ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Ireneusz SZCZYGIEŁ

Analiza wybranych zagadnień odwrotnych konwekcji

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Gliwice 2005

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
NR 1666

Ireneusz SZCZYGIEŁ

Analiza wybranych zagadnień odwrotnych konwekcji

Gliwice 2005

PL ISSN 0372-9796

Spis treści

Contents

Spis najważniejszych oznaczeń

Symbole łacińskie:

A – pole powierzchni, m^2,

a – współczynnik wyrównania temperatury, m^2/s,

c – pojemność cieplna właściwa, J/(kg K),

e – energia właściwa układu, J/kg,

E – energia układu, J,

$\mathbf{F}$ – wypadkowa siła zewnętrzna, N,

F_i – składowe wypadkowej siły wewnętrznej, N,

$\mathbf{g}$ – jednostkowa siła masowa, m/s^2,

g_i – składowe jednostkowej siły masowej, m/s^2,

h – entalpia, J/kg,

$\mathbf{J}_\phi$ – uogólniony strumień konwekcyjno-dyfuzyjny wielkości ϕ,

$\mathbf{J}$ – Jakobian,

k – współczynnik przewodzenia ciepła, W/m K,

L – charakterystyczny wymiar liniowy, m,

m – masa, kg,

N_i – funkcja kształtu,

$\mathbf{n}$ – jednostkowy wektor normalny,

p – ciśnienie, Pa,

Pr – liczba Prandtla,

$\mathbf{P}$ – pęd układu, N s,

Q – ciepło, J

$\dot{q}_v$ – wydajność źródeł ciepła na jednostkę objętości, W/m^3,

Re – liczba Reynoldsa,

S_ϕ – uogólniona wydajność źródeł na jednostkę objętości,

S_A – człon źródłowy równania,

t, T – temperatura, ^{o}C K,

$\mathbf{u}$ – prędkość, m/s,

u, v, w – składowe prędkości, m/s,

$\tilde{U}$ – prędkość zredukowana,

V – objętość, m^3,

W – praca wykonana przez układ, J,

W_n – praca przeciw naprężeniom normalnym (przetłaczania), J,

W_s – praca mechaniczna, J,

W_μ – praca przeciw naprężeniom stycznym, J,

x, y, z – współrzędne globalne,

Z – współczynnik wrażliwości.

Symbole greckie:

β – parametr tłumiący,

μ – dynamiczny współczynnik lepkości, Pa · s,

ξ – osłona kontrolna,

ρ – gęstość kg/m^3,

σ – naprężenia normalne, N/m^2,

τ – czas, s,

τ_{ij} – naprężenia styczne, N/m^2,

φ – potencjał, m^2/s,

ϕ – wielkość skalarna,

ω – rotacja, prędkość kątowa, 1/s,

Γ_ϕ – współczynnik dyfuzyjny,

Θ – temperatura zredukowana,

Φ – potencjał zredukowany,

Ω – powierzchnia zamknięta osłoną kontrolną, m^2.

Indeksy dolne:

x, y, z – dotyczy osi układu współrzędnyh x, y, z,

n – dotyczy kierunku normalnego,

i – dotyczy i-tego węzła podziału numerycznego,

φ – dotyczy potencjału,

T – dotyczy temperatury,

u, v, w – dotyczy składowej wektora prędkości,

p – dotyczy ciśnienia.

Indeksy górne:

T – oznacza macierz transponowaną,

k – oznacza numer iteracji.

Inne symbole:

∇^2 – operator Laplace'a,

∇ – gradient,

$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}$ – pochodna substancjalna.

Rozdział 1.

Wstęp

1.1. Cel i zakres pracy

Nadrzędnym celem pracy jest poszerzenie wiedzy na temat odwrotnych zagadnień konwekcyjnego przepływu ciepła. W szczególności celem pracy jest opracowanie algorytmów umożliwiających estymowanie brzegowej prędkości płynu na podstawie informacji o temperaturze płynu wewnątrz obszaru obliczeniowego uzyskanej na drodze pomiaru.

Niniejsza praca stanowi zatem próbę rozwiązania pełnego zagadnienia odwrotnego konwekcyjnej wymiany ciepła, obejmującego jednocześnie równania opisujące rozkład prędkości, jak i temperatury. Pozwala to na określenie dopływowego profilu prędkości na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz analizowanego obszaru.

W konwekcyjnej wymianie ciepła przepływ czynnika w istotny sposób wpływa na zjawisko wymiany ciepła. Poprawne określenie rozkładu temperatury wymaga więc znajomości pola prędkości płynu, do wyznaczenia którego konieczna jest znajomość warunków brzegowych opisujących przepływ płynu na brzegu obszaru. Pomiar prędkości często nie jest zadaniem łatwym. Znacznie prostsze i mniej kosztowne są pomiary temperatury [66], zatem procedura po-

zwalająca określić prędkość płynu na podstawie pomiaru temperatury może mieć dużą wartość utylitarną.

Zakres rozprawy obejmuje opracowanie wspomnianych algorytmów dla dwóch rodzajów przepływu płynu:

- przepływu potencjalnego (niewirowego),
- przepływu cieczy newtonowskiej (opisanego równaniami Navier-Stokesa) [12].

W szczególności w skład pracy weszły zadania cząstkowe:

- przegląd literatury oraz analiza obecnego stanu wiedzy w dziedzinie modelowania odwrotnych zagadnień przenoszenia ciepła i masy,
- rozwinięcie kodu komputerowego do obliczeń pól potencjału, prędkości i temperatury w zagadnieniach bezpośrednich z wykorzystaniem metody bilansowego sformułowania Metody Elementów Skończonych (*CVFEM, Control Volume Finite Element Method*),
- opracowanie algorytmu do określania wyrównanej prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu niewirowego,
- opracowanie algorytmu do określania rozkładu prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu niewirowego,
- opracowanie algorytmu do określania wyrównanej prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu cieczy newtonowskiej,
- opracowanie algorytmu do określania rozkładu prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu cieczy newtonowskiej.

Badania przeprowadzono przy następujących założeniach:

- stan ustalony,
- dwuwymiarowa geometria kartezjańska,
- płyn nieściśliwy, przepływ potencjalny lub laminarny,
- stałe własności fizyczne płynu (niezmienne z temperaturą).

1.2. Ogólna charakterystyka zagadnień odwrotnych

Jednym z podstawowych problemów przepływu ciepła jest wyznaczanie pola temperatury na podstawie odpowiednio sformułowanego układu równań różniczkowych przy wykorzystaniu poprawnie zdefiniowanych warunków brzegowych i ewentualnie początkowych. Tak postawione zadania nazywane są najczęściej *zadaniami bezpośrednimi* lub *prostymi* (Direct problems) i mogą być krótko zdefiniowane jako *wyznaczanie skutków* na podstawie znajomości *przyczyn*. Rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego można przedstawić w następujących krokach:

1. równania opisujące analizowane zjawisko;
2. geometria układu;
3. warunki brzegowe;
4. warunki początkowe;
5. własności fizyczne ciała;
6. źródła.

Celem rozwiązania tak postawionego zadania jest określenie rozkładu poszukiwanej wielkości dla przyjętych warunków. W wielu przypadkach, w tym

w zagadnieniach cieplnych, liczba typów i rodzajów przyczyn jest ograniczona, wskutek czego zadania bezpośrednie zostały dokładnie przebadane pod kątem istnienia i jednoznaczności rozwiązania czy też stabilności wyników [5, 10, 20, 49, 72]. Krótko mówiąc, znane są wymagania, których spełnienie warunkuje istnienie jednoznacznego rozwiązania. Metody bezpośrednie są metodami *dobrze uwarunkowanymi*. Oznacza to, iż błędy wejściowe zadania nie są wzmacniane w procesie rozwiązywania zagadnienia.

W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie zadaniami, które w przeszłości uważane były za nierozwiązywalne, a mianowicie *zadaniami odwrotnymi*. Zadania odwrotne (Inverse problems) można najkrócej zdefiniować jako odtwarzanie *przyczyn*, jeżeli znane są (np. jako wyniki pomiarów) *skutki* danego zjawiska. Wynika stąd, że wszystkie zagadnienia polegające na interpretacji danych mogą być traktowane jak zadania odwrotne. Znaleźć je zatem można w wielu dziedzinach nauki, jak np. w elektrodynamice, geofizyce, astrofizyce czy innych. Typowymi przykładami zastosowania technik odwrotnych może być interpretacja elektrokardiogramów, analiza obrazów czy diagnoza tomograficzna [22].

W technice cieplnej zagadnienia odwrotne są definiowane jako wyznaczanie warunków brzegowych, warunków początkowych, źródeł lub własności termofizycznych ciała na podstawie pozostałych warunków brzegowych i dodatkowych informacji dotyczących odtwarzanej funkcji. Obejmują więc problemy związane z projektowaniem urządzeń i procesów cieplnych, sterowaniem procesami cieplnymi, optymalizacją pomiarów czy interpretacją danych pomiarowych.

Zagadnienia odwrotne są z natury *źle uwarunkowane* [14, 22, 46, 67], wskutek czego nawet niewielkie błędy danych wejściowych są w czasie rozwiązywania wzmacniane i przenoszone na wyniki obliczeń. W efekcie rozwiązanie zagadnienia odwrotnego może być obarczone dużym błędem, o ile nie zostaną zastosowane specjalne techniki stabilizacyjne. Zjawisko to związane jest z tłumieniem i opóźnianiem informacji. W zagadnieniach bezpośrednich sygnał pochodzący z brzegu obszaru jest tłumiony, a w stanach nieustalonych dodatkowo opóźniany na drodze do wnętrza ciała. Zagadnienia odwrotne wykorzystują następnie stłumioną i opóźnioną informację jako wejściową. W rezultacie otrzymanie poprawnych wyników dla niezaburzonych danych wejściowych (np. pola temperatury) wcale nie świadczy o poprawności metody odwrotnej. Jej wartość utylitarną można ocenić dopiero po określeniu stabilności wyników przy wykorzystaniu rzeczywistych (a więc obarczonych błędem pomiarowym) danych wejściowych. Ponadto mogą się pojawić dodatkowe ograniczenia związane ze złym uwarunkowaniem zagadnienia: minimalny krok czasowy, minimalna liczba sensorów pomiarowych czy też ograniczenie miejsca zbierania pomiarów do określonego podobszaru analizowanej geometrii.

