}{k_6} + \frac{7}{11 \cdot 2^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Stosując opisaną już procedurę postępowania, po wyznaczeniu λ_0 , a następnie proporcji współczynników $\alpha_1 = B/A, \alpha_2 = C/A$ uzyskujemy przybliżoną postać modalnej funkcji kształtu

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{\kappa} \eta - \frac{1}{3! \kappa^3} \alpha_1 \eta^3 + \frac{1}{5! \kappa^5} \eta^5 & \text{dla } \eta \in (0, 1/2) \\ h_2 &= \frac{1}{\kappa-1} (\eta - 1/2) - \frac{1}{3! (\kappa-1)^3} \alpha_1 (\eta - 1/2)^3 + \frac{1}{5! (\kappa-1)^5} \alpha_2 (\eta - 1/2)^5 & \text{dla } \eta \in (1/2, 1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Funkcje (2.23) są aproksymacją rozwiązania ściśłego, niemniej ich wyznaczenie jest pracochłonne, nawet przy wykorzystaniu metod numerycznych. Można jednak dokonać dalszego uproszczenia i przyjąć modalną funkcję kształtu w postaci tzw. funkcji typu „piła” (z ang. *saw-like function*), która jest stosowana w modelowaniu periodycznych laminatów i struktur laminowanych, por. np. E. Wierzbicki i in. (2001). W praktyce oznacza to uwzględnienie w (2.23) tylko pierwszego wyrazu rozwinięcia w szereg. W modelowaniu zagadnień płyt materiałowo periodycznych zastosowano ją np. w pracach K. Mazur-Śniady i in. (2004), E. Barona (2006)₁.

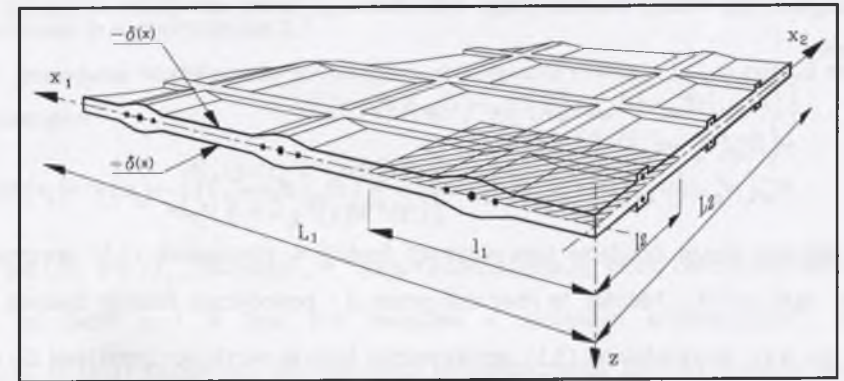
Reasumując, modalne funkcje kształtu średniej grubości płyt materiałowo periodycznych mogą być wyznaczone w sposób ścisły (przy przyjętych założeniach), metodami przybliżonymi, jak przedstawiona metoda ortogonalizacji Galerkina i np. metoda Ritza lub też przyjmowane dla znacznego uproszczenia i przyspieszenia obliczeń w postaci funkcji typu „piła”.

Autor niniejszego opracowania przygotowuje publikację dotyczącą tego zagadnienia.

3. PŁYTY STRUKTURALNIE BIPERIODYCZNE

3.1. Wyprowadzenie równań modelu

Rozważania w tym rozdziale będą dotyczyły płyt periodycznych w kierunkach równoległych do płaszczyzny środkowej o okresach zmienności dużo większych od jej grubości. Płyty takie nazwano *plytami strukturalnie biperiodycznymi*. Przyjęto, że płaszczyzna środkowa płyty Π jest prostokątem o długości boków w kierunku osi x_1 i x_2 odpowiednio L_1 i L_2 ; $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$. Komórka periodyczności $\Delta(x)$ o środku w punkcie $x = (x_1, x_2)$ jest także prostokątem $\Delta = (x_1 - l_1/2, x_2 - l_2/2) \times (x_1 + l_1/2, x_2 + l_2/2)$ o przekątnej $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$. Założono dalej, że $l \ll \{L_1, L_2\}$, a także, iż l jest dużo większe od maksymalnej grubości płyty $l \gg \max 2\delta(x)$. Ponieważ $2\delta \ll l \ll L$, parametr l można w tym przypadku nazwać *parametrem mezostruktury*. Przykładowy fragment takiej płyty przedstawiono na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Fragment płyty strukturalnie biperiodycznej
Fig. 3.1. Fragment of a structural biperiodic plate

Przypomnijmy, że w analizie tej klasy płyt przynajmniej jedna z funkcji opisujących własności materiałowe $\rho(\cdot), A_{ijkl}(\cdot)$ bądź geometrię (grubość) płyty - $\delta(\cdot)$ jest funkcją Δ -periodyczną o okresach l_1 i l_2 względem współrzędnych odpowiednio x_1 i x_2 .

Punktem wyjścia w procedurze modelowania są równania (2.5) płyt średniej grubości wyprowadzone przy przyjęciu hipotezy kinematycznej Hencky'ego-Bolle'a. Podstawowymi niewiadomymi w (2.5) są: przemieszczenia (ugięcia) $w(x, t)$ punktów płaszczyzny Π oraz

$\vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ - niezależne od ugięcia obroty. Równania (2.5) dla płyt periodycznych są równaniami o silnie oscylujących współczynnikach funkcyjnych. Zastosowanie techniki uśredniania tolerancyjnego ma na celu uzyskanie równań o współczynnikach stałych uwzględniających jednocześnie wpływ efektu skali w sensie przedstawionym w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000).

Uwzględniając założenie zgodności, niewiadome funkcje z równań (2.5) przedstawiono w postaci sumy części uśrednionej i oscylującej (residualnej)

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \vartheta_\alpha^o(\mathbf{x}, t) + \vartheta_\alpha^*(\mathbf{x}, t), \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^o(\mathbf{x}, t) + w^*(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (3.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha^o(\mathbf{x}, t) &= \left[\langle J \rangle(\mathbf{x}) \right]^{-1} \langle J \vartheta_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t), \\ w^o(\mathbf{x}, t) &= \left[\langle \mu \rangle(\mathbf{x}) \right]^{-1} \langle \mu w \rangle(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (3.2)$$

są funkcjami wolnozmiennymi, natomiast $\vartheta_\alpha^*(\mathbf{x}, t)$, $w^*(\mathbf{x}, t)$ są funkcjami oscylującymi z wagą odpowiednio J i μ (tj. uśrednioną na grubości płyty inercją obrotową i gęstością). Podstawiając (3.1) do (2.5) i uśredniając otrzymane równania w obrębie dowolnej komórki $\Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi_\Delta$ oraz uwzględniając relacje tolerancyjnego uśredniania uzyskano *uśrednione równania ruchu* w postaci

$$\begin{aligned}\left[\langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{(\gamma,\delta)}^* \rangle \right]_{,\beta} - \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_\beta^o) + \\ - \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^* + w_\beta^*) - \langle J \rangle \vartheta_\alpha^o = 0, \\ N_{\alpha\beta}^o (w_{\alpha\beta}^o + \langle w_{\alpha\beta}^* \rangle) + \left[\langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^* + w_\beta^*) \right]_{,\alpha} + \left[\langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_\beta^o) \right]_{,\alpha} - \langle \mu \rangle w^o + \langle p \rangle = 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

W dalszym etapie dziedzinę niewiadomych funkcji w równaniach (2.5) zawężono do komórki $\Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi_\Delta$. Mnożąc te równania przez Δ - periodyczne funkcje testowe $v_\alpha(\mathbf{y})$ i $\eta(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$, uwzględniając (3.1), aproksymując funkcje oscylujące funkcjami Δ - periodycznymi po uśrednieniu tolerancyjnym sformułowano *periodyczne zagadnienie na komórce* dla (Δ - periodycznych funkcji) $\vartheta_\alpha^*(\mathbf{y}, t)$, $w_x^*(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi_\Delta$, takich, że $\langle J \vartheta_{\alpha\alpha}^* \rangle(\mathbf{x}) = 0$, $\langle \mu w_x^* \rangle(\mathbf{x}) = 0$, w postaci równań wariacyjnych

$$\begin{aligned}\langle v_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{x(\gamma,\delta)}^* \rangle + \langle v_\alpha D_{\alpha\beta} (\vartheta_{x\beta}^* + w_{x,\beta}^*) \rangle + \langle v_\alpha J \vartheta_{x\alpha}^* \rangle = \\ = - \langle v_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o \rangle - \langle v_\alpha D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_\beta^o), \\ - N_{\alpha\beta}^o \langle \eta w_{x,\alpha\beta}^* \rangle + \langle \eta_{,\alpha} D_{\alpha\beta} (\vartheta_{x\beta}^* + w_{x,\beta}^*) \rangle + \langle \eta \mu \ddot{w}_x^* \rangle = \\ = N_{\alpha\beta}^o \langle \eta \rangle w_{\alpha\beta}^o - \langle \eta_{,\alpha} D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_\beta^o) + \langle \eta p \rangle\end{aligned}\quad (3.4)$$

spełnionych dla dowolnych periodycznych funkcji testowych v_α, η dla których $\langle J v_\alpha \rangle(\mathbf{x}) = 0$, $\langle \mu \eta \rangle(\mathbf{x}) = 0$. Należy zwrócić uwagę, że lewe strony relacji (3.4) są funkcjami wolnozmiennymi (jako uśrednienia funkcji oscylujących), natomiast po prawej stronie występują wartości funkcji (i ich pochodnych) ϑ_α^o i w^o w punkcie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są traktowane jako parametry.

Uśrednione równanie ruchu (3.3) i periodyczne zagadnienie na komórce opisane równaniami wariacyjnymi (3.4) tworzą podstawę stosowanego sposobu modelowania.

Przybliżone rozwiązanie periodycznego zagadnienia na komórce $\Delta(\mathbf{x})$ danego równaniem wariacyjnym (3.4) będziemy poszukiwać stosując metodę ortogonalizacji. W tym celu wprowadzono dwa układy liniowo niezależnych *modalnych funkcji kształtu* $h^a(\mathbf{y})$, $a = 1, 2, \dots, n$ i $g^A(\mathbf{y})$, $A = 1, 2, \dots, N$, dla których $\langle J v_\alpha \rangle(\mathbf{x}) = 0$, $\langle \mu \eta \rangle(\mathbf{x}) = 0$. Określają one postać możliwych drgań swobodnych komórki płyty, a w każdym rozpatrywanym zagadnieniu traktowane są jako dane. Sposoby wyznaczania lub przyjmowania modalnych funkcji kształtu są szczegółowo omówione w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000). W tej pracy omówiono je w podrozdziale 2.3.

W procedurze modelowania poszukujemy rozwiązania równań (3.4) w postaci skończonych szeregów

$$\begin{aligned}\vartheta_{x,\alpha}^*(\mathbf{y}, t) &\approx h^a(\mathbf{y}) \Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t), \\ w_x^*(\mathbf{y}, t) &\approx g^A(\mathbf{y}) W^A(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (3.5)$$

gdzie $\mathbf{y} \in (\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi_\Delta$, natomiast „ \approx ” oznacza aproksymację, której dokładność jest uzależniona od liczb n i N (nie jest związana z systemem tolerancyjnym). Funkcje $W^A(\mathbf{x}, t)$, $\Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t)$ są nowymi niewiadomymi kinematycznymi, które nazwalimy uprzednio amplitudami residualnych części ugięcia i obrotów.

W związku z powyższym uzyskujemy dla niewiadomych funkcji $\vartheta_\alpha^*(\cdot)$, $w^*(\cdot)$ następujące, przybliżone relacje

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha^*(\mathbf{y}, t) &\approx h^a(\mathbf{y}) \Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t), \\ w^*(\mathbf{y}, t) &\approx g^A(\mathbf{y}) W^A(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (3.6)$$

które są słuszne jedynie wtedy, gdy $W^A(\mathbf{x}, t)$, $\Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t)$, są funkcjami wolnozmiennymi

$$\Theta_\alpha^a(\cdot, t), W^A(\cdot, t) \in SV_\Delta(T) \quad (3.7)$$

Podstawiając prawe strony relacji (3.5) do (3.4), uwzględniając (3.7) oraz przyjmując, że $v_\alpha = h^a(y)\bar{\Theta}_\alpha^a$, $\eta = g^A(y)\bar{W}^A$, gdzie $\bar{\Theta}_\alpha^a$, \bar{W}^A są dowolnymi stałymi, po pewnych przekształceniach uzyskujemy równania dla niewiadomych $\Theta_\alpha^a(\cdot)$, $W^A(\cdot)$. Występują w nich także niewiadome $\vartheta_\alpha^a(\cdot)$, $w^o(\cdot)$. Podobnie, wstawiając prawe strony (3.6) do (3.3) z uwzględnieniem (3.7), otrzymujemy równania dla $\vartheta_\alpha^a(\cdot)$, $w^o(\cdot)$, a także $\Theta_\alpha^a(\cdot)$, $W^A(\cdot)$ jako podstawowych niewiadomych. Oczywiście, w obydwu przypadkach uwzględniono także relacje tolerancyjnego uśredniania (TA). Oprócz modalnych funkcji kształtu $h^a(x) \in O(l)$ i $g^A(x) \in O(l)$ wprowadzono również funkcje

$$\bar{h}^a = l^{-1}h^a, \quad \bar{g}^A = l^{-1}g^A,$$

których wartości należy traktować jako niezależne od parametru mezostruktury l . Uwzględniając te funkcje w przekształcaniu równań (3.5) i (3.6) uzyskujemy końcowe, ogólne równanie modelu średniej grubości płyt strukturalnie biperiodycznych, w postaci:

1° uśrednionych równań ruchu

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha^a &= 0 \\ N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}^o + Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^o + p &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

2° równań dla amplitud residualnych przemieszczeń

$$\begin{aligned} l^2 \langle J \bar{h}^a \bar{h}^b \rangle \bar{\Theta}_\alpha^b + M_\alpha^a &= 0 \\ l^2 \langle \mu \bar{g}^A \bar{g}^B \rangle \bar{W}^B + Q^A + \langle g_\alpha^A g_\beta^B \rangle N_{\alpha\beta}^o W^B - l \langle \bar{g}^A p \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

3° równań konstytutywnych

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{,\gamma\delta}^a + \langle h_\gamma^a G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \Theta_\delta^a, \\ Q_\alpha &= \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^a + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^a + \langle g_\beta^A D_{\alpha\beta} \rangle W^A, \\ M_\alpha^a &= \langle h_\beta^a h_\gamma^b G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \Theta_\delta^b + \langle h_\beta^a G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{,\gamma\delta}^b + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{h}^b D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^b + \\ &\quad + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^a + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{h}^a g_\beta^A D_{\alpha\beta} \rangle W^A, \\ Q^A &= \langle g_\alpha^A g_\beta^B D_{\alpha\beta} \rangle W^B + \langle g_\alpha^A D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^a + w_{,\beta}^o) + l \langle g_\alpha^A \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^a. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Równania (3.8) – (3.10) mają fizyczny sens jedynie wtedy, gdy podstawowe niewiadome $\vartheta_\alpha^a(\cdot, t)$, $w^o(\cdot, t)$, $\Theta_\alpha^a(\cdot, t)$, $W^A(\cdot, t)$ są funkcjami wolnozmiennymi

$$\vartheta_\alpha^a(\cdot, t), w^o(\cdot, t), \Theta_\alpha^a(\cdot, t), W^A(\cdot, t) \in SV_\Delta(T). \quad (3.11)$$

Otrzymane równania o stałych współczynnikach zależnych *explicitie* od parametru mezostruktury l opisują dynamikę średniej grubości płyt o dwukierunkowej strukturze periodycznej poddanej dodatkowo wstępnemu napięciu w płaszczyźnie środkowej. Podobne równania, lecz nie uwzględniające wpływu wstępnego napięcia w płaszczyźnie środkowej płyty zostały wprowadzone przez E.Barona i Cz.Woźniaka (1995) z zastosowaniem techniki uśredniania tolerancyjnego, ale w trybie postępowania różniącym się od prezentowanego w tej rozprawie.

Układ równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach (3.8) – (3.10) wraz z (3.11) i zależnościami (3.1) i (3.6) tworzą uwzględniający efekt skali, uśredniony 2D – model średniej grubości płyt strukturalnie biperiodycznych. Należy tu zauważyć, że rozważając zagadnienie brzegowo-początkowe dla równań (3.8) – (3.10) warunki brzegowe można sformułować tylko dla funkcji $\vartheta_\alpha^a(\cdot, t)$, $w^o(\cdot, t)$. Dla funkcji $\Theta_\alpha^a(\cdot, t)$, $W^A(\cdot, t)$ nie jest to możliwe, ponieważ otrzymaliśmy dla nich równania różniczkowe zwyczajne z pochodnymi względem czasu. Funkcje Θ_α^a , W^A są zatem, por. Cz.Woźniak (1997), E.Baron, Cz.Woźniak (1995), kinematycznymi zmiennymi wewnętrznymi. Tak więc, w zagadnieniu brzegowo-początkowym należy uwzględnić warunki brzegowe i początkowe dla uśrednionego przemieszczenia $w^o(\cdot)$ i obrotów $\vartheta_\alpha^a(\cdot)$ jak w klasycznej teorii płyt średniej grubości oraz dwa warunki początkowe dla wszystkich amplitud residualnych przemieszczeń $\Theta_\alpha^a(\cdot)$, $W^A(\cdot)$. Wynika stąd możliwość uwzględniania w rozważaniach początkowych zaburzeń pola przemieszczeń.

Równania (3.8-3.10) są równaniami bardzo ogólnymi. W praktyce inżynierskiej, także w budownictwie, mamy najczęściej do czynienia z płytami o materiałowej (bądź technicznej) ortotropii. Także w analizie konkretnych zagadnień satysfakcjonujące jest uzyskanie tzw. pierwszego przybliżenia rozwiązania, co w przypadku proponowanego modelu oznacza przyjęcie we wzorach (3.5) $N=n=1$. Uwzględnienie powyższych ograniczeń w proponowanym 2D – modelu powoduje znaczne uproszczenie obliczeń, także numerycznych, a w aspekcie tej pracy wpływa na przejrzystość i komunikatywność przykładów aplikacyjnych.

Przyjmijmy więc, że płyta jeśli chodzi o swe uśrednione (na komórce) własności mechaniczne jest ortotropowa o głównych osiach ortotropii równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych. Sztywności $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ i $D_{\alpha\beta}$ występujące we wzorach (2.5) można wtedy zredukować do sześciu i oznaczyć:

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{1111}, \quad G_{22} = G_{2222}, \quad G_{12} = G_{21}, \quad G_{1122} = G_{2211}, \\ G &= G_{1212} = G_{1221} = G_{2112} = G_{2121}, \quad D_1 = D_{11}, \quad D_2 = D_{22}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Przyjmijmy także, że w rozpatrywanych zagadnieniach wystarczającą dokładność aproksymacji zapewnia uwzględnienie tylko dwóch modalnych funkcji kształtu ($N=n=1$). Oznaczając

$$h(\cdot) = h'(\cdot) = \bar{h}(\cdot), \quad g(\cdot) = g^1(\cdot) = \bar{g}(\cdot) \quad (3.13)$$

i odpowiednio

$$\Theta_\alpha(\cdot, t) = \Theta_\alpha^1(\cdot, t), \quad W(\cdot, t) = W^1(\cdot, t). \quad (3.14)$$

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach 2D – model ortotropowej płyty periodycznej o średniej grubości jest opisany sześcioma równaniami różniczkowymi cząstkowymi

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta, \beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \vartheta_\alpha^o &= 0 \\ N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}^o + Q_{\alpha, \alpha} - \langle \mu \rangle \bar{w}^o + p &= 0 \\ l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \bar{\Theta}_\alpha + M_\alpha &= 0 \\ l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \bar{W} + \bar{Q} + \langle g_{,\alpha} g_{,\beta} \rangle N_{\alpha\beta} W - l \langle \bar{g} p \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

oraz równaniami konstytutywnymi

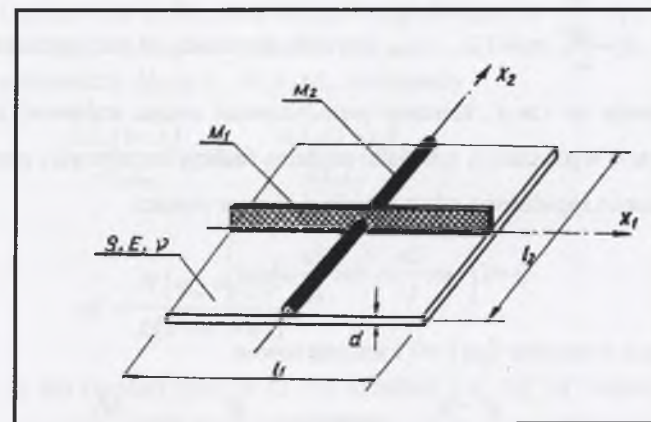
$$\begin{aligned} M_{11} &= \langle G_{11} \rangle \vartheta_{1,1}^o + \langle G_{12} \rangle \vartheta_{2,2}^o + \langle h_1 G_{11} \rangle \Theta_1 + \langle h_2 G_{12} \rangle \Theta_2 \\ M_{12} &= \langle G \rangle (\vartheta_{1,2}^o + \vartheta_{2,1}^o) + \langle h_1 G \rangle \Theta_2 + \langle h_2 G \rangle \Theta_1 \\ M_{22} &= \langle G_{22} \rangle \vartheta_{2,2}^o + \langle G_{12} \rangle \vartheta_{1,1}^o + \langle h_2 G_{22} \rangle \Theta_2 + \langle h_1 G_{12} \rangle \Theta_1 \\ Q_1 &= \langle D_1 \rangle (\vartheta_1^o + w_{,1}^o) + l \langle \bar{h} D_1 \rangle \Theta_1 + \langle g_{,1} D_1 \rangle W \\ Q_2 &= \langle D_2 \rangle (\vartheta_2^o + w_{,2}^o) + l \langle \bar{h} D_2 \rangle \Theta_2 + \langle g_{,2} D_2 \rangle W \\ M_1^o &= \left(\langle h_1^2 G_{11} \rangle + \langle h_2^2 G \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle \right) \Theta_1 + \left(\langle h_1 h_2 G_{12} \rangle + \langle h_2 h_1 G \rangle \right) \Theta_2 + \langle h_1 G_{11} \rangle \vartheta_{1,1}^o + \\ &\quad + \langle h_1 G_{12} \rangle \vartheta_{2,2}^o + \langle h_2 G \rangle (\vartheta_{1,2}^o + \vartheta_{2,1}^o) + l \langle \bar{h} D_1 \rangle (\vartheta_1^o + w_{,1}^o) + l \langle \bar{h} g_{,1} D_1 \rangle W \\ M_2^o &= \left(\langle h_2^2 G_{22} \rangle + \langle h_1^2 G \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_2 \rangle \right) \Theta_2 + \left(\langle h_2 h_1 G_{12} \rangle + \langle h_1 h_2 G \rangle \right) \Theta_1 + \langle h_2 G_{22} \rangle \vartheta_{2,2}^o + \\ &\quad + \langle h_2 G_{12} \rangle \vartheta_{1,1}^o + \langle h_1 G \rangle (\vartheta_{1,2}^o + \vartheta_{2,1}^o) + l \langle \bar{h} D_2 \rangle (\vartheta_2^o + w_{,2}^o) + l \langle \bar{h} g_{,2} D_2 \rangle W \\ \bar{Q} &= \left(\langle g_{,1} D_1 \rangle + \langle g_{,2} D_2 \rangle \right) W + \langle g_{,1} D_1 \rangle (\vartheta_1^o + w_{,1}^o) + \langle g_{,2} D_2 \rangle (\vartheta_2^o + w_{,2}^o) + \\ &\quad + l \langle \bar{h} g_{,1} D_1 \rangle \Theta_1 + l \langle \bar{h} g_{,2} D_2 \rangle \Theta_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dalsze uproszczenie równań (3.15) i (3.16) można uzyskać poprzez założenia odnośnie do symetrii bądź antysymetrii funkcji kształtu $h(\cdot)$ i $g(\cdot)$.

3.2. Zagadnienie drgań

Jako przykład zastosowania równań (3.15) i (3.16) rozpatrzmy zagadnienie drgań swobodnych płyty, której płaska struktura periodyczna jest wywołana periodycznym rozkładem obciążenia inercyjnego. Takiemu modelowi obliczeniowemu odpowiada np. płyta na rys.1.1 jeżeli możemy pominąć sztywność skrętną żeber, natomiast rozstaw żeber jest dużo większy od ich szerokości.

Zakładamy, że jednorodna materiałowo i izotropowa płyta o stałej grubości d , gęstości masy ρ , module Younga E i współczynnika Poissona ν jest obciążona dwoma grupami mas skupionych o wartościach M_1 i M_2 . Komórkę periodyczności takiej płyty przedstawiono na rys.3.2.



Rys. 3.2. Komórka periodyczności płyty z periodycznym obciążeniem inercyjnym
Fig. 3.2. Periodicity cell of a plate with periodically distributed inertial loading

Z uwagi na symetrię powtarzalnej komórki, założono także, że w jej granicach funkcja kształtu $h(x)$ jest nieparzystą, natomiast $g(x)$ - parzystą funkcją zmiennych x . Oznaczono ponadto sztywności zginania i ścinania przez

$$H = \frac{d^2}{12} \frac{E}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{E}{2(1-\nu)} K$$

gdzie K jest współczynnikiem ścinania.

Przy $N_{\alpha\beta} = 0$ i $p=0$, pominięciu wpływu inercji obrotowej oraz powyższych założeniach i oznaczeniach z równań (3.15) i (3.16) uzyskano dwa niezależne równania dla niewiadomych funkcji w^o i W

$$H\nabla^2\nabla^2 w^0 - H\frac{\langle\mu\rangle}{D}\nabla^2\ddot{w}^0 + \langle\mu\rangle\ddot{w}^0 = 0 \quad (3.17)$$

$$\left(\langle Dg_{,1}^2\rangle + \langle Dg_{,2}^2\rangle\right)W + l^2\langle\mu g^2\rangle\ddot{W} = 0$$

gdzie $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_\alpha \partial x_\alpha$, obowiązuje konwencja sumacyjna.

Równania (3.17) posłużą do wyznaczenia częstości drgań własnych prostokątnej płyty o wymiarach płaszczyzny środkowej $L_1 \times L_2$ i swobodnie podartej na wszystkich krawędziach. Uwzględniając warunki brzegowe, będziemy poszukiwać rozwiązania równań (3.17) w postaci

$$w^0(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\alpha_m x_1 \sin\beta_n x_2, \quad W(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t} \bar{W}(\mathbf{x})$$

gdzie $\alpha_m = \frac{m\pi}{L_1}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{L_2}$, $m, n = 1, 2, \dots$, w_{mn} jest stałą amplitudą, ω jest częstością drgań.

Przy założeniu że $l \gg d$, komórkę periodyczności można traktować jako jednorodną, izotropową płytę o wymiarach $l_1 \times l_2$. Jako modalną funkcję kształtu $g(\mathbf{x})$ przyjęto więc przybliżone rozwiązanie zagadnienia własnego takiej płyty w postaci

$$g = l \left(\cos \frac{2\pi}{l_1} x_1, \cos \frac{2\pi}{l_2} x_2 + c \right) \quad (3.18)$$

Stałą c obliczamy z warunku $\langle \mu g \rangle = 0$ i jest ona równa

$$c = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{1 + \psi_1 + \psi_2}, \quad \text{gdzie } \psi_1 = \frac{M_1}{\rho d l_2}, \quad \psi_2 = \frac{M_2}{\rho d l_1}$$

Uwzględniając wprowadzone założenia i oznaczenia, z równań (3.17) otrzymamy dwie relacje określające częstości drgań własnych

$$\omega_1^2 = \frac{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 HD}{\rho(1 + \psi_1 + \psi_2)[(\alpha_m^2 + \beta_n^2)H + D]}, \quad (3.19)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\pi^2 D}{l^2 \rho} \left(\frac{1 + \kappa^2}{\kappa} \right)^2 \frac{1 + (\psi_1 + \psi_2)}{1 + 5(\psi_1 + \psi_2)}, \quad \kappa = l_1/l_2$$

Częstości ω_1 i ω_2 można nazwać odpowiednio, niższą i wyższą częstością pierwszego rzędu drgań swobodnych. Częstość wyższą ω_2 , zależną od okresu l i uwzględniającą efekt skali, można otrzymać tylko w podejściu nieasymptotycznym. Wyrażenie na częstość niższą ω_1 w swym pierwszym przybliżeniu jest niezależne od l i zgodne z uzyskanym w ramach modelu zhomogenizowanego.

Podobne zagadnienie drgań swobodnych prostokątnej płyty żebrowej rozwiązał w sposób przybliżony Timoshenko (1955) stosując metodę Ritza. Rozpatrzył cieką (przy założeniach Kirchhoffa) jednorodną i izotropową płytę wzmocnioną układem prostopadłych do siebie żeber, gdzie r_1 i A_1 było liczbą i polem przekroju żeber równoległych do osi x_1 , natomiast r_2 i A_2 liczbą i polem przekroju żeber równoległych do osi x_2 . Pomijając moment bezwładności żeber i stosując oznaczenia wprowadzone w tym rozdziale, uzyskał relację (jedną) na częstość drgań własnych, którą można zapisać w postaci

$$\omega_o^2 = \frac{L_1 L_2 d H (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}{\rho [d L_1 L_2 + A_1 L_1 (1 + r_1) + A_2 L_2 (1 + r_2)]} \quad (3.20)$$

Dzieląc licznik i mianownik (3.20) przez $L_1 L_2 d$, uwzględniając, że $\frac{L_1}{r_1+1} = l_2$, $\frac{L_2}{r_2+1} = l_1$ oraz że przy przyjętych założeniach $M_1 = \rho A_1$, $M_2 = \rho A_2$, otrzymamy

$$\frac{A_1 L_1 (1 + r_1)}{d L_1 L_2} = \psi_1, \quad \frac{A_2 L_2 (1 + r_2)}{d L_1 L_2} = \psi_2$$

i w rezultacie

$$\omega_o^2 = \frac{H (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}{\rho (1 + \psi_1 + \psi_2)} \quad (3.21)$$

Zauważmy, że dla cienkiej płyty w (3.19)₁ składnik $(\alpha_m^2 + \beta_n^2)H$ można pominąć jako bardzo mały w porównaniu do sztywności D . W tym przypadku wzory (3.19)₁ i (3.21) są identyczne.

Jeżeli rozpatrujemy płytę uźebrowaną tylko w jednym kierunku, np. równoległe do osi x_2 , to relację na częstość drgań własnych takiej płyty możemy uzyskać z (3.20) poprzez formalne założenie, że $A_1 \rightarrow 0$.

Warto tutaj podkreślić, że takiej płyty (tzn. przy $A_1 \rightarrow 0$) nie można analizować w ramach modelu nieasymptotycznego płyt strukturalnie periodycznych. Formalne założenie, że w relacji (3.19)₂ $M_1 \rightarrow 0$, powoduje, że fizyczny sens traci modalna funkcja (lub funkcje) kształtu. Otrzymany wynik nie ma więc swej fizycznej interpretacji.

3.3. Zagadnienie stateczności

Pomijając formalnie w równaniach (3.8) i (3.9) człony dynamiczne otrzymamy równania dla płyt strukturalnie periodycznych w zagadnieniach stacjonarnych. Są to

1° uśrednione równania równowagi

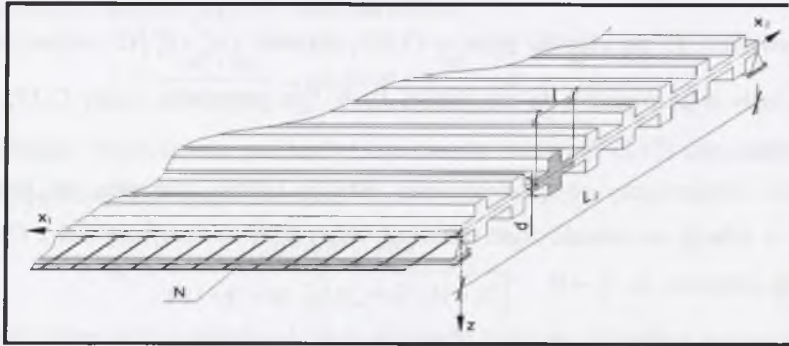
$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_{\alpha}^{\circ} &= 0 \\ N_{\alpha\beta}^{\circ} w_{,\alpha\beta}^{\circ} + Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^{\circ} + p &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

2° równania dla amplitud residualnych przemieszczeń

$$\begin{aligned} M_{\alpha}^{\circ} &= 0 \\ Q^A + \langle g_{,\alpha}^A g_{,\beta}^B \rangle N_{\alpha\beta}^{\circ} W^B - l \langle \bar{g}^A p \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

do których należy dołączyć równania konstytutywne (3.10).

Rozpatrzmy przypadek szczególny modelu płyty strukturalnie periodycznej, przyjmując, że wszystkie niewiadome funkcje (i w związku z tym i wszystkie modalne funkcje kształtu) zależą co najwyżej od jednej współrzędnej, parametryzującej płaszczyznę środkową, np. x_2 . Załóżmy ponadto, że płyta jest periodycznie uźebrowana, jednorodna materiałowo i ortotropowa. Uzyskujemy w ten sposób model pasma płytowego, jednokierunkowo periodycznego wzdłuż jego szerokości o okresie $l = l_2$. Należy tu jednak z naciskiem podkreślić, że modelu tego nie można jednak nazwać strukturalnie uniperiodycznym.



Rys. 3.3 Przypadek szczególny płyty strukturalnie periodycznej
Fig. 3.3. Special case of a structural biperiodic plate

Przeanalizujemy quasi-stacjonarne zagadnienie stateczności takiego swobodnie podpartego periodycznie uźebrowanego pasma płytowego (rys. 3.3). Z uwagi na symetrię komórki periodyczności przyjmiemy, że modalna funkcja kształtu $h(x_2)$ jest funkcją antysymetryczną, natomiast $g(x_2)$ – symetryczną, np. w postaci przybliżonej:

$$h(x_2) = l \sin \frac{2\pi}{l} x_2, \quad g(x_2) = l \left(\cos \frac{2\pi}{l} x_2 + c \right) \quad (3.24)$$

Uwzględniając założenia i oznaczenia (3.12)-(3.14), podobnie jak przy wyprowadzaniu równań (3.15) i (3.16), z relacji (3.22) i (3.23) otrzymamy $\vartheta_1^{\circ} = 0$, $\Theta_1 = 0$ oraz układ równań dla $\vartheta_2^{\circ}(x_2)$, $w^{\circ}(x_2)$, $\Theta_2(x_2)$, $W(x_2)$:

$$\begin{aligned} \langle G_{22} \rangle \vartheta_{2,22}^{\circ} - \langle D_2 \rangle (\vartheta_2^{\circ} + w_{,2}^{\circ}) + \langle h_2 G_{22} \rangle \Theta_2 &= 0 \\ \langle D_2 \rangle \vartheta_{2,2}^{\circ} + (\langle D_2 \rangle + N) w_{,22}^{\circ} &= 0 \\ \langle h_2 G_{22} \rangle \vartheta_{2,2}^{\circ} + (\langle h_2 G_{22} \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_2 \rangle) \Theta_2 + l \langle h g_{,2} D_2 \rangle W &= 0 \\ l \langle h g_{,2} D_2 \rangle \Theta_2 + (\langle g_{,2}^2 D_2 \rangle + \langle g_{,2}^2 \rangle N) W &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

gdzie oznaczono $N = N_{22}$.

Układ równań (3.25) ze względu na w° i ϑ_2° jest układem równań różniczkowych zwyczajnych, natomiast ze względu na amplitudy zaburzeń Θ_2, W układem równań algebraicznych. Z (3.25)₄ możemy wyznaczyć W i podstawić to wyrażenie do (3.25)₃. Uwzględniając, że wobec (3.24) i założenia jednorodności materiałowej

$$\langle g_{,2}^2 D_2 \rangle \langle \bar{h}^2 D_2 \rangle - \langle \bar{h} g_{,2} D_2 \rangle^2 = 0$$

oraz oznaczając

$$\bar{\kappa}_N = 1 + l^2 \frac{\langle \bar{h}^2 D_2 \rangle \langle g_{,2}^2 \rangle N}{\langle h_2^2 G_{22} \rangle (\langle g_{,2}^2 D_2 \rangle + \langle g_{,2}^2 \rangle N)}$$

z równania (3.25)₃ uzyskujemy relację na Θ_2 , a układ równań (3.25) redukuje się do układu dwóch równań dla w° i ϑ_2° . Uwzględniając swobodne podparcie pasma płytowego, zakładamy rozwiązanie równań (3.25) w postaci

$$w^{\circ}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin(k_n x_2), \quad \vartheta_2^{\circ}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \sin(k_n x_2), \quad k_n = \frac{n\pi}{L_2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

co prowadzi do jednorodnego układu liniowych równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \left(\langle G_{22} \rangle - \frac{\langle h_2 G_{22} \rangle^2}{\bar{\kappa}_N \langle h_2^2 G_{22} \rangle} \right) + \langle D_2 \rangle & k_n^2 \langle D_2 \rangle \\ k_n^2 \langle D_2 \rangle & k_n^2 (\langle D_2 \rangle + N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Z warunku zerowania się wyznacznika głównego układu równań (3.26) otrzymamy przybliżone wartości dwóch krytycznych sił ściskających

$$\begin{aligned} N_{1kr} &= \frac{k_n^2 H \langle D_2 \rangle}{k_n^2 H + \langle D_2 \rangle} - l^2 \frac{k_n^4 H \langle g_{,2}^2 \rangle \langle \bar{h}^{-2} D_2 \rangle \langle h_{,2} G_{22} \rangle^2}{\langle g_{,2}^2 D_2 \rangle \langle h_{,2}^2 G_{22} \rangle} + O(l^4) \\ N_{2kr} &= \frac{\langle g_{,2}^2 D_2 \rangle}{\langle g_{,2}^2 \rangle} - l^2 \frac{\langle g_{,2}^2 D_2 \rangle \langle \bar{h}^{-2} D_2 \rangle}{\langle g_{,2}^2 \rangle \langle h_{,2}^2 G_{22} \rangle} + O(l^4) \end{aligned} \quad (3.27)$$

gdzie:
$$H = \langle G_{22} \rangle - \frac{\langle h_{,2} G_{22} \rangle^2}{\langle h_{,2}^2 G_{22} \rangle}$$

Relacje (3.27) uzyskano aproksymując rozwiązanie równania z małym parametrem (w tym przypadku, kwadratem okresu powtarzalności l^2) poprzez rozwinięcie pierwiastków równania w szereg Taylora względem l^2 .