W związku z przedstawionymi własnościami zagadnień odwrotnych, metody ich rozwiązywania winny się odznaczać innymi cechami w porównaniu z metodami rozwiązywania zagadnień bezpośrednich. Szczegółowy zakres wymagań stawianych metodom rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła został opracowany przez Jamesa Becka [3]:

1. Odtworzona temperatura i strumień ciepła powinny się odznaczać wysoką dokładnością w przypadku dokładnych (pozbawionych błędów) wielkości pomiarowych (wejściowych).
2. Metoda powinna być mało czuła na błędy pomiarowe.
3. Metoda winna być stabilna dla małych kroków czasowych. Pozwala to na odtwarzanie większej ilości informacji dotyczącej zmian czasowych warunków brzegowych niż w przypadku dłuższych kroków.

4. Metoda powinna umożliwiać wykorzystanie pomiarów pochodzących z jednego lub większej liczby czujników pomiarowych.
5. Metoda nie powinna wymagać ciągłości pierwszej pochodnej brzegowego strumienia ciepła względem czasu. Co więcej, nieciągłość lub wręcz skokowe zmiany strumienia ciepła powinny być akceptowane.
6. Nie powinna być wymagana znajomość dokładnego momentu początkowego zjawiska.
7. Metoda nie powinna zakładać zamkniętego zbioru obserwacji.
8. Metoda powinna umożliwiać obliczenia dla brył mieszanych.
9. Metoda powinna umożliwiać traktowanie własności fizykochemicznych jako funkcji temperatury.
10. Kontaktowy opór przewodzenia ciepła nie powinien być wyłączany z analizy.
11. Metoda powinna być łatwa do zaprogramowania.
12. Koszty obliczeniowe powinny być umiarkowane.
13. Metoda powinna być możliwa do wykorzystania przez użytkownika o przeciętnej wiedzy matematycznej.
14. Metoda powinna umożliwiać jej zastosowanie w różnych jednowymiarowych układach współrzędnych.
15. Powinna umożliwiać rozszerzenie na większą liczbę powierzchni grzejnych.
16. Metoda powinna mieć podstawy statystyczne i umożliwiać różne założenia statystyczne błędów pomiarowych.

Jakkolwiek powyższe kryteria zostały opracowane dla odwrotnych zagadnień *przewodzenia* ciepła, bez trudu można je rozszerzyć na pozostałe obszary, to jest *konwekcję i promieniowanie.*

Zagadnienia odwrotne można sklasyfikować według rodzaju estymowanej wielkości. I tak, spośród zagadnień odwrotnych można wyróżnić [21]:

- odwrotne zagadnienia brzegowe (Inverse Boundary Problems),
- odwrotne zagadnienia parametryczne (Parameter Estimation),
- odwrotne zagadnienia początkowe (Inverse Initial Problems),
- odwrotne zagadnienia geometryczne (Inverse Geometry Problems),
- pozostałe zagadnienia odwrotne.

Odwrotne zagadnienia brzegowe można krótko scharakteryzować jako odtwarzanie warunków brzegowych na podstawie pomiarów wielkości wewnątrz obszaru. Przykładem może tu być wyznaczanie brzegowego strumienia ciepła przy wykorzystaniu pomiarów temperatury wewnątrz ciała. Zagadnienia takie mogą wystąpić zarówno dla stanów ustalonych, jak i nieustalonych.

W przypadku *odwrotnych zagadnień parametrycznych* celem analizy staje się określenie pewnych wielkości opisujących fizyczne własności ciała (np. gęstość, współczynnik przewodzenia ciepła, stałe równowagi chemicznej itp.). W porównaniu z zagadnieniami brzegowymi liczba odtwarzanych wielkości jest tu znacznie mniejsza, co skutkuje lepszym uwarunkowaniem problemu. Z drugiej strony, odwrotne zagadnienia parametryczne prowadzą zwykle do nieliniowych układów równań, nawet jeżeli wyjściowe układy równań są liniowe.

Odwrotne zagadnienia początkowe, zwane inaczej *zagadnieniami retrospektywnymi*, polegają na identyfikacji warunków początkowych i mają mniejsze znaczenie w technice cieplnej z uwagi na fakt, iż warunki początkowe tylko w

ograniczonym przedziale czasu wpływają na rozkład temperatury w ciałach. W *zagadnieniach geometrycznych* odtwarzane są nieznane elementy geometrii układu; przykładem może tu być identyfikacja położenia granicy fazy w problemach ciągłego odlewania metali [30, 31, 32, 47].
Zagadnienia pozostałe obejmują problemy związane z identyfikacją położenia i wydajności wewnętrznych źródeł ciepła.
Zagadnienia odwrotne można ponadto sklasyfikować podług mechanizmu wymiany ciepła [34]. Zagadnienia te, początkowo rozwijane głównie dla zadań przewodzenia ciepła, stosowane są obecnie z powodzeniem zarówno w konwekcyjnej, jak i radiacyjnej wymianie ciepła. I tak, możemy wyróżnić między innymi:

- zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła,
- zagadnienia odwrotne konwekcji (swobodnej lub wymuszonej),
- zagadnienia odwrotne promieniowania powierzchniowego,
- zagadnienia odwrotne promieniowania w ośrodku radiacyjnie czynnym (promieniowanie objętościowe),
- zagadnienia odwrotne jednoczesnego przewodzenia i promieniowania,
- zagadnienia odwrotne jednoczesnego przewodzenia i konwekcji,
- zagadnienia odwrotne jednoczesnego przewodzenia i konwekcji, i promieniowania,
- zagadnienia odwrotne przy zmianie fazy.

Niniejsza praca poświęcona jest zagadnieniom odwrotnym w konwekcyjnej wymianie ciepła.

1.3. Przegląd literatury

Jakkolwiek w ostatnim czasie pojawiło się dużo publikacji poświęconych odwrotnym zagadnieniom konwekcyjnej wymiany ciepła, to w większości zakładają one znane rozkłady prędkości i w efekcie procedury odwrotne obejmują jedynie wykorzystanie równania bilansu energii. Warto tu wspomnieć prace opublikowane przez Özisika dotyczące odtwarzania rozkładu temperatury płynu przy przepływach laminarnych dla stanów ustalonych [25], nieustalonych [7], estymacji osiowego rozkładu strumienia ciepła w przepływach laminarnych [16], również dla stanów nieustalonych [26]. Jednoczesnym odtwarzaniem przestrzennego i czasowego rozkładu strumienia ciepła zajmował się H. Orlande ze współpracownikami [27]. Su ze współautorami [50] odtwarzał rozkład strumienia ciepła dla przepływu turbulentnego w kanale o przekroju kołowym, Li i Yan [23] estymowali rozkład nieustalonego strumienia ciepła podczas laminarnego, ustalonego przepływu płynu w kanale pierścieniowym, a Lin wraz ze współautorami [24] analizowali odtwarzanie strumienia ciepła, temperatury i liczby Nusselta na powierzchni ogrzewanego cylindra omywanego strumieniem powietrza. Huang i Chen [15] zastosowali Metodę Gradientów Sprzężonych przy obliczaniu brzegowego strumienia ciepła podczas nieustalonego przepływu czynnika w trójwymiarowym kanale. Odtwarzaniem brzegowej temperatury przy ponaddźwiękowych przepływach gazów zajmował się Aleksejev [1]. Zagadnieniom odwrotnym w warunkach jednoczesnej konwekcji i promieniowania swe prace poświęcił Franca ze współpracownikami [9]. Problemami odwrotnymi konwekcji w mediach porowatych zajmował się Metzger [28].
Wiele prac poświęcono zagadnieniom odwrotnym sformułowanym dla warunków konwekcji swobodnej. Dla zjawiska przepływu ciepła w szczelinie Park i Chung odtwarzali brzegowy strumień ciepła [35] oraz wydajność we-

wnętrznych źródeł ciepła [36]. Podobnym problemem zajmowali się Park i Jung [37] oraz Prud'homme i Nguyen [41]. Sampath i Zabaras [44] zajmowali się estymacją nieustalonego profilu strumienia ciepła przy konwekcji swobodnej płynu przewodzącego prąd elektryczny. Yang i Zabaras sformułowali odwrotne zagadnienie konwekcyjno-dyfuzyjne dla zjawisk ze zmianą fazy czystego składnika [74] oraz roztworu [73].

Godne polecenia są ponadto monografie poświęcone zagadnieniom odwrotnym w technice cieplnej, stanowiące pełną prezentację zagadnienia [22], [34].

W przeszłości autor niniejszej rozprawy zajmował się odtwarzaniem rozkładu brzegowego strumienia ciepła i prędkości dopływowej w warunkach ustalonego laminarnego przepływu płynu [53]. Zastosowano tam podejście analogiczne do przedstawionego we wspomnianych pracach, tzn. odwrotne sformułowanie obejmowało *rozłącznie* równania bilansu pędu i energii. Było to możliwe poprzez założenie znanego rozkładu prędkości przy odtwarzaniu brzegowego strumienia ciepła. Wyznaczanie strumienia ciepła opierało się zatem jedynie na równaniach bilansu energii przy założonym, znanym polu prędkości płynu, podczas gdy algorytm wyznaczania prędkości przy dopływie obejmował wyłącznie równania bilansu pędu i ilości substancji (Naviera-Stokesa i ciągłości). Wyniki wspomnianych badań zostały opublikowane [54, 55], przy czym pozycję [54] zacytowano w podręczniku metod odwrotnych wydanym w 2000 roku w Stanach Zjednoczonych [34].

Rozdział 2.

Zagadnienia bezpośrednie

W wielu przypadkach rozwiązanie zadania bezpośredniego jest istotnym elementem rozwikłania zagadnienia odwrotnego. Rozwiązanie to może być wykorzystane przy wyznaczeniu współczynnika wrażliwości, symulowaniu pomiarów czy też przy wyznaczaniu wartości temperatury, prędkości lub ciśnienia dla aktualnej estymaty warunków brzegowych.

Pełny opis matematyczny konwekcyjnego przepływu ciepła jest zaprezentowany w dodatku A zamieszczonym na końcu niniejszej pracy. Rozwiązywanie zagadnień bezpośrednich konwekcji jest jednym z trudniejszych zadań przepływu ciepła. Istnieje wprawdzie wiele zależności empirycznych pozwalających dokładnie obliczyć współczynniki wnikania ciepła czy straty ciśnienia, jednak zakres ich stosowania ograniczony jest do dobrze znanych geometrii. W przypadku gdy celem badań jest określenie rozkładu temperatury, prędkości czy ciśnienia, lub gdy analiza prowadzona jest w niestandardowej geometrii, jedynym rozwiązaniem pozostaje modelowanie numeryczne [52].