Wyrażenie na N_{1kr} , ściślej: jego pierwszy składnik, jest zgodne z wynikiem uzyskanym metodą homogenizacyjną, co potwierdza poprawność zastosowanego modelu. Można powiedzieć, że uwzględnienie efektu skali powoduje jedynie nieznaczną, nie mającą praktycznego znaczenia, korektę wartości siły krytycznej. Niemniej jednak obniża jej wartość. Pojawienie się relacji na drugą siłę krytyczną N_{2kr} należy wyłącznie rozpatrywać w kategoriach jakościowych. Przy założeniu izotropii płyty, wywołuje ona bowiem naprężenia rzędu modułu Kirchhoffa i nie może być brana pod uwagę w obliczeniach inżynierskich.

Z punktu widzenia celu i zakresu tej pracy problem stateczności płyt strukturalnie periodycznych nie ma charakteru oryginalnego, a rozpatrzono go dla wykazania poprawności zastosowanej metody modelowania.

3.4. Podsumowanie

Równania modelu średniej grubości płyt strukturalnie biperiodycznych (3.8)-(3.10) są układem $3+N+n$ równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach dla uśrednionego przemieszczenia w^o , obrotów ϑ_α^o oraz amplitud zaburzeń W^A, Θ_α^o . W równaniach tych człony inercyjne $l^2 \langle \mu g^A g^B \rangle, l^2 \langle J h^a h^b \rangle$, a także sztywności ścinania $l^2 \langle h^a h^b D_{\alpha\beta} \rangle, l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle, l \langle \bar{h}^a g_{,\alpha}^A D_{\alpha\beta} \rangle$ zależą *explicitie* od parametru mezostruktury l i wyrażają jednocześnie jego wpływ na makromechaniczne własności płyty. Należy tu zaznaczyć, że dla jednorodnej mate-

riałowo płyty o stałej grubości w równaniach tych $l = 0$ oraz $\langle h_{,\gamma}^a G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle = \langle g_{,\alpha}^A D_{\alpha\beta} \rangle = 0$. Wtedy, przy jednorodnych warunkach początkowych, amplitudy zaburzeń są równe zeru $W^A = 0, \Theta_\alpha^o = 0$ dla każdego $x \in \Pi$ i $t \geq 0$, a równania (3.8)-(3.10) redukują się do znanych równań Hencky'wgo-Bolle'a (2.5).

Z drugiej strony równania (3.8)-(3.10) można traktować jako pewne uogólnienie modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. Pomijając wpływ zaburzeń pola przemieszczeń na $N_{\alpha\beta}^o$, poprzez formalne przejście graniczne przy $l_1 \searrow 0, l_2 \searrow 0$ oraz $l_1/l_2 = \text{const}$ z równań (3.9) uzyskujemy $M_\alpha^a = 0$ i $Q^A = 0$, czyli

$$\begin{aligned} \langle h_{,\beta}^a h_{,\gamma}^b G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \Theta_\beta^o + \langle h_{,\beta}^a G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o &= 0, \\ \langle g_{,\alpha}^A g_{,\beta}^B D_{\alpha\beta} \rangle W^B + \langle g_{,\alpha}^A D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Jeżeli liniowe odwzorowanie określone $\langle h_{,\beta}^a h_{,\gamma}^b G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle$ i $\langle g_{,\alpha}^A g_{,\beta}^B D_{\alpha\beta} \rangle$ jest odwracalne, to rozwiązanie (3.28) jest jednoznaczne i może być przedstawione w postaci

$$\begin{aligned} \Theta_\alpha^o &= -K_{\alpha\beta}^{ab} \langle h_{,\beta}^b G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o, \\ W^A &= -L^{AB} \langle g_{,\alpha}^B D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o), \end{aligned}$$

gdzie K, L określają odpowiednie odwzorowanie odwrotne. Tak więc niewiadome amplitudy Θ_α^o, W^A można wyrugować z równań modelu, a po oznaczeniu

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - \langle h_{,\mu}^a G_{\alpha\beta\mu\nu} \rangle K_{\nu\delta}^{ab} \langle h_{,\mu}^b G_{\mu\nu\gamma\delta} \rangle, \\ \tilde{D}_{\alpha\beta} &= \langle D_{\alpha\beta} \rangle - \langle g_{,\lambda}^A D_{\alpha\lambda} \rangle L^{\lambda\mu} \langle g_{,\lambda}^B D_{\mu\beta} \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

uzyskamy z równań (3.8)-(3.10) równania modelu asymptotycznego w postaci

- równań ruchu

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha^o &= 0, \\ N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}^o + Q_{\alpha\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^o + p &= 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

- równań konstytutywnych

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \tilde{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o, \\ Q_\alpha &= \tilde{D}_{\alpha\beta} (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Stałe moduły opisane relacjami (3.29) stanowią pewną aproksymację znanych z teorii homogenizacji modułów efektywnych. Warto też zwrócić uwagę na fakt, że przy rozpatrywaniu zagadnienia brzegowo-początkowego, wobec $M_\alpha^a = 0$ i $Q^A = 0$, warunki brzegowe i po-

czątkowe można formułować tylko dla uśrednionego przemieszczenia w^0 i obrotów ϑ_a^0 . W porównaniu z modelem nieasymptotycznym (3.8)-(3.10) uniemożliwia to analizę zagadnień, w których warunki początkowe zmieniają się w sposób periodyczny.

Równania modelu zhomogenizowanego mają relatywnie prostszą budowę od równań modelu nieasymptotycznego. Jednakże ten zhomogenizowany model może być użyty do analizy tych zagadnień, w których wpływ efektu skali jest pomijalnie mały. Dotyczy to np. zagadnienia stateczności, rozpatrywanego w podrozdziale 3.3, gdzie parametr mezostruktury l nieznacznie wpływał na wartość siły krytycznej, którą można uzyskać z modelu zhomogenizowanego.

Jak łatwo można zauważyć, równania (3.30) i (3.31) mają budowę bardzo podobną do równań modelu nieasymptotycznego w zagadnieniach quasi-stacjonarnych, por. np. (3.22), (3.23). Parametr l w nieznacznym tylko sposób koryguje współczynniki układu równań, a uwzględnienie efektu skali ma znaczenie przede wszystkim jakościowe. Niewielkie ilościowe różnice między uzyskiwanymi rezultatami powodują, że w zagadnieniach stateczności płyt strukturalnie periodycznych z inżynierskiego punktu widzenia wskazane jest posługiwanie się metodami homogenizacyjnymi zamiast TAT. Wyjątek stanowią płyty współpracujące z biperiodycznie niejednorodnym podłożem, J. Jędrzyak (2000)¹, (2001).

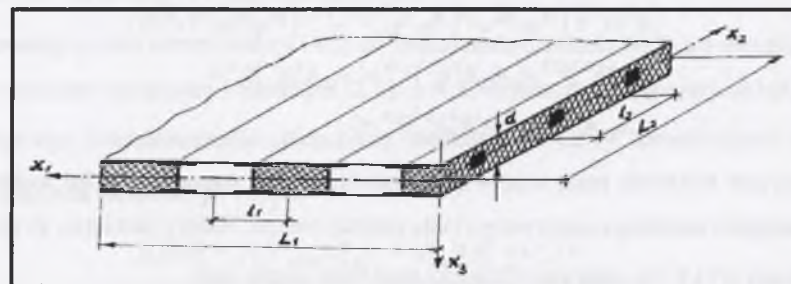
Zastosowanie modelu nieasymptotycznego w zagadnieniach dynamicznych daje nowe jakościowo rezultaty. Analizując drgania własne pasma płytowego, uzyskujemy dwie relacje określające częstotliwości tych drgań. Można je nazwać niższą i wyższą częstotnością pierwszego rzędu drgań swobodnych. Częstotność wyższą, zależną od okresu l i uwzględniającą efekt skali, można otrzymać tylko w podejściu nieasymptotycznym. Umożliwia ona analizę drgań wyższego rzędu oraz zjawiska dyspersji. Wyrażenie na częstotność niższą w swym pierwszym przybliżeniu jest niezależne od l i zgodne z uzyskanym w ramach modelu zhomogenizowanego.

4. PŁYTY MATERIAŁOWO BIPERIODYCZNE

4.1. Wyprowadzenie równań modelu

Rozpatrzmy w tym rozdziale płyty o strukturze periodycznej, dla których okres periodyczności jest rzędu ich grubości, $l \sim 2\delta(\cdot)$, a które nazwano *plytami materiałowo biperiodycznymi*, rys.4.1.

W tym celu sformułujemy najpierw, przed przejściem do 2D-modelu, trójwymiarowe zagadnienie ciała periodycznego zajmującego obszar Ω , w przestrzeni R^3 i obciążonego wyłącznie wstępnym napięciem $\sigma_{ij}^0(\cdot, t)$. Punktem wyjścia jest funkcjonal działania i wynikające z niego równania ruchu (2.5). Są to równania o silnie oscylujących, bardzo często nieciągłych, współczynnikach $A_{ijkl}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, a także $\sigma_{ij}^0(\cdot, t)$.



Rys. 4.1. Fragment płyty materiałowo biperiodycznej
Fig. 4.1. Fragment of a material biperiodic plate

Formułując techniką uśredniania tolerancyjnego przybliżony model ciała periodycznego, opisanego równaniami o współczynnikach stałych, dokonamy dekompozycji pola przemieszczeń na część uśrednioną i residualną wg (2.8), a część residualna będzie aproksymowana skończonymi sumami (2.10). W związku z powyższym składowe pola przemieszczeń zapiszemy w postaci

$$u_i(\mathbf{x}, z, t) = u_i^0(\mathbf{x}, z, t) + h_i^A(\mathbf{x}) V^A(\mathbf{x}, z, t) \quad (4.1)$$

gdzie dla przypomnienia $u_i^0(\cdot)$ są składowymi uśrednionego pola przemieszczeń, $V^A(\cdot, t)$ są nowymi niewiadomymi kinematycznymi nazwanymi amplitudami zaburzeń, natomiast funkcje $h_i^A(\cdot)$ są modalnymi funkcjami kształtu.

Uwzględniając (4.1) oraz że $u_i^o(\cdot, t), V^A(\cdot, t)$ są funkcjami wolnozmiennymi (wraz z pochodnymi), zawiązując rozważania do zagadnień, w których A_{ijkl}, ρ są parzystymi funkcjami zmiennej x_3 , natomiast h_i^A – niezależnymi od x_3 , przy zastosowaniu techniki uśredniania tolerancyjnego, uzyskujemy następujące, uśrednione składniki funkcjonału działania $\mathcal{A}(u_i^o, V^A)$.

Z warunku stacjonarności funkcjonału $\delta\mathcal{A}(u_i^o, V^A)=0$ uzyskamy następujący układ równań (4.3) dla u_i^o i V^A

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \dot{u}_i^o \dot{u}_i^o + \frac{1}{2} \langle \rho h_i^A h_i^B \rangle \dot{V}^A \dot{V}^B, \\ \left\langle \frac{1}{2} A_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle A_{ijkl} \rangle u_{i,j}^o u_{k,l}^o + \frac{1}{2} \langle A_{\alpha\alpha\beta\beta} h_{i,\alpha}^A h_{k,\beta}^B \rangle V^A V^B + \\ &+ \frac{1}{2} \langle A_{i3j3} h_i^A h_j^B \rangle V_{,3}^A V_{,3}^B + \langle A_{ijk\alpha} h_{k,\alpha}^B \rangle u_{i,j}^o V^B, \\ \left\langle \sigma_{ij}^o (u_{k,j} + \frac{1}{2} u_{i,k} u_{i,j}) \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle \sigma_{kj}^o \rangle u_{i,k}^o u_{i,j}^o + \frac{1}{2} \langle \sigma_{\alpha\beta}^o h_{i,\alpha}^A h_{i,\beta}^B \rangle V^A V^B, \\ \langle \rho b_i u_i \rangle &= \langle \rho \rangle b_i u_i^o. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \dot{u}_i^o - \left(\langle A_{ijkl} \rangle u_{k,l}^o + \langle A_{ijk\alpha} h_{k,\alpha}^B \rangle V^A \right)_{,j} - \langle \sigma_{kj}^o \rangle u_{i,k}^o &= \langle \rho \rangle b_i \\ \langle \rho h_i^A h_i^B \rangle \dot{V}^B - \langle A_{ijkl} h_i^A h_k^B \rangle V_{,jl}^B + \langle A_{ijk\alpha} h_{i,\alpha}^B \rangle V^B + \\ + \langle A_{ijk\alpha} h_{k,\alpha}^B \rangle u_{i,j}^o + \langle \sigma_{kj}^o h_{i,k}^A h_{i,j}^B \rangle V^B &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Powyższe równania mają stałe współczynniki, a więc stanowią pewien makroskopowy model wstępnie napiętego, sprężystego ciała periodycznego. Należy pamiętać, że rozwiązania tych równań $u_i^o(\cdot), V^A(\cdot)$ mają swój fizyczny sens tylko wtedy, gdy

$$u_i(\cdot, t) \in SV_d(T), V^A(\cdot, t) \in SV_d(T)$$

dla każdego czasu t . Równania (4.3) mogą być wykorzystane do analizy propagacji długich fal wewnątrz rozpatrywanych ciał periodycznych. Nie mogą być jednak zastosowane w rozwiązywaniu zagadnień brzegowo-początkowych. Nie można bowiem sformułować warunków brzegowych dla funkcji V^A jako pewnego przybliżenia warunków brzegowych dla pola przemieszczeń $u_i = u_i^o + h_i^o V^A$.

Załóżmy teraz, że równania (4.3) dotyczą obszaru $\Omega = \Pi \times (-d/2, d/2)$, zajmowanego przez nie odkształconą płytę typu Reissnera o stałej grubości d , gdzie $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$ jest prostokątem na płaszczyźnie Ox_1x_2 . Płyta jest materiałowo periodyczna o okresach l_α , których długości są rzędu grubości płyty i jednocześnie dużo mniejsze od wymiarów płaszczyzny środkowej L_α , $d \ll L_\alpha$.

Oznaczając $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $z = x_3$ dowolną komórkę periodyczności Δ , o środku w punkcie \mathbf{x} zapiszemy jako $\Delta(\mathbf{x}) = \Delta + \mathbf{x}$, natomiast zbiór wszystkich środków komórek jako $\Pi_o = \{\mathbf{x} \in \Pi : \Delta(\mathbf{x}) \subset \Pi\}$.

Operator (2.7) uzupełnimy dodatkowym uśrednieniem na grubości płyty dla dowolnej całkowalnej funkcji f :

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{\Delta(\mathbf{x})} f(y_1, y_2, z) dy_1 dy_2, \quad \langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \langle f \rangle(\mathbf{x}, z) dz \quad (4.4)$$

Zakładając ponadto, że w rozpatrywanej klasie zagadnień w relacji (4.1) $h_i^A(\cdot) = 0$ $h_\alpha = h_\alpha(\mathbf{x})$ oraz $V^A = z\psi^A(\mathbf{x}, t)$ po uwzględnieniu hipotezy kinematycznej Hencky'ego-Bolle'a (2.4) otrzymamy wyrażenia na przemieszczenia w postaci

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) &= z\vartheta_\alpha^o(\mathbf{x}, t) + zh_\alpha^A(\mathbf{x})\psi^A(\mathbf{x}, t), \\ u_3(\mathbf{x}, z, t) &= w_\alpha^o(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie $\vartheta_\alpha^o, w_\alpha^o, \psi^A$ są podstawowymi niewiadomymi.

Podstawiając prawe strony reakcji (4.5) do funkcjonału działania (4.2), po uwzględnieniu założenia o symetrii sprężystej i oznaczeń (2.1), z (4.3) uzyskamy następujący układ równań dla uśrednionego przemieszczenia płaszczyzny środkowej $w^o(\mathbf{x}, t)$, uśrednionych obrotów $\vartheta_\alpha^o(\mathbf{x}, t)$ i amplitud zaburzeń $\psi^A(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} j\langle \rho \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha^o - j\left(\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{\gamma,\delta}^o \right)_{,\beta} + \langle B_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\alpha^o + w_\alpha^o) + \\ - j\left(\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma,\delta}^A \rangle \psi^A \right)_{,\beta} - j\left(\langle \sigma_{\beta\gamma}^o \rangle \vartheta_{\alpha,\gamma}^o \right)_{,\beta} + \langle z\sigma_{\gamma\gamma}^o \rangle \vartheta_{\alpha,\gamma}^o = 0 \\ \langle \rho \rangle \ddot{w}^o - \left[\langle B_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\alpha^o + w_\alpha^o) \right]_{,\beta} - \left(\langle \sigma_{\beta\beta}^o \rangle w_{,\gamma}^o \right)_{,\beta} = 0 \\ j\langle \rho h_\alpha^A h_\alpha^B \rangle \ddot{\psi}^B + \left(j\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\alpha,\beta}^A h_{\gamma,\delta}^B \rangle + \langle B_{\alpha\beta} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle \right) \psi^B + \\ + j\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma,\delta}^A \rangle \vartheta_{\alpha,\beta}^o + j\langle \sigma_{\alpha\beta}^o h_{\gamma,\delta}^A h_{\gamma,\delta}^B \rangle \psi^B = 0, \quad j = d^2/12 \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdzie pominięto stałe sił masowych i oznaczono $j = d^2/12$.

Równania (4.6) są równaniami nieasymptotycznego 2D-modelu wstępnie napiętych płyt materiałowo periodycznych o średniej grubości. Cechą charakterystyczną tych równań jest to, że amplitudy zaburzeń deformacji ψ^A wyznaczamy z układu równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na pochodne czasowe. Tak więc w zagadnieniach stacjonarnych funkcje te nie są zależne od warunków brzegowych i pełnią rolę pewnych zmiennych wewnętrznych. Z drugiej strony, w zagadnieniach dynamicznych jest możliwe uwzględnienie wpływu po-

czątkowych zaburzeń pola przemieszczeń. Należy też zauważyć, że podkreślone współczynniki $\langle \rho h_\alpha^\Lambda h_\alpha^B \rangle$ $\langle B_{\alpha\beta} h_\alpha^\Lambda h_\beta^B \rangle$ mają wartości rzędu okresu periodyczności (ściślej mówiąc, kwadratu tego okresu). Tak więc równania (4.6) pozwalają uwzględnić wpływ wartości okresu periodyczności na rozwiązanie danego zagadnienia. Pomijając współczynniki zależne od okresu l , można z równań (4.6)₃ wyznaczyć amplitudy zaburzeń ψ^Λ i w efekcie uzyskać z (4.6) układ równań różniczkowych cząstkowych tylko dla uśrednionego przemieszczenia w^0 i uśrednionych obrotów ϑ_α^0 stanowiący pewną aproksymację modelu zhomogenizowanego. Dla jednorodnej materiałowo płyty $l=0$ i $\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma,\delta}^\Lambda \rangle = 0$ otrzymamy $\psi^\Lambda = 0$, a równania (4.6) redukują się do znanych równań Hencky'ego-Bolle'a (2.5).

4.2. Zagadnienie drgań

Równania (4.6) zastosowano do analizy drgań własnych płyty o periodycznie niejednorodnej strukturze tylko w kierunku jednej osi, np. x_2 . Płyta ma stałą grubość d i składa się z periodycznie zmieniających się dwóch jednorodnych liniowo sprężystych i izotropowych materiałów. Założono, że wszystkie niewiadome zależą tylko od czasu i współrzędnej x_2 . Jest to szczególny przypadek płyty o dwukierunkowej strukturze periodycznej. Płyty takiej nie można jednak nazwać uniperiodyczną, por. podrozdział 3.2.

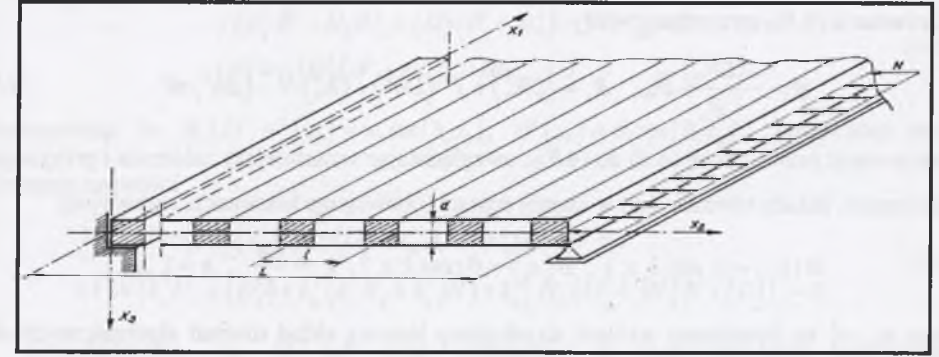
Rozpatrywana płyta jest swobodnie podparta na brzegach $x_2=0, x_2=L$ oraz obciążona w płaszczyźnie środkowej siłami $N = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{22}^0 dz$, rys. 4.2. Uwzględniając izotropię płyty (w tym szczególnym przypadku także i ortotropię) oznaczono

$$C = C_{2222}, \quad D = B_{22} = K_2 A_{2323}$$

gdzie K_2 jest współczynnikiem ścinania.

Jako pierwsze przybliżenie rozwiązania wprowadzono tylko jeden wektor funkcji kształtu $h^1 = (0, h(x_2))$, gdzie $h(\cdot)$ jest l -periodyczną funkcją typu „piła” pokazaną na rys.4.3. Tak więc w tym przykładzie będziemy mieli do czynienia tylko z jedną amplitudą fluktuacji $\psi^1(x_2, t) = \psi(x_2, t)$. Relacje (4.5) przyjmą wtedy postać

$$\begin{aligned} u_1(x_2, z, t) &= 0 \\ u_2(x_2, z, t) &= z\vartheta_2^0(x_2, t) + zh(x_2)\psi(x_2, t) \\ u_3(x_2, z, t) &= w^0(x_2, t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

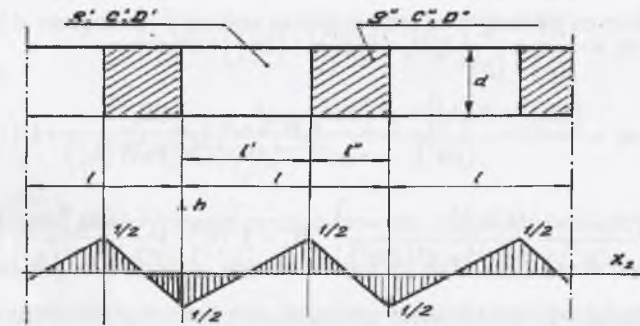


Rys. 4.2. Szczególny przypadek płyty materiałowo biperiodycznej
Fig. 4.2. Special case of a material biperiodic plate

Przy powyższych założeniach równania (4.6) redukują się do układu trzech równań różniczkowych cząstkowych dla uśrednionego przemieszczenia $w^0(x_2, t)$, obrotu $\vartheta^0 = \vartheta_2^0(x_2, t)$ i amplitudy fluktuacji $\psi(x_2, t)$

$$\begin{aligned} j\langle \rho \rangle \ddot{\vartheta}^0 - \langle C \rangle \vartheta_{,22}^0 - j\langle Ch_{,2} \rangle \psi_{,2} + \langle D \rangle (\vartheta^0 + w_{,2}) - jN_{,22}^0 &= 0 \\ \langle \rho \rangle \ddot{w}^0 - \langle D \rangle (\vartheta^0 + w_{,2})_{,2} - Nw_{,22}^0 &= 0 \\ j\langle \rho h^2 \rangle \ddot{\psi} + (j\langle Ch_{,2}^2 \rangle + \langle Dh^2 \rangle) \psi + j\langle Ch_{,2} \rangle \vartheta_{,22}^0 + jN \langle h_{,2}^2 \rangle \psi &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

gdzie $N = \text{const}, j = d^2/12$.



Rys. 4.3. Funkcja kształtu typu „piła”
Fig. 4.3. Saw-like shape function

Należy tu zwrócić uwagę, że współczynniki $\langle Dh^2 \rangle = l^2/12 \langle D \rangle, \langle \rho h^2 \rangle = l^2/12 \langle \rho \rangle$ zależą *explicitie* od okresu l i opisują wpływ efektu skali.

Rozdzielając zmienne, przyjęto niewiadome funkcje w postaci $w^0(x_2, t) = e^{i\omega t} \bar{w}(x_2), \vartheta^0(x_2, t) = e^{i\omega t} \bar{\vartheta}(x_2), \psi(x_2, t) = e^{i\omega t} \bar{\psi}(x_2)$ (ω jest częstością drgań).

Z równania (4.8)₃ otrzymamy wtedy

$$\bar{\psi} = -\frac{\langle Ch_{,2} \rangle}{R_\omega} \bar{\vartheta}_{,2}, \quad R_\omega = \langle Ch_{,2}^2 \rangle + j^{-1} \langle Dh^2 \rangle + \langle h_{,2}^2 \rangle N - \langle \rho h^2 \rangle \omega^2 \quad (4.9)$$

Podstawiając prawą stronę (4.9) do (4.8)₁, uwzględniając wcześniejsze założenia i przyjmując rozwiązanie układu równań (4.8) w znanej postaci (obowiązuje konwencja sumacyjna)

$$\bar{w}(x_2) = w_n \sin(k_n x_2), \quad \bar{\vartheta}(x_2) = \vartheta_n \cos(k_n x_2), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

gdzie w_n, ϑ_n są dowolnymi stałymi, uzyskujemy liniowy układ równań algebraicznych dla w_n, ϑ_n :

$$\begin{bmatrix} k_n^2 j \left(\langle C \rangle - \frac{\langle Ch_{,2} \rangle^2}{R_\omega} + N \right) + \langle D \rangle - j \langle \rho \rangle \omega^2 & k_n j \langle D \rangle \\ k_n j \langle D \rangle & k_n^2 (\langle D \rangle + N) - \langle \rho \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Układ równań (4.10) ma nietrywialne rozwiązanie, gdy wyznacznik główny tego układu jest równy zeru. W takim przypadku, przy uwzględnieniu, że h, lh_2 są rzędu okresu l oraz $l \ll L$, uzyskamy relacje na trzy podstawowe częstości drgań własnych z uwzględnieniem sił w płaszczyźnie środkowej

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_n^2 N}{\langle \rho \rangle} + \frac{k_n^4 H}{\langle \rho \rangle} + O(\varepsilon^6) \\ \omega_2^2 &= \frac{\langle D \rangle}{j \langle \rho \rangle} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left[k_n^2 H_0 + k_n^2 j (N + \langle D \rangle) \right] + O(\varepsilon^4) \\ \omega_3^2 &= \frac{\langle Ch_{,2}^2 \rangle + N \langle h_{,2}^2 \rangle + j^{-1} \langle Dh^2 \rangle}{\langle \rho h^2 \rangle} + \frac{k_n^2}{\langle \rho \rangle} \times \frac{\langle Ch_{,2} \rangle^2}{\langle Ch_{,2}^2 \rangle + N \langle h_{,2}^2 \rangle} + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{gdzie: } H = j \left(\langle C \rangle - \frac{\langle Ch_{,2} \rangle^2}{\langle Ch_{,2}^2 \rangle + N \langle h_{,2}^2 \rangle + j^{-1} \langle Dh^2 \rangle} \right), \quad H_0 = j \left(\langle C \rangle - \frac{\langle Ch_{,2} \rangle^2}{\langle Ch_{,2}^2 \rangle + N \langle h_{,2}^2 \rangle} \right).$$

Dla średniej grubości płyt strukturalnie periodycznych wzory (4.11) mają fizyczny sens, w przypadku gdy $\varepsilon^2 = k_n^2 j \ll 1$.

Rozpatrzmy teraz asymptotyczne aproksymacje równań (4.8). Poprzez formalne przejście $l \rightarrow 0$ równanie (4.8)₁ staje się równaniem algebraicznym dla ψ

$$\langle Ch_{,2} \rangle \psi = -\langle Ch_{,2} \rangle \vartheta_{,2}^0 - N \langle h_{,2}^2 \rangle$$

a (4.8) możemy zapisać jako układ równań różniczkowych cząstkowych dla uśrednionego przemieszczenia w^0 i obrotu ϑ^0

$$\begin{aligned} j \langle \rho \rangle \vartheta^0 - H_0 \vartheta_{,22}^0 + \langle D \rangle (\vartheta^0 + w_{,22}^0) - jN \vartheta_{,22}^0 &= 0 \\ \langle \rho \rangle \bar{w} - \langle D \rangle (\vartheta^0 + w_{,22}^0) - N w_{,22} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Podstawiając do (4.12) $w^0(x_2) = w_n \sin(k_n x_2)$, $\vartheta^0(x_2) = \vartheta_n \cos(k_n x_2)$, otrzymamy jedno równanie częstości

$$\begin{aligned} j \langle \rho \rangle \omega^4 - \langle \rho \rangle \left[(k_n^2 H_0) + \langle D \rangle + k_n^2 j (2N + \langle D \rangle) \right] \omega^2 + \\ + k_n^2 N (k_n^2 H_0 + \langle D \rangle) + k_n^2 (k_n^2 H_0 + k_n^2 jN) + k_n^4 [H_0 \langle D \rangle + jN (N + \langle D \rangle)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Uwzględniając, że $k_n^2 j \ll 1$ oraz wynikające z tego założenia przybliżenie

$$\sqrt{1 + k_n^2 j} \approx 1 + \frac{1}{2} k_n^2 j, \quad \text{uzyskamy z (4.13) następujące wyrażenia na podstawowe częstości}$$

drgań własnych

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_n^2 N}{\langle \rho \rangle} + \frac{k_n^4}{\langle \rho \rangle} \frac{H_0 \langle D \rangle}{\langle D \rangle (1 + k_n^2 j) + k_n^2 H_0} \\ \omega_2^2 &= \frac{\langle D \rangle}{j \langle \rho \rangle} + \frac{1}{j \langle \rho \rangle} \left[k_n^2 H_0 + k_n^2 j (N + \langle D \rangle) \right] + \frac{k_n^4}{\langle \rho \rangle} \frac{H_0 \langle D \rangle}{\langle D \rangle (1 + k_n^2 j) + k_n^2 H_0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że jeżeli d jest rzędu okresu l , to można pominąć człony zawierające $k_n^2 j$ w równaniach (4.12) i (4.13), co jest równoznaczne z pominięciem wpływu inercji obrotowej na wyznaczane częstości. W takim przypadku, przy uwzględnieniu że $k_n^2 H_0 / \langle D \rangle \ll 1$, otrzymamy z modelu asymptotycznego wyrażenie na podstawową częstość drgań własnych

$$\omega_0^2 = \frac{k_n^2 (N + k_n^2 H_0)}{\langle \rho \rangle} \quad (4.15)$$

W toku obliczeń numerycznych przeanalizowano zależność pomiędzy bezwymiarową, niższą częstością drgań własnych, wyprowadzoną ze wzoru (4.11)₁, a parametrem geometrycznym $\kappa = l/d$. Uzyskane wyniki porównano z modelem asymptotycznym, czyli częstością daną wzorem (4.15).

Założono, że materiałowo ortotropowe składniki płyty mają gęstości masy ρ', ρ'' i moduły sprężystości C', C'' oraz odpowiednio D', D'' , rys. 4.3. W takim przypadku, po oznaczeniu $x = l'/l$, $x \in (0, 1)$, uśrednione sztywności można przedstawić w postaci

$$\langle f \rangle = xf' + (1-x)f''$$

$$\langle fh^2 \rangle = l^2/12 \langle f \rangle, \quad \langle fh_{,2} \rangle = f' - f'', \quad \langle fh_{,2}^2 \rangle = f'/x + f''/(1-x)$$

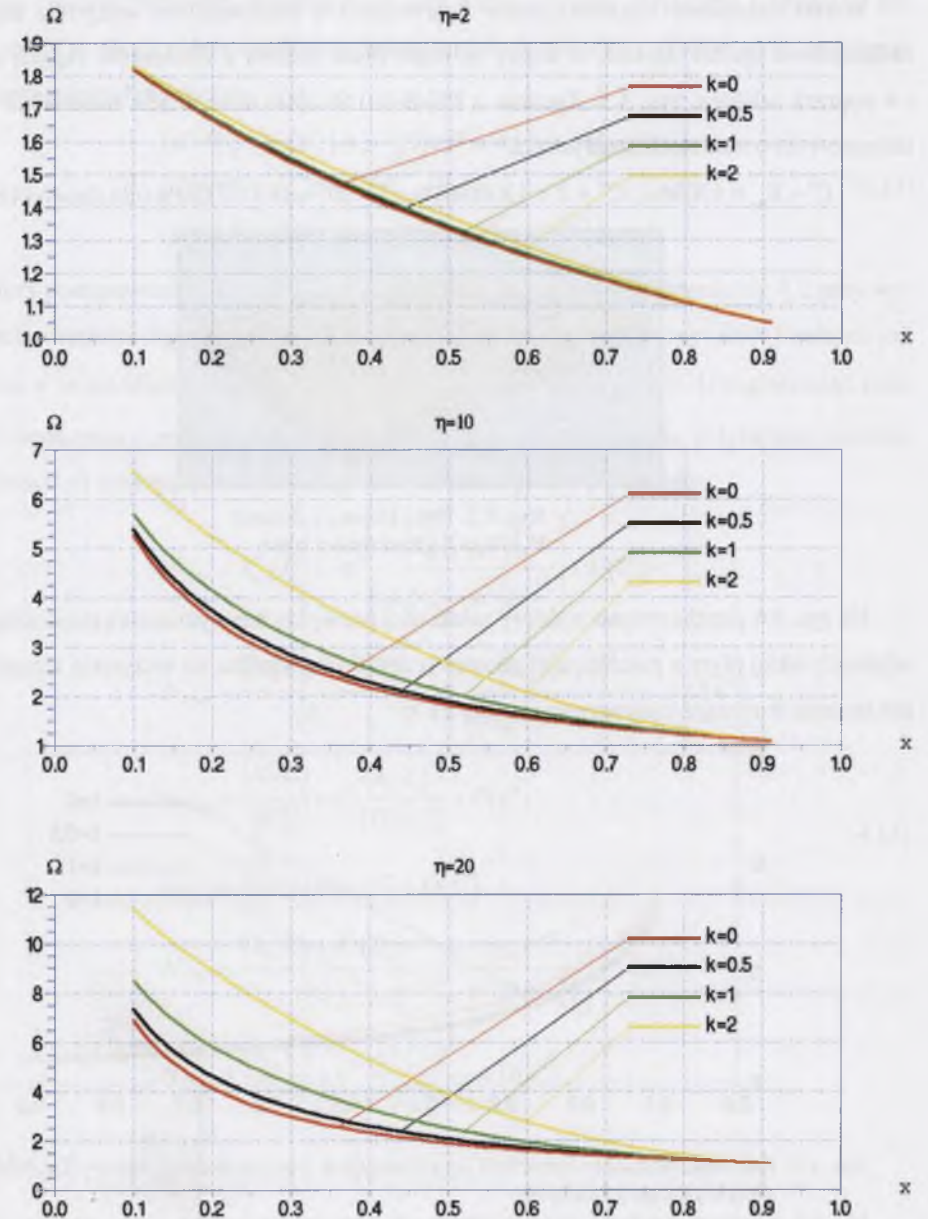
Dla uproszczenia przyjęto także, że $N=0$ oraz $\rho' = \rho'' = \rho$. Wprowadzono dodatkowe parametry materiałowe $\eta = C''/C'$, $\zeta = D''/D'$ oraz $\bar{\nu} = D'/C'$. Mnożąc obie strony relacji (4.11)₁ i (4.15) przez $\rho(C'k^4 j)^{-1}$, uwzględniając wcześniejsze założenia i oznaczenia, uzyskano następujące wyrażenia na bezwymiarowe częstości drgań własnych

$$\Omega_i = \frac{R[x - (1-x)\eta] - (1-\eta)^2}{R}, \quad R = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \kappa^2 \bar{\nu} [x + (1-x)\zeta] \quad (4.16)$$

$$\Omega_0 = \frac{\eta}{(1-x) + x\eta}$$

Obliczenia przeprowadzono dla trzech wartości parametrów $\eta = 2; 10; 20$ oraz $\kappa = 0,5; 1,0; 2,0$ przy przyjęciu, że $\bar{\nu} = 0,3$ i $\zeta = \eta$. Wykresy zależności pomiędzy bezwymiarową częstością drgań własnych Ω a rozmiarami komórki periodyczności (reprezentowanymi przez x oraz κ) oraz parametrem η przedstawiono na rys. 4.4. Na wykresach tych krzywa $\kappa=0$ odpowiada częstości Ω_0 .

Komentując uzyskane wyniki, należy zauważyć, że przy przyjętych założeniach i zakresie parametrów tak materiałowego η , jak i geometrycznego κ model asymptotyczny daje najniższe wartości liczbowe częstości drgań własnych. Wpływ parametru η na wartość liczbową częstości drgań rośnie wraz ze wzrostem η . Dla większych η (poza $\eta = 2$) istotne różnice w wartościach liczbowych częstości w porównaniu z modelem zhomogenizowanym pojawiają się, gdy okres zmienności l jest równy grubości płyty lub większy, czyli $\kappa \geq 1$. Przy małych wartościach κ , a także niezależnie od κ przy $\eta \leq 2$, wystarczająco dokładne wyniki daje model zhomogenizowany. Dla danego η różnice między wartościami liczbowymi częstości przy różnych κ , a więc wpływ efektu skali, są największe wtedy, gdy materiał o niższych parametrach mechanicznych stanowi około 1/3 komórki periodyczności, czyli $\kappa \approx 1/3$.