W niniejszym rozdziale przedstawiono numeryczne rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego, a więc sposób wyznaczenia dyskretnych wartości prędkości, ciśnienia i temperatury, dla przyjętych założeń. Zaprezentowany algorytm,

po drobnych modyfikacjach, jest następnie wykorzystany do wyznaczenia *współczynników wrażliwości.*

Do numerycznego rozwiązania zagadnienia bezpośredniego konwekcyjnej wymiany ciepła można wykorzystać dostępne na rynku komercyjne pakiety CFD (Computational Fluid Dynamics), posiadające bardzo duże możliwości obliczeniowe. *Zazwyczaj pozwalają one na analizę przypadków dwu- i trójwymiarowych*, stanów ustalonych i nieustalonych, przepływów laminarnych i turbulentnych, uwzględnienie reakcji chemicznych itd. Przykładem takiego pakietu może być Fluent firmy *Fluent Inc.* Zastosowanie pakietów komercyjnych w przypadku rozwiązywania zadań odwrotnych może mieć pewne wady. Zadania odwrotne są znacznie bardziej czułe na błędy numeryczne w porównaniu z zagadnieniami bezpośrednimi. W pakietach komercyjnych użytkownik ma zazwyczaj ograniczoną kontrolę nad błędami. Ponadto, użytkownik pakietu CFD ma często niewielkie możliwości ingerencji w kod, rozwiązanie przebiega w dużej mierze na zasadzie *czarnej skrzynki.* Może to być poważnym utrudnieniem przy przystosowaniu oprogramowania do zadań odwrotnych (np. do wyznaczania współczynnika wrażliwości). Z tych to powodów w niniejszej pracy zdecydowano się wykorzystać własne oprogramowanie, oparte na bilansowym sformułowaniu Metody Elementów Skończonych. W kolejnych rozdziałach pracy przedstawiono numeryczne rozwiązanie bezpośredniego zagadnienia konwekcyjnej wymiany ciepła, oparte na równaniach zaprezentowanych w dodatku A niniejszej pracy.

2.1. Modelowanie numeryczne zjawisk konwekcyjnej wymiany ciepła

Równania ciągłości, bilansu pędu i energii, przedstawione w dodatku A pracy, stanowią pełny opis matematyczny wymiany ciepła i masy w przepływającym

płynie. Z uwagi na liczbę równań wymagających równoczesnego rozwikłania, *jak również z powodu nieliniowych członów typu $u\,\partial u/\partial x$, znalezienie rozwiązania* analitycznego jest w większości przypadków niemożliwe. Wspomniana nieliniowość uniemożliwia ponadto traktowanie złożonych przepływów jako superpozycji przepływów prostych. A zatem w większości przypadków do dyspozycji pozostaje modelowanie numeryczne, które również nie jest pozbawione trudności rodzących się ze struktury równań opisujących zjawisko. Jak wspomniano, istnieją przypadki umożliwiające znalezienie analitycznego rozwiązania równań wymiany masy i ciepła. Dzieje się tak, jeżeli warunki przepływu płynu pozwalają zaniedbać nieliniowe człony układu równań z uwagi na ich pomijalnie małą wartość. W niektórych przypadkach wartość tych członów może być dokładnie równa zeru. Przepływy takie charakteryzują się bardzo małymi prędkościami czynnika i stąd często zwane są *przepływami pełzającymi* (ang. creeping flows). W rzeczywistych zagadnieniach warunki takie pojawiają się przy przepływie czynników smarujących, podczas opadania cząstek stałych w płynach, czy też przy przepływie płynu przez media porowate, jak np. przy przepływie wód gruntowych. Należy jednak zaznaczyć, iż w większości przypadków nieliniowe człony równań opisujących zjawisko mają dominujące znaczenie i ich pominięcie wiąże się z popełnieniem dużych błędów, co w efekcie przynosi rozwiązanie odległe od rzeczywistości. Wielkością pozwalającą określić granicę traktowania przepływów jako pełzających jest bezwymiarowa *liczba Reynoldsa* określająca stosunek efektów bezwładnościowych do lepkościowych:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho|\mathbf{u}|L}{\mu} \tag{2.1}$$

gdzie $|\mathbf{u}|$ jest wartością wektora prędkości, L natomiast wymiarem charakterystycznym kanału.

W przepływach pełzających liczba Reynoldsa jest rzędu jedności, w innych przypadkach może osiągać wartości znacznie ją przekraczające. Na przykład, jak wykazały eksperymenty [18], zewnętrzny opływ kuli może być traktowany jak przepływ pełzający dla liczb Reynoldsa rzędu jedności (dla wymiaru charakterystycznego równego średnicy kuli). Przy prędkościach wyższych nieliniowe człony równań nie powinny być pomijane.

W niniejszej pracy, jak już wspomniano, do rozwiązania zarówno zagadnienia bezpośredniego, jak i zadań odwrotnych posłużono się bilansowym sformułowaniem Metody Elementów Skończonych. Metoda Elementów Skończonych, jedna z często wykorzystywanych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień teorii pola, została opracowana przez Zienkiewicza [76] głównie dla zagadnień wytrzymałościowych. Od dłuższego czasu jest jednak z powodzeniem stosowana przy rozwiązywaniu problemów wymiany ciepła. W zarysie Metoda Elementów Skończonych polega na dyskretyzacji czasu i przestrzeni, przyjęciu formuły aproksymującej poszukiwaną wielkość skalarną i skonstruowaniu równań pozwalających wyznaczyć nieznane, węzłowe wartości wspomnianej wielkości skalarnej. Wielkości skalarne, będące przedmiotem poszukiwań, aproksymuje się przy użyciu tzw. *funkcji próbnych* opierających się na poszukiwanych wielkościach węzłowych. Wartości węzłowe z kolei to wartości poszukiwanej wielkości w węzłach podziału numerycznego umieszczonych w wierzchołkach elementów skończonych lub czasem także na ich bokach lub we wnętrzu. Układ równań pozwalający wyznaczyć nieznane wielkości węzłowe jest konstruowany na podstawie równań różniczkowych opisujących zjawisko. Istnieje kilka sposobów tworzenia wspomnianego układu równań. W zależności od tego można wyróżnić kilka sformułowań Metody Elementów Skończonych; i tak:

- *Sformułowanie wariacyjne* polega na minimalizacji określonego funkcjonału, którego minimum jest równocześnie rozwiązaniem różniczkowego opisu zagadnienia. Sformułowanie to jest często stosowane w mechanice do rozwiązywania zagadnień wytrzymałościowych z uwagi na fakt, iż wspomniany funkcjonał ma sens fizyczny. Określa on energię potencjalną układu, która w stanie równowagi jest minimalna. W zagadnieniach wymiany ciepła sformułowanie wariacyjne nie jest tak chętnie stosowane, gdyż trudniejsze jest sformułowanie odpowiedniego funkcjonału, poza tym nie ma on oczywistego sensu fizycznego, co utrudnia analizę metody.
- *Sformułowanie Galerkina* jest jedną z chętnie stosowanych odmian metody. W sformułowaniu tym układ równań konstruuje się przez przyrównanie do zera całki z iloczynu niezgodności poszukiwanej wielkości skalarnej w danym punkcie obszaru oraz wagi do tego punktu przypisanej. Wspomniana niezgodność wynika z podstawienia aproksymacji poszukiwanej wielkości z użyciem funkcji próbnych do równań różniczkowych opisujących analizowane zjawisko. Funkcje te są ponadto często stosowane jako wagi występujące przy niezgodnościach. W odróżnieniu od sformułowania wariacyjnego podejście Galerkina może być zawsze stosowane w oparciu o różniczkowy opis zagadnienia.
- *Sformułowanie bilansowe* polega na budowaniu bilansu strumienia poszukiwanej wielkości skalarnej wokół węzłów podziału numerycznego. W przypadku zagadnień wymiany ciepła jest to strumień ciepła. Rozkład wielkości wewnątrz elementów skończonych aproksymuje się wykorzystując funkcje próbne i tu leży podstawowa różnica pomiędzy bilansowym sformułowaniem metody elementów skończonych a metodą bilansów elementarnych. Jak widać, sformułowanie bilansowe ma oczy-

wisty sens fizyczny i wykazuje lokalną zachowawczość. Cechy te znacznie ułatwiają analizę zagadnienia. Do wad tego podejścia można zaliczyć konieczność budowania dodatkowych osłon kontrolnych wokół węzłów podziału. Ponadto niektóre z macierzy, które w sformułowaniu wariacyjnym czy Galerkina są symetryczne, tutaj tracą tę własność.

W niniejszej pracy posłużono się, z uwagi na jego oczywiste zalety, sformułowaniem bilansowym Metody Elementów Skończonych.

2.1.1. Zastosowanie bilansowego sformułowania MES do wyznaczania pól prędkości, ciśnienia i temperatury

W niniejszej pracy, w celu zwiększenia przejrzystości wywodu, zastosowanie bilansowego sformułowania Metody Elementów Skończonych (CVFEM) [29] do rozwiązywania zagadnień bezpośrednich konwekcyjnej wymiany ciepła ograniczono do przypadków dwuwymiarowych. Rozszerzenie procedury do trzech wymiarów nie stwarza większych trudności.

Zestawienie równań opisujących zjawiska konwekcyjno-dyfuzyjne

Przepływ potencjalny

Jak już wspomniano, przepływ potencjalny charakteryzuje się stosunkowo prostym opisem matematycznym, na który w stanie ustalonym składają się równania:

- potencjału

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

- bilansu energii

$$\rho c \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \rho c \frac{\partial}{\partial y}(vT) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q_v \tag{2.3}$$

przy czym:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ρ oznacza gęstość płynu, k współczynnik przewodzenia ciepła, T temperaturę, q_v moc wewnętrznych źródeł ciepła odniesioną do jednostki objętości, φ potencjał, u, v składowe wektora prędkości, c zaś pojemność cieplną właściwą płynu.

Przepływ Eulera

Z uwagi na fakt, że przepływ Eulera jest przepływem płynu nielepkiego, dla przyjętych założeń opisany jest on zależnościami:

- równania bilansu pędu:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.5}$$

- równanie ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

- równanie bilansu energii:

$$\rho c \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \rho c \frac{\partial}{\partial y}(vT) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q_v \tag{2.7}$$

gdzie ρ oznacza gęstość płynu, k współczynnik przewodzenia ciepła, T temperaturę, q_v moc wewnętrznych źródeł ciepła odniesiona do jednostki objętości, g_x, g_y składowe przyspieszenia związane z siłami masowymi działającymi odpowiednio w kierunku osi x, y, natomiast u, v składowe wektora prędkości, c zaś pojemność cieplną właściwą płynu.

Przepływ wirowy płynu nieściśliwego

W przypadku przepływu płynu nieściśliwego, znane są dwa sposoby rozwiązania problemu: w tzw. *zmiennych prostych* (ang. primitive variables) oraz w zmiennych *wirowość-funkcja prądu*. W niniejszej pracy zagadnienie rozwiązano wykorzystując sformułowanie w zmiennych prostych, a więc *ciśnienie-prędkość*. W tym przypadku dla dwuwymiarowej geometrii oraz dla stanu ustalonego układ równań opisujących zjawisko sprowadza się do postaci:

- równania bilansu pędu:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.9}$$

- równanie ciągłości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

- równanie bilansu energii:

$$\rho c\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \rho c\frac{\partial}{\partial y}(vT) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q_v \tag{2.11}$$

W powyższych równaniach ρ oznacza gęstość płynu, k współczynnik przewodzenia ciepła, T temperaturę, q_v moc wewnętrznych źródeł ciepła odniesioną do jednostki objętości, g_x, g_y składowe przyspieszenia związane z siłami masowymi działającymi odpowiednio w kierunku osi x, y, μ lepkość, u, v składowe wektora prędkości, c zaś pojemność cieplną właściwą płynu.

Rozwiązanie równań konwekcyjno-dyfuzyjnych przy wykorzystaniu CVFEM

Każde z przedstawionych powyżej równań, bez względu na charakter przepływu, może być zapisane w ogólnej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S_\phi \tag{2.12}$$

gdzie ϕ oznacza wielkość skalarną, Γ_ϕ współczynnik dyfuzyjny, S_ϕ moc źródeł ciepła odniesioną do jednostki objętości. Wszystkie te wielkości zależą od rodzaju równania, które opisuje ogólna zależność (2.12). I tak:

- równanie potencjału, przepływ potencjalny

$$\phi = \varphi, \quad \Gamma_\phi = 1, \quad S_\phi = 0; \tag{2.13}$$

- równanie bilansu pędu, przepływ Eulera, kierunek x

$$\phi = u, \quad \Gamma_\phi = 0, \quad S_\phi = g_x - \frac{\partial p}{\partial x}; \tag{2.14}$$

- równanie bilansu pędu, przepływ wirowy płynu nieściśliwego, kierunek x

$$\phi = u, \quad \Gamma_\phi = \mu, \quad S_\phi = g_x - \frac{\partial p}{\partial x}; \tag{2.15}$$

- równanie bilansu pędu, przepływ wirowy płynu nieściśliwego, kierunek y

$$\phi = v, \quad \Gamma_\phi = 0, \quad S_\phi = g_y - \frac{\partial p}{\partial y}; \tag{2.16}$$

- równanie ciągłości

$$\phi = 1, \quad \Gamma_\phi = 0, \quad S_\phi = 0; \tag{2.17}$$

- równanie bilansu energii

$$\phi = T, \quad \Gamma_\phi = \frac{k}{c}, \quad S_\phi = q_v. \tag{2.18}$$

Ogólną zależność (2.12) można przedstawić w postaci całkowej jako bilans konwekcyjno-dyfuzyjnego strumienia $\mathbf{J}_\phi$ wielkości skalarnej ϕ dla dowolnej osłony kontrolnej γ:

$$\oint_\gamma \mathbf{J}_\phi \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\xi - \int_\Omega S_\phi \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.19}$$

gdzie:

γ – osłona kontrolna,

Ω – powierzchnia zamknięta osłoną kontrolną γ.

Występujący w równaniu (2.19) wektor $\mathbf{J}_\phi$ opisany jest następującą zależnością:

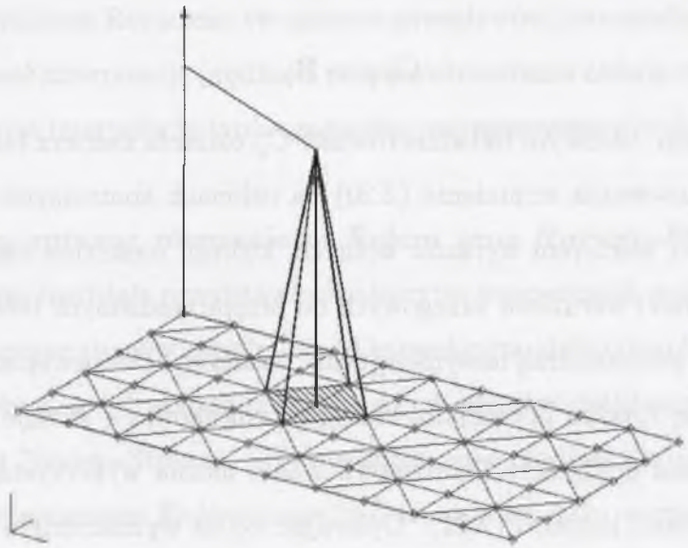
$$\mathbf{J}_\phi = \rho \mathbf{u} \phi - \Gamma_\phi \nabla \phi \tag{2.20}$$

Wielkości ϕ oraz Γ_ϕ należy przyjmować według równań (2.13) ÷ (2.18).

Zastosowanie CVFEM do rozwiązania zagadnienia opisanego ogólną zależnością (2.12) sprowadza się, w przypadku stanów ustalonych, do dyskretyzacji obszaru na elementy skończone i skonstruowania bilansu (2.19) dla każdego węzła podziału numerycznego, przy aproksymacji wielkości ϕ w sposób typowy dla Metody Elementów Skończonych. W praktyce oznacza to konieczność budowania, oprócz siatki elementów skończonych, osłon kontrolnych otaczających każdy z węzłów. W zagadnieniach liniowych, jak np. w przypadku przewodzenia ciepła, rozkład wielkości ϕ w elemencie skończonym można przybliżać funkcjami kształtu (rys. 2.1):

$$\phi = \sum_{i=1}^{NP} N_i(\mathbf{x}) \phi_i \tag{2.21}$$

gdzie $\mathbf{x}$ oznacza wektor współrzędnych kartezjańskich, $N_i(\mathbf{x})$ – funkcję kształtu przypisaną i-temu węzłowi, NP - liczbę węzłów w siatce, ϕ_i – wartość ϕ w węźle i. Funkcja kształtu $N_i(\mathbf{x})$ powinna mieć niezerowe wartości tylko w



Rys. 2.1. *Funkcja kształtu dla elementów trójkątnych*
Fig. 2.1. *Shape function for the triangular elements*

elementach, do których należy węzeł i. Szczegółowe wymagania stawiane funkcjom kształtu można znaleźć w [76].

W przypadku elementów trójkątnych pierwszego rzędu wielkość ϕ można interpolować wewnątrz elementu ie według zależności:

$$\phi = A^{ie} x + B^{ie} y + C^{ie} \tag{2.22}$$

Stałe A^{ie}, B^{ie}, Cie wyznacza się przy wykorzystaniu wartości węzłowych wielkości ϕ w elemencie ie.

Przepływ potencjalny

Z uwagi na strukturę układu równań opisujących konwekcyjno-dyfuzyjną wymianę ciepła, w której przepływ płynu może być traktowany jak potencjalny (2.2 ÷ 2.3), wyznaczenie pól prędkości i temperatury nie stwarza większych trudności. W pierwszym kroku należy wyznaczyć rozkład potencjału. Zastosowanie bilansowego sformułowania metody elementów skończonych prowadzi do układu równań:

$$\mathbf{C}_\varphi \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}_\varphi \tag{2.23}$$

W powyższym, liniowym układzie równań $\mathbf{C}_\varphi$ oznacza macierz otrzymaną w wyniku bilansowania strumienia (2.20) na osłonach kontrolnych wokół węzłów, $\mathbf{B}_\varphi$ jest wektorem wyrazów wolnych, którego niezerowe elementy wynikają z wkładu warunków brzegowych do przeprowadzonych bilansów.

Macierz $\mathbf{C}_\varphi$ jest macierzą niesymetryczną, pasmową. Po rozwiązaniu układu otrzymuje się rozkład potencjału, którego różniczkowanie stosuje się do wyznaczenia pola prędkości. Do różniczkowania można wykorzystać aproksymację funkcjami kształtu (2.21). Opierając się na wyznaczonym rozkładzie pola prędkości można przeprowadzić bilansowanie strumienia ciepła w celu określenia rozkładu temperatury płynu. Prowadzi to do układu równań:

$$\mathbf{C}_\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\mathbf{T} = \mathbf{B}_\mathbf{T} \tag{2.24}$$

gdzie $\mathbf{C}_\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$ to macierz układu, będąca funkcją wektorów wartości węzłowych prędkości $\tilde{\mathbf{u}}$ oraz $\tilde{\mathbf{v}}$, $\mathbf{B}_\mathbf{T}$ jest wektorem wyrazów wolnych ujmującym warunki brzegowe oraz moc objętościowych źródeł ciepła.

Układy równań zarówno (2.23), jak i (2.24) są, dla przyjętych założeń, liniowe, więc do ich rozwiązania nie jest konieczne stosowanie technik iteracyjnych. Przy poprawnie zdefiniowanych warunkach brzegowych są to układy dobrze uwarunkowane. Procedurę wyznaczania rozkładu prędkości i temperatury można w takich przypadkach przedstawić następująco:

1. wyznaczenie rozkładu potencjału (2.23);
2. wyznaczenie wektorów składowych prędkości węzłowych $\tilde{\mathbf{u}}$ oraz $\tilde{\mathbf{v}}$ przy wykorzystaniu interpolacji (2.21);
3. wyznaczenie rozkładu temperatury (2.24).

Dla wyższych liczb Reynoldsa (w zakresie przepływów potencjalnych) można zmodyfikować interpolację prędkości przy konstruowaniu układu równań (2.24) wykorzystując interpolację typu *upwinding*, zaprezentowaną w dalszej części pracy.