Rys. 4.4. Wykres zależności pomiędzy częstością drgań własnych a wymiarami komórki periodyczności (κ, x) i parametrem materiałowym η

Fig. 4.4. Diagrams of the free vibration frequencies versus periodic cell measure (κ, x) and material parameter η

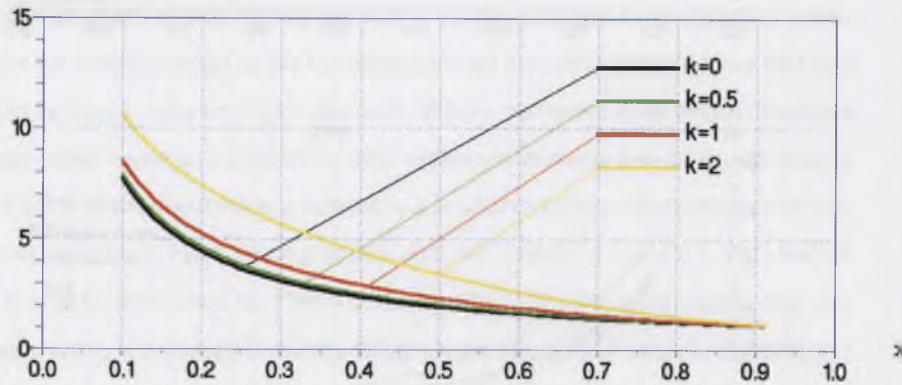
Wśród materiałów konstrukcyjnych stosowanych w budownictwie wszystkie założenia obliczeniowe spełnia drewno, a ściślej mówiąc, płyta klejona z elementów ciętych wzdłuż i w poprzek włókien, rys. 4.5. Zgodnie z PN-B-03150-2000 drewno jest materiałem quasiizotropowym o modułach sprężystości

$$C' = E_{90} = 430 \text{ Mpa}, C'' = E = 13000 \text{ Mpa}, D' = D'' = G = 810 \text{ Mpa} \text{ (dla drewna GL-35)}.$$



Rys. 4.5. Płyta klejona z drewna
Fig. 4.5. A glued timber plate

Na rys. 4.6 przedstawiono wykresy zależności pomiędzy bezwymiarową częstością drgań własnych takiej płyty a parametrami geometrycznymi. Potwierdza on wszystkie wcześniejsze komentarze dotyczące wpływu parametrów x i κ .



Rys. 4.6. Zależność pomiędzy częstością drgań własnych a parametrami geometrycznymi x , κ dla płyty wykonanej z drewna

Fig. 4.6. Interrelation between the free vibration frequency and geometrical parameters x , κ for timber plate

4.3. Zagadnienie stateczności

Rozpatrzmy, w ramach nieasymptotycznego modelu płyt materiałowo periodycznych, quasi-statyczne zagadnienie stateczności pasma płytowego przedstawionego na rys. 4.2. Jak to już zaznaczono, jest to przypadek szczególny tego modelu, zagadnienie jednowymiarowe, nie

związane pasmem płytowym definiowanym jako uniperiodyczne. Krytyczne wartości sił ścisiskających N w płaszczyźnie środkowej pasma można wyznaczyć z równań (4.8), w których pominięto człony dynamiczne:

$$\begin{aligned} \langle C \rangle \vartheta_{,22}^{\circ} + j \langle Ch_{,2} \rangle \psi_{,2} - \langle D \rangle (\vartheta^{\circ} + w_{,2}) + j N_{,22}^{\circ} &= 0 \\ \langle D \rangle (\vartheta^{\circ} + w_{,2})_{,2} + N w_{,22}^{\circ} &= 0 \\ (j \langle Ch_{,2}^2 \rangle + \langle Dh^2 \rangle) \psi + j \langle Ch_{,2} \rangle \vartheta_{,22}^{\circ} + j N \langle h_{,2}^2 \rangle \psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Procedura postępowania jest przy tym analogiczna, jak opisana w podrozdziale 4.2 przy wyznaczaniu częstości drgań własnych. Prowadzi ona do takich samych wyników finalnych jak przyjęcie w wyprowadzonych już wzorach (4.11), że $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = 0$. Uwzględniając założenia i oznaczenia z podrozdziału 4.2, otrzymano z (4.11) następujące, przybliżone wartości krytycznych sił ścisiskających w płaszczyźnie środkowej pasma płytowego:

$$\begin{aligned} N_{11kr} &= k_n^2 j \bar{H} \left[1 - \varepsilon^2 \frac{\langle h_{,2}^2 \rangle \langle h_{,2} C \rangle^2}{(\langle h_{,2}^2 C \rangle + \kappa^2 \langle D \rangle)^2} \right] + O(\varepsilon^6) \\ N_{12kr} &= \frac{\langle h_{,1}^2 C \rangle + \kappa^2 \langle D \rangle}{\langle h_{,1}^2 \rangle} \left[1 + \varepsilon^2 \frac{\langle h_{,2}^2 \rangle \langle h_{,2} C \rangle^2}{(\langle h_{,2}^2 C \rangle + \kappa^2 \langle D \rangle)^2} \right] + O(\varepsilon^4) \\ N_{21kr} &= \frac{\langle h_{,2}^2 C \rangle}{\langle h_{,2}^2 \rangle} - \varepsilon^2 \frac{\langle h_{,2} C \rangle^2}{\langle D \rangle \langle h_{,2}^2 \rangle} + O(\varepsilon^4) \\ N_{22kr} &= \frac{\langle D \rangle}{\varepsilon^2} + \langle D \rangle + \langle C \rangle + O(\varepsilon^4) \\ N_{31kr} &= \frac{\langle h_{,2}^2 C \rangle + \kappa^2 \langle D \rangle}{\langle h_{,2}^2 \rangle} \left[1 - \varepsilon^2 \frac{\langle h_{,2} C \rangle^2}{\kappa^2 \langle D \rangle \langle h_{,2}^2 \rangle} \right] + O(\varepsilon^4) \\ N_{32kr} &= \frac{\langle h_{,2}^2 C \rangle}{\langle h_{,2}^2 \rangle} + \varepsilon^2 \frac{\langle h_{,2}^2 C \rangle^2}{\kappa^2 \langle D \rangle \langle h_{,2}^2 \rangle} + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdzie $\bar{H} = \langle C \rangle - \frac{\langle h_{,2} C \rangle^2}{\langle h_{,2}^2 C \rangle + \kappa^2 \langle D \rangle}$, $\varepsilon^2 = k_n^2 j \ll 1$.

Podobnie z równania (4.5), przy $\omega_0 = 0$, uzyskujemy wartości sił krytycznych w modelu zhomogenizowanym asymptotycznie

$$N_{01kr} = k_n^2 j \bar{H}_0, \quad N_{02kr} = \frac{\langle h_{n2} C \rangle^2}{\langle h_{n2}^2 C \rangle} \quad (4.19)$$

$$\text{gdzie } \bar{H}_0 = \langle C \rangle - \frac{\langle h_{n2} C \rangle^2}{\langle h_{n2}^2 C \rangle}.$$

Otrzymane relacje (4.18) wymagają komentarza. Po pierwsze, ich liczba jest wynikiem przyjętego sposobu aproksymowania wyrażeń na siły krytyczne, poprzez ich rozwinięcie w szereg Taylora względem małego parametru ε^2 . Jak można zauważyć, siły krytyczne wywołane periodyczną strukturą płyty są prawie równe, tzn.

$$N_{12kr} = N_{31kr} + o(\varepsilon^2),$$

podobnie jak siły krytyczne związane z uwzględnieniem wpływu inercji obrotowej

$$N_{32kr} = N_{21kr} + o(\varepsilon^2).$$

Po drugie, uzyskane wyniki należy zweryfikować pod kątem ich zgodności z przyjętymi założeniami. Oprócz siły krytycznej N_{11kr} , pozostałe wywołałyby w materiale izotropowym naprężenia rzędu modułu Younga, czyli znacznie przekraczające granicę proporcjonalności. Uzasadnienie ich fizycznego sensu wymaga odrębnej analizy (w obszarze wyboczenia posprężystego i plastycznego) wykraczającej poza cel i zakres tego opracowania. Wskazuje jednak kierunek dalszych zastosowań proponowanej metody modelowania.

Porównując teraz (4.18) i (4.19), można stwierdzić, że relacje uzyskane techniką uśredniania tolerancyjnego, uwzględniające wpływ efektu skali, są uogólnieniem relacji uzyskanych z modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. Poprzez formalne przejście $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 0$ z relacji na N_{12kr} , N_{21kr} , N_{31kr} uzyskujemy wzór na N_{02kr} , natomiast z relacji na N_{11kr} wzór na N_{01kr} . Różnice w wartościach liczbowych otrzymanych ze wzorów na N_{11kr} i N_{01kr} , podobnie jak w przypadku płyt strukturalnie biperiodycznych, są jednak nieznaczne. Stanowią jednak kolejne potwierdzenie fizycznej poprawności przyjętej metody modelowania.

4.4. Podsumowanie

Wyprowadzone przy użyciu nieasymptotycznej techniki uśredniania tolerancyjnego (TAT), równania 2D-modelu wstępnie napiętych płyt materiałowo biperiodycznych o średniej grubości (4.6) są układem 3+N równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach dla

uśrednionego przemieszczenia W^0 , obrotów ϑ_α^0 oraz amplitud zaburzeń deformacji ψ^A . Cechą charakterystyczną tych równań jest to, że amplitudy zaburzeń ψ^A wyznaczamy z układu równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na pochodne czasowe. Tak więc w zagadnieniach stacjonarnych funkcje te nie są zależne od warunków brzegowych i pełnią rolę pewnych zmiennych wewnętrznych. Z drugiej strony, w zagadnieniach dynamicznych, podobnie jak w przypadku płyt strukturalnie periodycznych, jest możliwe uwzględnienie wpływu początkowych zaburzeń pola przemieszczeń. Współczynniki $\langle \rho h_\alpha^A h_\alpha^B \rangle$ $\langle B_{\alpha\beta} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle$ mają wartości rzędu okresu periodyczności (ściślej mówiąc, kwadratu tego okresu). Tak więc równania (4.6) uwzględniają wpływ wartości okresu periodyczności na rozwiązanie danego zagadnienia, czyli efekt skali. Pomijając współczynniki zależne od okresu l , można z równań (4.3)₃ wyznaczyć amplitudy zaburzeń ψ^A i w efekcie uzyskać z (4.6) układ równań różniczkowych cząstkowych tylko dla uśrednionego przemieszczenia W^0 i uśrednionych obrotów ϑ_α^0 stanowiący pewną aproksymację modelu zhomogenizowanego, por. podrozdział 3.4. Dla jednorodnej materiałowo płyty, a więc $l=0$ i $\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma,\delta}^A \rangle = 0$, otrzymamy $\psi^A = 0$, a równania (4.6) redukują się do znanych równań Hencky'ego-Bolle'a (2.5).

Wyprowadzone w tym rozdziale równania 2D – modelu średniej grubości płyt materiałowo periodycznych (4.6) można stosować w zagadnieniach dynamiki i stateczności, w przypadku gdy stała grubość płyty d jest rzędu okresu zmienności l . Model ten można traktować jako uogólnienie znanego modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. W zagadnieniach dynamiki, analizie drgań swobodnych, oprócz niskich częstości drgań, które można wyznaczyć w ramach modelu zhomogenizowanego, uzyskujemy dodatkowo relacje na częstości wyższe wywołane periodyczną strukturą płyty. Na podstawie porównania niższych częstości drgań uzyskanych z obu modeli dla periodycznego pasma płytowego można stwierdzić, że model homogenizacyjny daje niższe wartości liczbowe tych częstości. Różnice są tym większe, im większy jest stosunek długości okresu zmienności l do grubości płyty d opisany parametrem κ . Można przyjąć, że w rozważanym jako przykład zagadnieniu, przy $\kappa < 1$, wystarczająco dokładne wyniki daje model zhomogenizowany. Taka sama konkluzja dotyczy przypadku, gdy płyta wykonana jest z materiałów o niewiele różniących się własnościach mechanicznych (w przykładzie dla $\eta \leq 2$), niezależnie od wartości κ . Znalazło to potwierdzenie także dla płyty wykonanej z drewna przy normowych wartościach modułów sprężystości.

Zastosowanie równań (4.6) do analizy zagadnienia stateczności statycznej swobodnie podpartego pasma płytowego prowadzi do dodatkowej relacji na krytyczną siłę ściskającą wywołaną periodyczną strukturą płyty. Uzasadnienie jej fizycznego sensu wymaga jednak odrębnej analizy wykraczającej poza zakres tej pracy. Z inżynierskiego punktu widzenia istotne jest uogólnienie relacji na podstawową siłę krytyczną w modelu homogenizacyjnym, pozwalające uwzględnić efekt skali.

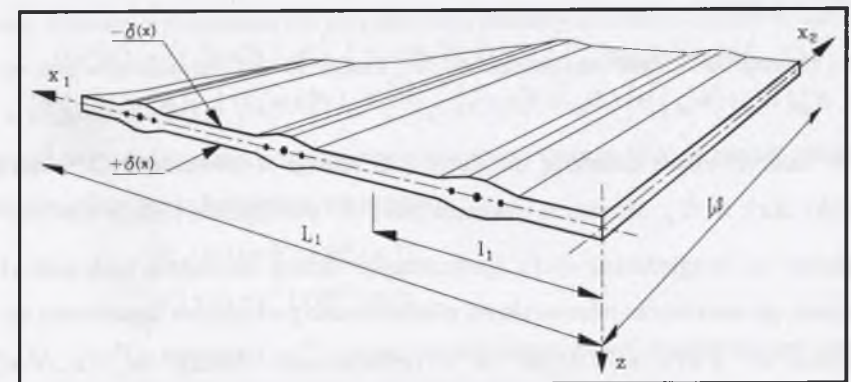
Przykłady obliczeniowe potwierdziły znaną tezę, że dla płyt, których okres periodyczności l jest dużo mniejszy od jej grubości d , wskazane jest stosowanie metod homogenizacyjnych, bowiem efekt skali zanika.

5. PŁYTY STRUKTURALNIE UNIPERIODYCZNE

5.1. Wyprowadzenie równań modelu

Rozważania w tym rozdziale będą dotyczyły płyt periodycznych tylko w jednym kierunku i okresie periodyczności dużo większym od ich grubości. Płyty takie nazwano *plytami strukturalnie uniperiodycznymi*. Płyta jest periodyczna tylko w kierunku osi x_1 , natomiast zmienność parametrów geometrycznych i materiałowych w kierunku osi x_2 jest dowolna. Należy tu zwrócić uwagę, że w praktyce inżynierskiej mamy najczęściej do czynienia z płytami o stałych parametrach w nieperiodycznym kierunku. Przykładowy fragment takiej płyty przedstawiono na rys. 5.1.

Przyjęto, że płaszczyzna środkowa płyty Π jest prostokątem o długości boków w kierunku osi x_1 i x_2 odpowiednio L_1 i L_2 ; $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$. Komórka periodyczności $\Delta(x)$, $x \in \Pi_\Delta$, jest odcinkiem o środku w punkcie x_1 , $\Delta = (x_1 - l_1/2, x_1 + l_1/2)$, a $l = l_1$ jest okresem periodyczności. Założono dalej, że $l \ll \{L_1, L_2\}$, a także, iż l jest dużo większe od maksymalnej grubości płyty $l \gg \max 2\delta(x)$. Przypomnijmy, że w analizie tej klasy płyt przynajmniej jedna z funkcji opisujących własności materiałowe $\rho(\cdot), A_{ijkl}(\cdot)$ bądź geometrię (grubość) płyty - $\delta(\cdot)$ jest funkcją okresową o okresie l względem współrzędnej x_1 .



Rys. 5.1. Fragment płyty strukturalnie uniperiodycznej
Fig. 5.1. Fragment of a structural uniperiodic plate

Punktem wyjścia w procedurze modelowania, podobnie jak w podrozdziale 3.1, są równania (2.5) płyt średniej grubości wyprowadzone przy przyjęciu hipotezy kinematycznej

Hencky'ego-Bolle'a. Podstawowymi niewiadomymi w (2.5) są: przemieszczenia (ugięcie) $w(x,t)$ punktów płaszczyzny Π oraz $\vartheta_\alpha(x,t)$ - niezależne od ugięcia obroty. Równania (2.5) dla płyt uniperiodycznych są równaniami o silnie oscylujących względem x_1 współczynnikach funkcyjnych. Zastosowanie techniki uśredniania tolerancyjnego ma na celu uzyskanie równań o współczynnikach stałych, lub nie będących funkcjami silnie oscylującymi, opisujących jednocześnie wpływ efektu skali w sensie przedstawionym w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000).

Uwzględniając założenie zgodności, niewiadome funkcje z równań (2.5) przedstawiono w postaci sumy części uśrednionej i oscylującej (residualnej)

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha(\cdot, x_2, t) &= \vartheta_\alpha^o(\cdot, x_2, t) + \vartheta_\alpha^*(\cdot, x_2, t), \\ w(\cdot, x_2, t) &= w^o(\cdot, x_2, t) + w^*(\cdot, x_2, t)\end{aligned}\quad (5.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha^o(\cdot, x_2, t) &= [J(x_2)]^{-1} \langle J \vartheta_\alpha \rangle(\cdot, x_2, t), \\ w^o(\cdot, x_2, t) &= [\mu(x_2)]^{-1} \langle \mu w \rangle(\cdot, x_2, t)\end{aligned}\quad (5.2)$$

są funkcjami wolnozmiennymi, natomiast $\vartheta_\alpha^*(\cdot, x_2, t)$, $w^*(\cdot, x_2, t)$ są funkcjami oscylującymi z wagą odpowiednio J i μ (tj. uśrednioną na grubości płyty inercją obrotową i gęstością). Podstawiając (5.1) do (2.5) i uśredniając otrzymane równania w obrębie dowolnej komórki $\Delta(x)$, $x \in \Pi_\Delta$ i uwzględniając relacje tolerancyjnego uśredniania uzyskano uśrednione równania ruchu w postaci

$$\begin{aligned}\left[\langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^* \right]_{,\beta} - \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) - \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^* + w_{,\beta}^*) - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha^o = 0, \\ N_{\alpha\beta}^o (w_{,\alpha\beta}^o + \langle w_{,\alpha\beta}^* \rangle) + \left[\langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) \right]_{,\alpha} + \left[\langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^* + w_{,\beta}^*) \right]_{,\alpha} - \langle \mu \rangle w^o + \langle p \rangle = 0.\end{aligned}\quad (5.3)$$

W dalszym etapie dziedzinę niewiadomych funkcji w równaniach (2.5) zawężono do komórki $\Delta(x)$, $x \in \Pi_\Delta$. Mnożąc te równania przez Δ - periodyczne funkcje testowe $v_\alpha(\cdot)$ $\eta(\cdot)$ argumentu y_1 , uwzględniając (5.1), aproksymując funkcje oscylujące funkcjami Δ - periodycznymi, po uśrednieniu tolerancyjnym sformułowano *periodyczne zagadnienie na komórce* wyrażone w $x = (x_1, x_2) \in \Pi_\Delta$ dla Δ - periodycznych funkcji $\vartheta_{\alpha x}^*(\cdot, x_2, t)$, $w_x^*(\cdot, x_2, t)$, $y_1 \in [x_1 - l/2, x_1 + l/2]$, takich, że $\langle J \vartheta_{\alpha x}^* \rangle(x) = 0$, $\langle \mu w_x^* \rangle(x) = 0$, w postaci równań wariacyjnych

$$\begin{aligned}\left\langle v_{\alpha,1} G_{\alpha 1 \gamma \delta} \vartheta_{x(\gamma,\delta)}^* \right\rangle - \left\langle v_\alpha (G_{\alpha 2 \gamma \delta} \vartheta_{x(\gamma,\delta)}^*)_{,2} \right\rangle + \\ + \left\langle v_\alpha D_{\alpha\beta} (\vartheta_{x\beta}^* + w_{x,\beta}^*) \right\rangle + \left\langle v_\alpha J \ddot{\vartheta}_{\alpha x}^* \right\rangle = \\ = - \left\langle v_{\alpha,1} G_{\alpha 1 \gamma \delta} \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o \right\rangle + \left\langle v_\alpha (G_{\alpha 2 \gamma \delta} \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o)_{,2} \right\rangle - \left\langle v_\alpha D_{\alpha\beta} \right\rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o), \\ \left\langle \eta_{,1} D_{1\beta} (\vartheta_{x\beta}^* + w_{x,\beta}^*) \right\rangle - \left\langle \eta [D_{2\beta} (\vartheta_{x\beta}^* + w_{x,\beta}^*)]_{,2} \right\rangle + \left\langle \eta \mu \dot{w}_x^* \right\rangle = \\ = N_{\alpha\beta}^o \langle \eta \rangle w_{,\alpha\beta}^o - \left\langle \eta_{,1} D_{1\beta} \right\rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + \left\langle \eta [D_{2\beta}] \right\rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o)_{,2} + \langle \eta p \rangle\end{aligned}\quad (5.4)$$

spełnionych dla dowolnych periodycznych funkcji testowych v_α, η zmiennej y_1 , dla których $\langle J v_\alpha \rangle(x) = 0$, $\langle \mu \eta \rangle(x) = 0$. Należy zwrócić uwagę, że lewe strony relacji (5.4) są funkcjami wolnozmiennymi (jako uśrednienia funkcji oscylujących), natomiast po prawej stronie występują wartości funkcji (i ich pochodnych) ϑ_α^o i w^o w punkcie $x = (x_1, x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są traktowane jako parametry.

Uśrednione równanie ruchu (5.3) i periodyczne zagadnienie na komórce opisane równaniami wariacyjnymi (5.4) tworzą podstawę stosowanego sposobu modelowania.

Przybliżone rozwiązanie periodycznego zagadnienia na komórce $\Delta(x)$ danego równaniem wariacyjnym (5.4) będziemy poszukiwać stosując metodę Galerkiną. W tym celu wprowadzono dwa układy liniowo niezależnych modalnych funkcji kształtu $h^a(y)$, $a = 1, 2, \dots, n$ i $g^A(y)$, $A = 1, 2, \dots, N$, dla których $\langle J v_\alpha \rangle(x) = 0$, $\langle \mu \eta \rangle(x) = 0$. Określają one postać możliwych drgań swobodnych komórki płyty, a w każdym rozpatrywanym zagadnieniu traktowane są jako dane. Sposoby wyznaczania lub przyjmowania modalnych funkcji kształtu są szczegółowo omówione w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000). W tej pracy omówiono je w podrozdziale 2.3.

W procedurze modelowania poszukujemy rozwiązania równań (5.4) w postaci skończonych szeregów (obowiązuje konwencja sumacyjna):

$$\begin{aligned}\vartheta_{x,\alpha}^*(y, t) &\approx h^a(y) \Theta_\alpha^a(x, t), \\ w_x^*(y, t) &\approx g^A(y) W^A(x, t),\end{aligned}\quad (5.5)$$

gdzie $y \in (x)$, $x \in \Pi_\Delta$, natomiast „ \approx ” oznacza aproksymację, której dokładność jest uzależniona od liczb n i N (nie jest związana z systemem tolerancyjnym). Funkcje $W^A(x, t)$, $\Theta_\alpha^a(x, t)$ są nowymi niewiadomymi kinematycznymi, które nazwaliśmy uprzednio amplitudami residualnych części ugięcia i obrotów.

W związku z powyższym uzyskujemy dla niewiadomych funkcji $\vartheta_\alpha^o(\cdot)$, $w^o(\cdot)$ następujące przybliżone relacje

$$\begin{aligned} \vartheta_\alpha^o(\mathbf{y}, t) &\approx h^a(\mathbf{y})\Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t), \\ w^o(\mathbf{y}, t) &= g^A(\mathbf{y})W^A(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

które są słuszne jedynie wtedy, gdy $W^A(\mathbf{x}, t)$, $\Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t)$ są funkcjami wolnozmiennymi

$$\Theta_\alpha^a(\cdot, t), W^A(\cdot, t) \in SV_\Delta(T) \quad (5.7)$$

Podstawiając prawe strony relacji (5.5) do (5.4), uwzględniając (5.7) oraz przyjmując, że $v_\alpha = h^a(\mathbf{y})\bar{\Theta}_\alpha^a$, $\eta = g^A(\mathbf{y})\bar{W}^A$, gdzie $\bar{\Theta}_\alpha^a$, \bar{W}^A są dowolnymi stałymi, po pewnych przekształceniach uzyskujemy równania dla niewiadomych $\Theta_\alpha^a(\cdot)$, $W^A(\cdot)$. Występują w nich także niewiadome $\vartheta_\alpha^o(\cdot)$, $w^o(\cdot)$. Podobnie, wstawiając prawe strony (5.6) do (5.3), z uwzględnieniem (5.7) otrzymujemy równania dla $\vartheta_\alpha^o(\cdot)$, $w^o(\cdot)$, a także $\Theta_\alpha^a(\cdot)$, $W^A(\cdot)$ jako podstawowych niewiadomych. Oczywiście, w obydwu przypadkach uwzględniono także relacje tolerancyjnego uśredniania (TA). Oprócz modalnych funkcji kształtu $h^a(\mathbf{x}) \in O(l)$ i $g^A(\mathbf{x}) \in O(l)$ wprowadzono również funkcje

$$\bar{h}^a = l^{-1}h^a, \quad \bar{g}^A = l^{-1}g^A,$$

których wartości należy traktować jako niezależne od parametru mezostruktury l .

Uwzględniając te funkcje w przekształcaniu równań (5.5) i (5.6) uzyskujemy końcowe, ogólne równanie modelu średniej grubości płyt o jednokierunkowej strukturze periodycznej i okresie dużo większym od grubości, czyli strukturalnie uniperiodycznych, w postaci:

1° uśrednionych równań ruchu

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} \ddot{Q}_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha^o &= 0, \\ N_{\alpha\beta}^o w_{\alpha\beta}^o + \langle \bar{g}^A \rangle W_{\alpha 2}^A + Q_{\alpha\alpha} - \langle \mu \rangle \dot{w}^o + p &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

2° równań dla amplitud zaburzeń

$$\begin{aligned} l^2 \langle J \bar{h}^a \bar{h}^b \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^a + M_\alpha^a - l M_{\alpha 2}^a &= 0, \\ l^2 \langle \mu \bar{g}^A \bar{g}^B \rangle \ddot{W}^B + Q^A - l \bar{Q}_2^A + \\ - N_{\alpha 2}^o \left(l \langle \bar{g}^A \rangle W_{\alpha 2}^o + l^2 \langle \bar{g}^A \bar{g}^B \rangle W_{\alpha 2}^B \right) + N_{11}^o \langle g_j^A g_j^B \rangle W^B - l \langle \bar{g}^A p \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

3° równań konstytutywnych

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + \langle h_{,1}^a G_{\alpha\beta 1\delta} \rangle \Theta_\delta^a + l \langle \bar{h}^a G_{\alpha\beta 2\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^a, \\ Q_\alpha &= \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^a + \langle g_{,1}^A D_{\alpha 1} \rangle W^A + l \langle \bar{g}^A D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}^A, \\ M_\alpha^a &= \langle h_{,1}^a h_{,1}^b G_{\alpha 11\delta} \rangle \Theta_\delta^b + \langle h_{,1}^a G_{\alpha 1\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + l \langle h_{,1}^a \bar{h}^b G_{\alpha 12\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^b + \\ &+ l^2 \langle \bar{h}^a \bar{h}^b D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^b + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + \\ &+ l \langle \bar{h}^a g_{,1}^A D_{\alpha 1} \rangle W^A + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{g}^A D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}^A, \\ \bar{M}_\alpha^a &= \langle \bar{h}^a h_{,1}^b G_{\alpha 21\delta} \rangle \Theta_\delta^b + \langle \bar{h}^a G_{\alpha 2\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + l \langle \bar{h}^a \bar{h}^b G_{\beta 22\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^b, \\ Q^A &= \langle g_{,1}^A g_{,1}^B D_{11} \rangle W^B + \langle g_{,1}^A D_{1\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle g_{,1}^A \bar{h}^a D_{1\beta} \rangle \Theta_\beta^a + l \langle g_{,1}^A \bar{g}^B D_{12} \rangle W_{,2}^B, \\ \bar{Q}^A &= \langle \bar{g}^A g_{,1}^B D_{21} \rangle W^B + \langle \bar{g}^A D_{2\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{g}^A h^a D_{2\beta} \rangle \Theta_\beta^a + l \langle \bar{g}^A \bar{g}^B D_{22} \rangle W_{,2}^B. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Równania (5.8)–(5.10) mają fizyczny sens jedynie wtedy, gdy podstawowe są funkcjami wolnozmiennymi

$$\vartheta_\alpha^o(\cdot, x_2, t), w^o(\cdot, x_2, t), \Theta_\alpha^a(\cdot, x_2, t), W^A(\cdot, x_2, t) \in SV(T). \quad (5.11)$$

Otrzymane równania o współczynnikach zależnych *explicitie* od parametru l są równaniami uśrednionego 2D-modelu opisującego dynamikę średniej grubości płyt uniperiodycznych o okresie dużo większym od grubości, poddanych dodatkowo wstępnemu napięciu w płaszczyźnie środkowej. Równania te wyprowadzono po raz pierwszy w pracy Barona (2005)₁, przy uwzględnieniu residualnych przemieszczeń w^o w wyrażeniach zawierających wstępne napięcie, tzn. $\sigma_{\alpha\beta}^o w_{\alpha\beta}^o = \sigma_{\alpha\beta}^o (w^o + w^*)_{,\alpha\beta}$. We wcześniejszych pracach autora, np. (1999)₁, (2002), (2003)₁, przyjmowano $\sigma_{\alpha\beta}^o w_{\alpha\beta}^o \approx \sigma_{\alpha\beta}^o w_{\alpha\beta}^o$. W równaniach (5.8) i (5.9) podkreślono dodatkowe człony, związane z osłabieniem założeń.

Rozwiązując zagadnienie brzegowo-początkowe płyty uniperiodycznej w modelu uzyskanym metodą uśredniania tolerancyjnego (5.8)–(5.10), należy spełnić warunki brzegowe dla $\vartheta_\alpha^o(\cdot, t)$, $w^o(\cdot, t)$, takie same jak w teorii Hencky'ego-Bolle'a oraz po dwa warunki początkowe dla funkcji $\vartheta_\alpha^o(\cdot, t)$, $w^o(\cdot, t)$, $\Theta_\alpha^a(\cdot, t)$, $W^A(\cdot, t)$. W odróżnieniu jednak do płyt o dwukierunkowej strukturze periodycznej, na brzegach prostopadłych do kierunku periodyki należy uwzględnić warunki dla kinematycznych zmiennych wewnętrznych $\Theta_\alpha^a(\cdot, t)$, $W^A(\cdot, t)$. Na przykład jeżeli płyta przedstawiona na rys. 5.1. będzie swobodnie podparta na wszystkich krawędziach to dla $x_2=0$ i $x_2=L_2$ uzyskamy

$$u_3 = 0 \Rightarrow w^o = 0, \quad W^A = 0$$

$$M_{\alpha 2} = G_{\alpha 2 \gamma \delta} \vartheta_{(\gamma, \delta)}^o = 0 \Rightarrow G_{\alpha 2 \gamma \delta} \vartheta_{(\gamma, \delta)}^o = 0, \quad G_{\alpha 2 \gamma \delta} \Theta_{(\gamma, \delta)}^o = 0$$

Równania (5.8-5.10) są równaniami bardzo ogólnymi opisującymi niejednorodną płytę uniperiodyczną o dowolnej zmienności parametrów geometrycznych i materiałowych w nieperiodycznym kierunku. Są to równania o zmiennych współczynnikach, które jednak nie są już silnie oscylującymi (bądź nieciągłymi). W zagadnieniach inżynierskich mamy najczęściej do czynienia z płytami o materiałowej (bądź technicznej) ortotropii, dla których własności mechaniczne oraz grubość płyty są stałe w kierunku prostopadłym do kierunku periodyczności, czyli są niezależne od zmiennej x_2 . Także w analizie konkretnych zagadnień satysfakcjonujące jest uzyskanie tzw. pierwszego przybliżenia rozwiązania co w przypadku proponowanego tu modelu oznacza przyjęcie we wzorach (5.5) $N=n=1$.

Przyjmijmy więc, że płyta, jeśli chodzi o swe uśrednione (na komórce) własności mechaniczne, jest ortotropowa o głównych osiach ortotropii równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych. Sztywności $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ i $D_{\alpha\beta}$ można wtedy zredukować do sześciu i zdefiniować wzorami (3.12).

Przyjmijmy także, że w rozpatrywanych zagadnieniach wystarczającą dokładność aproksymacji zapewnia uwzględnienie tylko dwóch modalnych funkcji kształtu ($N=n=1$). Oznaczmy więc zgodnie z (3.13) i (3.14)

$$h(\cdot) = h^1(\cdot) = \bar{h}(\cdot), \quad g(\cdot) = g^1(\cdot) = \bar{g}(\cdot)$$

i odpowiednio

$$\Theta_{\alpha}(\cdot, t) = \Theta_{\alpha}^1(\cdot, t), \quad W(\cdot, t) = W^1(\cdot, t).$$

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach 2D – model ortotropowej płyty periodycznej o średniej grubości jest opisany sześcioma równaniami różniczkowymi cząstkowymi o stałych współczynnikach

$$M_{111} + M_{122} - Q_1 - (J) \ddot{\vartheta}_1^o = 0,$$

$$M_{211} + M_{222} - Q_2 - (J) \ddot{\vartheta}_2^o = 0,$$

$$N_{\alpha\beta}^o w_{\alpha\beta}^o + l N_{\alpha 2}^o \langle \bar{g} \rangle W_{\alpha 2} + Q_{\alpha\alpha} - (\mu) \ddot{w}^o + p = 0,$$

$$l^2 \langle J \bar{h}^2 \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^1 + M_\alpha^1 - l M_{\alpha 2}^1 = 0,$$

$$l^2 \langle \mu \bar{g}^2 \rangle \ddot{W} + Q^1 - l Q_2^1 +$$

$$- N_{\alpha 2}^o \left(l \langle \bar{g} \rangle w_{\alpha 2}^o + l^2 \langle \bar{g}^2 \rangle W_{\alpha 2} \right) + N_{11}^o \langle g_1^2 \rangle W - l \langle \bar{g} \rangle p = 0$$
(5.12)

oraz równaniami konstytutywnymi

$$M_{11} = \langle G_{11} \rangle \vartheta_{11} + \langle G_{12} \rangle \vartheta_{22} + \langle h_1 G_{11} \rangle \Theta_1 + l \langle \bar{h} G_{12} \rangle \Theta_{2,2},$$

$$M_{22} = \langle G_{22} \rangle \vartheta_{22} + \langle G_{12} \rangle \vartheta_{11} + \langle h_1 G_{12} \rangle \Theta_1 + l \langle \bar{h} G_{22} \rangle \Theta_{2,2},$$

$$M_{12} = M_{21} = \langle G \rangle (\vartheta_{12} + \vartheta_{21}) + \langle h_1 G \rangle \Theta_2 + l \langle \bar{h} G \rangle \Theta_{1,2},$$

$$Q_1 = \langle D_{11} \rangle (\vartheta_1 + w_1) + l \langle \bar{h} D_{11} \rangle \Theta_1 + \langle g_1 D_{11} \rangle W,$$

$$Q_2 = \langle D_{22} \rangle (\vartheta_2 + w_2) + l \langle \bar{h} D_{22} \rangle \Theta_2 + l \langle \bar{g} D_{22} \rangle W_2$$

$$M_1^1 = \langle h_1^2 G_{11} \rangle \Theta_1 + \langle h_1 G_{12} \rangle \vartheta_{(2,2)} + l \langle h_1 \bar{h} G_{12} \rangle \Theta_{2,2} + l^2 \langle \bar{h}^2 D_{11} \rangle \Theta_1 +$$

$$+ l \langle \bar{h} D_{11} \rangle (\vartheta_1 + w_1) + l \langle \bar{h} g_1 D_{11} \rangle W,$$

$$M_2^1 = \langle h_1^2 G \rangle \Theta_2 + \langle h_1 G \rangle (\vartheta_{(1,2)} + \vartheta_{(2,1)}) + l \langle h_1 \bar{h} G \rangle \Theta_{1,2} + l^2 \langle \bar{h}^2 D_{22} \rangle \Theta_2 +$$

$$+ l \langle \bar{h} D_{22} \rangle (\vartheta_2 + w_2) + l^2 \langle \bar{h} \bar{g} D_{22} \rangle W_2,$$
(5.13)

$$\bar{M}_1^1 = \langle \bar{h} h_1 G \rangle \Theta_2 + \langle \bar{h} G \rangle (\vartheta_{1,2} + \vartheta_{2,1}) + l \langle \bar{h} G \rangle \Theta_{1,2},$$

$$\bar{M}_2^1 = \langle \bar{h} h_1 G_{12} \rangle \Theta_1 + \langle \bar{h} G_{12} \rangle \vartheta_{1,1} + l \langle \bar{h}^2 G_{22} \rangle \Theta_{2,2},$$

$$Q^1 = \langle g_1^2 D_{11} \rangle W + \langle g_1 D_{11} \rangle (\vartheta_1 + w_1) + l \langle g_1 \bar{h} D_{11} \rangle \Theta_1,$$

$$\bar{Q}^1 = \langle \bar{g} D_{22} \rangle (\vartheta_2 + w_2) + l \langle \bar{g} \bar{h} D_{22} \rangle \Theta_2 + l \langle \bar{g}^2 D_{22} \rangle W_2^B.$$

Dalsze uproszczenie równań (5.12) i (5.13) można uzyskać poprzez założenia odnośnie parzystości bądź nieparzystości funkcji kształtu $h(\cdot)$ i $g(\cdot)$.

5.2. Zagadnienie drgań

Jako przykład rozpatrzmy zagadnienie drgań swobodnych płyty o strukturze uniperiodycznej wzdłuż osi x_1 i stałych parametrach w kierunku osi x_2 . Przyjmijmy ponadto, że płyta jest jednorodna, ortotropowa oraz że wszystkie funkcje zależą tylko od czasu i zmiennej $x \equiv x_2$, rys. 5.2. Jest to równoznaczne z analizą periodycznie uźebrowanego pasma płytowego o rozpiętości $L \equiv L_2$.

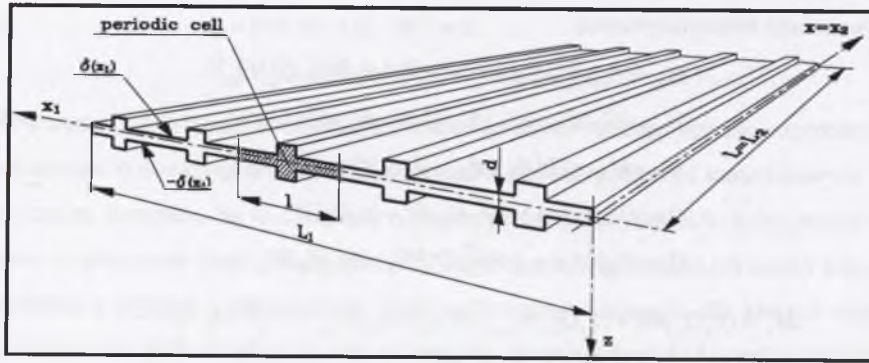
Funkcje niewiadome w równaniach (5.12), (5.13) przyjęto w postaci

$$\vartheta_1(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_{1n}(x_1) \sin k_n x, \quad \vartheta_2(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\vartheta}_{2n}(x_1) \cos k_n x,$$

$$\Theta_1(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Theta}_{1n}(x_1) \sin k_n x, \quad \Theta_2(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Theta}_{2n}(x_1) \cos k_n x,$$
(5.14)

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n(x_1) \sin k_n x, \quad W(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n(x_1) \sin k_n x,$$

gdzie $k_n = n\pi/L$, $n = 1, 2, \dots$. Taka postać niewiadomych funkcji zapewnia spełnienie warunków swobodnego podparcia na krawędziach $x_2 = \pm L/2$, rys. 5.3.



Rys. 5.2. Płyta periodycznie uźebrowana
Fig. 5.2. Periodically ribbed plate

Przy powyższych założeniach, a także $p=0$ i $N_{\text{ob}}=0$, uzyskano z równań (5.12) - (5.13) układ 6n równań algebraicznych dla niewiadomych amplitud $\bar{\vartheta}_{1n}, \bar{\vartheta}_{2n}, \bar{w}_n, \bar{\Theta}_{1n}, \bar{\Theta}_{2n}, \bar{W}_n$. Rozpatrzono przypadek drgań symetrycznych komórki periodyczności, tzn. założono, że funkcja $h(x_1)$ jest nieparzysta, natomiast funkcja $g(x_1)$ jest parzysta. Przy takim założeniu uzyskany układ równań algebraicznych rozprzega się na dwa podukłady: jeden dla amplitud $\bar{\vartheta}_{1n}$ i $\bar{\Theta}_{2n}$

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \langle G \rangle + \langle D_1 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & k_n \langle Gh_1 \rangle \\ k_n \langle Gh_1 \rangle & k_n^2 \langle Gh^2 \rangle + \langle Gh_1^2 \rangle + \langle D_2 h \rangle - \langle Jh^2 \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_{1n} \\ \bar{\Theta}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

natomiast drugi dla amplitud $\bar{\vartheta}_{2n}, \bar{w}_n, \bar{\Theta}_{1n}, \bar{W}_n$

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \langle G_{22} \rangle + \langle D_2 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & -k_n \langle G_{12} h_{,1} \rangle & k_n \langle D_2 \rangle & 0 \\ -k_n \langle G_{12} h_{,1} \rangle & k_n^2 \langle Gh^2 \rangle + \langle G_{11} h_{,1}^2 \rangle + \langle D_1 h^2 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & 0 & \langle D_1 h g_{,1} \rangle \\ k_n \langle D_2 \rangle & 0 & k_n^2 \langle D_2 \rangle - \langle \mu \rangle \omega^2 & 0 \\ 0 & \langle D_1 h g_{,1} \rangle & 0 & k_n^2 \langle D_2 g^2 \rangle + \langle D_1 g_{,1}^2 \rangle - \langle \mu g^2 \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_{2n} \\ \bar{\Theta}_{1n} \\ \bar{w}_n \\ \bar{W}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

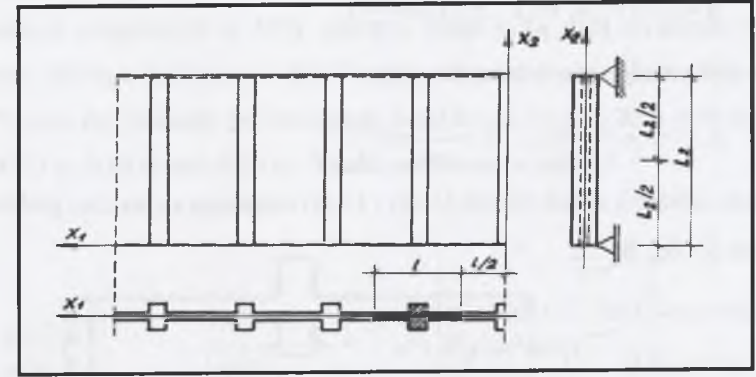
Chcąc uzyskać relacje na częstości drgań własnych założono, że płyta jest izotropowa oraz pominięto wpływ inercji obrotowej, $J \rightarrow 0$. W takim przypadku z równań (5.15) wynika, że $\bar{\vartheta}_{1n} = 0, \bar{\Theta}_{2n} = 0$, natomiast częstości drgań własnych obliczymy przyrównując do zera wyznacznik główny układu równań (5.16).

Założono dalej, że modalne funkcje kształtu można aproksymować w postaci (por. podrozdział 2.3)

$$h = l \sin \frac{n\pi}{l} x_1, \quad g = l \left(\cos \frac{n\pi}{l} x_1 + c \right) \quad (5.17)$$

gdzie stałą c obliczono z zależności $\langle \mu g \rangle = 0$,

$$c = -\psi_M r_o / (1 + \psi_M), \quad r_o = \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a}{l}$$



Rys. 5.3. Swobodnie podparte żebrowe pasmo płytowe
Fig. 5.3. Simply supported ribbed plate band

Przyjęto oznaczenia (rys.5.3 i 5.4)

$$I_1 = [(b+d)^3 - d^3] a / 12, \quad j_o = d^3 / 12, \quad A_1 = ab, \quad \psi_1 = l / j_o, \quad \psi_M = A_1 / dl$$

$$D = Ed^3 / 12(1 - \nu^2), \quad G_o = KE / 2(1 + \nu)$$

gdzie E jest modułem Younga, natomiast ν jest współczynnikiem Poissona.

W trakcie obliczeń przyjęto, że $all \ll 1$, co daje $r_o \rightarrow 1$, oraz uwzględniono wstępne założenie, że $d \ll L$ i $l \ll L$. Uzyskano relacje na pierwsze przybliżenie podstawowych częstości drgań własnych

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{D}{\rho d} k_n^4 \frac{1 + \psi_1}{1 + \psi_M} \left[1 - \nu^2 \frac{2\psi_1^2}{(1 + \psi_1)(1 + 2\psi_1)} \right] \\ \omega_2^2 &= \frac{G_o}{\rho} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \frac{1 + \psi_M}{1 + 3\psi_M} \end{aligned} \quad (5.18)$$

W odróżnieniu od metody homogenizacji asymptotycznej uzyskano relacje na dwie podstawowe częstości drgań własnych: częstość wysoką ω_1 zależną od parametru mikrostruktury l oraz częstość niską ω_2 od tego parametru niezależną (dla pierwszego przybliżenia). Wyrażenie na częstość niską może być porównywane z relacjami uzyskanymi innymi metodami, natomiast częstość wysoka nie znajduje swojego odpowiednika w dotychczas stosowanych metodach.

Zagadnienie to rozpatrywano po raz pierwszy w pracy E. Barona (2003)₂. Dotyczyło ono ogólniejszego przypadku, w którym komórka periodyczności zawierała dwa zebra o różnych

wymiarach. Rozpatrzono tam także przypadek, gdy modalna funkcja kształtu $h(x_1)$ jest parzysta, natomiast funkcja $g(x_1)$ jest nieparzysta aproksymując je w postaci

$$h = l \left(\cos \frac{n\pi}{l} x_1 + c_2 \right) \quad g = l \sin \frac{n\pi}{l} x_1$$

gdzie stałą c_2 obliczono z warunku $\langle Jh \rangle = 0$,

$$c_2 = -\psi_1 r_o / (1 + \psi_1), \quad r_o = \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a}{l}$$

Przy tym założeniu układ równań (5.12) i (5.13) rozprzega się na dwa podukłady: jeden dla amplitud $\bar{v}_{1n}, \bar{\theta}_{2n}, \bar{w}_n$

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \langle G \rangle + \langle D_1 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & k_n^2 \langle Gh \rangle + \langle D_1 h \rangle & \langle D_1 g_1 \rangle \\ k_n^2 \langle Gh \rangle + \langle D_1 h \rangle & k_n^2 \langle Gh^2 \rangle + \langle G_{11} \langle h_1 \rangle^2 \rangle + \langle D_1 h^2 \rangle - \langle Jh^2 \rangle \omega^2 & \langle D_1 h g_1 \rangle \\ \langle D_1 g_1 \rangle & \langle D_1 h g_1 \rangle & k_n^2 \langle D_2 g^2 \rangle + \langle D_1 \langle g_1 \rangle^2 \rangle - \langle \mu g^2 \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{1n} \\ \bar{\theta}_{2n} \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

oraz drugi dla $\bar{v}_{2n}, \bar{\theta}_{2n}, \bar{w}_n$

$$\begin{bmatrix} k_n^2 \langle G_{22} \rangle + \langle D_2 \rangle - \langle J \rangle \omega^2 & k_n^2 \langle G_{22} h \rangle + \langle D_2 h \rangle & k_n \langle D_2 \rangle \\ k_n^2 \langle G_{22} h \rangle + \langle D_2 h \rangle & k_n^2 \langle G_{22} h^2 \rangle + \langle G \langle h_1 \rangle^2 \rangle + \langle D_2 h^2 \rangle - \langle Jh^2 \rangle \omega^2 & k_n \langle D_2 h \rangle \\ k_n \langle D_2 \rangle & k_n \langle D_2 h \rangle & k_n^2 \langle D_2 \rangle - \langle \mu \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{2n} \\ \bar{\theta}_{2n} \\ \bar{w}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Pomijając wpływ inercji obrotowej J , z warunku zerowania się wyznaczników głównych (5.19), (5.20), stosując opisany przy wyprowadzeniu (5.18) sposób postępowania, uzyskano relacje na pierwsze przybliżenie podstawowych częstości drgań własnych

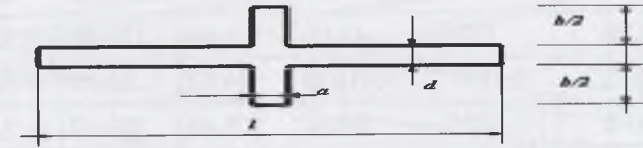
$$\omega_-^2 = \frac{D}{\rho d} k_n^4 \frac{1 + \psi_1}{1 + \psi_M} \quad (5.21)$$

$$\omega_+^2 = \frac{G_0}{\rho} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \frac{1 + \psi_M}{1 + 3\psi_M}$$

Jak można zauważyć, w przedstawionym przykładzie założenia odnośnie do parzystości bądź nieparzystości modalnych funkcji kształtu nie mają praktycznie wpływu na uzyskiwanie wartości częstości drgań własnych. Relacje na częstości wyższe są identyczne, natomiast np. dla $\nu = 0,3$, przy $\psi_1 \leq 1$ względne różnice wartości liczbowych ω^2 nie przekraczają 3%.

Dla sprawdzenia fizycznej poprawności uzyskanych relacji na niższą częstość drgań własnych ω^2 przeprowadzono pewne obliczenia numeryczne metodą elementów skończonych (MES). Otrzymane w ten sposób wartości liczbowe porównano z uzyskanymi ze wzoru (5.18)₁. Wykorzystano standardowy, inżynierski program obliczeniowy Robot-Millennium

Robobat Comp. Obliczenia wykonano dla płyty betonowej o rozpiętości 6.00 m i długości 30,0 m, tabl.5.1. Przyjęto moduł Younga $E=29000$ MPa, współczynnik Poissona $\nu=0,20$ oraz ciężar objętościowy $Q=24,50$ kN/m³. Płytę podzielono na 1440 powłokowych elementów skończonych połączonych w 1573 węzłach. Żebra mają stałą wysokość $b/2=0,25$ m i stały rozstaw osiowy – 1,00 m, rys. 5.4. Ponadto program nie uwzględnia ich sztywności skręcania. Przyjęto trzy warianty grubości płyty $d=0,10$ m, 0,15 m, 0,20 m oraz trzy szerokości żeber $a=0,05$ m, 0,10 m oraz 0,20 m. Wyniki zestawiono w tabl.5.1.



Rys. 5.4. Komórka periodyczności
Fig. 5.4. Periodicity cell

Na ich podstawie można stwierdzić, że dla analizowanego zakresu parametrów d, a, b , wzory (5.18)₁, (5.21)₁ dają wystarczająco dokładne przybliżenia częstości drgań własnych płyty w porównaniu do uzyskanej metodą elementów skończonych. Różnice są tym mniejsze, im bardziej rozwiązywana MES-em płyta spełnia założenia wyjściowe, tzn. $d \ll l, a \ll l$.

Relacje na niższą częstość drgań własnych (5.18)₁ i (5.21)₁ porównano także z przybliżonym wzorem, jaki uzyskał Timoshenko (1955) stosując metodę Ritza. Dla jednorodnej materiałowo i izotropowej płyty o module Younga E i gęstości masy ρ , wymiarach gabarytowych L_1 i L_2 wzmocnionej układem równoległych do osi x_1 żeber o polu przekroju A_1 i momencie bezwładności I_1 otrzymał następujący wzór na częstość drgań swobodnych

$$\omega^2 = \frac{EI_1 \pi^2 n^2 + DL_1 / (EI_1) \left[(L_2/L_1)^2 m^2 + n^2 \right]^{1/2}}{L_2^2 \rho A_1} \frac{1}{1 + (dL_1/A_1) 1/(1+r)} \quad (5.22)$$

gdzie $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$ natomiast r jest liczbą żeber.

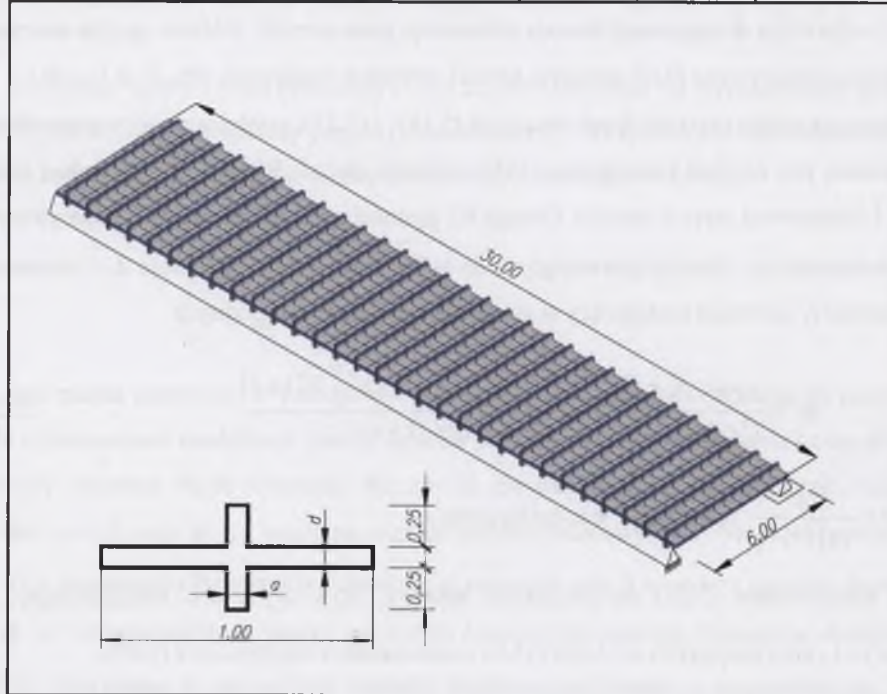
Po dostosowaniu (5.22) do przyjętych założeń, czyli $L_2/L_1 \ll 1$, uwzględniając, że $L_1/(1+r) = l$, przy przyjętych w (5.18) i (5.21) oznaczeniach otrzymamy z (5.22)

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho d} k_n^4 \frac{1 + \psi_1}{1 + \psi_M}$$

Wynika stąd, że relacje (5.18)₁ i (5.20)₁ są taką samą aproksymacją niższych częstotliwości drgań własnych, jaką można uzyskać stosując metodę Ritz'a.

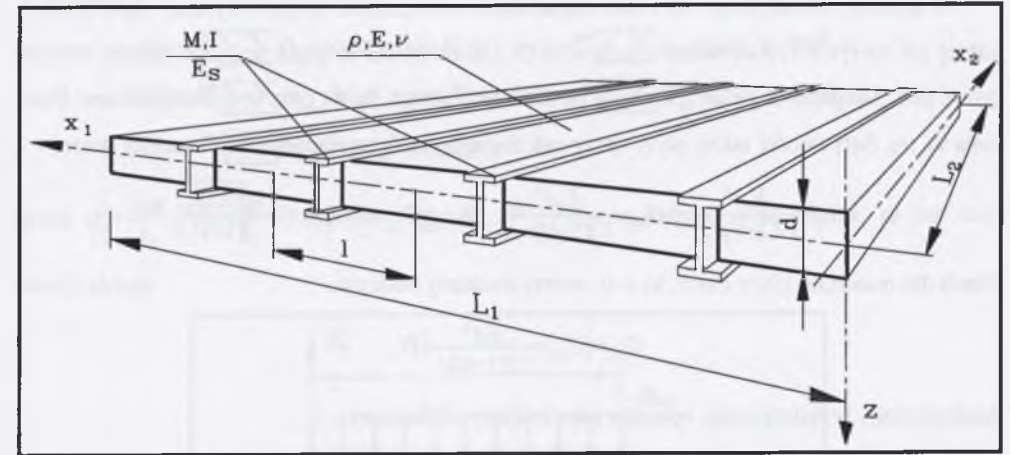
Tablica 5.1

PŁYTA d	ŻEBRO a	ψ_M	ψ_1	CZĘSTOŚCI		BŁĄD WZGLĘDNY
				TAT	MES	
[m]	[m]	-	-	[1/s]	[1/s]	[%]
0,1	0,05	0,25	10,75	81,09	80,80	0,36
	0,10	0,50	21,50	104,07	100,63	3,42
	0,20	1,00	43,00	123,63	119,89	3,12
0,15	0,05	0,1667	4,01875	84,13	82,18	2,37
	0,10	0,3333	8,037	105,42	101,37	3,99
	0,20	0,6667	16,074	129,53	121,91	6,00
0,20	0,05	0,125	2,0937	90,10	87,95	2,44
	0,10	0,250	4,1875	110,31	105,95	4,12
	0,20	0,500	8,375	135,40	126,67	6,89



5.3. Zagadnienie stateczności

Załóżmy, że stałej grubości płyta o strukturze uniperiodycznej opisana równaniami (5.12) – (5.13), jednorodna, materiałowo ortotropowa, wzmocniona jest układem żebrowym o masie M i momencie bezwładności J , na jednostkę długości żebra (rys.5.5). Dla uproszczenia rozważań będziemy pomijać sztywność skrętną żebra.



Rys. 5.5. Płyta betonowa wzmocniona dwuteownikami stalowymi
Fig. 5.5. Concrete plate reinforced by rolled steel I-bar

Przyjmijmy, że element reprezentatywny (powtarzalny) jest symetryczny względem osi żebra (reprezentuje go odcinek $(0, l)$ na rys.5.5). Uwzględniając tę symetrię założymy, że funkcja $g(x_1)$ jest symetryczna, natomiast $h(x_1)$ jest antysymetryczna względem osi żebra. Przy tych założeniach z (5.12) i (5.13) otrzymamy następujący układ pięciu równań różniczkowych cząstkowych dla niewiadomych $\vartheta_\alpha, \Theta = \Theta_1, w, W$

$$\begin{aligned}
 \langle G_{11} \rangle \vartheta_{111}'' + \langle G \rangle \vartheta_{122}'' + (\langle G_{12} \rangle + \langle G \rangle) \vartheta_{212}'' - \langle D_1 \rangle (\vartheta_1'' + w_1'') - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_1 &= 0 \\
 \langle G_{22} \rangle \vartheta_{222}'' + \langle G \rangle \vartheta_{211}'' + (\langle G_{12} \rangle + \langle G \rangle) \vartheta_{112}'' - \langle D_2 \rangle (\vartheta_2'' + w_2'') - l \langle \bar{g} D_2 \rangle W_{22} - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_2 &= 0 \\
 N_{\alpha\beta}^o w_{\alpha\beta}'' + \langle D_1 \rangle (\vartheta_1'' + w_1'') + \langle D_2 \rangle (\vartheta_2'' + w_2'') + l N_{\alpha 2}^o \langle \bar{g} \rangle W_{\alpha 2} + l \langle \bar{g} D_2 \rangle W_{22} - \langle \mu \rangle w'' + p &= 0 \\
 -l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \Theta_{22} + (\langle h_1^2 G_{11} \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle) \Theta + l \langle \bar{h} g_1 D_1 \rangle W + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta} &= 0 \\
 -l^2 N_{\alpha\beta}^o \langle \bar{g}^2 \rangle W_{\alpha\beta} - l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle W_{22} + N_{11}^o \langle g_1^2 \rangle W + \langle g_1^2 D_1 \rangle W - l N_{\alpha 2}^o \langle \bar{g} \rangle w_{\alpha 2} + \\
 -l \langle \bar{g} D_2 \rangle (\vartheta_2'' + w_2'') + l \langle \bar{h} g_1 D_1 \rangle \Theta + l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \ddot{W} - l \langle \bar{g} p \rangle &= 0
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

oraz niezależne równanie dla Θ_2

$$-l^2 \langle \bar{h}^2 G_{22} \rangle \Theta_{222} + (\langle h_1^2 G \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_2 \rangle) \Theta_2 + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_2 = 0$$

Układ równań (5.23) jest układem o stałych współczynnikach. Stanowi on narzędzie analizy zagadnień dynamiki i stateczności sprężystych płyt średniej grubości przy dowolnych warunkach podparcia płyty.

W analizie niezależnego od czasu zagadnienia stateczności uniperiodycznej płyty prostokątnej jak na rys.5.5, a opisanej równaniem (5.23), przyjęto, że płyta jest technicznie ortotropowa, por. Sokołowski (1957), opisana modułami Younga E_1, E_2 oraz współczynnikami Poissona ν_1, ν_2 . Sztywności takiej płyty (przy założeniu jej stałej grubości) obliczamy ze wzorów

$$G_{11} = \frac{E_1 d^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad G_{22} = \frac{E_2 d^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad G_{12} = \nu_1 G_{22} = \nu_2 G_{11}, \quad G = \frac{\sqrt{G_{11} G_{22}}}{2(1+\nu_1)}$$

Niech dla materiału płyty $E_1 = E, \nu_1 = \nu$; wtedy możemy obliczyć

$$G_{11} = \langle G_{11} \rangle = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)} = H_o.$$

Analogicznie, wykorzystując operator uśredniający, obliczamy

$$G_{22} = \langle G_{22} \rangle = H_o \left(1 + \frac{E_s I}{H_o l} \right)$$

gdzie E_s jest modułem Younga żebra wzmacniającego.

Oznaczając $\psi = \frac{E_s I}{H_o l}$, uzyskamy $G_{22} = \langle G_{22} \rangle = H_o (1 + \psi)$.

Z warunku $\nu G_{22} = \nu_2 G_{11}$ wynika, że $\nu_2 = \nu(1 + \psi)$. Tak więc

$$G_{22} = \frac{E_2 d^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} = \frac{E_2 d^3}{12[1-\nu^2(1+\psi)]} = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)} (1+\psi),$$

a stąd $E_2 = E \frac{1-\nu^2(1+\psi)}{1-\nu^2} (1+\psi)$.

Sztywności ścinania obliczymy ze wzorów:

$$\langle D_1 \rangle = \frac{E d}{2(1+\nu)} K_{11}, \quad \langle D_2 \rangle = \frac{E_2 d}{2(1+\nu_2)} K_{22} = \frac{E d [1-\nu^2(1+\psi)]}{2(1-\nu^2)[1+\nu(1+\psi)]} (1+\psi) K_{22}.$$

Na podstawie pracy G. Jamielity (1991) przyjęto współczynniki ścinania

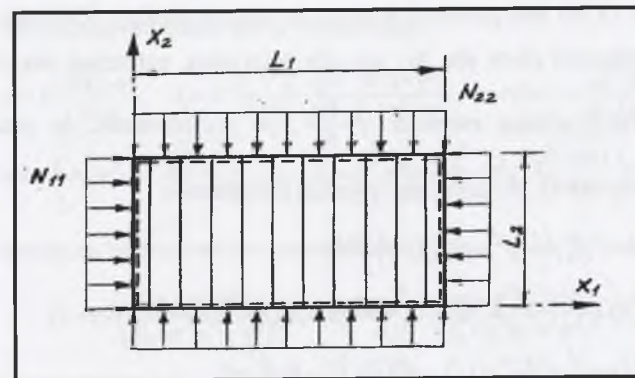
$$K_{11} = \frac{5}{6-\nu}, \quad K_{22} = \frac{5}{6-\nu(1+\psi)}.$$

Z przyjętych założeń wynika, że sztywności obliczane z uwzględnieniem funkcji kształtu mogą być wyłączone poza znak uśrednienia, np. $\langle h_1^2 G_{11} \rangle = G_{11} \langle h_1^2 \rangle$.

Założmy teraz, że rozpatrywana płyta jest swobodnie podparta na brzegach $x_1=0, x_1=L_1, x_2=0, x_2=L_2$ oraz obciążona jak na rys.5.6 wyłącznie napięciem w płaszczyźnie środkowej N_{11} i N_{22} . Uwzględniając warunki brzegowe, rozwiązanie układu równań (5.23) należy przyjąć w postaci:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= e^{i\omega x} \sum \sum \vartheta_{1mn} \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, & w &= e^{i\omega x} \sum \sum w_{mn} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \\ \vartheta_2 &= e^{i\omega x} \sum \sum \vartheta_{2mn} \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2, & W &= e^{i\omega x} \sum \sum W_{mn} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \\ \Theta_1 &= e^{i\omega x} \sum \sum \Theta_{1mn} \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_m = \frac{m\pi}{L_1}, \beta_n = \frac{n\pi}{L_2}, m, n=1, 2, \dots$ $\vartheta_{1mn}, \vartheta_{2mn}, W_{mn}, w_{mn}$ są stałymi amplitudami, ω jest częstotliwością drgań.



Rys. 5.6. Schemat obciążenia płyty prostokątnej
Fig. 5.6. Scheme of a rectangular plate loading

Rozpatrując zagadnienie quasi-statyczne i oznaczając

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha_n^2 \langle G_{11} \rangle + \beta_n^2 \langle G \rangle + \langle D_1 \rangle, \\ H_2 &= \beta_n^2 \langle G_{22} \rangle + \alpha_n^2 \langle G \rangle + \langle D_2 \rangle, \\ \bar{G} &= \langle G_{12} \rangle + \langle G \rangle \end{aligned}$$

oraz definiując bezwymiarowe sztywności

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &= 1 - \frac{H_2 \langle D_1 \rangle - \beta_n^2 \langle D_2 \rangle \bar{G}}{H_1 H_2 - \alpha_m^2 \beta_n^2 G^2}, \\ \bar{D}_2 &= \frac{\langle D_2 \rangle}{\langle D_1 \rangle} \left(1 - \frac{H_1 \langle D_2 \rangle - \alpha_m^2 \langle D_1 \rangle \bar{G}}{H_1 H_2 - \alpha_m^2 \beta_n^2 G^2} \right) \end{aligned}$$

i oznaczając dodatkowo

$$\bar{N}_1 = \frac{N_{11}}{\langle D_1 \rangle} \quad \bar{N}_2 = \frac{N_{22}}{\langle D_1 \rangle} \quad (N_{12} = 0)$$

$$\bar{B} = \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2 \langle \bar{g}^2 \rangle \langle D_2 \rangle \bar{G} + \langle h g_{,1} \rangle^2 \langle D_1 \rangle}{H_1 H_2 - \alpha_m^2 \beta_n^2 \bar{G}^2 + \langle g_{,1}^2 G_{11} \rangle + l^2 \langle h^2 D_1 \rangle + l^2 \beta_n^2 \langle h^2 G \rangle}$$

uzyskamy z układu równań (5.23), po formalnych przekształceniach, następujący układ równań dla niewiadomych w_{mn} i W_{mn}

$$\begin{bmatrix} \alpha_m^2 (\bar{N}_1 + \bar{D}_1) + \beta_n^2 (\bar{N}_2 + \bar{D}_2) - \frac{\langle \mu \rangle}{\langle D_1 \rangle} \omega^2 & l \langle \bar{g} \rangle \beta_n^2 (\bar{N}_2 + \bar{D}_2) \\ l \langle \bar{g} \rangle \beta_n^2 (\bar{N}_2 + \bar{D}_2) & \langle g_{,1}^2 \rangle (\bar{N}_1 + 1) + l^2 \beta_n^2 \langle \bar{g}^2 \rangle (\bar{N}_2 + \bar{D}_2) + \left[\begin{matrix} w_{mn} \\ W_{mn} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Układ równań (5.24) jest punktem wyjścia do dalszej analizy. Założono, że działająca w płaszczyźnie środkowej płyty siła N_{11} jest siłą ściskającą, natomiast siła N_{22} jest do niej proporcjonalna. Wprowadzając parametr $\gamma = \frac{N_{22}}{N_{11}}$, po przyrównaniu do zera wyznacznika głównego układu równań (5.24) uzyskano trójmian kwadratowy

$$\begin{aligned} & \left[\langle g_{,1}^2 \rangle k + l^2 \beta_n^2 \gamma \left(k \langle \bar{g}^2 \rangle - \beta_n^2 \langle \bar{g} \rangle^2 \gamma \right) \right] \bar{N}_1^2 + \\ & - \left\{ \langle g_{,1}^2 \rangle (D_o + k) + l^2 \left[\beta_n^2 \langle \bar{g}^2 \rangle (D_o + k \bar{D}_2) - 2 \beta_n^4 \langle \bar{g} \rangle^2 \bar{D}_2 \gamma - k \bar{B} \right] \right\} \bar{N}_1 + \\ & + \langle g_{,1}^2 \rangle D_o + l^2 \left[\beta_n^2 \langle \bar{g}^2 \rangle D_o \bar{D}_2 - \beta_n^4 \langle \bar{g} \rangle^2 \bar{D}_2^2 - D_o \bar{B} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

gdzie $D_o = \alpha_m^2 \bar{D}_1 + \beta_n^2 \bar{D}_2$, $k = \alpha_m^2 + \beta_n^2 \gamma$.

Miejsca zerowe tego trójmianu określają krytyczne siły w płaszczyźnie środkowej płyty.

Równanie (5.25) przeanalizowano numerycznie korzystając z programu Mathematica 5. Analiza polegała na ustaleniu zależności pomiędzy bezwymiarową siłą krytyczną \bar{N}_{1kr} (będącą rozwiązaniem (5.25)) a wartością $\gamma = \frac{N_{22}}{N_{11}}$ i porównaniu wyników z modelem asymptotycznym.

Rozwiązanie uzależniono od parametrów: ν (współczynnik Poissona), ψ , $\kappa = \frac{L_2}{L_1}$,

$\lambda = \frac{L_2}{d}$, $\varepsilon = \frac{l}{L_2}$. Przyjęto funkcje kształtu w postaci:

$$h(x_1) = l \sin \frac{2\pi}{l} x_1,$$

$$g(x_1) = l \left(\cos \frac{2\pi}{l} x_1 + c \right).$$

Stałą c obliczono z warunku $\langle \mu g \rangle = 0$

$$c = -\frac{\varphi_M}{1 + \varphi_M} \quad \text{gdzie} \quad \varphi_M = \frac{M}{\rho d l}$$

Tak więc

$$\langle \bar{g} \rangle = c, \quad \langle \bar{g}^2 \rangle = \frac{1}{2} + c^2, \quad \langle g_{,1}^2 \rangle = 2\pi^2, \quad \langle h_{,1}^2 \rangle = 2\pi^2, \quad \langle \bar{h}^2 \rangle = \frac{1}{2},$$

oraz

$$\langle \mu \rangle = \rho d (1 + \varphi_M) = \mu_o \frac{1}{1 + c}, \quad \mu_o = \rho d,$$

$$\langle \bar{g}^2 \mu \rangle = \mu_o \left[\langle g^2 \rangle + (1 + \langle \bar{g} \rangle)^2 \varphi_M \right] = \mu_o (1/2 - c),$$

Uwzględniając techniczną ortotropię płyty i oznaczając

$$a_1 = \lambda^2 \frac{30(1-\nu)}{6-\nu}, \quad a_2 = \lambda^2 \frac{1-\nu^2(1+\psi)}{1+\nu(1+\psi)} \frac{30(1+\psi)}{6-\nu(1+\psi)}, \quad e = \nu(1+\nu) + \frac{\sqrt{1+\psi}}{2(1+\nu)}$$

$$h_1 = \pi^2 \left[m^2 \kappa^2 + n^2 \frac{\sqrt{1+\psi}}{2(1+\nu)} \right] + a_1, \quad h_2 = \pi^2 \left[n^2 (1+\psi) + m^2 \kappa^2 \frac{\sqrt{1+\psi}}{2(1+\nu)} \right] + a_2,$$

otrzymano wyrażenia na bezwymiarowe sztywności w postaci

$$\bar{D}_1 = 1 - \frac{h_1 a_1 - \pi^2 n^2 a_2 e}{h_1 h_2 - \pi^4 m^2 n^2 \kappa^2 e^2}, \quad \bar{D}_2 = \frac{a_2}{a_1} \left(1 - \frac{h_1 a_1 - \pi^2 m^2 \kappa^2 a_2 e}{h_1 h_2 - \pi^4 m^2 n^2 \kappa^2 e^2} \right)$$

Oznaczając w dalszej kolejności

$$\bar{B} = \frac{n^2 \frac{a_2}{a_1} h_1 c^2}{h_1 h_2 - \pi^4 m^2 n^2 \kappa^2 e^2} + \frac{m^2 n^2 \kappa^2 e (1/2 + c^2)}{2\pi^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[a_1 + \pi^2 n^2 \frac{\sqrt{1+\psi}}{2(1+\nu)} \right]}$$

oraz $\bar{D}_o = \kappa^2 m^2 \bar{D}_1 + n^2 \bar{D}_2$, $\bar{k} = \kappa^2 m^2 + \gamma n^2$ z równania (5.25) uzyskano dla potrzeb obliczeń numerycznych poniższą relację

$$\begin{aligned} & \left[2\bar{k} + \varepsilon^2 n^2 \gamma \left[\bar{k} \left(\frac{1}{2} + c^2 \right) - n^2 c^2 \gamma \right] \right] \bar{N}_1^2 + \\ & - \left[2(\bar{D}_o + \bar{k}) + \varepsilon^2 \left[n^2 \left(\frac{1}{2} + c^2 \right) \left(\bar{D}_o \gamma + \bar{k} \frac{a_2}{a_1} \right) - 2n^4 c^2 \bar{D}_2 \gamma - \bar{k} \bar{B} \right] \right] \bar{N}_1 + \\ & + 2\bar{D}_o + \varepsilon^2 \left[n^2 \left(\frac{1}{2} + c^2 \right) \bar{D}_o \frac{a_2}{a_1} - n^4 c^2 \bar{D}_2^2 - \bar{D}_o \bar{B} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Obliczenia przeprowadzono dla płyty betonowej z betonu B25 przy $E=29000\text{MPa}$, $\nu = 0,20$ i ciężarze objętościowym 23 kN/m^3 , wzmocnionej żebrami stalowymi z profili walcowanych o $E_s=2\cdot 10^5\text{ MPa}$. Rozpatrzono płytę kwadratową ($\kappa=1$) oraz płyty prostokątne przy $\kappa=0,5$ i $\kappa=2$ dla dwóch wariantów smukłości $\lambda=20$ i $\lambda=60$ przy stałym $\varepsilon=0,10$. W każdym przypadku parametr „ ψ ” przyjmował wartości 0,5; 1,0; 1,5. Parametr „ c ” ustalano indywidualnie w zależności od ψ i φ_M , tabl.5.2. Obliczenia wykonano dla wszystkich kombinacji parametrów κ , ψ , λ . Wybrane wykresy, przedstawiające zależność między N_{11kr} a $\gamma = \frac{N_{22}}{N_{11}}$, istotne dla dalszej analizy, zamieszczono na rysunku 5.7. Na wykresach przez N_1^I i N_1^{II} oznaczono rozwiązania równania (5.26), natomiast przez $N_1^0 = \frac{D}{k}$ bezwymiarową siłę krytyczną uzyskaną w modelu zhomogenizowanym asymptotycznie.