Przepływy opisane równaniami Eulera oraz Naviera-Stokesa

W poniższym rozdziale przedstawiono algorytm wyznaczania rozkładu prędkości oraz temperatury w zagadnieniach konwekcyjno-dyfuzyjnych, w których przepływ płynu jest traktowany jak przepływ płynu nieściśliwego opisanego równaniami Naviera-Stokesa. Wyznaczenie pola prędkości w przepływach opisanych równaniami Eulera może być traktowane jako szczególny przypadek przepływu płynu nielepkiego opisanego równaniami Naviera-Stokesa. Do rozwiązania tak zdefiniowanego zagadnienia można wykorzystać przedstawiony niżej algorytm sformułowany dla przepływów wirowych płynów nieściśliwych, po założeniu zerowej lepkości płynu:

$$\mu = 0$$

Zastosowanie liniowych funkcji kształtu w obliczeniach przepływów niepotencjalnych (rys. 2.1) jest sprzeczne z fizyką zjawiska. Podejście takie z równą wagą traktuje informację leżącą po obu stronach analizowanego węzła. O ile jest to w pełni uzasadnione w przypadku strumieni dyfuzyjnych, o tyle podczas bilansowania strumienia konwekcyjno-dyfuzyjnego pojawia się wyraźna *asymetria* zjawiska. Strumień konwekcyjny nie niesie ze sobą informacji o wartościach skalara ϕ w punktach leżących poza węzłem w obszarze rozciągającym się od danego węzła w kierunku przepływu. Funkcja interpolacyjna winna się więc opierać przede wszystkim na węzłach leżących na kierunku przepływu, lecz *pod prąd* bilansowanego strumienia. Stąd też modyfikacja funkcji kształtu, uwzględniająca przedstawione zjawisko, nosi nazwę *upwinding*.

W niniejszej pracy wielkość ϕ była interpolowana w układzie współrzędnych o początku umieszczonym w środku ciężkości elementu oraz skierowanym zgodnie z kierunkiem przepływającego płynu, a konkretnie zgodnie z kierunkiem uśrednionego wektora prędkości o składowych:

$$u_{av} = (u_1 + u_2 + u_3)/3, \quad v_{av} = (v_1 + v_2 + v_3)/3 \tag{2.25}$$

Oznaczając nowy układ współrzędnych jako XOY można zapisać funkcję interpolacyjną jako [29]:

$$\phi = A\xi + BY + C \tag{2.26}$$

gdzie

$$\xi = \frac{\Gamma_\phi}{\rho U_{av}} \left\{ \exp\left[\frac{Pe_\Delta (X - X_{max})}{X_{max} - X_{min}} \right] - 1 \right\} \tag{2.27}$$

W powyższych równaniach U_{av} oznacza wartość uśrednionego wektora prędkości, Pe_Δ natomiast lokalną liczbę Pecleta zdefiniowaną jako:

$$Pe_\Delta = \rho U_{av} \frac{X_{max} - X_{min}}{\Gamma_\phi} \tag{2.28}$$

Stałe A, B, C wyznacza się na podstawie węzłowych wartości ϕ w analizowanym elemencie.

Przedstawiona procedura powoduje *wygięcie* funkcji w kierunku *pod prąd* przepływającego płynu, w stopniu uzależnionym od lokalnej wartości liczby Pecleta (2.28). Funkcja interpolacyjna (2.26) została skonstruowana, przy założeniu że wpływ członu źródłowego nie jest istotny. W przypadkach gdy człon źródłowy ma dominujące znaczenie, można uwzględnić go w funkcji interpolacyjnej [40].

Po zbilansowaniu strumienia $\mathbf{J}_\phi$ na każdej z utworzonych osłon kontrolnych otrzymuje się układ równań postaci:

$$\mathbf{A}(\mathbf{\Phi})\ \mathbf{\Phi} = \mathbf{B} \tag{2.29}$$

gdzie $\mathbf{A}(\mathbf{\Phi})$ oznacza macierz układu równań, $\mathbf{B}$ – wektor wyrazów wolnych, $\mathbf{\Phi}$ natomiast wektor poszukiwanych wartości ϕ. Jak widać, układ ten jest układem nieliniowym i wymaga rozwiązania iteracyjnego. Macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą niesymetryczną pasmową. Szerokość pasma zależy od sposobu numeracji węzłów siatki elementów skończonych.

W celu rozwiązania zagadnienia należy zastosować przedstawioną procedurę do równań bilansu pędu i ciągłości w celu wyznaczenia rozkładów prędkości i ciśnienia oraz do równania bilansu energii w celu wyznaczenia rozkładu temperatury. W równaniach tych brak jest równania opisującego ciśnienie. Pojawia się ono jedynie w postaci pierwszej pochodnej w równaniach bilansu pędu. Jest oczywiste, że jedynie poprawne przyjęcie rozkładu ciśnienia zaowocuje poprawnym rozkładem prędkości płynu, tj. spełniającym zarówno równanie ciągłości, jak i równanie bilansu pędu. Istnieją liczne metody rozwiązania takiego problemu. Pierwsza z nich, opracowana w 1972 roku przez Patankara i Spaldinga [39], nosi nazwę SIMPLE (**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for the **P**ressure-**L**inked **E**quation). Procedura ta doczekała się licznych modyfikacji, głównie zwiększających jej efektywność. Warto tu wspomnieć o algorytmach SIMPLER [38], SIMPLEC, SIMPLEX [70, 71], PISO [17], SIMPLET [45] czy MSIMPLER [75]. We wszystkich tych metodach wyznacza się korekty ciśnienia i prędkości, których uwzględnienie powoduje spełnienie zasady zachowania ilości substancji. W ostatnich latach został opracowany algorytm CLEAR (**C**oupled and **L**inked **E**quations **A**lgorithm **R**evised) [68], [69], w którym przez wyeliminowanie korygowania ciśnienia i prędkości w każdej iteracji przyspieszono znacznie zbieżność metody.

W niniejszej pracy przeprowadzono korekcję ciśnienia w sposób zbliżony do algorytmu SIMPLEC. Równania (2.8), (2.9) można rozwiązać wykorzystując wstępnie założone wartości ciśnienia. Otrzymana w ten sposób prędkość

nie spełnia równania ciągłości (2.10), jeżeli niepoprawnie założono ciśnienie. Niezgodność równania ciągłości może zatem być wykorzystana do określenia poprawek prędkości, na podstawie których można z kolei skorygować założony rozkład ciśnienia.

W sformułowaniach opartych na zmiennych ciśnienie-prędkość istnieje niebezpieczeństwo otrzymania niefizykalnych rozkładów ciśnienia, jeżeli zarówno prędkość, jak i ciśnienie interpoluje się podobnymi funkcjami. Rozkłady takie zwane są *rozkładami szachownicowymi* z uwagi na kształt otrzymanego pola ciśnienia. Można tego uniknąć przez zmniejszenie rzędu funkcji interpolacyjnej ciśnienia bądź interpolowanie ciśnienia na rzadszej siatce niż prędkość. Innym sposobem jest włączenie ciśnienia do funkcji interpolującej prędkość. W niniejszej pracy zastosowano pierwszy ze sposobów, tj. interpolowanie ciśnienia na dwukrotnie rozrzedzonej siatce w porównaniu z interpolacją prędkości i temperatury.

W wyniku zastosowania przedstawionej w zarysie metody otrzymuje się zdyskretyzowaną postać równań opisujących zjawisko:

- równanie bilansu pędu, kierunek osi x

$$\mathbf{C_u}\tilde{\mathbf{u}} + \lambda_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{B_1} \tag{2.30}$$

- równanie bilansu pędu, kierunek osi y

$$\mathbf{C_v}\tilde{\mathbf{v}} + \lambda_{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{B_2} \tag{2.31}$$

- równanie ciągłości

$$\mathbf{D_u}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{D_v}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{B_3} \tag{2.32}$$

- równanie bilansu energii (bez źródeł ciepła)

$$\mathbf{C_T}\mathbf{T} = \mathbf{B_4} \tag{2.33}$$

W powyższych równaniach $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ oznaczają wektory węzłowych wartości składowych prędkości u oraz v, $\tilde{\mathbf{p}}$ wektor węzłowych wartości ciśnienia p, a $\mathbf{T}$ jest wektorem węzłowych wartości temperatury. $\mathbf{C_u}, \mathbf{C_v}, \mathbf{C_T}, \mathbf{D_u}, \mathbf{D_v}, \lambda_{\mathbf{u}}, \lambda_{\mathbf{v}}$ są to macierze utworzone w czasie bilansowania metodą CVFEM, natomiast niezerowe elementy wektorów $\mathbf{B_1} \div \mathbf{B_4}$ ujmują warunki brzegowe i źródła. Równania (2.30)-(2.33) tworzą pełny, zdyskretyzowany układ równań opisujący rozkłady temperatury i prędkości w konwekcyjnej wymianie ciepła. Jak można zauważyć, elementy macierzy $\mathbf{C_u}$ oraz $\mathbf{C_v}$ są funkcjami składowych wektora prędkości $\mathbf{u}$, co powoduje nieliniowość układu równań. Wynika stąd, że układy równań (2.30) oraz (2.31) powinny być rozwiązywane iteracyjnie. Jedną z metod zapewnienia stabilności procesu iteracyjnego jest zastosowanie podrelaksacji. Wyniki otrzymywane w kolejnych iteracjach należy wtedy przyjmować ze współczynnikiem podrelaksacji zależnym od stopnia nieliniowości. Uwzględniając ponadto dodatkowe iteracje związane z korekcją ciśnienia, cały układ (2.30)-(2.33) rozwiązuje się w kilku zagnieżdżonych pętlach. Procedura iteracyjna może być przedstawiona w następujących krokach:

1. przyjęcie startowych wartości wektorów prędkości $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ i ciśnienia $\tilde{\mathbf{p}}$;
2. wyznaczenie macierzy $\mathbf{C_u}, \mathbf{C_v}$;
3. rozwiązanie układów równań (2.30) oraz (2.31);
4. korekta wartości $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ i ponowne obliczenia wg 2. aż do uzyskania zbieżności;
5. korekta ciśnienia przy wykorzystaniu (2.32);
6. powtórka kroków 2-5 aż do uzyskania zbieżności;
7. obliczenia pola temperatury wg (2.33).

Warunki brzegowe

Rozwiązanie zagadnienia wymaga oczywiście poprawnego zdefiniowania warunków brzegowych. Liczba zakładanych warunków zależy od geometrii układu. Zarówno zdefiniowanie zbyt małej ilości informacji na brzegu, jak i przesztywnienie układu prowadzi do rozwiązań niefizykalnych bądź do utraty zbieżności metody.

Równanie bilansu energii. W przypadku równania bilansu energii definiowanie warunków brzegowych nie stanowi większych trudności. Postępuje się tu podobnie jak w przypadku zagadnień przewodzenia ciepła zakładając warunki pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju. Jedyne problemy mogą się pojawić przy wypływie. Najczęściej pomija się w tym przypadku składnik dyfuzyjny bilansowanego strumienia. Przy takim założeniu warunek brzegowy przyjmuje postać:

$$\mathbf{J}_{\phi n} = \rho \mathbf{u}_n \phi \tag{2.34}$$

gdzie w przypadku równania bilansu energii ϕ oznacza temperaturę, $\mathbf{u}_n$ wektor prędkości normalnej do krawędzi brzegowej.

Równanie potencjału. Przy badaniu przepływów potencjalnych określenie pola prędkości wymaga zdefiniowania warunków brzegowych przy dopływach do analizowanego obszaru, przy wypływach z niego oraz na ścianach ograniczających, które mogą być ścianami fizycznymi bądź też osiami symetrii.

Przy dopływach do obszaru należy zdefiniować prędkość płynu bądź masowe czy też objętościowe natężenie przepływu. We wszystkich przypadkach

przekłada się to na określenie normalnego strumienia potencjału na tych brzegach:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_n = 0 \tag{2.35}$$

gdzie φ oznacza potencjał, u_n natomiast prędkość normalną.

Z uwagi na cechy przepływu potencjalnego, zarówno na fizycznych ścianach ograniczających przepływ, jak i na osiach symetrii należy zdefiniować izolację strumienia potencjału:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{2.36}$$

Przy wypływie z obszaru należy natomiast podać poziom potencjału:

$$\varphi = G \tag{2.37}$$

gdzie G oznacza dowolną stałą. Z uwagi na fakt, iż w analizie zjawiska istotne są jedynie pochodne potencjału, wartość stałej nie ma znaczenia. Warunek (2.37) można zastąpić warunkiem trzeciego rozdzaju przyjmując odpowiednio wysoki współczynnik wnikania.

Równania bilansu pędu. Równania bilansu pędu sprawiają najwięcej trudności przy definiowaniu warunków brzegowych. Jak już wspomniano, niepoprawne zdefiniowanie warunków brzegowych może być przyczyną utraty zbieżności rozwiązania iteracyjnego.

W przypadku równań bilansu pędu należy zdefiniować:

- na ścianach kanału zerowe wartości składowych prędkości u oraz v, z uwagi na niezerową lepkość płynu;
- na osiach symetrii izolację strumienia $\mathbf{J}_{\phi n}$:

$$\mathbf{J}_{\phi n} = 0 \tag{2.38}$$

- przy wypływie natomiast warunek swobodnego wypływu typu

$$\mathbf{J}_{\phi n} = \rho \mathbf{u}_n \phi \tag{2.39}$$

Warunek swobodnego wypływu dla równań bilansu pędu (2.39) powinien być ponadto uzupełniony dodatkowymi informacjami, których ilość uzależniona jest od geometrii układu. I tak, w przypadku pojedynczego dopływu i pojedynczego wypływu można zdefiniować jeden z warunków:

- prędkość masową (dopływ lub wypływ), lub
- pochodną normalną ciśnienia przy dopływie, lub
- pochodną normalną ciśnienia przy wypływie (w przypadku prostych odcinków wypływowych wystarczy znajomość ciśnienia w dwóch określonych punktach odcinka wypływowego. Dobór tych punktów jest w zasadzie dowolny, powinny one mieć jednak różne współrzędne wzdłuż osi kanału).

W przypadku występowania jednego dopływu i dwóch wypływów liczba koniecznych informacji brzegowych powinna być zwiększona. Należy zdefiniować dwie dowolne wielkości z poniższej listy, dotyczące jednak różnych profili:

- prędkość masową przy dopływie;
- prędkość masową przy pierwszym wypływie;
- prędkość masową przy drugim wypływie;
- pochodną normalną ciśnienia przy pierwszym wypływie;
- pochodną normalną ciśnienia przy drugim wypływie;
- pochodną normalną ciśnienia przy dopływie.

W przypadku większej liczby wypływów liczba koniecznych warunków brzegowych powinna być odpowiednio zwiększona.

Ponadto przy dopływie powinna być znana funkcja rozkładu prędkości wzdłuż krawędzi brzegowej (np. wyrównana prędkość przy dopływie, profil paraboliczny lub inne).

2.1.2. Weryfikacja modelu numerycznego

Analiza wiarygodności kodu coraz powszechniej uznawana jest za integralną część budowy modeli i kodów symulacji komputerowych [2]. Świadczy o tym, między innymi, fakt, iż wiele konferencji czy sympozjów poświęconych problemom symulacji komputerowych ma wydzielone sesje w całości poświęcone problemom weryfikacji i walidacji (ang. *Verification & Validation*). W potocznym znaczeniu słowa *weryfikacja* oraz *walidacja* są synonimami, jakkolwiek w analizie wiarygodności nabywają odrębnych znaczeń. Przez weryfikację rozumie się ocenę poprawności rozwiązania numerycznego danego modelu; związana jest ona z matematyczną stroną problemu. Z kolei walidacja bliższa jest fizyce zjawiska i służy do określenia relacji wyników modelowania z danymi eksperymentalnymi [43]. Krótko mówiąc, walidacja może być traktowana jako ocena poprawności doboru równań opisujących analizowane zjawisko, podczas gdy weryfikacja jako ocena poprawności rozwiązania tych równań.

Etap weryfikacji składa się z dwóch głównych elementów:

- weryfikacji kodu,
- weryfikacji rozwiązania.

Weryfikacja kodu to proces mający na celu upewnienie się, iż zarówno kod, jak i zaprogramowany algorytm nie zawierają błędów (ang. *bugs*). Weryfikacja rozwiązania obejmuję ocenę wielkości i zachowania błędów numerycznych

będących naturalną konsekwencją modelowania numerycznego. Źródło tych błędów tkwi w błędach zaokrągleń, błędach narastających czy też błędach dyskretyzacji. Weryfikacja kodu powinna być przeprowadzona tylko raz dla danego kodu, podczas gdy weryfikacja rozwiązania winna być przeprowadzana w zasadzie dla każdej symulacji.

Jest oczywiste, iż etap weryfikacji i walidacji stanowi bardzo czasochłonny i kosztowny etap modelowania numerycznego, jednak trudno wyobrazić sobie praktyczną aplikację kodu, który nie został poddany procedurom V&V, szczególnie w takich zastosowaniach, jak np. kontrola lotów, elektrowni jądrowych czy też systemy sterowania broni jądrowej.

W niniejszej pracy, opracowany kod komputerowy poddano uproszczonej analizie poprawności. Weryfikacji dokonano przy wykorzystaniu komercyjnych pakietów MSC Patran/Thermal oraz CFD Fluent, zakładając, iż te powszechnie znane i cenione na rynku produkty są poprawnie zweryfikowane zarówno przez twórców, jak i szerokie rzesze użytkowników. Oceny kodu dokonano przez rozwiązanie identycznych zadań bezpośrednich transportu ciepła i masy, porównując otrzymane rozkłady prędkości, ciśnienia i temperatury. Ponadto przeprowadzono serię obliczeń przy zmiennej gęstości siatki numerycznej porównując przebieg zmian dokładności obliczeń. We wszystkich przypadkach wyniki symulacji przyniosły zadowalające rezultaty. Poniżej przedstawiono bardziej szczegółowo dwa z przeprowadzonych testów.

Pakiet FEM MSC Patran/Thermal ukierunkowany jest, w obliczeniach cieplnych, na analizę problemów przewodzenia ciepła. Wprawdzie można definiować w nim przepływ tłokowy, jednak praktyczne zastosowanie znajduje on głównie w zadaniach dyfuzyjnych. Z tego też powodu w celach porównawczych przeprowadzono obliczenia przewodzenia ciepła: raz przy wykorzystaniu weryfikowanego oprogramowania, raz przy użyciu pakietu Patran/Thermal. Obliczenia przeprowadzono dla geometrii pokazanej na rysunku 2.2, zakładając różne warunki brzegowe. I tak, na brzegu A założono izolację cieplną, na powierzchniach B warunek Dirichleta, podczas gdy na powierzchni C warunek Neumana. Rysunki 2.4 oraz 2.5 przedstawiają rozkład bezwymiarowej temperatury Θ wyznaczonej przy wykorzystaniu Patrana i weryfikowanego kodu. Temperatura bezwymiarowa zdefiniowana została w następujący sposób:

$$\Theta = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}}$$

gdzie T_{min} oznacza minimalną temperaturę w obszarze obliczeniowym, T_{max} zaś temperaturę maksymalną.

Podczas weryfikacji członu konwekcyjnego obliczenia przeprowadzono dla geometrii pokazanej na rysunku 2.3. Przy dopływie zdefiniowano prędkość normalną, zakładając jednocześnie, iż składowa styczna jest pomijalnie mała. Wzdłuż przekroju wypływowego założono rozwiniętą konwekcję, podczas gdy ściany górna i dolna są ścianami symetrii. Na powierzchni rury ze względu na lepkość występuje zerowa prędkość płynu. Założono ponadto pierwszy warunek brzegowy zarówno w przypadku temperatury płynu dopływającego do obszaru, jak i na powierzchni rury. Przyjęto stałą temperaturę na powierzchni rury równą T_p i równomierną temperaturę płynu na wlocie równą T_n. Obliczenia przeprowadzono dla liczby Reynoldsa równej 500. Wyniki obliczeń bezwymiarowego pola prędkości przedstawiono na rysunkach 2.7 i 2.6, zaś bezwymiarowego pola temperatury na rysunkach 2.9 oraz 2.8.