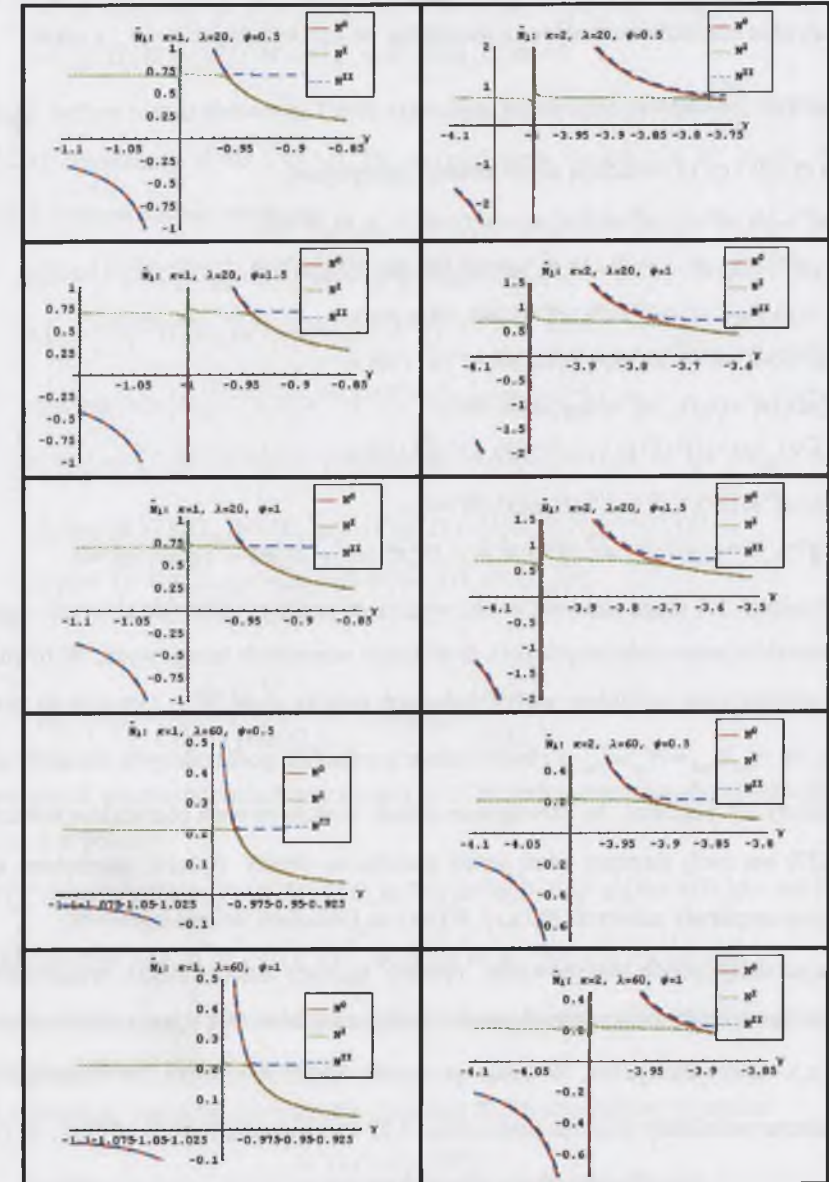
Tablica 5.2

I-bar	J_s	M	φ	ψ	c
	10^{-8} m^4	kg/m			
I 180	1450	21,9	0,0885	0,490	-0,0813
I 220	3060	33,1	0,1337	1,030	-0,1179
I 240	4250	36,2	0,1463	1,420	-0,1276

Analiza wykresów na rysunku 5.7 wskazuje, że w przypadku ściskania płyty w obu kierunkach, czyli $\gamma > 0$, obciążeniem krytycznym jest N_1^I , ale jego wartość z praktycznego punktu widzenia nie różni się od wartości N_1^0 uzyskanej w modelu zhomogenizowanym asymptotycznie (niemniej $N_1^I < N_1^0$). Można mówić o zgodności proponowanego modelu i modelu asymptotycznego. Ta zgodność obowiązuje także dla $\gamma = 0$ (jednokierunkowe ściskanie siłą N_{11}), a także dla pewnego zakresu $\gamma < 0$, tzn. gdy w kierunku osi x_2 pojawiają się siły rozciągające.

Istotne różnice występują, gdy wartość γ zbliża się do wartości $\frac{-1}{\kappa^2}$, czyli np. dla płyty kwadratowej, gdy wartość liczbowa siły ściskającej N_{11} zbliża się do wartości siły rozciągającej N_{22} . Dla wartości γ od $\frac{-1}{\kappa^2}$ do $\frac{-0,9}{\kappa^2}$ siła krytyczna N_1^I jest znacznie niższa od N_1^0 . Przedział różnic wyników rozszerza się w miarę wzrostu parametrów ψ i κ , a także jest większy dla niższej smukłości λ . W tym przedziale wartość N_1^0 praktycznie nie różni się od wartości

N_1^{II} (ale $N_1^{II} > N_1^0$). Zachodzi więc formalna zgodność wyników porównywanych modeli, lecz N_1^{II} i N_1^0 nie są siłami krytycznymi. Wykresy N_1^I , N_1^{II} i N_1^0 w żadnym punkcie nie przecinają się, ale wykres N_1^0 jest albo praktycznie zgodny z wykresem N_1^I , albo z N_1^{II} .

Rys. 5.7. Wykresy zależności siły krytycznej od parametru γ Fig. 5.7. Diagrams of interrelation between critical force and the parameter γ

5.4. Stateczność dynamiczna

Jako wstęp do analizy stateczności dynamicznej wyprowadzimy równanie częstości jednorodnego materiałowo, uniperiodycznie uźebrowanego pasma płytowego, przedstawionego na rys. 5.2 i opisanego równaniami (5.12) i (5.13). Dla zginania walcowego w płaszczyźnie Ox_2 wszystkie niewiadome funkcje są niezależne od x_1 . Oznaczając $x = x_2$, a także

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x)$$

równania (5.12) i (5.13) redukują się do postaci następującej

$$\begin{aligned} \langle G \rangle \vartheta_1^{0n} - \langle D_1 \rangle \vartheta_1^0 - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_1^0 + l \langle \bar{h} D_1 \rangle \Theta_1 + \langle h_1 G \rangle \Theta_{21} - \langle g_1 D_1 \rangle W &= 0, \\ \langle G_{22} \rangle \vartheta_2^{0n} - \langle D_2 \rangle \vartheta_2^0 - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_2^0 + \langle h_1 G_{12} \rangle \Theta_1 - l \langle \bar{h} D_2 \rangle \Theta_2 - \langle D_2 \rangle w^0 &= 0, \\ (N_{22} + \langle D_2 \rangle) w^{0n} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 + \langle D_2 \rangle \vartheta_2^0 + l \langle \bar{h} D_2 \rangle \Theta_2 + p &= 0, \\ -l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \Theta_1^n + l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle \Theta_1 + \langle h_1^2 G_{11} \rangle \Theta_1 + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_1 + \\ + l^2 \langle \bar{h} D_1 \rangle \vartheta_1^0 + \langle h_1 G_{12} \rangle \vartheta_2^0 + l \langle \bar{h} g_1 D_1 \rangle W &= 0, \\ -l^2 \langle \bar{h}^2 G_{22} \rangle \Theta_2^n + l^2 \langle \bar{h}^2 D_2 \rangle \Theta_2 + \langle h_1^2 G \rangle \Theta_2 + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_2 + \\ + \langle h_1 G \rangle \vartheta_1^0 + l \langle \bar{h} D_2 \rangle (\vartheta_2^0 + w^0) + l^2 \langle \bar{h} g D_2 \rangle W &= 0, \\ -l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle W^n + \langle g_1^2 D_1 \rangle W + l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \ddot{W} + \langle g_1 D_1 \rangle \vartheta_1^0 + l \langle \bar{h} g_1 D_1 \rangle \Theta_1 - l^2 \langle \bar{g} \bar{h} D_2 \rangle \Theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Równania (5.27) mogą stanowić punkt wyjścia do analizy jednowymiarowych zagadnień płyt strukturalnie uniperiodycznych przy dowolnych warunkach brzegowych. W równaniach tych dla uproszczenia pominięto wpływ zaburzeń ugięcia w na N_{eff} . Oznacza to przyjęcie założenia, że $N_{\text{eff}} w_{,\text{eff}} \approx N_{\text{eff}} w^0_{,\text{eff}}$ i równocześnie pominięcie podkreślonych wyrazów równań (5.12). Należy też pamiętać, że rozwiązanie układu sześciu równań różniczkowych cząstkowych (5.27) ma swój fizyczny sens, jeżeli uśrednione obroty $\vartheta_a^0(x,t)$, uśrednione ugięcie $w^0(x,t)$ oraz amplitudy zaburzeń $\Theta_a(x,t)$, $W(x,t)$ są funkcjami wolnozmiennymi.

Stosując dalej sposób postępowania opisany w pracy autora (2003), przyjmujemy, że z uwagi na symetrię komórki periodyczności funkcja kształtu $h(x_1)$ jest symetryczna, natomiast $g(x_1)$ – antysymetryczna. W takim przypadku układ równań (5.27) rozprzega się na dwa niezależne podukłady (por. też podrozdział 5.2). Pierwszy dla funkcji $\vartheta_1^0(x,t)$, $\Theta_2(x,t)$

$$\begin{aligned} \langle G \rangle \vartheta_1^{0n} - \langle D_1 \rangle \vartheta_1^0 - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_1^0 + \langle h_1 G \rangle \Theta_2 &= 0, \\ -l^2 \langle \bar{h}^2 G_{22} \rangle \Theta_1^n + l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle \Theta_1 + \langle h_1^2 G \rangle \Theta_2 + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_2 + \langle h_1 G \rangle \vartheta_1^0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Drugi dla funkcji $\vartheta_2^0(x,t)$, $w^0(x,t)$, $\Theta_1(x,t)$, $W(x,t)$

$$\begin{aligned} \langle G_{22} \rangle \vartheta_2^{0n} - \langle D_2 \rangle \vartheta_2^0 - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_2^0 + \langle h_1 G_{12} \rangle \Theta_1 - \langle D_2 \rangle w^0 &= 0, \\ (N_{22} + \langle D_2 \rangle) w^{0n} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 + \langle D_2 \rangle \vartheta_2^0 + p &= 0, \\ -l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \Theta_1^n + l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle \Theta_1 + \langle h_1^2 G_{11} \rangle \Theta_1 + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_1 + \langle h_1 G_{12} \rangle \vartheta_2^0 + l \langle \bar{h} g_1 D_1 \rangle W &= 0, \\ -l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle W^n + \langle g_1^2 D_1 \rangle W + l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \ddot{W} + l \langle \bar{h} g_1 D_1 \rangle \Theta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Pomijając wpływ inercji obrotowej J oraz zakładając jednorodne warunki początkowe, z równań (5.28) otrzymamy $\vartheta_1^0 = 0$ i $\Theta_2 = 0$. Po uwzględnieniu dodatkowo, że $N = N_{22} = N(t)$ oraz $p = p(x,t)$ i wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned} \varphi_1[w] &= \left[l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \langle G_{22} \rangle w^{0n} - l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle \right] H_o w^0, \\ \varphi_2[w] &= \left[l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \langle G_{22} \rangle w^{0n} - \langle h_1^2 G_{11} \rangle \right] H_1 w^0, \\ \psi_1[w] &= \varphi_1[w] - \langle D_2 \rangle \left[l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle w^{0n} - l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle \right] w^0, \\ \psi_2 &= \varphi_1[w] - \langle D_2 \rangle \left(l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle w^{0n} - \langle h_1^2 G_{11} \rangle w^0 \right), \\ \zeta_1[p] &= l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \left(\langle G_{22} \rangle p^n - \langle D_2 \rangle p \right) - l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle \left(H_o p^n - \langle D_2 \rangle p \right), \\ \zeta_2[p] &= l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \left(\langle G_{22} \rangle p^n - \langle D_2 \rangle p \right) - \langle h_1^2 G_{11} \rangle \left(H_1 p^n - \langle D_2 \rangle p \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$H_o = \langle G_{22} \rangle \frac{\langle h_1 G_{12} \rangle^2}{l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle}, \quad H_1 = \langle G_{22} \rangle \frac{\langle h_1 G_{12} \rangle^2}{\langle h_1^2 G_{11} \rangle},$$

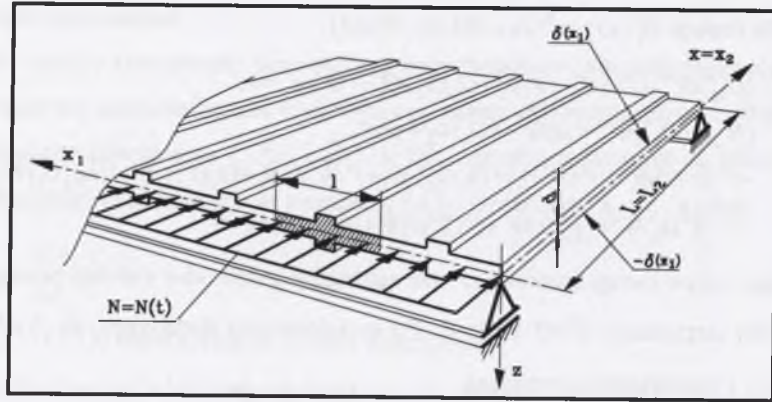
po formalnych przekształceniach otrzymamy z (5.29) jedno równanie dla uśrednionego ugięcia $w(x,t)$ w postaci

$$\begin{aligned} N \left(l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle \psi_1^n - \langle g_1^2 D_1 \rangle \psi_2 \right) + \langle D_2 \rangle \left(l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle \varphi_1^n - \langle g_1^2 D_1 \rangle \varphi_2 \right) - l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \left(\ddot{N} \psi_1 + \langle D_2 \rangle \ddot{\psi}_1 + N \ddot{\psi}_1 \right) + \\ - \langle \mu \rangle \left(l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle \ddot{\psi}_1^n - \langle g_1^2 D_1 \rangle \ddot{\psi}_2 \right) + l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \frac{\partial^4}{\partial t^4} \psi_1 = l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle \zeta_1^n - \langle g_1^2 D_1 \rangle \zeta_2 - l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \zeta_1 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Równanie (5.30) można traktować jako ogólne równanie ruchu strukturalnie uniperiodycznego, średniej grubości pasma płytowego.

Rozdzielając zmienną, rozwiązanie równania (5.30) przyjmujemy w postaci

$$w^0(x,t) = w_o(x) T(t) \quad (5.31)$$



Rys. 5.8. Żebrowe pasmo płytowe
Fig. 5.8. Ribbed plate band

Założmy teraz, że pasmo płytowe jest swobodnie podparte na krawędziach $x=0$, $x=L$, rys.5.7. W takim przypadku niewiadomą funkcję $w_0(x)$ możemy przyjąć jako

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin k_n x, \quad (5.32)$$

gdzie $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $n=1,2,\dots$

Przyjmując $p=0$, uwzględniając (5.31) i (5.32) oraz oznaczając dodatkowo

$$\begin{aligned} H_n &= \langle G_{22} \rangle \left(1 + k_n^2 l^2 \frac{\langle \bar{h}^2 G \rangle}{l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle} \right) - \frac{\langle h_1 G_{12} \rangle^2}{l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle} \\ D_n &= \langle D_2 \rangle \left(1 + k_n^2 l^2 \frac{\langle \bar{h}^2 G \rangle}{l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle} \right) \\ \kappa_n &= \frac{\langle D_2 \rangle}{k_n^2 H_n + D_n} \quad \kappa_n^0 = \frac{1}{1 + \frac{\langle h_1^2 G_{11} \rangle}{l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle}} \\ c_1 &= 1 - \kappa_n \kappa_n^0 \frac{\langle G_{22} \rangle}{H_n} + k_n^2 l^2 \frac{\langle \bar{g}^2 D_2 \rangle}{\langle g_1^2 D_1 \rangle} \\ c_2 &= 1 - \kappa_n \kappa_n^0 \left(1 + \frac{k_n^2 \langle G_{22} \rangle}{\langle D_2 \rangle} \right) + k_n^2 l^2 \frac{\langle \bar{g}^2 D_2 \rangle}{\langle g_1^2 D_1 \rangle} \end{aligned} \quad (5.33)$$

otrzymamy z (5.30), po formalnych przekształceniach, równanie częstości swobodnie podpar- tego, strukturalnie uniperiodycznego, średniej grubości pasma płytowego:

$$\begin{aligned} l^2 \frac{d^4 T}{dt^4} + \left[\frac{c_2 \langle g_1^2 D_1 \rangle}{\langle \bar{g}^2 \mu \rangle} + \frac{k_n^2 l^2}{\langle \mu \rangle} (N + k_n^2 H_n \kappa_n) \right] \frac{d^2 T}{dt^2} + \\ + k_n^2 \left[\frac{\langle g_1^2 D_1 \rangle}{\langle \bar{g}^2 \mu \rangle \langle \mu \rangle} (c_2 N + c_1 k_n^2 H_n \kappa_n) + l^2 \frac{d^2 N}{dt^2} \right] T = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Jeżeli płyta spełnia założenie, że $d \ll l \ll L$, gdzie $d = 2 \max \delta(x)$, można przyjąć

$$c_2 \approx c_1, \quad D_n \approx \langle D_2 \rangle, \quad H = H_n = \langle G_{22} \rangle - \frac{\langle h_1 G_{12} \rangle^2}{l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle + \langle h_1^2 G_{11} \rangle}, \quad \kappa_n = \frac{\langle D_2 \rangle}{k_n^2 H + \langle D_2 \rangle} \quad (5.35)$$

Uwzględniając (5.35), z równania (5.34) otrzymamy relacje na wyższą ω_+ i niższą ω_- czę- stość drgań własnych

$$\omega_+^2 = \frac{c_2 \langle g_1^2 D_1 \rangle}{l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle}, \quad \omega_-^2 = \frac{k_n^2}{\langle \mu \rangle} (-N + k_n^2 H \kappa_n) \quad (5.36)$$

oraz statyczną siłę krytyczną

$$N_{kr,n} = k_n^2 H \kappa_n \quad (5.37)$$

Jakościową analizę zagadnienia stateczności dynamicznej przeprowadzono dla pasma płytowego opisowego równaniem (5.30). Ścisłej, należy tu mówić o analizie dynamicznej niestateczności, której źródłem jest rezonans parametryczny, Bolotin B.B (1956). Stosując standardowy sposób postępowania założmy, że ściskająca siła osiowa w płaszczyźnie środ- kowej pasma zmienia się zgodnie z relacją

$$N(t) = N_o + N_i \cos pt, \quad \text{gdzie } N_o, N_i \text{ są stałe.}$$

Rozwiązania równania (5.30) będziemy poszukiwać w postaci szeregu

$$w^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,\dots \quad (5.38)$$

Oznaczając n -tą częstość drgań własnych

$$\Omega_n^2 = \frac{k_n^4 H \kappa_n}{\langle \mu \rangle} \left(1 - \frac{N_o}{N_{kr,n}} \right),$$

głębokość modulacji

$$2\bar{\mu}_n = \frac{N_i}{N_{kr,n} - N_o} \left(1 - \frac{p^2}{\omega_n^2} \right),$$

oraz uwzględniając oznaczenia (5.33) i założenia (5.35) uzyskamy równanie

$$l^2 \frac{d^4 T_n}{dt^4} + \frac{c_2 \langle g_1^2 D_1 \rangle}{\langle g^2 \mu \rangle} \left[\frac{d^2 T_n}{dt^2} + \Omega_n^2 (1 - 2\bar{\mu}_n \cos pt) T_n \right] = 0. \quad (5.39)$$

Równanie (5.39) możemy nazwać pewnym uogólnieniem równania Mathieu. Staje się ono klasycznym równaniem Mathieu przy pominięciu efektu skali związanego z okresem l .

Analiza stateczności dynamicznej polega na określeniu, czy dla danego stosunku częstości siły wymuszającej p do częstości drgań własnych Ω_n oraz dla danego współczynnika głębokości modulacji $\bar{\mu}$ drgania są stateczne czy też niestateczne. Należy w tym celu na płaszczyźnie $\left(\frac{p}{\Omega}, \bar{\mu}_n\right)$ wyznaczyć obszary niestateczności rozwiązania (5.39) uwzględniając, że na granicy kolejnych obszarów niestateczności drgania są sumą drgań narastających oraz drgań okresowych o okresach na przemian równych $2\bar{T}_p$ i \bar{T}_p , gdzie $\bar{T}_p = 2\pi/p$ jest okresem zmian parametru równania. Rozważania zawężymy do możliwości powstania drgań parametrycznych pierwszej harmonicznej szeregu (5.38), czyli możliwości istnienia niestatecznych rozwiązań równania:

$$\frac{d^4 T}{dt^4} + \omega^2 \left[\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\bar{\mu}) T \right] = 0 \quad (5.40)$$

w którym dla uproszczenia pominięto indeks 1 oraz oznaczono

$$\omega^2 = \omega_i^2 = \frac{c_2 \langle g_1^2 D_1 \rangle}{l^2 \langle g^2 \mu \rangle}$$

Poszukując rozwiązania o okresie $2\bar{T}_p$, odpowiadającego między innymi granicom pierwszego obszaru niestateczności, przyjęto

$$T(t) = \sum_{i=1,3,\dots} \left(a_i \sin \frac{ipt}{2} + b_i \cos \frac{ipt}{2} \right)$$

i podstawiono do (5.40). Po przyrównaniu do zera współczynników przy identycznych funkcjach trygonometrycznych uzyskano jednorodny nieskończony układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned} \left[1 + \bar{\mu} - \left(\frac{p}{2\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{2\Omega} \right)^4 \right] a_1 - \bar{\mu} a_3 &= 0 \\ \left[1 - \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^4 \right] a_i - \bar{\mu} (a_{i-2} + a_{i+2}) &= 0 \quad i=3,5,\dots \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \bar{\mu} - \left(\frac{p}{2\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{2\Omega} \right)^4 \right] b_1 - \bar{\mu} b_3 &= 0 \\ \left[1 - \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^4 \right] b_i - \bar{\mu} (b_{i-2} + b_{i+2}) &= 0 \quad i=3,5,\dots \end{aligned} \quad (5.42)$$

gdzie $\varepsilon = \frac{\Omega}{\omega}$.

W przypadku bardzo małej głębokości modulacji $\bar{\mu} = 0$, ograniczając się tylko do jednego wyrazu otrzymano z (5.41) i (5.42) na płaszczyźnie $\left(\frac{p}{\Omega}, \bar{\mu}\right)$ granice pierwszego obszaru niestateczności odpowiednio

$$\left(\frac{p}{\Omega} \right)^2 = 1 + \bar{\mu}, \quad \left(\frac{p}{\Omega} \right)^2 = 1 - \bar{\mu} \quad (5.43)$$

oraz dodatkowe ograniczenie na częstość siły wzbudzającej $p \neq 2\omega$. Rozwiązanie (5.43) jest jakościowo identyczne z rozwiązaniem już znanym. Należy jednak pamiętać, że częstość drgań własnych Ω i głębokości modulacji $\bar{\mu}$ uwzględniają efekt skali. Nie ma swojego odpowiednika w dotąd stosowanych metodach dodatkowe ograniczenie na częstość drgań siły wzbudzającej.

Analogicznie poszukujemy rozwiązania o okresie \bar{T}_p ; przyjmując

$$F(t) = b_0 + \sum_{i=2,4,6,\dots} \left(a_i \sin \frac{ipt}{2} + b_i \cos \frac{ipt}{2} \right)$$

uzyskamy dwa jednorodne, nieskończone układy równań

$$b_0 - \bar{\mu} b_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{p}{\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{\Omega} \right)^4 \right] b_2 - \bar{\mu} (2b_0 + b_4) &= 0 \\ \left[1 - \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^4 \right] b_i - \bar{\mu} (b_{i+2} + b_{i-2}) &= 0 \quad i=4,6,\dots \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{p}{\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{p}{\Omega} \right)^4 \right] a_2 - \bar{\mu} a_4 &= 0 \\ \left[1 - \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{ip}{2\Omega} \right)^4 \right] a_i - \bar{\mu} (a_{i+2} + a_{i-2}) &= 0 \quad i=4,6,\dots \end{aligned} \quad (5.45)$$

Przy małej głębokości modulacji $\bar{\mu} = 0$, ograniczając się w (5.44) i (5.45) do dwóch wierszy i dwóch kolumn, otrzymano granice drugiego obszaru niestateczności określone wzorami

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\Omega}\right)^2 &= 1 - 2\bar{\mu}^2 + \varepsilon^2(1 - 2\bar{\mu}^2) \\ \left(\frac{p}{\Omega}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{3}\bar{\mu}^2 + \varepsilon^2 \frac{9 - 14\bar{\mu}^2}{9 + 8\bar{\mu}^2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

oraz dodatkowe ograniczenia na częstość siły wzbudzającej $p \neq \omega$ oraz $p \neq 0,5\omega$.

W relacjach (5.46) podkreślono składniki jakościowo zgodne z rozwiązaniami już znanymi. Efekt skali, reprezentowany przez parametr ε , koryguje granice obszarów niestateczności.

Zaprezentowany sposób analizy zagadnienia rezonansu parametrycznego jest najprostszy z możliwych. Jest on poprawny tylko dla bardzo małych głębokości modulacji $\bar{\mu} < 0,6$. Uzyskane relacje potwierdzają poprawność prezentowanego uśrednionego modelu średniej grubości płyty strukturalnie uniperiodycznej. Analizując, przy pomocy tego modelu, zagadnienie stateczności, nie uzyskano wyników sprzecznych z wynikami otrzymanymi innymi metodami.

5.5. Podsumowanie

W rozdziale tym zaproponowano uśredniony 2-D model średniej grubości płyt prostokątnych strukturalnie uniperiodycznych. Model ten uwzględnia efekt skali, tj. wpływ wielkości okresu powtarzalności l na makromechaniczne właściwości płyty. Płyty o takiej strukturze były analizowane dotychczas np. metodą homogenizacji asymptotycznej, w której efekt ten jest pomijany. Wykazano, że stosując metodę modelowania uwzględniającą efekt skali, płyty o strukturze uniperiodycznej nie można traktować jako szczególnego przypadku płyty o periodyce dwukierunkowej, jak to ma na ogół miejsce w modelu zhomogenizowanym asymptotycznie. Uzyskiwane w podejściu nieasymptotycznym równania modelu płyt uniperiodycznych są inne jakościowo, bardziej rozbudowane i złożone (poczyniono słabsze założenia) w porównaniu z równaniami płyt periodycznych dwukierunkowo. Generalnie, są to równania o współczynnikach funkcyjnych, a stają się równaniami o współczynnikach stałych dla płyt o stałych parametrach w nieperiodycznym kierunku. Równania dla amplitud zaburzeń, które są dodatkowymi niewiadomymi kinematycznymi, są teraz równaniami różniczkowymi częst-

kowymi, podczas gdy dla płyty o dwukierunkowej strukturze periodycznej są to równania różniczkowe zwyczajne.

Płyty o strukturze uniperiodycznej mają duże zastosowanie praktyczne, także w konstrukcjach budowlanych. Przypadek szczególny (zagadnienie pasma płytowego) proponowanego w pracy modelu może być wykorzystywany do obliczeń dynamicznych periodycznie żebrowanych płyt stalowych i żelbetowych, w których żebra stanowią element nośny usytuowany prostopadle do podpór pasma płytowego.

Analizując zagadnienie drgań własnych żebrowego pasma płytowego, w ramach proponowanego modelu płyty uniperiodycznej uzyskano dwie podstawowe częstości drgań własnych, np. (5.21): częstość wysoką, nie mającą swojego odpowiednika w modelach zhomogenizowanych asymptotycznie, a zależną od efektu skali, oraz częstość niską, której pierwsze przybliżenie jest od tego parametru niezależne i porównywalne z otrzymanymi innymi metodami.

Dla potrzeb analizy stateczności dynamicznej wyprowadzono ogólne równanie ruchu pasma płytowego obciążonego zależną od czasu siłą osiową. To równanie można zastosować do analizy zagadnień dynamiki przy dowolnych warunkach brzegowych. Uzyskane z tego równania równanie częstości (dla pasma płytowego swobodnie podpartego) można traktować jako pewne uogólnienie znanego równania Mathieu. Stosując tryb postępowania jak przy rozwiązywaniu równania Mathieu, wyznaczono dwa podstawowe obszary niestateczności dynamicznej. Uzyskane wyniki są zgodne z rozwiązaniami już znanymi, jednak są także zależne od wymiaru powtarzalnego segmentu płyty. Ponadto pojawił się nowy parametr zagadnienia: wysoka częstość drgań własnych, a także dodatkowe ograniczenia na częstość siły wzbudzającej.

Rozpatrując zagadnienie statycznej stateczności uzyskano nowy jakościowo efekt w postaci drugiej, dodatkowej relacji do wyznaczania siły krytycznej. Siłą krytyczną jest w konkretnym przypadku oczywiście najmniejsza wartość otrzymana z tych relacji.

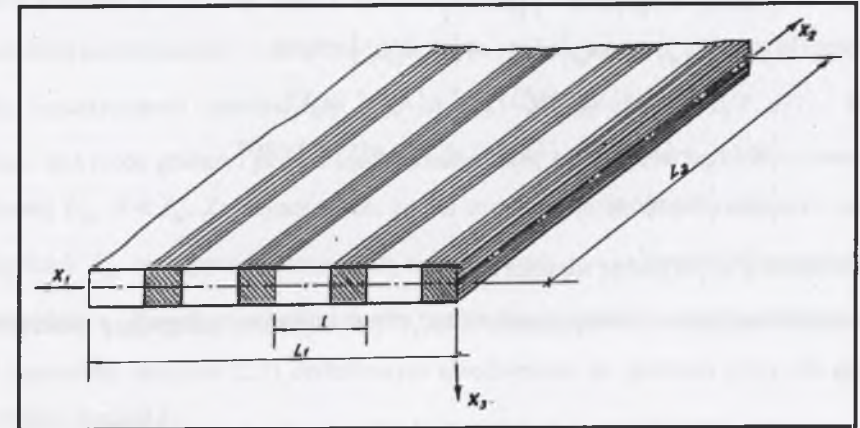
Analiza numeryczna quasi-statycznego zagadnienia stateczności uniperiodycznej płyty prostokątnej i porównanie z modelem zhomogenizowanym asymptotycznie wykazała zgodność otrzymanych wyników. Wartości liczbowe sił krytycznych są porównywalne ze sobą i niesprzeczne. Tak jak i w innych zagadnieniach quasi-statycznych model z efektem skali w nieznacznym zakresie koryguje model asymptotyczny. Wykazano jednak, że dla pewnych

szczególnych przypadków obciążenia w płaszczyźnie środkowej płyty metoda homogenizacji asymptotycznej daje znacznie zawyżone wartości sił krytycznych. Dlatego też proponuje się, aby w tych przypadkach, tzn. gdy $\gamma = \frac{N_{22}}{N_{11}} \rightarrow \frac{-1}{\kappa^2}$, wyniki sprawdzić także metodą nieasymptotyczną, np. zamieszczoną w tym opracowaniu. Ocena fizycznego sensu obliczonych wartości sił krytycznych pod kątem pozostania w granicach obszaru sprężystego wykracza poza zakres tej pracy i będzie przedmiotem odrębnego opracowania.

6. PŁYTY MATERIAŁOWO UNIPERIODYCZNE

6.1. Wyprowadzenie równań modelu

Rozważania w tym rozdziale będą dotyczyły płyt periodycznych tylko w jednym kierunku i okresie periodyczności rzędu ich grubości, $l \sim 2\delta(\cdot)$. Płyty takie nazwano *plytami materiałowo uniperiodycznymi*. Płyta, z założenia, jest periodyczna tylko w kierunku osi x_1 , natomiast zmienność parametrów geometrycznych i materiałowych w kierunku osi x_2 jest dowolna. Należy tu zwrócić uwagę, że w praktyce inżynierskiej mamy najczęściej do czynienia z płytami o stałych parametrach w nieperiodycznym kierunku. Przykładowy fragment takiej płyty przedstawiono na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Płyta materiałowo uniperiodyczna
Fig. 6.1. Material uniperiodic plate

Podobnie jak w rozdziale 4, sformułujemy najpierw, przed przejściem do 2D-modelu, trójwymiarowe zagadnienie ciała uniperiodycznego (w kierunku osi x_1) zajmującego obszar Ω , w przestrzeni R^3 i obciążonego wyłącznie wstępnym napięciem $\sigma_0^o(\cdot, t)$. Punktem wyjścia jest funkcjonal działania i wynikające z niego równania ruchu (2.6). Są to równania o silnie oscylujących, bardzo często nieciągłych, współczynnikach $A_{ijkl}(\cdot, x_2, z)$, $\rho(\cdot, x_2, z)$, a także $\sigma_0^o(\cdot, x_2, z, t)$.

Formułując techniką uśredniania tolerancyjnego przybliżony model ciała uniperiodycznego, dokonamy dekompozycji pola przemieszczeń na część uśrednioną i residualną wg (2.8),

a część residualna będzie aproksymowana skończonymi sumami (2.10). W związku z powyższym składowe pola przemieszczeń zapiszemy w postaci

$$u_i(\mathbf{x}, z, t) = u_i^o(\mathbf{x}, z, t) + h_i^A(x_1) V^A(\mathbf{x}, z, t) \quad (6.1)$$

gdzie dla przypomnienia: $u_i^o(\cdot)$ są składowymi uśrednionego pola przemieszczeń, $V^A(\cdot)$ są nowymi niewiadomymi kinematycznymi i równocześnie amplitudami zaburzeń, natomiast $h_i^A(\cdot)$ są modalnymi funkcjami kształtu.

Uwzględniając (6.1) oraz że $u_i^o(\cdot, z, t), V^A(\cdot, z, t) \in SV_d(T)$, zawężając rozważania do zagadnień, w których A_{ijk}, ρ są parzystymi funkcjami zmiennej x_3 , przy zastosowaniu techniki uśredniania tolerancyjnego TAT i procedur szczegółowo opisanych w pracy M. Woźniak i in. (2004), uzyskujemy następujące, uśrednione składniki funkcjonału działania $A(u_i^o, V^A)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \dot{u}_i^o \dot{u}_i^o + \frac{1}{2} \langle \rho h_i^A h_i^B \rangle V^A V^B, \\ \left\langle \frac{1}{2} A_{ijk} u_{i,j} u_{k,l} \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle A_{ijk} \rangle u_{i,j}^o u_{k,l}^o + \frac{1}{2} \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle V^A V^B + \\ &+ \frac{1}{2} \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle V^A V^B + \langle A_{ijk} h_k^B \rangle u_{i,j}^o V^B, \\ \left\langle \sigma_{ij}^o (u_{k,j} + \frac{1}{2} u_{i,k} u_{i,j}) \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^o \rangle u_{i,k}^o u_{i,j}^o + \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^o h_i^A h_j^B \rangle V^A V^B, \\ \langle \rho b_i u_i \rangle &= \langle \rho \rangle b_i u_i^o \end{aligned} \quad (6.2)$$

gdzie wskaźniki \bar{p}, \bar{q} przyjmują wartości 2, 3.

Z warunku stacjonarności funkcjonału $\delta A(u_i^o, V^A) = 0$ uzyskamy następujący układ równań dla u_i^o i V^A

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \ddot{u}_i^o - \left(\langle A_{ijk} \rangle u_{i,j}^o + \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle V^A \right)_{,j} - \langle \sigma_{ij}^o \rangle u_{i,k}^o - \langle \rho \rangle b_i &= 0 \\ \langle \rho h_i^A h_i^B \rangle \dot{V}^B - \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle V_{22}^B - \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle V_{33}^B + \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle V^B & \\ + \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B \rangle u_{i,j}^o + \langle \sigma_{ij}^o h_i^A h_j^B \rangle V^B - \langle \sigma_{22}^o h_i^A h_j^B \rangle V_{22}^B - \langle \sigma_{33}^o h_i^A h_j^B \rangle V_{33}^B &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Powyższe równania stanowią pewien makroskopowy model wstępnie napiętego, sprężystego ciała uniperiodycznego. Mają one, w ogólnym przypadku, zmienne, funkcyjne współczynniki. Dla płyty na rys.6.1 (o stałych parametrach w kierunku osi x_2) równania (6.3) mają współczynniki stałe. Należy pamiętać, że rozwiązania tych równań $u_i^o(\cdot), V^A(\cdot)$ mają swój fizyczny sens tylko wtedy, gdy $u_i^o(\cdot, t) \in SV_d(T), V^A \in SV_d(T)$ dla każdego czasu t . Równania (6.3) mogą być wykorzystane w zagadnieniach stateczności oraz do analizy propagacji długich fal wewnątrz rozpatrywanych ciał uniperiodycznych. Zauważmy, że współczynniki

$\langle \rho h_i^A h_i^B \rangle, \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B h_k^B \rangle, \langle A_{ijk} h_i^A h_j^B h_k^B \rangle$ zależą od okresu l i opisują wpływ efektu skali na zachowanie się ciała.

Dla ciała jednorodnego, przy pominięciu wstępnych napięć σ_{ij}^o , równanie (6.3)₁ staje się znanym równaniem ruchu, natomiast (6.3)₂ prowadzi do $V^A = 0$, jeżeli tylko warunki brzegowe i początkowe są jednorodne. Należy też przypomnieć, że dla uniperiodycznego ciała, dla którego $\Omega = (0, L_1) \times \Phi, \Phi \subset R^2$, warunki brzegowe dla V^A można formułować tylko na brzegach $(0, L_1) \times \partial\Phi$.

Założmy teraz, że równania (6.3) dotyczą obszaru $\Omega = \Pi \times (-d/2, d/2)$, zajmowanego przez nie odkształconą płytę typu Reissnera o stałej grubości d , gdzie $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$ jest prostokątem na płaszczyźnie Ox_1x_2 . Płyta jest materiałowo uniperiodyczna o okresie $l = l_1$, tylko w kierunku osi x_1 . Tak więc $(-l/2 + x_1, x_1 + l/2)$ dla każdego $x_1 \in (l/2, L_1 - l/2)$ jest przedziałem periodyczności o środku w dowolnym punkcie na osi x_1 . W tym przypadku komórkę periodyczności zdefiniujemy jako $\Delta = (x_1 - l/2, x_1 + l/2) \times (-d/2, d/2)$. Długość okresu l jest rzędu grubości płyty d i jednocześnie dużo mniejsze od wymiarów płaszczyzny środkowej $L_\alpha, d \ll L_\alpha$. Założymy także, że dla materiału płyty składowe tensora modułów sprężystości A_{ijk} oraz gęstość masy ρ są niezależne od x_2 i są l -periodycznymi funkcjami współrzędnej x_1 . Ponadto niech płaszczyzny $z=0$ są płaszczyznami symetrii sprężystej, (2.1).

Uzupełnimy operator (2.7) dodatkowym uśrednieniem po grubości płyty dla dowolnej całkowanej funkcji f :

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}, z, t) = \frac{1}{l} \int_{x_1 - l/2}^{x_1 + l/2} f(y_1, x_2, z, t) dy_1, \quad \langle f \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \langle f \rangle(\mathbf{x}, z, t) dz \quad (6.4)$$

Dla funkcji l -periodycznych uśrednienie (6.4)₁ jest niezależne od x_1 .

Zakładając ponadto, że w rozpatrywanej klasie zagadnień w relacji (6.1) $h_i^A(\cdot) = 0$ oraz $V^A = z\psi^A(\mathbf{x}, t)$, po uwzględnieniu hipotezy kinematycznej Hencky'ego-Bolle'a (2.4) otrzymamy wyrażenia na przemieszczenia w postaci

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) &= z\vartheta_\alpha^o(\mathbf{x}, t) + zh_\alpha^A(x_1)\psi^A(\mathbf{x}, t), \\ u_3(\mathbf{x}, z, t) &= w_\alpha^o(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

gdzie $\vartheta_\alpha^o, w_\alpha^o, \psi^A$ są podstawowymi niewiadomymi.

Podstawiając prawe strony reakcji (6.5) do funkcjonału działania (6.2), po uwzględnieniu założenia o symetrii sprężystej i oznaczeń (2.1), z (6.3) uzyskamy następujący układ równań dla uśrednionego przemieszczenia płaszczyzny środkowej $w^0(x, t)$, uśrednionych obrotów $v_\alpha^0(x, t)$ i amplitud zaburzeń $\psi^A(x, t)$:

$$\begin{aligned} & j\langle \rho \rangle \ddot{v}_\alpha^0 - j\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle v_{\gamma\delta}^0 + \langle B_{\alpha\beta} \rangle (v_\beta^0 + w_{,\beta}^0) + \\ & - j\langle C_{\alpha\beta\gamma l} h_{\gamma l}^A \rangle \psi_\beta^A - j\langle \sigma_{\gamma\beta}^0 \rangle v_{\alpha\gamma\beta}^0 + \langle z\sigma_{\gamma\beta}^0 \rangle v_{\alpha\gamma}^0 = 0 \\ & \langle \rho \rangle \ddot{w}^0 - \langle B_{\alpha\beta} \rangle (v_\alpha^0 + w_{,\alpha}^0)_{,\beta} - \langle \sigma_{\gamma\alpha}^0 \rangle w_{,\gamma\beta}^0 = 0 \\ & j\langle \rho h_\alpha^A h_\alpha^B \rangle \psi^B + \left(j\langle C_{\alpha\beta\gamma l} h_{\alpha l}^A h_{\beta l}^B \rangle + \langle B_{\alpha\beta} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle + \langle C_{\alpha\beta\gamma l} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle \right) \psi^B + \\ & - j\langle C_{\alpha\beta\gamma l} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle \psi_{,\beta}^B + j\langle C_{\alpha\beta\gamma l} h_{\gamma l}^A \rangle v_{\alpha\beta}^0 + j\langle \sigma_{11} h_{\gamma l}^A h_{\gamma l}^B \rangle \psi^B - j\langle \sigma_{22} h_{\gamma l}^A h_{\gamma l}^B \rangle \psi_{,\beta}^B = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie pominięto stałe sił masowych i oznaczono $j = d^2/12$.

Układ 3+N równań (6.6) stanowi równania nieasymptotycznego 2D-modelu wstępnie napiętych płyt materiałowo uniperiodycznych o średniej grubości. Do równań tych należy dołączyć po dwa warunki początkowe dla uśrednionych przemieszczeń i obrotów w^0 , v_α^0 oraz ψ^A . Pozwala to, w zagadnieniach dynamicznych, uwzględnić wpływ początkowych zaburzeń pola przemieszczeń. Ponadto dla w^0 , v_α^0 obowiązują warunki brzegowe jak w klasycznej teorii Hencky'ego-Bolle'a. Z drugiej strony, w odróżnieniu od płyt biperiodycznych, na brzegach prostopadłych do kierunku periodyki, czyli $x_2 = 0$, $x_2 = L_2$, trzeba uwzględnić warunki brzegowe także dla amplitud ψ^A .

Należy też zauważyć, że współczynniki $\langle \rho h_\alpha^A h_\alpha^B \rangle$, $\langle C_{\alpha\beta\gamma l} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle$, $\langle B_{\alpha\beta} h_\alpha^A h_\beta^B \rangle$, $\langle \sigma_{22} h_{\gamma l}^A h_{\gamma l}^B \rangle$ mają wartości rzędu okresu periodyczności (ściślej mówiąc, kwadratu tego okresu). Tak więc równania (6.6) pozwalają uwzględnić wpływ wartości okresu periodyczności na rozwiązanie danego zagadnienia.

Pomijając współczynniki zależne od okresu l , można z równań (6.6)₃ wyznaczyć amplitudy zaburzeń ψ^A i w efekcie uzyskać z (6.6) układ równań różniczkowych cząstkowych tylko dla uśrednionego przemieszczenia w^0 i uśrednionych obrotów v_α^0 stanowiący pewną aproksymację modelu zhomogenizowanego. Dla jednorodnej materiałowo płyty, uwzględniając, że $l=0$ i $\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma\delta}^A \rangle = 0$, otrzymamy $\psi^A = 0$, a równania (6.6) redukują się do znanych równań Hencky'ego-Bolle'a (2.5).

Przyjmijmy teraz, że płyta, jeśli chodzi o swe uśrednione (na komórce) własności mechaniczne, jest ortotropowa o głównych osiach ortotropii równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych. Uwzględniając ortotropię płyty, oznaczmy składowe tensora modułów sprężystości

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{1111} & C_{22} &= C_{2222} \\ C_{12} &= C_{1122} = C_{2211} & C &= C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} \\ D_1 &= B_{11} & D_2 &= B_{22} \end{aligned}$$

Założmy także, że w rozpatrywanych zagadnieniach wystarczającą dokładność aproksymacji zapewnia uwzględnienie tylko jednego wektora modalnych funkcji kształtu ($A=1$), $h_1(x_1) = h_1^1(x_1)$, $h_2(x_1) = h_2^1(x_1)$

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach otrzymamy z (6.6) 2D – model ortotropowej, średniej grubości płyty uniperiodycznej materiałowo, opisany czterema równaniami różniczkowymi cząstkowymi o stałych współczynnikach, dla niewiadomych w^0 , v_α^0 oraz $\psi = \psi^1$

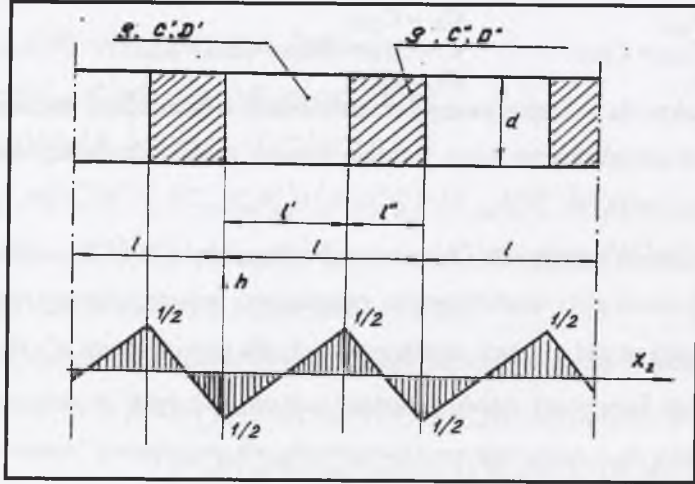
$$\begin{aligned} & j\langle \rho \rangle \ddot{v}_1^0 - \left[j\langle C_{11} \rangle v_{11}^0 + j(\langle C_{12} \rangle + \langle C \rangle) v_{212}^0 + j\langle C \rangle v_{122}^0 \right] + \langle D_1 \rangle (v_1^0 + w_{,1}^0) + \\ & - \left(j\langle C_{11} h_{11} \rangle \psi_{,1} + j\langle C h_{21} \rangle \psi_{,2} \right) - j\langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle v_{1\alpha\beta}^0 + \langle z\sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle v_{1\alpha}^0 = 0, \\ & j\langle \rho \rangle \ddot{v}_2^0 - \left[j\langle C_{22} \rangle v_{22}^0 + j(\langle C_{12} \rangle + \langle C \rangle) v_{112}^0 + j\langle C \rangle v_{211}^0 \right] + \langle D_2 \rangle (v_2^0 + w_{,2}^0) + \\ & - \left(j\langle C_{22} h_{11} \rangle \psi_{,2} + j\langle C h_{21} \rangle \psi_{,1} \right) - j\langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle v_{2\alpha\beta}^0 + \langle z\sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle v_{2\alpha}^0 = 0, \\ & \langle \rho \rangle \ddot{w}^0 - \langle D_1 \rangle (v_1^0 + w_{,1}^0)_{,1} - \langle D_2 \rangle (v_2^0 + w_{,2}^0)_{,2} - \langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle w_{,\alpha\beta}^0 = 0, \\ & j\langle \rho (h_1^2 + h_2^2) \rangle \psi + \left(j\langle C_{11} h_{11}^2 \rangle + j\langle C h_{21}^2 \rangle + \langle D_1 h_1^2 \rangle + \langle D_2 h_2^2 \rangle \right) \psi + \\ & - \left(j\langle C_{22} h_1^2 \rangle + j\langle C h_2^2 \rangle \right) \psi_{,22} + j\langle C_{11} h_{11} \rangle v_{11}^0 + j\langle C_{12} h_{11} \rangle v_{2,2}^0 + \\ & + j\langle C h_{2,1} \rangle (v_{1,2}^0 + v_{2,1}^0) + j\langle \sigma_{11}^0 (h_{1,1}^2 + h_{2,1}^2) \rangle \psi - j\langle \sigma_{22}^0 (h_1^2 + h_2^2) \rangle \psi_{,22} = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Równania (6.7) można wykorzystać w analizie zagadnień dynamiki i stateczności średniej grubości płyt materiałowo uniperiodycznych.

6.2. Zagadnienie drgań

Jako przykład zastosowania równań (6.7) rozpatrzmy zagadnienie drgań własnych, prostokątnej, swobodnie podpartej płyty o strukturze uniperiodycznej wzdłuż osi x_1 i stałych parametrach w kierunku osi x_2 . Przyjmijmy ponadto, że płyta jest wykonana tylko z jednego, jednorodnego i ortotropowego materiału. Powtarzalna komórka tej płyty składa się z dwóch elementów, których główne osie ortotropii są w płaszczyźnie środkowej obrócone o kąt 90° . Płytę o takiej strukturze można nazwać uniperiodyczną ze względu na własności sprężyste.

Przy podanych założeniach w równaniach (6.7) współczynniki $\langle C_{12}h_{11} \rangle = \langle Ch_{21} \rangle = 0$. Dla uproszczenia obliczeń pominiemy wpływ wstępnych napięć, $\sigma_{ij}^0 = 0$ i przyjmijmy, że $h_1 = h_2 = h$, gdzie $h(x_1)$ jest funkcją typu „piła”, rys.6.2.

Rys. 6.2. Komórka periodyczności i wykres funkcji $h(x_1)$ Fig. 6.2. Periodicity cell and diagrams of function $h(x_1)$

Uwzględniając warunki swobodnego podparcia na wszystkich krawędziach płyty, rozwiązanie równań (6.7) przyjęto w postaci

$$\begin{aligned} v_1^0 &= e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{1mn}^0 \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \\ v_2^0 &= e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{2mn}^0 \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2, \\ w^0 &= e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^0 \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \\ \psi &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n(x_1) \sin \beta_n x_2, \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie $\alpha_m = \frac{m\pi}{L_1}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{L_2}$, $m, n = 1, 2, \dots$, natomiast $v_{1mn}^0, v_{2mn}^0, w_{mn}^0$ są stałymi amplitudami, ω jest częstością drgań. Dla funkcji ψ warunki brzegowe można sformułować tylko na krawędziach $x_2 = 0$, $x_2 = L_2$.

Oznaczając

$$B = j(\langle C_{11}h_1^2 \rangle + \langle Ch_1^2 \rangle) + \langle D_1h^2 \rangle + \langle D_2h^2 \rangle + \beta_n^2 j(\langle C_{22}h^2 \rangle + \langle Ch^2 \rangle) \quad (6.9)$$

otrzymamy z (6.7)₄

$$\bar{\psi}_n(x_1) = \frac{j\langle C_{11}h_1 \rangle}{B - 2\langle \rho h^2 \rangle \omega^2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m v_{1mn}^0 \sin \alpha_m x_1, \quad (6.10)$$

tym samym wyrugujemy niewiadome funkcje $\bar{\psi}_n(x_1)$ z równań modelu.

Podstawiając (6.8) do (6.7), uwzględniając powyższe założenia (6.9) i (6.10) oraz oznaczając dodatkowo

$$H_\omega = \langle C_{11} \rangle - j \frac{\langle C_{11}h_{11} \rangle^2}{B - 2\langle \rho h^2 \rangle \omega^2},$$

uzyskamy następujący układ równań algebraicznych dla stałych amplitud $v_{1mn}^0, v_{2mn}^0, w_{mn}^0$

$$\begin{bmatrix} \alpha_m^2 j H_\omega + \beta_n^2 j \langle C \rangle + \langle D_1 \rangle - j \langle \rho \rangle \omega^2 & \alpha_m \beta_n j (\langle C_{12} \rangle + \langle C \rangle) & \alpha_m \langle D_1 \rangle \\ \alpha_m \beta_n j (\langle C_{12} \rangle + \langle C \rangle) & \beta_n^2 j \langle C_{22} \rangle + \alpha_m^2 \langle C \rangle + \langle D_2 \rangle - j \langle \rho \rangle \omega^2 & \beta_n \langle D_2 \rangle \\ \alpha_m \langle D_1 \rangle & \beta_n \langle D_2 \rangle & \alpha_m^2 \langle D_1 \rangle + \beta_n^2 \langle D_2 \rangle - \langle \rho \rangle \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1mn}^0 \\ v_{2mn}^0 \\ w_{mn}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

oraz dodatkowy warunek $B \neq 2\langle \rho h^2 \rangle \omega^2$.

Należy zwrócić uwagę, że przy przyjętych założeniach (odnośnie komórki periodyczności i funkcji kształtu) w równaniach (6.11) współczynniki $\langle C \rangle$ i $\langle C_{12} \rangle$ nie zależą od konfiguracji składników w komórce periodyczności. Ponadto, uśrednienia zawierające funkcję h^2 , np. $\langle D_1 h^2 \rangle$, można przedstawić w postaci $\langle D_1 h^2 \rangle = l^2/12 \langle D_1 \rangle$. Współczynniki te zależą więc *explicitie* od okresu l i opisują wpływ efektu skali.

Uwzględniając, że okres l jest rzędu grubości płyty d , a równocześnie jest dużo mniejszy od L_1/m i L_2/n , wprowadzimy do obliczeń mały parametr $\varepsilon = \beta_n l$.

Częstości drgań własnych obliczymy z warunku zerowania się wyznacznika głównego układu równań (6.11). Oznaczmy

$$B_0 = \langle C_{11}h_{11}^2 \rangle + \langle Ch_{11}^2 \rangle + \kappa^2 (\langle D_1 \rangle + \langle D_2 \rangle), \quad H_{11} = \langle C_{11} \rangle - \frac{\langle C_{11}h_{11} \rangle^2}{B_0},$$

gdzie parametr $\kappa^2 = l^2/12 \cdot j^{-1} = (l/d)^2$ opisuje efekt skali.

Rozwiązując równanie dyspersyjne otrzymane z (6.11), uwzględniając, że $\varepsilon \ll 1$, po rozwinięciu w szereg Taylora względem małego parametru, otrzymano następujące relacje na częstości drgań własnych:

- niskie

$$\omega_1^2 = j \frac{H_{11} \alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 \beta_n^2 (\langle C_{12} \rangle + 2\langle C \rangle) + \langle C_{22} \rangle \beta_n^4}{\langle \rho \rangle} + O(\varepsilon^6) \quad (6.12)$$

oraz

- wysokie

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \frac{\langle C_{11} h_{n1}^2 \rangle + \langle C h_{n1}^2 \rangle + \kappa^2 (\langle D_1 \rangle + \langle D_2 \rangle)}{2j\kappa^2 \langle \rho \rangle} + O(\varepsilon^2) \\ \omega_3^2 &= \frac{\langle D_1 \rangle}{j\langle \rho \rangle} + O(\varepsilon^2) \\ \omega_4^2 &= \frac{\langle D_2 \rangle}{j\langle \rho \rangle} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Komentując relacje (6.12) i (6.13), zauważmy, że częstości drgań ω_1, ω_2 opisują wpływ inercji obrotowej na dynamikę płyty. Pominięcie w (6.7) członów $j\langle \rho \rangle \vartheta_n^0$ spowoduje, że uzyskamy relacje tylko na dwie podstawowe częstości drgań własnych (6.12) i (6.13)₁. Niższą częstość ω_1 można porównać z uzyskiwanymi z modeli homogenizacyjnych. Ponadto, bardzo podobną postać wyrażenia na ω_1 uzyskał S.G. Lekhnitskij (1968), w ramach teorii sprężystych płyt anizotropowych. Wyższa częstość drgań własnych ω_2 jest wywołana uniperiodyczną strukturą płyty, zależy od okresu l , nie można jej wyznaczyć z modelu asymptotycznego.

Jako przykład przeanalizujemy zależność pomiędzy bezwymiarową, niższą częstością drgań własnych a geometrycznymi parametrami $\kappa = l/d$ i $\xi = L_1/L_2$.

Oznaczmy przez C', C'' oraz D', D'' moduły sprężystości ortotropowych składników komórki periodyczności, rys.6.2. Jeżeli $x = l'/l, x \in (0,1)$, to operator uśredniający redukuje się do postaci

$$\langle f \rangle = x f' + (1-x) f''$$

oraz $\langle f h^2 \rangle = l^2/12 \langle f \rangle, \langle f h_{n1} \rangle = f' - f'', \langle f h_{n1}^2 \rangle = f'/x + f''/(1-x)$.

W związku z powyższym, dla rozpatrywanej ortotropowej płyty otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle C_{11} \rangle &= x C_{11} + (1-x) C_{22}, \quad \langle C_{22} \rangle = x C_{22} + (1-x) C_{11} \\ \langle D_1 \rangle &= x D_1 + (1-x) D_2, \quad \langle D_2 \rangle = x D_2 + (1-x) D_1 \\ \langle \rho \rangle &= \rho, \quad \langle C_{12} \rangle = C_{12}, \quad \langle C \rangle = C \end{aligned}$$

Zakładając, że $m=n=1$, mnożąc obie strony relacji (6.12) przez $\rho (j\pi^4 C_{11})^{-1} L_1^4$, dojdziemy do następującego wyrażenia na bezwymiarową, niższą częstością drgań własnych

$$\Omega = \frac{1}{C_{11}} [\xi^4 H + 2\xi^2 (C_{12} + 2C) + x C_{22} + (1-x) C_{11}] \quad (6.14)$$

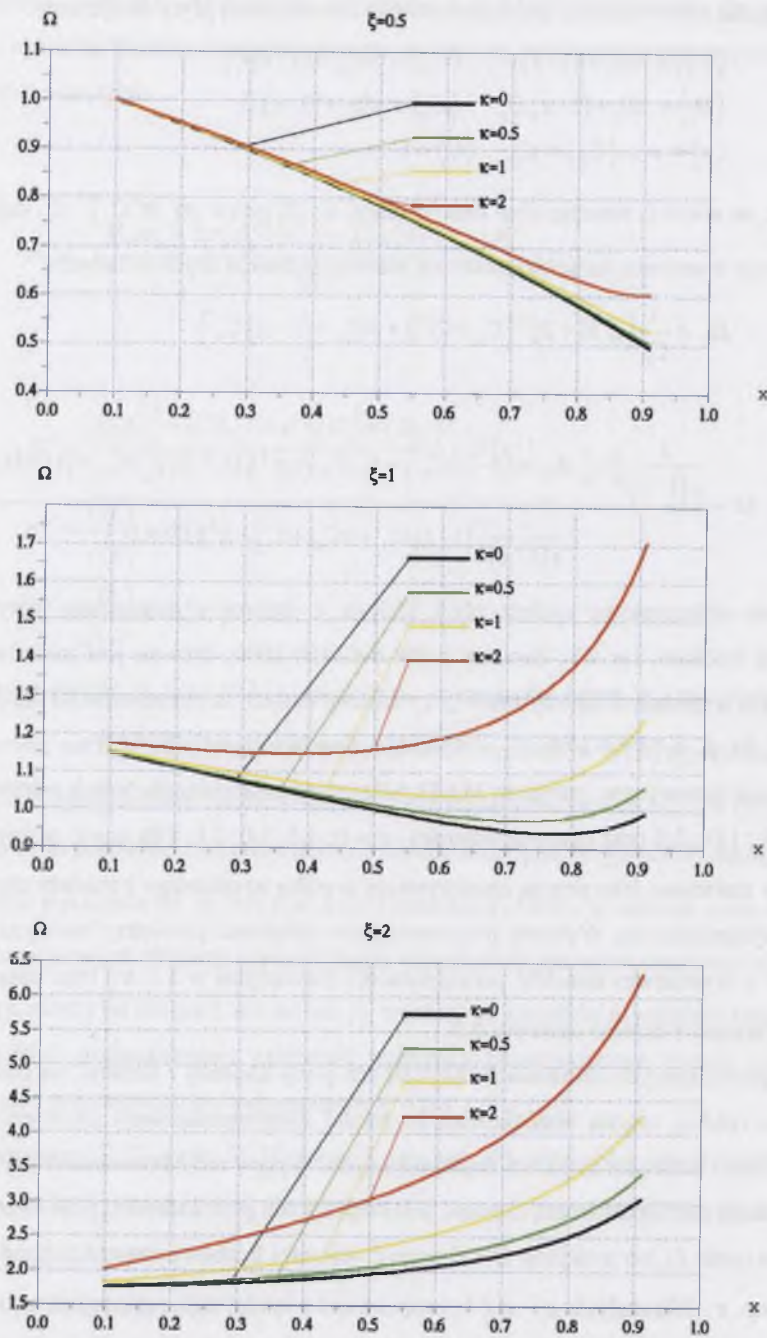
gdzie

$$H = \frac{l}{x(1-x)} \{ C [x C_{11} + (1-x) C_{22}] + C_{11} C_{22} \} + \kappa^2 (D_1 + D_2) [x C_{11} + (1-x) C_{22}] \\ \frac{1}{x(1-x)} [(1-x) C_{11} + x C_{22} + C] + \kappa^2 (D_1 + D_2)$$

Założenia obliczeniowe spełnia płyta klejona z drewna z elementów ciętych wzdłuż i w poprzek włókien, rys.4.5. Zgodnie z PN-B-03150-2000, drewno jest materiałem quasi-izotropowym o modułach sprężystości (przy zastosowanych tu oznaczeniach) dla drewna klejonego GL-35 $E_{11} = 13000$ MPa, $E_{22} = 430$ MPa, $D_1 = D_2 = C_{12} = C = 810$ MPa.

Obliczenia numeryczne (program MATLAB) przeprowadzono dla trzech wartości parametru $\xi = 0,5; 1,0; 2,0$ oraz czterech wartości $\kappa = 0; 0,5; 1,0; 2,0$. Dla $\kappa = 0$ otrzymane rezultaty należy traktować jako pewną aproksymację wyniku uzyskanego z modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. Wykresy przedstawiające zależność pomiędzy bezwymiarową częstością Ω a wymiarami komórki periodyczności (zawartymi w x i κ) oraz parametrem ξ , dla płyty klejonej z drewna są na rys.6.3.

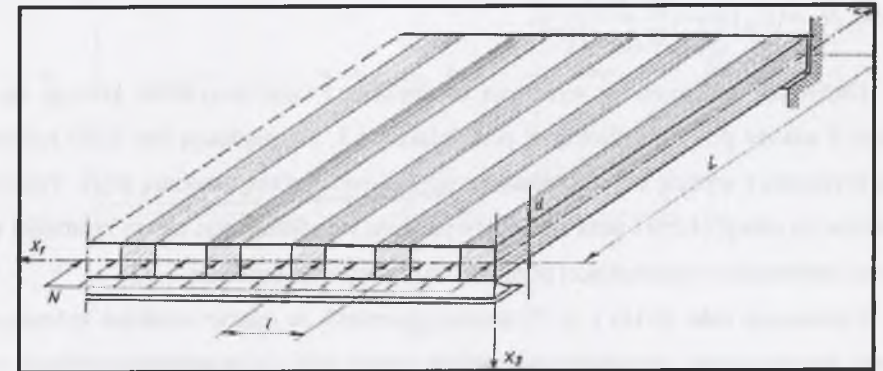
Przy wprowadzonych założeniach dotyczących płyty klejonej z drewna, na podstawie wykresów na rys.6.3, można wnioskować, że model zhomogenizowany asymptotycznie daje niższe wartości liczbowe częstości drgań własnych. Wpływ niejednorodności płyty (zarazem też efekt skali) na rozpatrywaną częstość jest większy dla płyt, których „periodyczna” rozpiętość L_1 jest rzędu L_2 lub mniejsza. Dla danego ξ wartości liczbowe częstości drgań rosną wraz ze wzrostem κ . Dla małych $\kappa, \kappa < 1$, proponowany model daje praktycznie takie same wyniki liczbowe jak model asymptotyczny.



Rys. 6.3. Zależność pomiędzy częstotliwością Ω a parametrami geometrycznymi x, κ, ξ
 Fig. 6.3. Interrelation between the frequency Ω and geometrical parameters x, κ, ξ

6.3. Zagadnienie stateczności

Rozpatrzmy w ramach nieasymptotycznego modelu płyt materiałowo uniperiodycznych quasi-statyczne zagadnienie stateczności pasma płytowego przedstawionego na rys. 6.5.



Rys. 6.4. Materiałowo uniperiodyczne pasmo płytowe
 Fig. 6.4. Material uniperiodic plate band

Krytyczne wartości sił ściskających $N = N_{22}$ w płaszczyźnie środkowej pasma można wyznaczyć z równań (6.7), w których założono zginanie walcowe w płaszczyźnie Ox_2z i pominięto człony dynamiczne:

$$\begin{aligned} \langle C_{22} \rangle \vartheta_{2,2}^{\circ} + j \langle C_{12} h_{12} \rangle \psi_{,2} - \langle D_2 \rangle (\vartheta_{2,2}^{\circ} + w_{,2}) + j N_{,22} &= 0 \\ \langle D_2 \rangle (\vartheta_{2,2}^{\circ} + w_{,2})_{,2} + N w_{,22} &= 0 \\ j \langle C_{11} h_{12}^2 \rangle + \langle D_1 h^2 \rangle \psi - (\langle C h^2 \rangle + N \langle h^2 \rangle) \psi_{,22} - j \langle C_{12} h_{12} \rangle \vartheta_{2,2}^{\circ} &= 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Procedura postępowania jest przy tym analogiczna jak opisana w podrozdziale 6.2 przy wyznaczaniu częstości drgań własnych. Uwzględniając założenia i oznaczenia z podrozdziału 6.2 po wyrugowaniu funkcji ψ otrzymano z (6.15) następujące, przybliżone wartości krytycznych sił ściskających w płaszczyźnie środkowej pasma płytowego:

$$\begin{aligned} N_{1kr} &= k_n^2 j H \left(1 - \varepsilon^2 \frac{\langle D_2 \rangle}{H + \langle D_2 \rangle} \right) + O(\varepsilon^6) \\ N_{2kr} &= \frac{j \langle G_{11} h_{12}^2 \rangle + \langle D_1 h^2 \rangle}{j \langle h^2 \rangle} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{6.16}$$

gdzie: $H = \langle C_{22} \rangle - \frac{\langle C_{12} h_{12} \rangle^2}{\langle C_{11} h_{12}^2 \rangle + j^{-1} \langle D_1 h^2 \rangle + k_n^2 \langle C \rangle}$, $\varepsilon^2 = k_n^2 j \ll 1$.

Pomijając w równaniach (6.15) parametr l , uzyskujemy wartość siły krytycznej będącej pewną aproksymacją wartości otrzymanej z modelu zhomogenizowanego asymptotycznie

$$N_{01kr} = k_n^2 j \bar{H}_0 \quad (6.17)$$

$$\text{gdzie } \bar{H}_0 = \langle C_{22} \rangle - \frac{\langle h_{12} C_{12} \rangle^2}{\langle h_{12}^2 C_{11} \rangle + k_n^2 \langle C \rangle}$$

Otrzymane relacje (6.16) wymagają komentarza. Przede wszystkim, kierując się wnioskami z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 4.3, uwzględniają one tylko podstawową siłę krytyczną i wyższą siłę krytyczną wywołaną periodyczną strukturą płyty. Pozostałe są podobne do relacji (4.18) i wraz z (6.16)₂ wymagają weryfikacji pod kątem zgodności z przyjętymi założeniami wykraczającej poza cel i zakres tego opracowania.

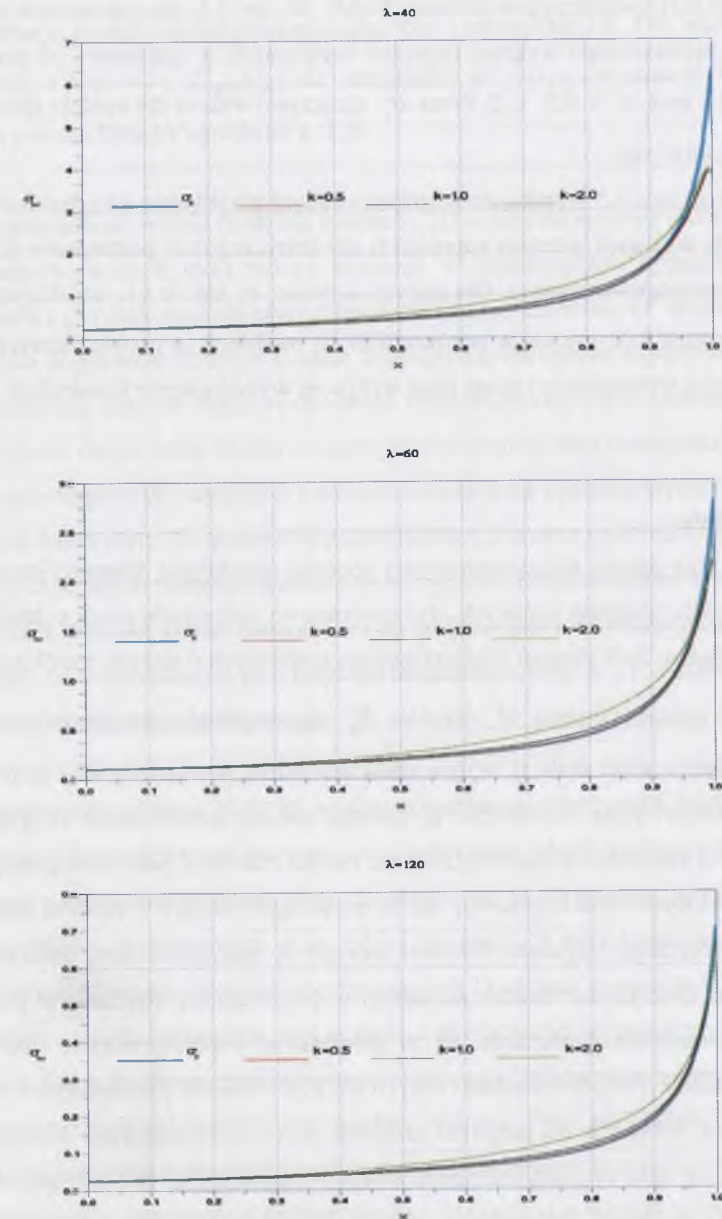
Porównując teraz (6.16) i (6.17) można stwierdzić, że relacje uzyskane techniką uśrednienia tolerancyjnego, uwzględniające wpływ efektu skali, są uogólnieniem relacji uzyskanych z modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. Poprzez formalne przejście $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 0$ z relacji na N_{1kr} i N_{2kr} , uzyskujemy wzór na N_{0kr} .

Z punktu widzenia praktycznych zastosowań istotne może być porównanie wartości liczbowych sił krytycznych N_{1kr} i N_{0kr} . Umożliwi ono określenie wpływu efektu skali na wartości krytycznych sił ściskających w płaszczyźnie środkowej płyty.

Obliczenia przeprowadzono dla płyty klejonej z drewna, rys 4.5, której materiałowa uniperiodyczność jest wywołana zmiennością modułu Younga (E', E'') przy stałym module Kirchhoffa G . Rozwiązanie uzależniono od parametrów geometrycznych $\kappa = d/l$, $x = l'/l$, rys.6.2 oraz $\lambda = L/d$ (parametr smukłości). Dzieliąc obie strony wyrażen na N_{1kr} i N_{0kr} przez grubość płyty d , uwzględniając wprowadzone oznaczenia, uzyskano następujące relacje na krytyczne naprężenia ściskające w płaszczyźnie środkowej płyty, odpowiednio:

$$\begin{aligned} \sigma_{1kr} &= \frac{\pi^2}{12\lambda^2} \frac{E'E'' + \kappa^2 x(1-x)[xE' + (1-x)E''] GK}{(1-x)E' + xE'' + \kappa^2 x(1-x)GK} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12\lambda^2} \left[\frac{E' - E''}{(1-x)E' + xE'' + \kappa^2 x(1-x)GK} \right]^2 \right\} \quad (6.18) \\ \sigma_{0kr} &= \frac{\pi^2}{12\lambda^2} \frac{E'E''}{(1-x)E' + xE''} \end{aligned}$$

gdzie K jest współczynnikiem ścinania.



Rys. 6.5. Wykresy zależności naprężeń krytycznych od parametrów x , κ , λ dla płyty klejonej z drewna

Fig. 6.5. Diagrams of critical stress versus parameters x , κ , λ for glued timber plate

W obliczeniach numerycznych przyjęto normowe dane materiałowe dla drewna GL-35 (por. podrozdział 6.2) i współczynnik ścinania $K=5/6$. Na rys. 6.5, dla parametrów smukłości $\lambda=40; 60; 120$ zamieszczono wykresy naprężeń krytycznych w zależności od parametrów geometrycznych x oraz $\kappa^2 = 0,5; 1; 2$. Przez σ_0 oznaczono wykres dla modelu zhomogenizowanego asymptotycznie.

Z wykresów na rys. 6.5 wynika, że w rozpatrywanym przykładzie uwzględnienie efektu skali prowadzi do wyższych wartości naprężeń (i sił) krytycznych w porównaniu do uzyskanych z modelu zhomogenizowanego. Dla małych wartości κ , tzn. $\kappa \leq 1$, uzyskiwane wartości liczbowe naprężeń krytycznych w porównywanych modelach są prawie identyczne. Przy $\kappa > 1$ różnice są już wyraźniejsze i mogą mieć wpływ na wymiarowanie konstrukcji.

6.4. Podsumowanie

Wyprowadzone przy użyciu nieasymptotycznej techniki uśredniania tolerancyjnego (TAT), równania 2D-modelu wstępnie napiętych płyt materiałowo uniperiodycznych o średniej grubości (6.3) są układem $3+N$ równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach, dla uśrednionego przemieszczenia W^0 , obrotów ϑ_α^0 oraz amplitud zaburzeń deformacji ψ^Λ . Model ten uwzględnia efekt skali, tj. wpływ wielkości okresu powtarzalności l na makromechaniczne właściwości płyty. Wykazano, że stosując metodę modelowania uwzględniającą efekt skali, płyty o strukturze uniperiodycznej nie można traktować jako szczególnego przypadku płyty o periodyce dwukierunkowej, jak to ma na ogół miejsce w modelu zhomogenizowanym asymptotycznie. Uzyskane równania modelu są inne jakościowo, bardziej rozbudowane i złożone (poczyniono słabsze założenia) w porównaniu z równaniami płyt periodycznych dwukierunkowo. Generalnie, są to równania o współczynnikach funkcyjnych, a stają się równaniami o współczynnikach stałych dla płyt o stałych parametrach w nieperiodycznym kierunku. Równania dla amplitud zaburzeń, które są dodatkowymi niewiadomymi kinematycznymi, są teraz równaniami różniczkowymi cząstkowymi, podczas gdy dla płyty o dwukierunkowej strukturze materiałowo periodycznej są to równania różniczkowe zwyczajne.

Pomijając współczynniki zależne od okresu l , można z równań (6.3)₄ wyznaczyć amplitudy zaburzeń ψ^Λ i w efekcie uzyskać z (6.3) układ równań różniczkowych cząstkowych

tylko dla uśrednionego przemieszczenia W^0 i uśrednionych obrotów ϑ_α^0 stanowiący pewną aproksymację modelu zhomogenizowanego, por. podrozdział 3.4. Dla jednorodnej materiałowo płyty, a więc $l=0$ i $\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma,\delta}^\Lambda \rangle = 0$, otrzymamy $\psi^\Lambda = 0$, a równania (6.3) redukują się do znanych równań Hencky'ego-Bolle'a (2.5).

Wyprowadzone w tym rozdziale równania 2D – modelu średniej grubości płyt materiałowo uniperiodycznych (6.6) można stosować w zagadnieniach dynamiki i stateczności, w przypadku gdy stała grubość płyty d jest rzędu okresu zmienności l . Model ten można traktować jako uogólnienie znanego modelu zhomogenizowanego asymptotycznie. W zagadnieniach dynamiki, analizie drgań swobodnych uniperiodycznej płyty prostokątnej, oprócz niskiej częstości drgań, którą można wyznaczyć w ramach modelu homogenizowanego lub teorii płyt anizotropowych, uzyskujemy dodatkowo relacje na częstości wyższe wywołane periodyczną strukturą płyty. Na podstawie podrozdziału 6.2 można stwierdzić, że model homogenizacyjny daje niższe wartości liczbowe tych częstości. Różnice są tym większe, im większy jest stosunek długości okresu zmienności l do grubości płyty d opisany parametrem κ . Można przyjąć, że w rozważanym jako przykład zagadnieniu, przy $\kappa < 1$, wystarczająco dokładne wyniki daje model zhomogenizowany.

Zastosowanie równań (6.6) do analizy zagadnienia stateczności statycznej swobodnie podpartego pasma płytowego prowadzi do dodatkowej relacji na krytyczną siłę ściskającą wywołaną periodyczną strukturą płyty. Uzasadnienie jej fizycznego sensu wymaga jednak odrębnej analizy wykraczającej poza zakres tej pracy. Z inżynierskiego punktu widzenia istotne jest uogólnienie relacji na podstawową siłę krytyczną w modelu homogenizacyjnym pozwalające uwzględnić wpływ efektu skali. Jako przykład wyznaczono i porównano siły krytyczne dla swobodnie podpartego pasma płytowego (wykonanego z drewna) charakteryzującego się periodyczną zmiennością modułu Younga. Przy przyjętych w rozpatrywanym przykładzie założeniach model zhomogenizowany daje niższe wartości liczbowe krytycznych sił ściskających w płaszczyźnie środkowej płyty. Na ogół są to różnice niewielkie, nie mające praktycznego znaczenia. Niemniej w przypadku gdy $x \in (0,6;0,8)$ i $\kappa \geq 1$, są one większe i w niektórych przypadkach mogą wpływać na wyniki obliczeń inżynierskich.

Przykłady obliczeniowe potwierdziły też znaną tezę, że dla płyt, których okres periodyczności l jest dużo mniejszy od ich grubości d , wskazane jest stosowanie metod homogenizacyjnych, bowiem efekt skali zanika.