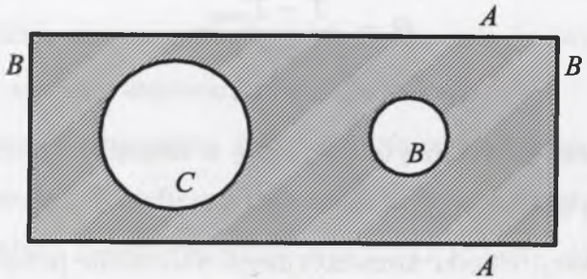
Bezwymiarową temperaturę zdefiniowano w następujący sposób:

$$\Theta = \frac{T - T_n}{T_p - T_n} \tag{2.40}$$

gdzie T_n oznacza temperaturę płynu przy dopływie, T_p natomiast temperaturę na powierzchni rury. Bezwymiarową prędkość opisuje formuła:

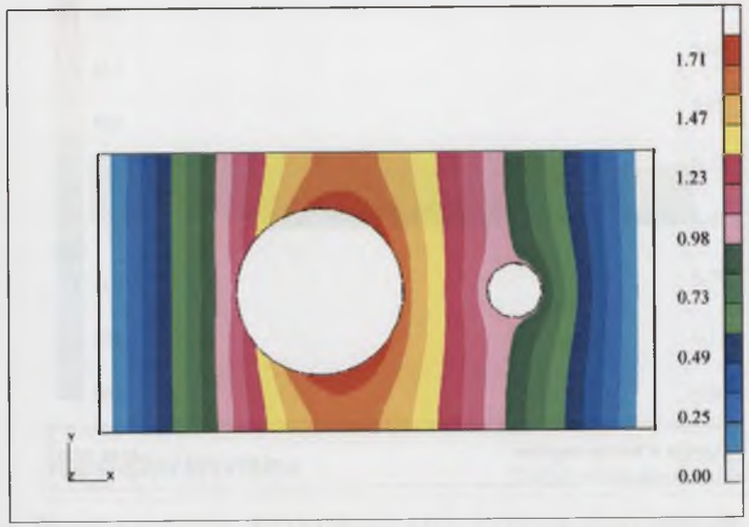
$$\tilde{U} = \frac{u}{u_n} \tag{2.41}$$

gdzie u_n oznacza wartość składowej normalnej wektora prędkości przy dopływie do kanału.

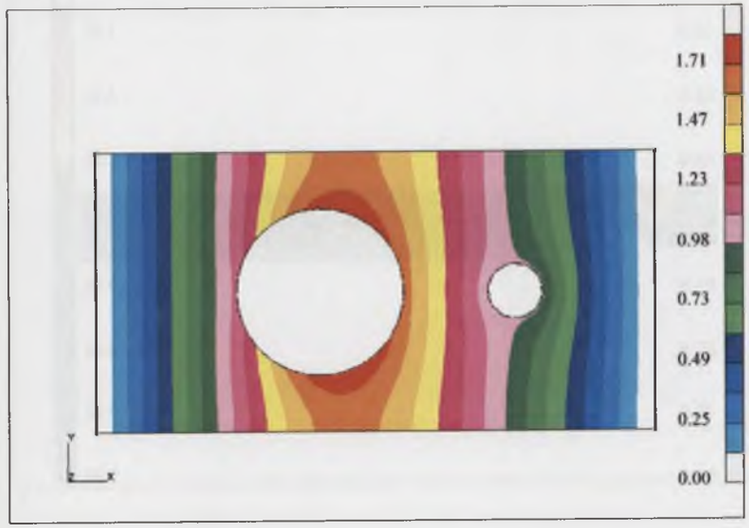


Rys. 2.2. *Szkic analizowanej geometrii zadania dyfuzyjnego*
Fig. 2.2. *Geometry of considered diffusion problem*

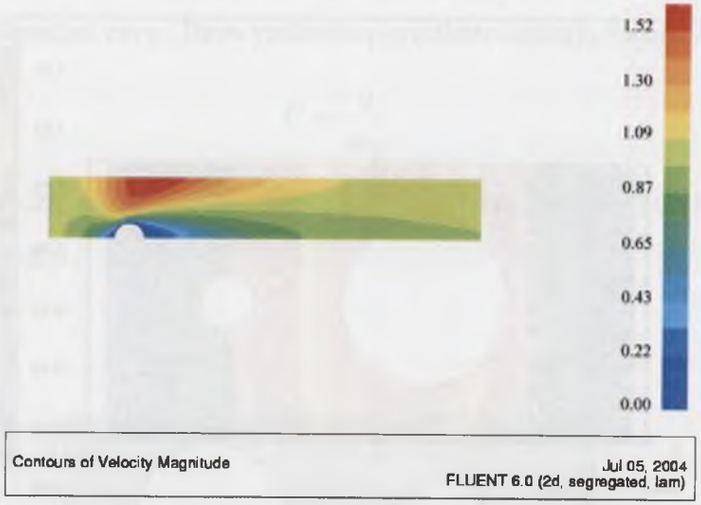
Rys. 2.3. *Szkic analizowanej geometrii zagadnienia konwekcyjno-dyfuzyjnego*
Fig. 2.3. *Geometry of considered convection-diffusion problem*



Rys. 2.4. *Rozwiązanie zagadnienia dyfuzyjnego, rozkład temperatury bezwymiarowej* $\Theta = (T - T_{min})/(T_{max} - T_{min})$, *Patran*
Fig. 2.4. *Patran solution of considered diffusion problem*

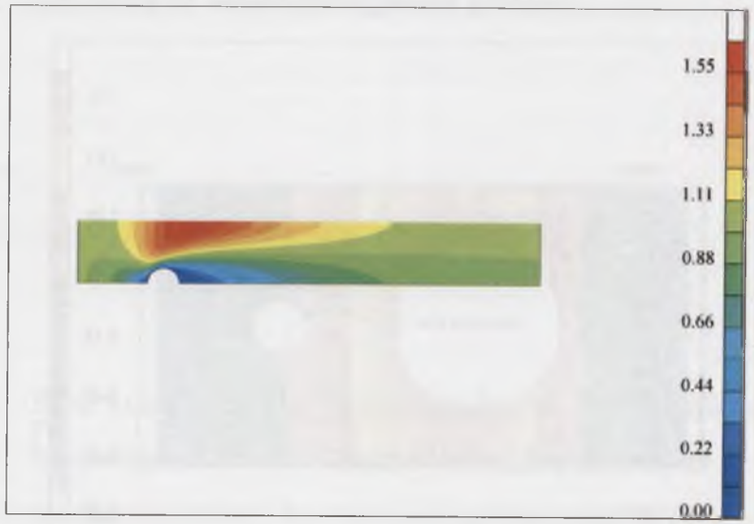


Rys. 2.5. *Rozwiązanie zagadnienia dyfuzyjnego, rozkład temperatury bezwymiarowej* $\Theta = (T - T_{min})/(T_{max} - T_{min})$, *CVFEM*
Fig. 2.5. *CVFEM solution of considered diffusion problem*



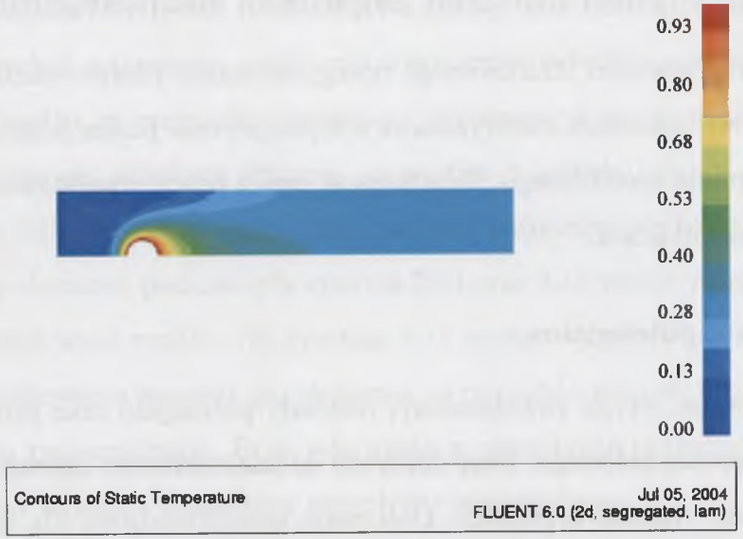
Rys. 2.6. *Przykładowy rozkład pola prędkości bezwymiarowej* $\tilde{U} = u/u_n$, *Fluent*

Fig. 2.6. *Exemplary distribution of dimensionless velocity, Fluent solution*



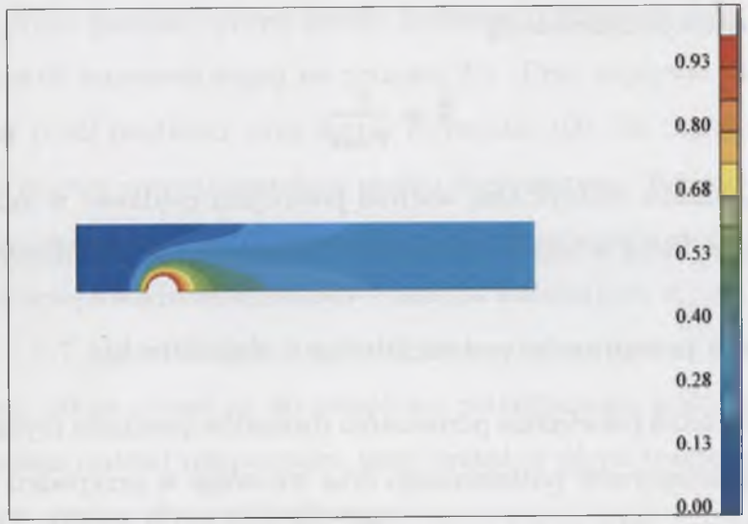
Rys. 2.7. *Przykładowy rozkład pola prędkości bezwymiarowej* $\tilde{U} = u/u_n$, *CVFEM*

Fig. 2.7. *Exemplary distribution of dimensionless velocity, CVFEM solution*



Rys. 2.8. *Przykładowy rozkład pola temperatury, rozkład temperatury bezwymiarowej* $\Theta = (T - T_{min})/(T_{max} - T_{min})$, *Fluent*

Fig. 2.8. *Exemplary distribution of dimensionless temperature, Fluent solution*



Rys. 2.9. *Przykładowy rozkład pola temperatury, rozkład temperatury bezwymiarowej* $\Theta = (T - T_{min})/(T_{max} - T_{min})$, *CVFEM*

Fig. 2.9. *Exemplary distribution of dimensionless temperature, CVFEM solution*

2.1.3. Wyniki obliczeń zagadnień bezpośrednich

Przy wykorzystaniu zbudowanego oprogramowania przeprowadzono wielowariantowe obliczenia dwuwymiarowych przepływów potencjalnych oraz wirowych płynu nieściśliwego. W niniejszej części pracy przedstawiono wyniki wybranych obliczeń.

Przepływ potencjalny

Prezentowane wyniki przedstawiają rozkłady potencjału oraz prędkości dla opływu profilu kołowego. Przy dopływie do analizowanego obszaru założono wyrównany rozkład prędkości. Obliczenia przeprowadzono dla liczby Reynoldsa równej 25, przy czym za charakterystyczny wymiar liniowy przyjęto szerokość profilu dopływowego. Rysunki 2.10 oraz 2.11 przedstawiają rozkład bezwymiarowego potencjału $\tilde{\Phi}$ oraz bezwymiarowej prędkości $\tilde{U}$. Bezwymiarowa prędkość zdefiniowana jest wg zależności (2.41), podczas gdy bezwymiarowy potencjał zależnością:

$$\tilde{\Phi} = \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \tag{2.42}$$

gdzie φ_{max} określa maksymalną wartość potencjału prędkości w analizowanym obszarze, która w niniejszym przykładzie występuje przy dopływie.