7. PORÓWNANIE PROPONOWANYCH MODELI

Najistotniejszą cechą wyprowadzonych w rozdziałach 3-6 równań 2D-modeli średniej grubości płyt periodycznych jest fakt, że w odróżnieniu od znanych modeli zhomogenizowanych uwzględniają one wpływ wymiaru powtarzalnej komórki periodyczności (a równocześnie długości okresu niejednorodności) na globalne właściwości mechaniczne tych płyt, czyli efekt skali. Wszystkie proponowane modele można stosować w analizie zagadnień dynamicznych i quasi-stacjonarnych. Modele te pozwalają także określić wyższe częstotliwości drgań własnych, wywołane periodycznie niejednorodną strukturą płyty, a których nie można uzyskać z modeli asymptotycznych. Kwadrat niskich częstotliwości drgań własnych, otrzymany z proponowanych modeli, jest aproksymacją rzędu $O(l^2)$ podobnych częstotliwości wyznaczonych z modeli zhomogenizowanych czy też otrzymanych metodą Ritza, por. np. relacje (3.19) i (3.21), (5.21) i (5.22). Także obliczenia numeryczne metodą elementów skończonych (MES) potwierdzają zgodność uzyskiwanych wyników liczbowych.

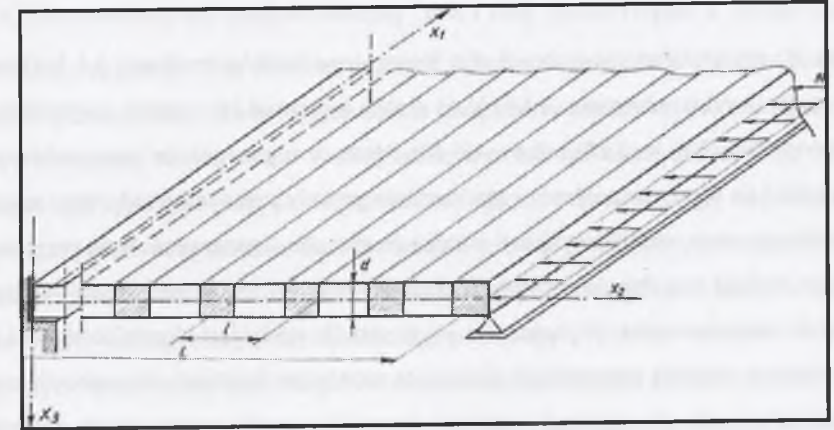
Zastosowanie proponowanych nieasymptotycznych modeli płyt biperiodycznych (materiałowo i strukturalnie) w zagadnieniach quasi-stacjonarnych prowadzi do rozwiązań zawierających sztywności, które można traktować jako pewne uogólnienie znanych z homogenizacji tzw. sztywności (modułów) efektywnych. W tym przypadku efekt skali zanika. Zastosowanie wprowadzonych przy użyciu TAT nieasymptotycznych 2D-modeli płyt uniperiodycznych (tak strukturalnie, jak i materiałowo) w zagadnieniach stateczności prowadzi do uzyskania dodatkowej relacji na siłę krytyczną związaną z periodyczną budową płyty. Wymaga ona jednak odrębnej weryfikacji pod kątem fizycznej poprawności i zgodności z przyjętymi założeniami. Natomiast otrzymane wzory na podstawową statyczną siłę krytyczną uwzględniającą efekt skali są aproksymacją znanych wzorów, uzyskanych z modeli zhomogenizowanych asymptotycznie. Wpływ efektu skali jest większy dla płyt materiałowo uniperiodycznych i jak to wskazuje przykład w podrozdziale 6.2, w niektórych przypadkach może mieć wpływ na wymiarowanie konstrukcji.

Ponadto równania modeli płyt uniperiodycznych (5.8) – (5.10) oraz (6.6) umożliwiają uwzględnienie wpływu początkowych zaburzeń pola przemieszczeń na zachowanie się płyty, w odróżnieniu od równań homogenizacyjnych, w których warunki początkowe można formu-

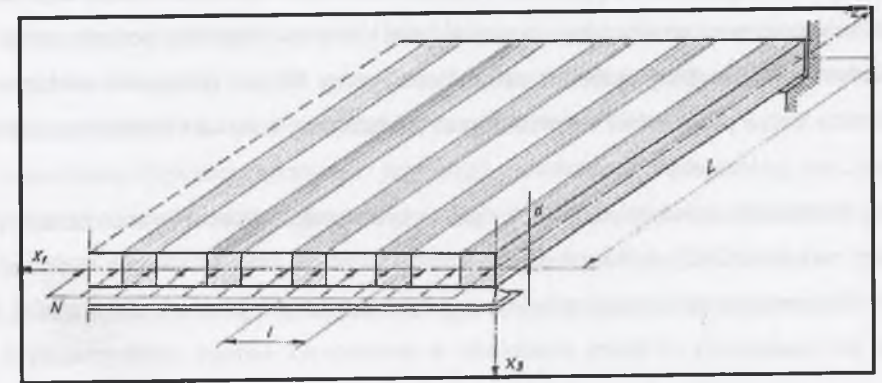
łować tylko dla uśrednionych przemieszczeń i obrotów. Należy też zwrócić uwagę na fakt, że we wszystkich czterech wyprowadzonych równaniach modeli (3.8) – (3.10), (4.6), (5.8) – (5.10) i (6.6) długość okresu periodyczności l można potraktować jako pewien mały parametr. Pozwala to, jak pokazano w podrozdziale 3.4 poprzez formalne przejście graniczne $l \rightarrow 0$, z równań (3.8) – (3.10), a także (5.8) – (5.10) otrzymać równania (3.30), (3.31) dla uśrednionych przemieszczeń i obrotów. Z formalnego punktu widzenia (3.30) i (3.31) odpowiadają wynikom uzyskanym z homogenizacji asymptotycznej. Powyższa analiza w przypadku równań (4.6) i (6.6) prowadzi do identycznych równań modelu i tych samych konkluzji. Powyższe porównania wskazują, że modele uzyskane techniką uśredniania tolerancyjnego umożliwiają analizę znacznie szerszej klasy zagadnień i można je traktować jako pewne uogólnienie modeli zhomogenizowanych asymptotycznie. Dla jednorodnej materiałowo płyty o stałej grubości, przy jednorodnych warunkach początkowych, wszystkie cztery wyprowadzone równania 2D-modeli redukują się do dobrze znanych równań teorii średniej grubości płyt Hency'ego-Bolle'a.

Jak wiadomo, przy zastosowaniu asymptotycznego podejścia w modelowaniu, płyta o strukturze uniperiodycznej staje się na ogół przypadkiem szczególnym płyty biperiodycznej. Porównując otrzymane cztery modele, zauważmy, że płyty uniperiodyczne nie są przypadkiem szczególnym płyt o periodycy dwukierunkowej. Równania nieasymptotycznych modeli płyt z jedno- i dwukierunkową strukturą periodyczną, mimo pewnych podobieństw w procedurze modelowania, muszą być wyprowadzane niezależnie, korzystają one bowiem z różnych założeń. Równania dla płyt uniperiodycznych charakteryzują się relatywnie bardziej skomplikowaną budową i mogą też posiadać funkcyjne współczynniki (nie będące już jednak funkcjami silnie oscylującymi bądź nieciągłymi). Wynika to z faktu przyjęcia znacznie słabszych założeń wyjściowych w porównaniu do płyt biperiodycznych. Jeżeli w modelach płyt biperiodycznych formalnie założymy, że płyta ma strukturę jednokierunkowo periodyczną (np. rozpatrując zagadnienia jednowymiarowe), nie otrzymamy modeli płyt uniperiodycznych, lecz pewne specjalne przypadki modeli płyt o periodycy dwukierunkowej. Dla porównania na rys. 7.1 i 7.2 przypomniano pasmo płytowe jako zagadnienie jednowymiarowe dla płyt biperiodycznych i uniperiodycznych rozważane w podrozdziałach odpowiednio 4.3 i 6.3. Są to dwa zupełnie różne zagadnienia. Ponadto, jeżeli w rozwiązaniu pewnego zagadnienia, jak np. w równaniach (3.19) dla prostokątnej płyty dwukierunkowo uźebrowanej, skalujemy do zera wymiary jednej z grup żeber, uzyskamy w ten sposób relację na częstość drgań płyty jedno-

kierunkowo uźebrowanej, która to relacja będzie pozbawiona fizycznego sensu. Fizyczny sens utraciły bowiem funkcje kształtu.



Rys. 7.1. Pasma płytowe - szczególny przypadek płyty biperiodycznej
Fig. 7.1. Plate band-special case of biperiodic plate



Rys. 7.2. Pasma płytowe - płyta uniperiodyczna
Fig. 7.2. Plate band-special case of uniperiodic plate

W równaniach modeli płyt uniperiodycznych pojawiają się dodatkowo współczynniki zależne od okresu l , które nie mogą być pomijane w zagadnieniach quasi-stacjonarnych, natomiast modele płyt biperiodycznych praktycznie opisują efekt skali tylko w zagadnieniach dynamicznych, por. podrozdziały 3.3 i 4.3. Także w tym sensie nieasymptotyczne modele płyt uniperiodycznych nie mogą być traktowane jako przypadek szczególny odpowiednich modeli płyt dwukierunkowo periodycznych.

W rozdziałach 4 i 6 nieasympotyczne modele płyt o płaskiej strukturze periodycznej i okresie zmienności l rzędu ich grubości d formułowano poprzez zastosowanie techniki uśredniania tolerancyjnego bezpośrednio do 3D-równań liniowej elastodynamiki periodycznych ciał stałych. Z drugiej strony, jeśli $l \gg d$, punktem wyjścia dla zastosowania TAT były równania 2D-modelu średniej grubości płyt Hencky'ego-Bolle'a (rozdziały 3 i 5). Uwzględniając powyższe fakty, równania (4.6) i (6.6) można traktować jako pewne uogólnienie równań, odpowiednio (3.8) – (3.10) i (5.8) – (5.10). Może to sugerować, że wprowadzony przez autora podział na płyty materiałowo i strukturalnie periodyczne (uniperiodyczne) jest niepotrzebny. Konieczność takiej klasyfikacji wynika ze sposobu wyznaczania bądź przyjmowania modalnych funkcji kształtu. Generalnie funkcja kształtu wyraża postać drgań swobodnych 3D-komórki periodyczności. Wyznaczenie jej w sposób ścisły jest skomplikowane i pracochłonne. Jednak w wielu przypadkach funkcję tę można przyjmować, opierając się na pewnych heurystycznych przesłankach odnośnie przewidywanych postaci drgań swobodnych komórki periodyczności. Dla płyt, w których $l \sim d$, znana z modelowania laminatów funkcja kształtu typu „piła” (rys. 4.3) stanowi na pewno bardzo zgrubną aproksymację rozwiązania ścisłego. Ze względu na swą prostotę i łatwość obliczania uśrednień umożliwia jednak szybkie uzyskanie rozwiązania i jego ocenę. Z kolei dla $l \gg d$ komórkę periodyczności można traktować jako średniej grubości, nawet cieką płytę. W tym przypadku modalne funkcje kształtu można przyjmować z wystarczającą dokładnością w postaci funkcji trygonometrycznych, por. podrozdział 2.3.

Reasumując, należy podkreślić, że bardzo istotną zaletą proponowanego nieasympotycznego podejścia (TAT), a równocześnie i wyprowadzonych czterech równań modeli jest możliwość rozwiązywania poszczególnych zagadnień na różnym poziomie dokładności. Poziom ten jest uzależniony od liczby składników w skończonych sumach aproksymujących fluktuacyjną część składowych pola deformacji (3.5), (4.1), (5.5), (6.6), a także od dokładności wyznaczenia modalnych funkcji kształtu. W pracy, w przykładach aplikacyjnych, ograniczono się do uwzględnienia tylko jednego wyrazu, czyli tzw. pierwszego przybliżenia, które jest na ogół wystarczające w obliczeniach inżynierskich. Ponadto technika uśredniania tolerancyjnego generuje dodatkowe warunki, dotyczące funkcji wolnozmiennych, które są niezbędne do sprawdzenia fizycznej poprawności uzyskanych wyników liczbowych. Warunki te mogą być także wykorzystane jako pewne dodatkowe, *a posteriori* oszacowanie dokładności rozwiązań.

8. UWAGI KOŃCOWE, WNIOSKI I PERSPEKTYWY BADAWCZE

Przedmiotem pracy były średniej grubości liniowo – sprężyste płyty o budowie periodycznej w płaszczyznach równoległych do ich płaszczyzny środkowej (o tzw. płaskiej strukturze periodycznej) rozpatrywane z uwzględnieniem założeń teorii Hencky'ego – Bolle'a. Równania tego typu płyt mają periodycznie oscylujące i często nieciągłe współczynniki, w związku z czym ich bezpośrednie zastosowanie do rozwiązywania pewnych zagadnień szczególnych nie jest na ogół możliwe. Dlatego też formułuje się modele przybliżone, najczęściej wykorzystując homogenizację asymptotyczną, pozwalające uzyskać równania o pewnych uśrednionych współczynnikach stałych. Jednak to asymptotyczne podejście nie uwzględnia wpływu rozmiarów powtarzalnego segmentu płyty na jej makromechaniczne własności, czyli efektu skali.

Celem pracy, jak zaznaczono na wstępie, było:

- usystematyzowanie, ujednoczenie i uogólnienie dotychczasowych opracowań dotyczących nieasympotycznego modelowania liniowo – sprężystych, średniej grubości płyt, o płaskiej strukturze periodycznej z uwzględnieniem efektu skali,
- uzasadnienie fizycznej poprawności przyjętego sposobu postępowania,
- wykazanie, że efekt skali odgrywa ważną rolę w badaniu zachowania się średniej grubości płyt periodycznych w procesach dynamicznych i quasi-stacjonarnych,
- porównanie proponowanych modeli wraz z podaniem zakresu ich stosowalności.

Cel ten został osiągnięty poprzez:

- przystosowanie techniki uśredniania tolerancyjnego do wyprowadzania równań nieasympotycznych modeli średniej grubości płyt o płaskiej strukturze periodycznej,
- zastosowanie nieasympotycznej *techniki uśredniania tolerancyjnego* (TAT) do wyprowadzenia równań czterech oryginalnych 2D-modeli średniej grubości płyt o płaskiej strukturze periodycznej, uwzględniających efekt skali,
- wprowadzenie (oprócz znanego podziału na uniperiodyczne i biperiodyczne) dodatkowego podziału analizowanych płyt na periodyczne materiałowo i strukturalnie,

- wykazanie, że dla każdego z wyżej wymienionych rodzajów płyt obowiązuje inny, nieasymptotyczny model,
- zastosowanie wyprowadzonych równań modeli do analizy przypadków szczególnych i wykazanie, że dają one wyniki niesprzeczne z wynikami uzyskanymi innymi metodami (metodą homogenizacji asymptotycznej, metodą Ritza),
- przeprowadzenie analizy porównawczej (rozdział 7) ustalającej zakres stosowalności proponowanych modeli,
- wskazanie możliwości efektywnych zastosowań modeli w zagadnieniach inżynierskich, np. w budownictwie do analizy dynamiki i stateczności płyt żebrowych (stalowych i żelbetowych), płyt stalo–betonowych i płyt klejonych z drewna.

Wyżej wymienione wyniki mają charakter oryginalny w tym sensie, że po raz pierwszy zostały przedstawione w pracach autora (1995), (1999)₁, (1999)₂, (2002), (2003)₁, (2003)₂, (2005)₁, (2005)₂, (2005)₃, (2006)₁, (2006)₂.

Na podstawie wyników niniejszej pracy sformułowano szereg wniosków, spośród których na szczególną uwagę zasługują następujące:

- uzyskanie relacji na częstości drgań własnych opisujących *zjawisko dyspersji*, a więc wpływu wielkości powtarzalnej komórki na propagację długich fal w płycie periodycznej,
- wyprowadzenie równania częstości, które można uważać, za pewne uogólnienie równania Mathieu w zagadnieniu stateczności dynamicznej,
- możliwość uwzględnienia w rozwiązaniu początkowych zaburzeń pola przemieszczeń (w zagadnieniach płyt materiałowo i strukturalnie uniperiodycznych),
- określenie dolnej granicy zakresu stosowalności nieasymptotycznych modeli płyt materiałowo periodycznych i uniperiodycznych; można przyjąć, że przy $l/d \leq 1/2$ wystarczająco dokładne wyniki daje model homogenizacyjny,
- wskazanie możliwości wykorzystania w niektórych zagadnieniach założeń technicznej anizotropii (ortotropii) płyt, przy obliczaniu współczynników otrzymanych równań nieasymptotycznych 2D-modeli,

- wykazanie, że w zagadnieniach quasi-stacjonarnych w modelach płyt biperiodycznych strukturalnie i materiałowo wpływ efektu skali praktycznie zanika, natomiast w zagadnieniu stateczności płyt materiałowo uniperiodycznych efekt ten może już rzutować na wymiarowanie konstrukcji.

Otrzymane wyniki mają znaczenie teoretyczne (poznawcze), tj. równania modeli, wyższe częstości drgań własnych, dodatkowe relacje na siły krytyczne, oraz znaczenie inżynierskie (aplikacyjne), tj. korekta wyrażań na podstawowe częstości drgań własnych i siły krytyczne, szczególnie w zagadnieniach płyt uniperiodycznych.

Materiał zawarty w pracy może stanowić bardzo dobry punkt wyjścia do zaprojektowania i przeprowadzenia badań doświadczalnych. Na tej podstawie, poza eksperymentalną weryfikacją otrzymanych wyników, można też ustalić zakres inżynierskiej stosowalności proponowanych modeli matematycznych. Uwaga ta dotyczy zwłaszcza drgań typu mikrostrukturalnego, tj. o wysokich częstościach.

Wyniki teoretyczne mogą również stanowić podstawę do prowadzenia dalszych badań w kierunku analizy zagadnień wyboczenia posprężystego i plastycznego, badania wpływu periodycznych warunków brzegowych oraz modelowania średniej grubości płyt wykonanych z materiału o strukturze gradientowej (ang. FGM), jak również uogólnienie na średniej grubości płyty periodyczne w układach krzywoliniowych. Tym samym rezultaty uzyskane w pracy, z jednej strony stanowią zamkniętą całość, a z drugiej mogą być punktem wyjścia do dalszych badań.

Warto podkreślić, że nowe podejście zaproponowane w pracy jest dobrze skorelowane z wynikami znanymi z literatury. Wymienić można niesprzeczność uzyskanych rozwiązań z uzyskiwanymi metodą homogenizacyjną, metodą Ritza czy też w ramach teorii płyt anizotropowych.

Za główną tezę wykazaną w pracy można uznać, że proponowane modele średniej grubości płyt o płaskiej strukturze periodycznej mogą być wykorzystane w zagadnieniach inżynierskich, np. w konstrukcjach budowlanych, nawet przy stosowanych aktualnie rozwiązaniach technicznych i materiałowych. W przypadku płyt wykonanych z materiałów o bardzo wysokiej wytrzymałości, przenoszących drgania o wysokich częstotliwościach, wyniki uzyskiwane w ramach proponowanych 2D-modeli mogą już mieć wpływ na wymiarowanie konstrukcji.

LITERATURA

1. Achenbach J.D., 1969: *An asymptotic method to analyze the vibrations of an elastic layer*. J. Appl. Mech., 36, 1, 65-72.
2. Achenbach J.D., Hermann G., 1968: *Wave motions in solid with lamellar structuring*. W: dynamics of Structured Solids (ed. G. Hermann), New York, ASME.
3. Ambartsumyan S.A., 1957: *K voprosu nelinejnoj teorii anizotropnykh plastinok*. Dokl. AN Arm. SSR, 24, 4, 153-159.
4. Ambartsumyan S.A., 1960: *K teorii izgiba anizotropnykh plastinok i pologikh obolochek*. PMM, 24, 2, 350-360.
5. Ambartsumyan S.A. 1969: *Theory of anisotropic plates*. Tech. Pub. Co.
6. Archer R.R., Bandyopadhyay N., 1980: *On the and problem of thick rectangular plates*. Mechanics Today. New York, Vol., 5, 1-13.
7. Baron E., 1995: *On the macro- and micro-vibrations of elastic plates subjected to periodically distributed inertial loadings*, Zesz. Nauk. Politechniki Śl., 83, 7-24.
8. Baron E., 1999₁: *Dinamika p̄lustin s odnowysnoju pieriodicznoju strukturu*, Visnyk Lviv Univ., Ser Mech.-Mat., 55, 80-85.
9. Baron E., 1999₂: *Drgania swobodne p̄lyt Reissnera-Mindlina o strukturze pieriodycznej*, Zesz. Nauk. Politechniki Śl., seria Budownictwo, z. 86/1999, 59-70.
10. Baron E., 2002: *On modelling of medium thickness plates with a uniperiodic structure*, J. Theor. Appl. Mech., 1, 40, 7-22.
11. Baron E., 2003₁: *On dynamic stability of an uniperiodic medium thickness plate band*, J. Theor. Appl. Mech., 41, 2, 305-321.
12. Baron E., 2003₂: *On dynamic behaviour of medium thickness plates with uniperiodic structure*, Archiv. Appl. Mech., 73, 505-516 (Springer-Verlag).
13. Baron E., 2005₁: *On a certain model of prestressed medium thickness uniperiodic plate*, J. Theor. Appl. Mech., 43, 1, 93-110.
14. Baron E. 2005₂: *On the Modelling of Prestressed Medium Thickness Uniperiodic Plates*, PAMM, Vol.5, Is.1, 225-226.
15. Baron E., 2005₃: *On the dynamic behaviour of uniperiodic plates made of orthotropic elements*, Electr. J. Pol. Agricult. Univ., Vol. 8, Is. 4.

16. Baron E., 2006₁: *On modelling of periodic plates having the in-homogeneity period of an order of the plate thickness*, J. Theor. and Appl. Mech., 1, 44, 3-18.
17. Baron E., 2006₂: *Analysis and comparison of different 2D-models for medium thickness plates with a plane periodic structure* w: Selected Topics in Unhomogeneous Media, Part II-Structural Elements, Capt. 1. Wydawnictwo Uniwersytetu Zielonogorskiego.
18. Baron E., Woźniak C., 1995: *On microdynamics of composite plates*, Arch. Appl. Mech., 66, 126-133.
19. Baron E., Jędrusiak J., 1988: *On vibrations of plates under periodically distributed inertial loading*, J. Theor. Appl. Mech., 4, 36, 1001-1020.
20. Bauer S.M., et al., 1993: *Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates*. Asympt. Meth. Mech. Providence, 3-140.
21. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., 1978: *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam, North Holland.
22. Berar C., 1984: *A thick faces theory of orthotropic flat sandwich plates*. Rev. Roum. Sci. Ser. Tech. Mec. Appl., 29, 2, 173-186.
23. Berdichewskij V.L., 1973: *K Dinnamicheskij teorii tonkich uprugich p̄lustin*, Mekh. Twerd. Tela, 6, 99-109.
24. Bolotin B.B., 1956: *Dinamiczeskija ustojcziwost uprugich system*, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., Moskwa.
25. Bolle L., 1947: *Contribution au probleme lineaire de flexion d'une plaque elastique*. Bull. Tech. Suisse Rom., 73, 21 281-285.
26. Bolle L., 1947: *Contribution au probleme lineaire de flexion d'une plaque elastique*. Bull. Tech. Suisse Rom., 73, 22 293-298.
27. Bourgeat A., Tapiero R., 1983: *Homogenisation d'une plaque mince, thermoelastique, perforee transversalement, de structure non uniformement periodique, dans le modele de la theorie naturelle*. C.R. Acad. Sci. Paris. 297(I), 213-216.
28. Brunelle E.J., 1971: *Buckling of transversely isotropic Mindlin plates*. AIAA Journal, 9, 6, 1018-1022.
29. Brunelle E.J., Robertson S.R., 1974: *Initially stressed Mindlin plates*. AIAA Journal, 12, 8, 1036-1045.
30. Caillerie D., 1982: *Plaques elastiques minces a structure periodique de periode et d'epaisseur comparables*. C.R. Acad. Sci. Paris, 294, Serie II, 159-162.

31. Caillerie D., 1987: *Non homogeneous plate theory and conduction in composite. w: homogenization techniques for composite media*. Lecture notes in physics, vol. 272, 1-64.
32. Chacha D., Sanchez-Palencia E., 1992: *Overall behaviour of elastic plates with periodically distributed fissures*. Asympt. Anal. ,5, 381-396).
33. Cielecka I., 1995: *On the Continuum Modeling the Dynamic Behaviour of Certain Composite Lattice-Type Structures*. J. Theo. Appl. Mech., 33, 351-359.
34. Cielecka I., 1999: *Continuum modeling of the dynamic problems for lattice-type plates*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 55-63.
35. Cielecka I., Woźniak C., Woźniak M., 1998: *Internal variables in macrodynamics of two-dimensional periodic cellular media*. Arch. Mech., 50, 3-19.
36. Cielecka I., Woźniak C., Woźniak M., 2000: *Elastodynamics behaviour of honeycomb cellular media*, J. of Elasticity, 60, 1-17.
37. Dawe D.J., 1978: *Finite strip models for vibration of Mindlin plates*, J. Sound a. Vibr. 59, 3, 441-452.
38. Dell'Isola F., Rosa L., Woźniak C., 1997: *Dynamics of solids with microperiodic non connected fluid inclusions*. Arch. Appl. Mech., 67, 215-228.
39. Dell'Isola F., Rosa L., Woźniak C., 1998: *A micro-structural continuum modeling compacting fluid-saturated grounds*. Acta Mech., 127, 165-182.
40. Dickinson S.M., 1969: *The Flexural Vibration on Rectangular Orthotropic Plates*, J. Appl. Mech., 36, 101-106.
41. Donnell L.H., 1976: *Beams, plates and shells*. New York: McGraw-Hill.
42. Dubinkin M.V., 1958: *Kolebaniya plit s uchetom inertsii vrashcheniya i sdviga*. Izv. AN SSSR OTN, 12, 131-135.
43. Duvaut G., 1977: *Homogenization des plaques a structure periodique theorie non lineaire de von Karman*. W: *Jounees d'analyse non lineaire*, Lecture notes in mathematics, vol. 665, 56-69.
44. Eringen C., 1955: *On the nonlinear oscillations of viscoelastic plates*. J. Appl. Mech., 22, 4, 563-567.
45. Eringen A.C., Suhubi E.S., 1964: *Nonlinear theory of simple elastic solids*. Int. J. Eng. Sci. 2, 189-203, 389-404.
46. Essenburg F., Naghdi P.M., 1958: *On elastic plates of variable thickness*. Proc. 3rd US Nat. Congr. Appl. Mech., 313-319.

47. Fichera G., 1992: *Is Fourier theory of heat propagation paradoxical?*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
48. Frąckiewicz H., 1970: *Mechanika ośrodków siatkowych*, Warszawa, PWN.
49. Frederic D., 1963: *Some problems in the buckling of thick plates*. Developments in Theoretical and Applied Mechanics. Vol.1. New York: Pergamon Press, 152-172.
50. Gawęcki A., 1972: *Statyka podłużnie niejednorodnej płyty Reissnera o zmiennej grubości*. Rozpr. Inż., 20, 4, 555-576.
51. Girkmann K., Beer R., 1958: *Anwendung der verscharfen Platten-theorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten*. Ing. Arch., 12, 101-110.
52. Gol'denvajzer A.L., 1992: *Obhchaya teoriya tonkich uprugich tel (obolochki, pokrytiya, prokladki)*. Mekh. Tverd. Tiela, 3, 5-17.
53. Gomuliński A., Witkowski M., 1972: *Pewien sposób obliczania struktur kratowych*. Arch. Inż. Łąd., 18, 1, 117-134.
54. Green A.E., Naghdi P.M., 1967: *The linear theory of an elastic Cosserat plate*. Proc. Cambridge Phil. Soc., 63, 537-550.
55. Green A.E., Naghdi P.M., Wenner M.L. 1971: *Linear theory of Cosserat surface and elastic plates of variable thickness*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 69, 227-254.
56. Grigolyuk E.I., Selezov I.T., 1973: *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek*. Itogi Nauki i Tekh. Ser. Mekh. Tverd. Deform. Tel. T.5, 116-180.
57. Gulati S.T., Ozaltin O., 1973: *Bending of nonuniform plates with asymmetric thickness variation-inclusion of shear deformation*. AIAA Journal, 11, 2, 174-177.
58. Gutkowski W., 1964: *Unistrut plates*. Bull. Acad. Polon. Sci., CI. IV, 12, 3, 7-14.
59. Gutkowski W., 1965: *Powierzchniowe konstrukcje prętowe*. Mech. Teor. i Stos. 3, 3, 79-94.
60. Hegemier G.A., 1972: *On a theory of interacting continua for wave propagation in composites*. w: *Dynamics of Composite Materials* (ed. E.H. Lee), New York, ASME.
61. Hencky H., 1947: *Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten*. Ing. Arch., 16, 72-76.
62. Herrmann G., Armenakas A.E., 1960: *Vibration and stability of plates under initial stress*. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 86, 65-94.
63. Herrmann G., Armenakas A.E., 1962: *Vibrations and stability of plates under initial stress*. Trans. ASCE, 127, Part 1, 458-487.

64. Huber T.M., 1914: *Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuz-weise-bewehrten Eisenbeton-platten*, Z. des Osterr. Ing. Architekten Vereins 30, 557.
65. Huber T.M., 1921: *Teoria płyt prostokątnie ukierunkowanych*. Arch. Tow. Nauk., Lwów.
66. Huber T.M., 1929: *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten*. Warszawa Akad. Nauk. Tech. Patrz też.: Pisma t. II ; Warszawa, PWN (1956).
67. Huber T.M., 1954: *Teoria sprężystości*. Warszawa, PWN.
68. Huffington N.J., 1956: *Theoretical determination of rigidity properties of orthogonally stiffened plates*. J. Appl. Mech., 23, 1, 15-20.
69. Huffington N.J., Hoppman W.H., 1958: *On the Transverse Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates*, J. Appl. Mech., 25, 389-395.
70. Ignaczak J., 2003: *Plane harmonic waves in a microperiodic layered infinite thermoelastic solid*, J. Therm. Stresses, 26, 1033-1054.
71. Ignaczak J., 2004: *Plane harmonic waves in a microperiodic thermoelastic solid revisited*, J. Therm. Stresses, 27, 779-793.
72. Ignaczak J., Baczyński Z.F., 1997: *On a refined heat-conduction theory of microperiodic layered solids*. J. Therm Stresses, 20, 749-771.
73. Irschik H., 1985: *Membrane-type eigenmotions of Mindlin plates*. Acta Mech., 55, 1/2, 1-20.
74. Jemielita G., 1975: *Techniczna teoria płyt średniej grubości*. Rozpr. Inż. 23,3, 483-499.
75. Jemielita G., 1991: *Meandry teorii płyt*. Pr. Nauk. Pol. Warsz. Bud., z. 117, 3-220.
76. Jędrzyśiak J., 1998₁: *Free vibrations of thin periodic plates*. Engng. Trans., 46, 1, 89-114.
77. Jędrzyśiak J., 1998₂: *On dynamics of thin plates with a periodic structure*. Engng. Trans., 46, 1, 73-78.
78. Jędrzyśiak J., 1999: *On mesoscale functions in structural dynamics of thin periodic plates*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 71-79.
79. Jędrzyśiak J., 2000₁: *On stability of thin periodic plates*. Eur. J. Mech. A/Solids, 19, 487-502.
80. Jędrzyśiak J., 2000₂: *On vibrations of thin plates with one-dimensional periodic structure*. Int. J. Eng. Sci. 38/18, 2023-2043.

81. Jędrzyśiak J., 2001: *Modele dyspersyjne cienkich płyt periodycznych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, nr 872, rozprawa habilitacyjna.
82. Jędrzyśiak J., 2003₁: *Free vibrations of thin periodic plates interacting with an elastic periodic foundation*. Int. J. Mech., 45, 8, 1411-1428.
83. Jędrzyśiak J., 2003₂: *The length-scale effect in the buckling of thin periodic plates resting on a periodic Winkler foundation*. Meccanica, 38, 4, 435-451.
84. Jędrzyśiak J., 2004: *Application of the tolerance averaging method to analysis of dynamical stability of thin periodic plates*. J. Theor. Appl. Mech., 42, 2, 357-379.
85. Jikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A., 1994: *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verlag.
86. Johnson M.W., Wierda O.E., 1971: *An asymptotic theory for the vibrations of non-homogeneous plates*. Acta Mech., 12, 1/2, 131-142.
87. Jones R.M., 1975: *Mechanics of composite materials*. New York, McGraw-Hill.
88. Kączkowski Z., 1956: *Orthotropic rectangular plates with arbitrary boundary conditions*. Arch. Mech., 8, 2, 179-196.
89. Kączkowski Z., 1960: *The influence of the shear forces and the rotatory inertia on the vibration of an anisotropic plate*. Arch. Mech. Stos., 12, 45, 531-550.
90. Kączkowski Z., 1968: *Płyty. Obliczenia statyczne*. Warszawa, Arkady.
91. Kelkel K., 1984: *Zum Randwertproblem der schwingenden Schubelastischen Platte*. Ing. Arch., 54, 2, 137-151.
92. Kociołek A., 1972: *Drgania własne i wyboczenie płyty prostokątnej poprzecznie izotropowej*, Inż. i Bud., 8, 301-305.
93. Koeller R.C., 1973: *On a formulation of the bending of elastic plates*. Int. J. Solids Struct., 9, 1053-1074.
94. Kohn R.V., Vogelius M., 1984: *A new model of thin plates with rapidly varying thickness*, Int. J. Solids Struct., 20, 333-350.
95. Kohn R.V., Vogelius M., 1985: *A new model of thin plates with rapidly varying thickness, Part II: A convergence proof*, Quart. Appl. Math., 43, 1-22.
96. Kohn R.V., Vogelius M., 1986: *A new model of thin plates with rapidly varying thickness, Part III: Comparison of different scalings*, Quart. Appl. Math., 44, 35-48.
97. Konieczny S., Woźniak M., 1995: *On the wave propagation in micro-inhomogeneous media*. J. Theor. Appl. Mech., 33, 375-384.

98. Kosmodamianskij A.S., Shaldyrvan V.A., 1978: *Tolstyje mnogoszaznyje plastyiny*. Kiev: Nauk. Dumka.
99. Kromm A., 1953: *Verllagemeinerte Theorie der Plattenstatik*. Ing. Arch., 21, 266-286.
100. Laura P.A., 1968: *Effect of shear and rotatory inertia on flexural vibrations of rib-stiffened plates*. J. Acoust. Soc. Am., 44, 1, 283-284.
101. Łaciński Ł., 2005: *Numerical verification of two mathematical models for the heat transfer in a laminated rigid conductor*, Jour. of Theor. Appl. Mech., 43, 2, 367-384.
102. Lekhnitskii S.G., 1968: *Anisotropic plates*, 2nd ed. N.Y., Gordon & Breach.
103. Levy M., 1877: *Memoire sur la theorie des plaques elastiques planes*, J. Math. Pures Appl. Ser., 3, 3, 219-306.
104. Lewiński T., 1984: *Continuum models of lattice-type honeycomb plates*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Tech., 32, 1/2, 25-34.
105. Lewiński T., 1986: *A note on recent developments In the theory of elastic plater with moderate thickness*, Eng. Trans., 34, 531-542.
106. Lewiński T., 1991: *Effective models of composite periodic plates: I. Asymptotic solutions, II. Simplifications due to symmetries, III. Two dimensional approaches*. Int. J. Solids Structures, 27, 1155-1172, 1173-1184, 1185-1203.
107. Lewiński T., 1992: *Homogenizing stiffness of plates with periodic structure*. Int. J. Solids Structures, 21, 309-326.
108. Lewiński T., Telega J.J., 1988: *Asymptotic method of homogenization of fissured elastic plates*. J. Elasticity, 19, 37-62.
109. Lewiński T., Telega J.J., 2000: *Plates laminated and shells*, Singapore, World Scientific Publishing Company,
110. Love A.E.H., 1927: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4th edit. Oxford.
111. Lur'e, 1955: *Prostranstvennye zadachi uprugosti*. Moskwa: Gosud. Izd. Tekh.-Teor. Lit.
112. Makosz S., 1985: *Obliczanie płyt na modelu zastępczego rusztu*. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, nr 841, Budownictwo z. 60, 199-208.
113. Matysiak S.J., Nagórko W., 1989: *Microlocal parameters in the modelling of micro-periodic plates*. Ing. Arch., 59, 434-444.

114. Matysiak S.J., Nagórko W., 1995: *On the wave propagation in periodically laminated composites*. Bull. Acad. Pol. Sci., Sci. Tech., 43, 1-12.
115. Matysiak S.J., 1995: *On the microlocal parameter method in modelling of periodically layered thermoelastic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 481-487.
116. Mazurkiewicz Z., 1960: *Buckling, vibration and bending of a rectangular orthotropic plate resting on a non-homogeneous foundation*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech. 8, 3, 129-133.
117. Mazurkiewicz Z., 1962: *Bending and buckling of a rectangular plate reinforced transversely by ribs with variable rigidities*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech., 10, 8, 329-339.
118. Mazur-Śniady K., 1993: *Macro-dynamics of micro-periodic elastic beams*. J. Theor. Appl. Mech., 31, 34-36.
119. Mazur-Śniady K., 2001: *The kinematic internal variable approach to dynamics of beams with a periodic-like structures*. J. Theor. Appl. Mech., 39, 175-194.
120. Mazur-Śniady K., Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2004: *On the modelling of dynamic problems for plater with a periodic structure*, Arch. Appl. Mech., 74, 179-190,
121. *Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok*, w *Mechanika Techniczna*, t. VIII, 2001, red.: Cz. Woźniak, Warszawa, PWN.
122. Medwadowski S.J., 1958: *A refined theory of elastic orthotropic plates*, J. Appl. Mech., 25, 4, 437-443.
123. Michalak B., 1998: *Stability of elastic slightly wrinkled plates*. Acta Mech., 130, 11-119.
124. Michalak B., 1999: *Stability of slightly wrinkled plates interacting with an elastic subsoil*. Engng. Trans., 47, 3-4, 269-283.
125. Michalak B., 2000: *Vibrations of plates with initial geometrical periodical imperfections interacting with a periodic elastic foundation*. Arch. Appl. Mech., 70, 508-518.
126. Michalak B., 2002: *On the dynamic behaviour of a uniperiodic folded plates*. J. Theor. Appl. Mech., 40, 1, 113-128.
127. Michalak B., Woźniak C., Woźniak M., 1996: *The dynamic modeling of elastic wavy plates*. Arch. Appl. Mech., 66, 177-186.
128. Mielczarek G., Woźniak Cz., 1995: *On the dynamic modelling of fibrous composites*. J. Tech. Phys., 36, 103-111.

129. Mindlin R.D., 1951₁: *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. J. Appl. Mech., 18, 1, 31-38.
130. Mindlin R.D., 1951₂: *Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates*, J. Appl. Phys., 22, 3, 316-323.
131. Mindlin R.D., 1952: *Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates*. J. Appl. Phys., 23, 1, 83-88.
132. Mindlin R.D., 1955: *An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates*. US Army Signal Corps Eng. Labor. Ford Monmouth. New York.
133. Mindlin R.D., 1964: *Microstructure in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., 16, 51-78.
134. Mindlin R.D., Medick M.A., 1959: *Extensional vibrations of elastic plates*. J. Appl. Mech., 26, 4, 561-569.
135. Mindlin R.D., Schacknow A., Deresiewicz H., 1956: *Flexural vibrations of rectangular plates*. J. Appl. Mech., 23, 3, 430-436.
136. Mossakowski J., 1959: *Równania teorii Reissnera dla płyt ortotropowych*. Księga Jubileuszowa W. Wierzbickiego, Warszawa, 145-155.
137. Mühlhaus H.B., 1995: *Continuum models for materials with microstructure*., New York, J. Wiley.
138. Murakami H., Hegemier G.A., 1986: *A mixture model for unidirectionally fiber-reinforced composites*. J. Appl. Mech. ASME, 53, 765-773.
139. Mushtari Kh. M., 1959: *Teoriya izgiba plit srednej tolshchiny*. Izv. AN SSSR OTN Mekh. I Mashin., 2, 107-113.
140. Naghdi P.M., 1972: *The theory of shells and plates*. Handbuch der Physik. VIa/2. Berlin: Springer Verlag, 425-460.
141. Nagórko W., Woźniak C., 2002: *Nonasymptotic modelling of thin plates reinforced by a system of stiffeners*. Electronic J. of Pol. Agricult. Univ., 5, 2.
142. Nelson H. M., 1978: *High frequency flexural vibration of thick rectangular bars and plates*, J. Sound a. Vibr., 60, 1, 101-118.
143. Nomachi S.G., 1966 (1967): *On a stress analysis of grid plate by finite Fourier transforms concerning finite integration*. w: Proc. 16th Japan Nat. Congress Appl. Mech., Tokyo, 59-66.
144. Nowacki W., 1954: *Z zagadnień teorii rusztów płaskich*. Arch. Mech. Stos., 6, 1, 101-138.

145. Nowacki W., 1960: *Mechanika budowli*, T. II PWN, Warszawa.
146. Pauk V. J., 1999: *Plane contact problem for a half-space with boundary imperfections*, Int. J. Solids Struct., 36, 3569-3579.
147. Pei Chi Chou, Carleone J., 1973: *Transverse shear in laminated plate theories*. AIAA Journal, 11, 9, 1333-1337.
148. Pelekh B.L., Laz'ko V.A., 1982: *Sloistye anizotropnye plasty i obotochki s konsentratorem napryazhenij*. Kiev: Nauk. Dumka.
149. Petoyan A. Sh., 1966: *Ob ustojchivosti i kolebaniyakh transversal'no-izotropnoj pryamougol'noj plastinki*. Izv. AN Arm. SSR Ser. Mekh., 19, 4, 45-56.
150. Reddy J.N., 1990₁: *A view of refined theories of laminated composite plates*. Shock Vibr. Dig., 22, 7, 3-17.
151. Reddy J.N., 1990₂: *A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness*. Int. J. Nonlinear Mech., 25, 6, 687-700.
152. Reissmann H., Lee Y.-C., 1968: *Forced motions of rectangular plates*, Theor. Appl. Mech. Tulan Univ. New Orleans, New York, 3-18.
153. Reissner E., 1944: *On the theory of bending of elastic plates*. J. Math. Phys. 23, 184-191.
154. Reissner E., 1945: *The effect of transverse shear deformation of bending of elastic plates*. J. Appl. Mech., 12, 2, A69-A77.
155. Reissner E., 1947: *On bending of elastic plates*. Quart. Appl. Math., 5, 1, 55-68.
156. Reissner E., 1975: *On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation*. Int. J. Solids Struct., 11, 5, 569-573.
157. Reissner E., 1976: *On the theory of transverse bending of elastic plates*. Int. J. Solids Struct., 12, 8, 545-554.
158. Reissner E., 1979: *Note on the effect of transverse shear deformation in laminated anisotropic plates*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 20, 2, 203-209.
159. Reissner E., 1980: *On torsion and transverse flexure of orthotropic elastic plates*. J. Appl. Mech., 47, 855-860.
160. Reissner E., 1981: *A note on bending of plates including the effects of transverse shearing and normal strains*. ZAMP, 32, 6, 764-767.
161. Reissner E., 1983: *On a one-dimensional formulation of the problem of torsion and flexure of shear deformable plates*. J. Appl. Mech., 50, 1, 225-227.

162. Reissner E., 1986: *On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory*. Int. J. Num. Meth. Eng., 23, 2, 193-198.
163. Reissner E., 1986: *On finite deflections of anisotropic laminated elastic plates*. Int. J. Solids Struct., 22, 10, 1107-1115.
164. Reissner E., 1986: *On mixed variational formulations in finite elasticity*. Acta. Mech., 1, 1, 3-9.
165. Reztsov M.V., 1990: *On the properties of effective moduli of composites plates*. Zhur. Vich. Mat. Mat. Fiz., 30, 1741-1743 [w języku rosyjskim].
166. Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak Cz., 1999: *A discrete model for wave propagation problems in periodic composite media*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 64-70.
167. Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak Cz., 2000: *A simplicial model for dynamic problems in periodic media*. J. Theor. Appl. Mech., 38, 3-13.
168. Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak Cz., 2005: *On the modelling of functionally graded laminated structures*, Prace Nauk, Inst. Mat. i Inform. Pol. Częstochowskiej, Wyd. Pol. Częst., Częstochowa.
169. Rychlewska J., Woźniak Cz., Woźniak M., 2006: *Modelling of functionally graded laminates revisited*, Electr. J. of Pol. Agricult. Univ., Vol. 9, Iss. 2.
170. Rychlewska J., Woźniak Cz., 2006: *Boundary layer phenomena in elastodynamics of functionally graded laminates*, Arch. Mech. (przyjęty do publikacji).
171. Rychlewska J., Woźniak Cz., 2006: *Elastodynamics of functionally graded laminates with interlaminar microeffects*, Physicochemical Mechanics of materials (przyjęty do publikacji).
172. Saigal S., Agrawal D.P., Stanišić M.M., 1987: *Influence of moving masses on rectangular plate dynamics*. Ing. Arch., 57, 3, 187-1967.
173. Sanchez-Palencia E., 1980: *Non-homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, 127, Berlin, Springer Verlag.
174. Sathyamoorthy M., Chia C.Y., 1980: *Effect of transverse shear and rotatory inertia on large amplitude vibrations of anisotropic skew plates*, J. Appl. Mech., 47, 1, 128-132 oraz 133-138.
175. Selezov I.T., 1959: *Equations of motion of plates* (in Ukrainian). Prikl. Mekh. 5, 4, 444-447.

176. Sokołowski M., 1957: *Obliczanie statych sprężystości dla płyt o ortotropii technicznej*. Arch. Inżyn. Łąd., 3, 4, 457-485.
177. Sokołowski M., 1959: *O granicy stosowalności hipotezy Kirchhoffa w teorii zginania płyt poprzecznie niejednorodnych warstwowych*, Arch. Inż. Łąd., 5, 1, 3-13.
178. Stavsky Y., 1965: *On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli*. Topics in Applied Mechanics. (eds.): D. Abir, F. Ollendorff, M. Reiner. Amsterdam, 105-116.
179. Szilard R., 1974: *Theory and analysis of plates. Classical and numerical methods*. Englewood-Cliffs-New Jersey, Prentice-Hall, Inc.
180. Szymczyk J., Woźniak Cz., 2006: *A contribution to the modelling of periodically laminated elastic solids*, Electr. J. of Pol. Agricult. Univ., Vol. 9, Iss. 1.
181. Szymczyk J., Woźniak Cz., 2006: *Continuum modeling of laminates with a slowly graded microstructure*, Arch. Mech. (przyjęty do publikacji).
182. Telega J.J., 1992: *Justification of a refined scaling of stiffnesses of Reissner plates with fine periodic structure*, Math. Models Meth. Appl. Sci., 2, 375-406.
183. Telega J.J., Lewiński T., 1988: *Homogenization of fissured Reissner-like plates, II. Convergence*. Arch. Mech., 40, 119-134.
184. Timoshenko S., 1955: *Vibrations problems in engineering*, New York D. van Nostrand.
185. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1962: *Teoria płyt i powłok*. Warszawa, Arkady.
186. Toledano A., Murakami H., 1987: *A high-order mixture model for periodic particulate composites*. Int. J. Solids Struct., 23, 989-1002.
187. Tomar J.S., 1963: *On flexural vibrations of isotropic elastic thin square plates according to Mindlin's theory*. Proc. Nat. Inst. Sci. India 29, Part A, No 2, 169-179.
188. Tomczyk B., 1999: *Length-scale versus asymptotic model in dynamics of thin substructured cylindrical shells*. Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 40-50.
189. Tomczyk B., 2003: *On the modelling of thin uniperiodic cylindrical shells*. J. Theor. Appl. Mech., 41, 755-774.
190. Troitsky M.S., 1976: *Stiffened plates. Bending, stability and vibrations*. Amsterdam-Oxford-New York, Elsevier.
191. Uflyand Ya.S., 1948: *Rasprostranenie voln pri poperechnykh kolebaniyakh sterzhnej i plastin*. PMM, 12, 3, 287-300.

192. Vashakmadze T.S., 1983: *K postroeniyu teorii anizotropnych plastin*. Dokl. Semibn. IPM im. I.N. Vekua. Izd. Tibilsk. Univ., 17, 18-23.
193. Vashakmadze T.S., 1984: *K teorii plastin*. Dokl. Semin. IPM im. Vekua. Izd. Tibilis. Univ., 18, 6-17.
194. *Vibrations*, 1992, Ed. S. Kaliski, PWN, Warszawa.
195. Vlasov B.F., 1957: *Ob uravneniyakh izgiba plastinok*. Dokl. AN Azerb. SSR, 13, 9, 955-959.
196. Vlasov B.F., 1957: *Ob uravneniyakh izgiba plastinok*. Izv. AN SSSR OTN, 12, 57-60.
197. Vlasov V.V., 1975: *Metod nachal'nykh teorii uprugosti I stroitel'noj mekhaniki*. Moskwa: Strojzdat.
198. Wągrowaska M., Woźniak Cz., 1996: *Macro-modeling of dynamic problems for viscoelastic composite materials*. Int. J. Engng. Sci., 35, 923-932.
199. Whitney J.M., Pagno N.J., 1970: *Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates*, J. Appl. Mech., 37, 4, 1031-1036.
200. Wierzbicki E., 1993: *On the wave propagation in micro-periodic elastic media*. Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci., 41, 323-327.
201. Wierzbicki E., 1995: *Nonlinear macro-micro dynamics of laminated structures*. J. Theor. Appl. Mech., 33, 291-307.
202. Wierzbicki E., Woźniak Cz., 1999: *Dispersive models of honeycomb based composites*. Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 35-39.
203. Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2000₁: *On the behaviour of honeycomb based composite solids*. Acta Mech., 141, 161-172.
204. Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2000₂: *On the dynamics of combined plane periodic structures*. Arch. Appl. Mech., 70, 387-398.
205. Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2002: *Continuum modelling and the internal instability of a certain periodic structures*. Arch. Appl. Mech., 72, 451-457.
206. Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 1995: *Finite rotations in the refined macrodynamics of elastic composites*. J. Theor. Appl. Mech., 32, 1, 15-25.
207. Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 1996: *Thermal stresses in elastodynamics of composite materials*. Int. J. Engng. Sci., 35, 187-196.
208. Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 1997: *Stability of micro-periodic materials under finite deformations*. Arch. Mech., 49, 143-158.

209. Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 2001: *On the modeling of transient micro-motions and near-boundary phenomena in a stratified elastic layer*, Int. J. Engng. Sci., 39, 1429-1441.
210. Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 2002: *A microscopic model for the heat propagation in the microperiodic composite solid*, Jour. Therm. Stresses, 25, 283-293.
211. Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 2003: *On elastodynamic of bi-periodic composite media*. J. Theor. Appl. Mech., 41, 289-304.
212. Woinowsky-Kreiger S., 1957: *Zur Theorie schiefwinkliger Tragerroste*. Ing. Archiv., 25, 5, 350-358.
213. Wojnar R., 1979: *Stress equations of motion for Uflyend-Mindlin plate*. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech., 27, 8/9, 401-410.
214. Woźniak Cz., 1967₁: *Thermoelasticity of bodies with microstructure*. Arch. Mech., 19, 335-365.
215. Woźniak Cz., 1967₂: *Thermoelasticity of non-simple oriented materials*. Int. J. Engng. Sci., 5, 605-612.
216. Woźniak Cz., 1969: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. Warszawa, PWN
217. Woźniak Cz., 1970: *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*. PWN, Warszawa.
218. Woźniak Cz., 1993₁: *Macro-dynamics of elastic and visco-elastic microperiodic composites*. J. Theor. Appl. Mech., 31, 763-770.
219. Woźniak Cz., 1993₂: *Nonlinear macro-elastodynamics of micro-periodic composites*. Bull. Pol. Ac. Sci., Tech. Sci., 41, 315-321.
220. Woźniak Cz., 1993₃: *Refined macrodynamics of periodic structures*. Arch. Mech., 45, 295-304.
221. Woźniak Cz., 1995: *Microdynamics: continuum modelling the simple composite materials*. J. Theor. Appl. Mech., 33, 267-289.
222. Woźniak Cz., 1997: *Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure*. Arch. Mech., 49, 421-441.
223. Woźniak Cz., 1999₁: *A model for analysis of micro-heterogeneous solids (Tolerance averaging versus homogenization)*. Mechanik Berichte, 1.
224. Woźniak Cz., 1999₂: *On dynamics of substructured shells*. J. Theor. Appl. Mech., 37, 255-265.
225. Woźniak Cz., 2002: *Macroscopic modeling of multi-periodic composites*, Comptes Rendus de L'academia des Sciences, Mechanique 330, 267-272.

226. Woźniak Cz., Woźniak M., 1987: *A generalization of the internal variable model for dynamics of solid with periodic microstructure*, J. Theor. Appl. Mech., 35, 23-36.
227. Woźniak Cz., Woźniak M., 1995: *Modelowanie w dynamice kompozytów. Teoria i zastosowania*, Prace IPPT, 25, Warszawa.
228. Woźniak Cz., Woźniak M., 1997: *On the description of dynamic behaviour for micro-periodic solids*, Phys. Chem. Mech. of Materials, 33, 23-36.
229. Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2000: *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej.
230. Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2004: *On dynamics of thin plates with aperiodic structure*. W: Theories of Plates and Shells, Critical Review and New Applications, Springer, 225-232.
231. Woźniak Cz., Wierzbicki E., Woźniak M., 2002: *A macroscopic model for the heat propagation in the microperiodic composite solids*. J. Therm. Stress., 25, 283-293.
232. Woźniak M., Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2002: *A macroscopic model of the diffusion and heat transfer processes in a periodically micro-stratified layer*. Acta Mech., 175, 175-185.
233. Woźniak M., Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2004: *Macroscopic modelling of prestressed microperiodic media*. Acta Mech. 173, 107-117.
234. Yakushev N.Z., Ulanova N.V., 1979: *Primenenie metoda nachal'nykh funktsij v zadachakh dinamiki plit srednej tolshchiny, nakhodyashchikhsya v pole podvizhnykh nagruzok. Issledovaniya po teorii plastin i obolozek*. Kazan', 14, 216-224.
235. Yang P.C., Norris C.H., Stavsky Y., 1966: *Elastic wave propagation in heterogeneous plates*. Int. J. Solids. Struct., 2, 4, 665-684.
236. Zeeman E.C., 1965: *The topology of the brain*, w Biology and Medicine, Medical Research Council, 227-292.

MECHANIKA PERIODYCZNYCH PŁYT ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

STRESZCZENIE

Praca dotyczy liniowo-sprężystych, średniej grubości płyt o strukturze periodycznej w płaszczyznach równoległych do swej płaszczyzny środkowej. Płyty takie, zwane dalej płytami o płaskiej strukturze periodycznej, można umownie podzielić na wiele powtarzalnych segmentów, tzw. komórek periodyczności, mających te same wymiary, kształt i identyczną strukturę materiałową. Płytą periodyczną jest zarówno płyta o stałej grubości periodycznie wzmocniona inkluzjami z innych materiałów, jak również jednorodna materiałowo płyta o periodycznie zmiennej grubości, np. gęsto uźebrowana lub perforowana. Wymiary komórki periodyczności, oprócz wymiarów gabarytowych płyty w płaszczyźnie środkowej, dodatkowo charakteryzują tego typu płyty. Geometria i własności płyt periodycznych mogą być opisane periodycznymi funkcjami współrzędnych parametryzujących płaszczyznę środkową płyty. W przypadku gdy funkcje te są periodyczne względem obu współrzędnych, mówimy, że płyta posiada dwukierunkową strukturę periodyczną lub że jest *płytą biperiodyczną*. Jeżeli własności płyty są funkcjami okresowymi tylko jednej z tych współrzędnych mamy, do czynienia z płytą o jednokierunkowej strukturze periodycznej lub inaczej - *płytą uniperiodyczną*.

W pracy tej zostaną wykorzystane dobrze znane założenia teorii płyt średniej grubości. Założenia te, w przypadku płyt periodycznych, prowadzą do układu równań różniczkowych cząstkowych o silnie oscylujących i nierzadko nieciągłych współczynnikach funkcyjnych. Rozwiązanie więc wielu problemów inżynierskich napotyka na znaczne trudności matematyczne. Dlatego też w mechanice ciał periodycznych proponowane są różne metody prowadzące do przybliżonych 2D-modeli płyt periodycznie niejednorodnych opisujących ich własności sprężyste i inercyjne w sposób uśredniony. Te uśrednione własności będziemy nazywać *makromechanicznymi* (w sensie mechaniki kompozytów, por. R. M. Jones (1975)). Modelowaniem płyt periodycznych nazwano procedury pozwalające dokonać przejścia od równań różniczkowych płyt o silnie oscylujących i nierzadko nieciągłych współczynnikach, do równań o współczynnikach uśrednionych, stałych lub wolnozmiennych. Najczęściej stosowane w modelowaniu techniki homogenizacyjne, korzystające z asymptotycznej analizy, dają bardzo dobre rezultaty w zakresie statyki płyt periodycznych, jednak w zagadnieniach dynamicznych napotyka na pewne ograniczenia. Na podstawie tak zbudowanych modeli nie po-

trafimy badać zagadnień dyspersji fal i opisać drgań wyższego rzędu, gdyż pomijają one wpływ wielkości powtarzalnego segmentu (okresu powtarzalności) płyty na jej makromechaniczne własności. Wpływ ten będziemy dalej nazywać *efektem skali*.

W tej pracy zastosowano niasymptotyczną *technikę tolerancyjnego uśredniania* (TAT), którą dla sprężystych kompozytów periodycznych wprowadził Cz. Woźniak (1999), (2000), a podstawy teoretyczne sformułowano w monografii Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego (2000). Technika ta prowadzi do równań, które mogą być wykorzystane w praktyce inżynierskiej, a także, w odróżnieniu od innych metod, pozwala uwzględnić wpływ efektu skali.

Celem pracy jest:

- usystematyzowanie, ujednoczenie i uogólnienie dotychczasowych opracowań dotyczących niasymptotycznego modelowania liniowo – sprężystych, średniej grubości płyt, o płaskiej strukturze periodycznej,
- uzasadnienie fizycznej poprawności przyjętego sposobu postępowania,
- wykazanie, że efekt skali odgrywa ważną rolę w badaniu zachowania się średniej grubości płyt periodycznych w procesach dynamicznych i quasi–stacjonarnych,
- porównanie proponowanych modeli wraz z podaniem zakresu ich stosowalności.

Praca zawiera wyprowadzone techniką tolerancyjnego uśredniania oryginalne 2D-modele średniej grubości liniowo-sprężystych płyt periodycznych, przykłady ich zastosowania w zagadnieniach dynamiki i stateczności oraz porównanie poszczególnych modeli. Są to modele oryginalne w tym sensie, że były po raz pierwszy rozważane w pracach autora.

Dla potrzeb niasymptotycznego modelowania płyt o płaskiej strukturze periodycznej, oprócz wymienionego powyżej podziału na *płyty biperiodyczne* i *uniperiodyczne*, konieczne było wprowadzenie dodatkowej klasyfikacji. Kryterium tej klasyfikacji jest iloraz okresu periodyczności do grubości płyty, por. R. V. Kohn i M. Vogelius (1984). Możemy więc wyróżnić:

- płyty o okresie dużo większym od ich grubości, które można traktować jako złożone z płytowych komórek o periodycznej strukturze; nazwano je *strukturalnie periodycznymi*,
- płyty o okresie rzędu grubości, którymi najczęściej są płyty niejednorodnel; nazwano je *materiałowo periodycznymi*,
- płyty o okresie dużo mniejszym od grubości.

W pracy analizowane są zagadnienia dynamiki (drgania) i zagadnienia stacjonarne (stateczność, efekt brzegowy) średniej grubości, liniowo – sprężystych płyt periodycznych. Wyprowadzone równania 2D–modeli dotyczą płyt prostokątnych o kierunkach periodyczności równoległych do krawędzi płyty. W procedurze modelowania techniką uśredniania tolerancyjnego wykorzystano hipotezę kinematyczną Hencky’ego – Bolle’a. Współczynnik poprzecznego ścinania przyjmowano wg teorii Uflyanda. W przykładach zastosowań uzyskanych równań badano wyłącznie płyty prostokątne lub pasma płytowe swobodnie podparte na przeciwległych brzegach. Przyjmowane dane materiałowe i wymiary geometryczne odpowiadają płytom stosowanym w inżynierii budowlanej.

Modelując zagadnienia średniej grubości płyt periodycznych, należy zastosować dwa podejścia w zależności od ilorazu okresu periodyczności do grubości płyty.

Dla płyt strukturalnie biperiodycznych technikę uśredniania tolerancyjnego stosujemy bezpośrednio do uśrednionych na grubości równań płyty. Jak już wspomniano, są to równania, różniczkowe cząstkowe o silnie oscylujących i nierzadko nieciągłych współczynnikach funkcyjnych. W wyniku zastosowania proponowanej techniki uzyskujemy uśrednione równania tj. równania różniczkowe cząstkowe o współczynnikach stałych. Sformułowany w ten sposób 2D–model średniej grubości płyty biperiodycznej uwzględnia efekt skali oraz pozwala *a posteriori* ustalić błąd popełniony przy obliczaniu wartości liczbowych niewiadomych funkcji.

Oslabiając założenia przed przystąpieniem do procedury modelowania, tzn. przyjmując, że płyta ma strukturę periodyczną w jednym kierunku i dowolną (ale oczywiście identyczną w każdej komórce) zmienność parametrów w kierunku prostopadłym, uzyskujemy równania 2D–modelu średniej grubości płyt strukturalnie uniperiodycznych. Są to w ogólnym przypadku równania o współczynnikach zmiennych, ale nie będących już silnie oscylującymi funkcjami. Najczęściej jednak w praktyce inżynierskiej, w tym i w budownictwie, stosowane płyty uniperiodyczne mają stałe parametry geometryczne i materiałowe w kierunku prostopadłym do kierunku periodyczności. Dla tego typu płyt uzyskujemy równania różniczkowe cząstkowe o stałych współczynnikach.

Dla płyt materiałowo biperiodycznych punktem wyjścia w procedurze modelowania są równania trójwymiarowej liniowej teorii sprężystości ośrodka o strukturze periodycznej w kierunkach równoległych do pewnej płaszczyzny środkowej. Stosując technikę uśredniania tolerancyjnego do tych równań w obrębie odpowiedniej dwuwymiarowej komórki periodyczności, uzyskujemy układ równań różniczkowych cząstkowych o współczynnikach stałych 3D-

modelu ciała periodycznego. Stosując do tych równań hipotezę kinematyczną Hencky-Bolle'a otrzymujemy równania 2D-modelu średniej grubości płyt biperiodycznych. Analogicznie jak w przypadku omawianym powyżej, osłabiając założenia wyjściowe, dochodzimy do równań 2D-modelu płyt uniperiodycznych. Dla tej grupy płyt periodycznych rozważania ograniczymy tylko do płyt o stałej grubości.

W przedstawionej tu pracy nie rozpatrujemy przypadku, w którym grubość płyty jest dużo większa od charakterystycznego wymiaru komórki periodyczności. Należy wtedy zhomogenizować materiał płyty, a w tej sytuacji wpływ efektu skali jest pomijalny.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że równania 2D-modelu średniej grubości płyt o dwukierunkowej strukturze periodycznej i strukturze uniperiodycznej (bez względu na iloraz okresu periodyczności do grubości płyty) trzeba wyprowadzać niezależnie. Jest to jakościowo inna sytuacja niż przy zastosowaniu metod homogenizacyjnych, gdzie model płyty uniperiodycznej jest na ogół przypadkiem szczególnym płyty o periodyce dwukierunkowej.

Rozprawa ta jest podsumowaniem, usystematyzowaniem i uogólnieniem dotychczasowych prac autora dotyczących nieasymptotycznego modelowania średniej grubości płyt o strukturze periodycznej. Po raz pierwszy zaadaptowano i wykorzystano do tego celu technikę uśredniania tolerancyjnego. W znanej autorowi literaturze tą techniką były dotychczas modelowane wyłącznie płyty spełniające założenia Kirchhoffa.

Elementami oryginalnymi samej rozprawy są:

- wyprowadzenie równań 2D-modeli liniowo-sprężystych średniej grubości płyt periodycznych, które to równania umożliwiają uwzględnienie wpływu powtarzalnej komórki na uśredniony opis zachowania się płyty w zagadnieniach dynamicznych i problemach stateczności,
- wykazanie możliwości efektywnego zastosowania otrzymanych równań do analizy pewnych zagadnień dynamiki i stateczności płyt periodycznych, ze szczególnym uwzględnieniem płyt stosowanych w budownictwie,
- klasyfikacja średniej grubości płyt periodycznych z podaniem zakresu stosowności proponowanych 2D-modeli,
- nowe jakościowo rezultaty, jak np. wyznaczenie wyższej częstości drgań własnych, dodatkowej siły krytycznej związanej z efektem skali,

- wskazanie możliwości wykorzystania w niektórych zagadnieniach założeń technicznej anizotropii (ortotropii) przy obliczaniu współczynników uzyskanych równań nieasymptotycznych 2D-modeli.

Zastosowanie zmodyfikowanej techniki uśredniania tolerancyjnego w modelowaniu średniej grubości płyt o strukturze periodycznej pozwala uzyskać nowe jakościowo wyniki w porównaniu do dotychczas powszechnie stosowanych metod homogenizacyjnych. Proponowane 2D-modele są niesprzeczne z modelami homogenizacyjnymi, (a także innymi metodami przybliżonymi, np. metodą Ritz), ale umożliwiają analizę szerszej klasy zagadnień. Można też mówić o pewnym uogólnieniu modelu zhomogenizowanego.

Należy podkreślić, że bardzo istotną zaletą proponowanego nieasymptotycznego podejścia (TAT), a równocześnie i wyprowadzonych czterech równań modeli, jest możliwość rozwiązywania poszczególnych zagadnień na różnym poziomie dokładności. Poziom ten jest uzależniony od liczby składników w skończonych sumach aproksymujących fluktuacyjną część składowych pola deformacji, a także od dokładności wyznaczenia modalnych funkcji kształtu. W pracy, w przykładach aplikacyjnych ograniczono się do uwzględnienia tylko jednego wyrazu, czyli tzw. pierwszego przybliżenia, które jest na ogół wystarczające w obliczeniach inżynierskich. Ponadto technika uśredniania tolerancyjnego generuje dodatkowe warunki, dotyczące funkcji wolnozmiennych, które są niezbędne do sprawdzenia fizycznej poprawności uzyskanych wyników liczbowych. Warunki te mogą być także wykorzystane jako pewne dodatkowe, *a posteriori* oszacowanie dokładności rozwiązań.

Za główną tezę wykazaną w pracy można uznać, że proponowane modele średniej grubości płyt o płaskiej strukturze periodycznej mogą być wykorzystane w zagadnieniach inżynierskich, np. w konstrukcjach budowlanych, nawet przy stosowanych aktualnie rozwiązaniach technicznych i materiałowych. W przypadku płyt wykonanych z materiałów o bardzo wysokiej wytrzymałości, przenoszących drgania o wysokich częstotliwościach, wyniki uzyskiwane w ramach proponowanych 2D-modeli mogą już mieć wpływ na wymiarowanie konstrukcji.

MECHANICS OF PERIODIC MEDIUM THICKNESS PLATES

SUMMARY

An object of consideration is linear elastic, medium thickness (Reissner-type) plates with a plane periodically inhomogeneous structure. A plate with a plane periodic structure consists of several repeated (usually rectangular) plate-type cells having identical shape, dimensions and material structure. Among the above plates we consider plates having

- periodic structure in two direction (called *biperiodic*),
- periodic structure in one direction (called *uniperiodic*)

parallel to the plate mid-plane. The geometry of the periodic plates, apart from the global mid-plane length dimensions is additional characterized by the periodicity cell sizes which determine the periods of the structure in-homogeneity Tackling the problems of dynamics, particularly the analysis of vibrations and the propagation of waves in plates with such a plates meet serious mathematical difficulties due to the fact that the thickness of the plate, its mass distribution and material properties are expressed by highly oscillating and usually non-continuous functions. This problem, can be solved by using the homogenisation theory (c.f. papers by Lewiński and Lewiński and Telega).

However, the use of asymptotic homogenisation method results in neglecting the structure length-scale effect i.e. the effect of size of the periodicity cell on the macro-dynamic plate behaviour. On the other hand, in many physical problems we are interested how the periods of in-homogeneity influence the behaviour of a periodic structure on the macroscopic level. To answer this question we shall replace homogenization by more general, non-asymptotic modeling approach. This approach, called the tolerance averaging technique (TAT) of partial differential equations with periodic coefficients, constitute a certain generalization of homogenization.

In course of non-asymptotic modeling of plates with a plane periodic structure, apart from aforementioned separation on *biperiodic* and *uniperiodic* plates, it is necessary to introduce an extra partition. It depends on the ratio of an in-homogeneity period and maximum plate thickness. It is possible to consider three cases:

- plates with large periods compared to the plate thickness, which called *structural periodic*,
- plates with periods of an order of the plate thickness, *material periodic*.,
- plates with small periods compared to the plate thickness.

This classification is similar to that introduced by Kohn and Vogelius. How it will be shown, if the periods of in-homogeneity are small when compared to the plate thickness then the length-scale effect is neglected. In this case, from the engineering point of view, the non-asymptotic and homogenized model leads to the identical results.

The proposed, non-asymptotic 2D-models for *structural periodic* plates were obtained using the tolerance averaging technique applied directly to the 3D-equation of linear elastodynamic of periodic solids. For *material periodic* plates, the starting point for TAT is equations representing the Hencky-Bolle 2D-model of a medium thickness plates. Taking this fact into consideration, the *structural periodic* model can be interpreted as a certain generalization of *material periodic* model. It can lead to the conclusion, that the aforementioned partition is unnecessary. Necessity of this classification lies in the proper choice of mode shape functions. In general, the mode shape functions represent free periodic vibrations of the 3D-periodic cell. In this case, finding these functions is rather a difficult task. However, in many special problems the form of these functions can be based on certain heuristic assumptions related to the expected form free vibrations of a periodicity cell. For plate with, $l \sim d$, the postulated saw-like form of mode shape functions, represent a very rough approximation of expected free vibrations of a periodicity cell. If $l \gg d$, then the periodic cell, can be treated as a thin plate. In this case the mode shape functions can be expressed, with a sufficient accuracy, by trigonometric functions.

We should pay attention to the fact that the non-asymptotic models of plates with one- and bi-directional periodic structure can be led out independently, because it is based on weaker modelling assumptions. The equations for *uniperiodic* plates are more complicated. It follows from the fact that the conditions for the modelling of these plates are less restrictive than those introduced for the modelling of the plates with two-directional plane periodic structure. At is it known, in general in the asymptotic approach the plate with uniperiodic structure is a special case of plate with bi-directional periodicity.

All proposed models make it possible to investigate dynamic and quasi-stationary problems. These models determine also higher free vibrations frequencies, caused by the plate's periodic structure, which cannot be derived from the asymptotic models. The square of lower

resonance frequencies calculated from the homogenized models are approximation of an order $O(l^2)$ of similar frequencies derived from the proposed models. Application of the non-asymptotic uniperiodic models to the stability problems results in two values of critical force. Solving the quasi-stationary problems, in the framework of biperiodic models, we obtain the stiffnesses, which can be interpreted as certain approximation of the effective stiffnesses derived by homogenization. In this case the length-scale effect disappears. Moreover, the equation for uniperiodic plates describe the effect of the initial displacement fluctuation on the plate behaviour in contrast to the homogenized equation, in which initial condition can be imposed only on the plate deflection and rotations.

For homogeneous plate with constant thickness, under homogeneous initial condition, all model equations reduce to the well known Hencky-Bolle 2D-plate theory. Comparing the obtained model equation with equation of the asymptotic model it can be easily seen that the tolerance averaging models enable analysing a large class of problems and are a certain generalization of models described in the framework of homogenization.

The proposed non-asymptotic approach ability formulated the models on different levels of accuracy. First of all, this level depends on the number of terms on the finite sums and precision of determining the mode shape functions. Moreover, the tolerance averaging technique yields extra conditions (related slowly varying functions), which are necessary for the physical meaning of the obtained solutions to the particular problems. These conditions can be also used as certain *a posteriori* estimations of the accuracy of solutions.

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice; tel./fax (0-32) 237-13-81
<http://wydawnictwo.polsl.pl>

Sprzedaz i Marketing
tel. (0-32) 237-18-48
wydawnictwo_mark@polsl.pl

Nakł. 100+50	Ark. wyd. 10	Ark. druk. 9	Papier offset. 70x100,80g
Oddano do druku 12.10.2006 r.	Podpisano do druku 12.10.2006 r.	Druk ukończ. w październiku 2006 r.	

Wydrukowano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1
zam. 329/06

Książki Wydawnictwa można nabyć w księgarniach

GLIWICE

- ◆ Punkt Sprzedaży Wydawnictwa na Wydziale Górnictwa i Geologii – ul. Akademicka 2 (237-17-87)
- ◆ „FORMAT” – Akademicka 5 na Wydziale Budownictwa
- ◆ „LAMBDA” – ul. Akademicka 2 (237-21-40)
- ◆ „MERCURIUS” – ul. Prymasa S. Wyszyńskiego 14 b (032) 230-47-22
- ◆ „ŻAK” – ul. Kaszubska (budynek Biblioteki)

BIAŁYSTOK

- ◆ Dom Książki (Księgarnia 84) – ul. Wiejska 45 c
- ◆ EKOPRESS Księgarnia Wysylkowa - ul. Brukowa 28 (085) 746-04-95

GDAŃSK

- ◆ EKO-BIS – ul. Dyrekcyjna 6 (058) 305-28-53

KATOWICE

- ◆ Punkt Sprzedaży na Wydziale Transportu – ul. Krasińskiego 8
- ◆ Hurtownia „DIK” – ul. Dulęby 7 (032) 204-82-30
- ◆ Hurtownia „JERZY” – ul. Słoneczna 24 (032) 258-99-58

KRAKÓW

- ◆ Techniczna – ul. Podwale 4 (012) 422-48-09
- ◆ Punkt Sprzedaży WND – AGH, Al. Mickiewicza 30 (012) 634-46-40

ŁÓDŹ

- ◆ „POLITECHNIKA 100” – ul. Żeromskiego 116 PŁ.
- ◆ Hurtownia „BIBLIOPIL” – ul. Jędrowizna 9a (042) 679-26-77

OPOLE

- ◆ BK - „POLITECHNIKA” – Wydz. Budownictwa, ul. Katowicka 48 (077) 456-50-58 wew.333

POZNAŃ

- ◆ Księgarnia „POLITECHNIK” – ul. Piotrowo 3 (061) 665-23-24
- ◆ Księgarnia Techniczna – ul. Półwiejska 28 (061) 659-00-38

RYBNIK

- ◆ „ORBITA” – ul. Rynek 12
- ◆ „NEMEZIS” – ul. Hallera 26

TYCHY

- ◆ „I JA TOURS” - ul. Piłsudskiego 10 (217-00-91 w.130)

WARSZAWA

- ◆ Studencka – Pl. Politechniki 1 (022) 628-77-58
- ◆ Techniczna - ul. Kaliskiego 15 (022) 666-98-02
- ◆ Techniczna – ul. Świętokrzyska 14
- ◆ MDM – ul. Piękna 31

WROCŁAW

- ◆ „TECH” – ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27

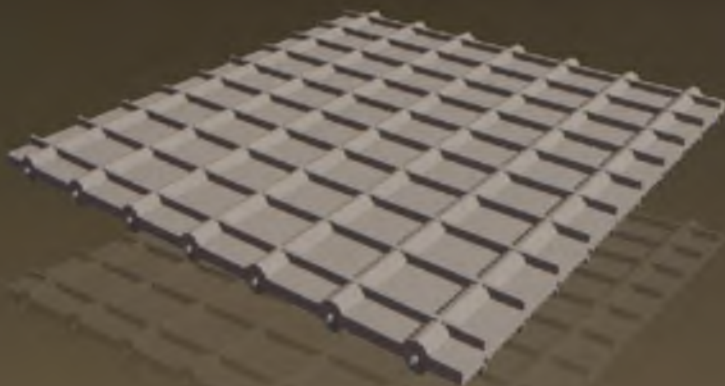
ZABRZE

- ◆ Punkt Sprzedaży na Wydziale Organizacji i Zarządzania– ul. Roosevelta 26

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P. 3343/06/108

DRUK: Drukarnia Gliwice, ul. Zarybicka 27, tel. 230 49 50



Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5
tel./fax (0-32) 237-13-81
<http://wydawnictwo.polsl.pl>
Sprzedaż i Marketing
tel. (0 32) 237-18-48,
e-mail: wydawnictwo_mark@polsl.pl