Porównanie przepływów potencjalnego i nieściśliwego

Kolejne obliczenia poświęcono porównaniu rozkładów prędkości płynu nieściśliwego dla przepływów potencjalnego oraz wirowego w przypadku opływu profilu kołowego. Obliczenia przeprowadzono w geometrii przedstawionej na rysunku 2.3, dla liczby Reynoldsa równej 25, przy czym za charakterystyczny wymiar liniowy przyjęto szerokość profilu dopływowego. W obydwu przypadkach, tj. przepływów potencjalnego i wirowego, przy dopływie do kanału

założono wyrównany profil prędkości. Na górnej ścianie kanału, jak również na powierzchni opływanego profilu założono zerową składową normalną prędkości. Ponadto, w przypadku przepływu wirowego na powierzchniach tych założono zerową składową styczną, co wynika z lepkości płynu. Rysunki 2.12 oraz 2.13 przedstawiają rozkład wartości wektorów prędkości w analizowanych obszarze, podczas gdy rysunki 2.14 oraz 2.15 wektory prędkości w obszarze spływu z profilu. Na rysunku 2.15 można wyraźnie zaobserwować zjawisko oderwania warstwy przyściennej, co nie uwidacznia się w przypadku przepływu potencjalnego. Brak oderwania w przepływie potencjalnym jest oczywisty i wynika z charakteru przepływu potencjalnego.

Wpływ liczby Prandtla na rozkład temperatury przepływającego płynu w przypadku przepływów potencjalnego i nieściśliwego

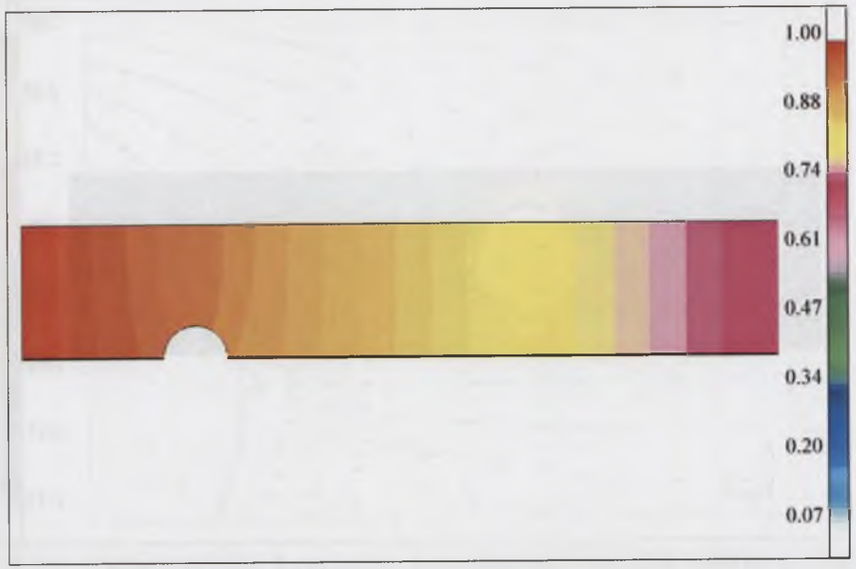
Na rysunku 2.16 przedstawiono wpływ liczby Prandtla na rozkład temperatury płynu podczas opływu profilu kołowego. Obliczenia przeprowadzono w geometrii zaprezentowanej na rysunku 2.3. Przy dopływie założono wyrównany profil prędkości, przy liczbie Reynoldsa 100. Za charakterystyczny wymiar liniowy przyjęto szerokość profilu dopływowego. Temperatura płynu przy dopływie wynosi 10 ^oC, temperatura na powierzchni rury zaś 30 ^oC. Obliczenia przeprowadzono dla liczby Prandtla zmieniającej się od Pr = 0.007 do Pr = 0.7. Dla każdej liczby Prandtla zamieszczono dwa rozkłady temperatury: górny odnosi się do przepływu potencjalnego, podczas gdy dolny przedstawia rozkład temperatury, jeżeli przepływ płynu traktowany jest jak przepływ wirowy płynu nieściśliwego.

Przepływ wirowy płynu nieściśliwego, lepkiego w kanale z ruchomymi profilami kołowymi

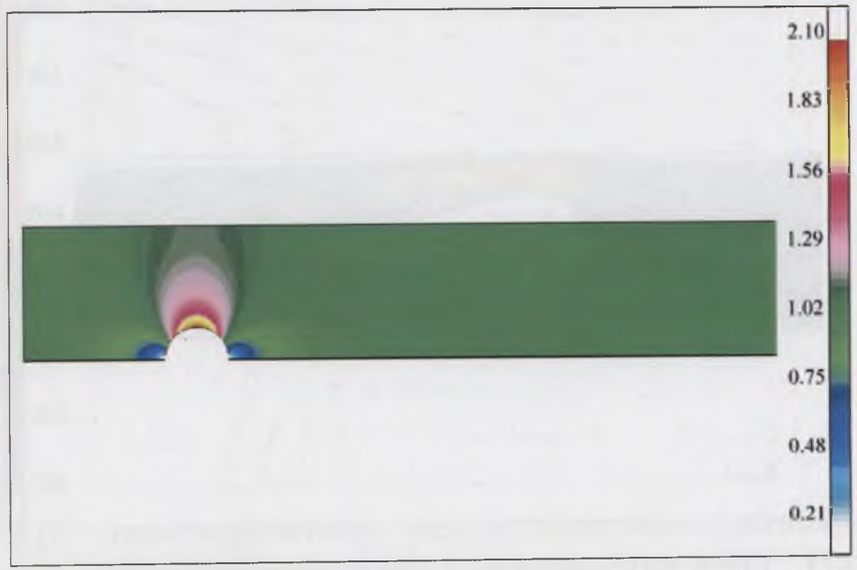
Przykład przedstawiony w niniejszym podrozdziale pracy jest pochodną problemu określanego mianem *driven cavity*. W tym przypadku nieściśliwy oraz lepki płyn pozostaje w obecności dwóch cylindrów obracających sie w przeciwnych kierunkach ze stałymi prędkościami kątowymi. Wskutek lepkości cząsteczki płynu znajdujące się w bezpośrenim kontakcie z cylindrami posiadają taką samą prędkość liniową jak ruchome powierzchnie. W efekcie w płynie powstaje przepływ. Zredukowane względem wartości poziomej oraz pionowej składowej wektorów prędkości zaprezentowano na rysunkach 2.17 oraz 2.18. Prędkości zredukowano według zależności:

$$\tilde{U}_{\{x,y\}} = \frac{u_{\{x,y\}}}{u_0} \tag{2.43}$$

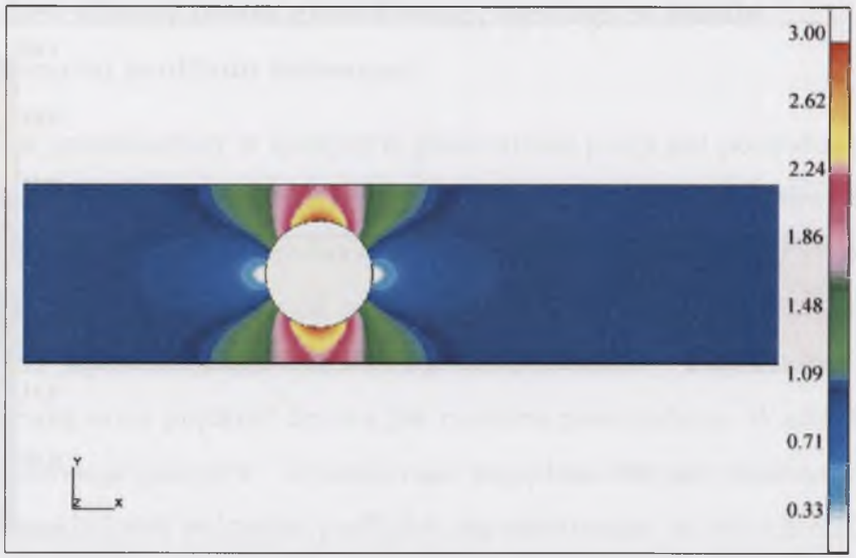
gdzie u_0 oznacza liniową prędkość powierzchni obracającego się walca. Obliczenia przeprowadzono dla liczby Reynoldsa równej Re = 100. Za charakterystyczny wymiar liniowy przyjęto średnicę walców.



Rys. 2.10. *Przykładowy rozkład bezwymiarowego potencjału prędkości* $\tilde{\Phi} = \varphi/\varphi_{max}$
Fig. 2.10. *Exemplary distribution of dimensionless velocity potential*

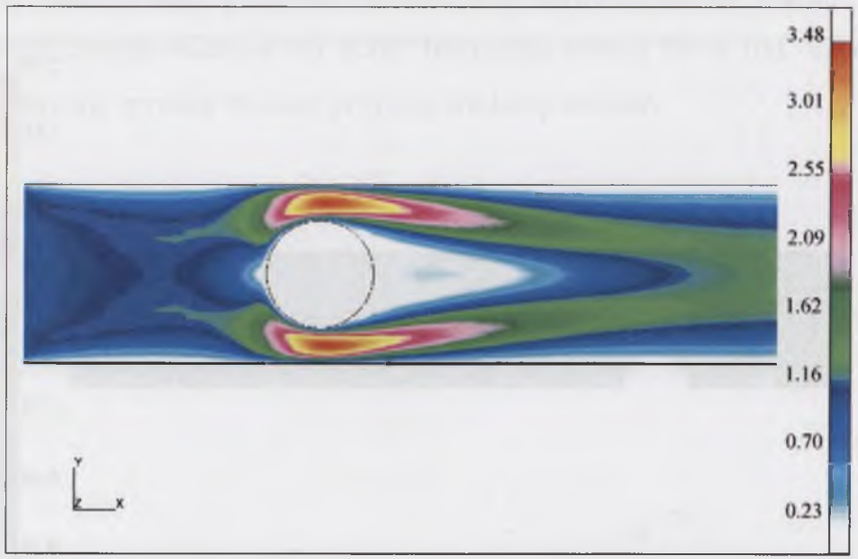


Rys. 2.11. *Przykładowy rozkład bezwymiarowej prędkości* $\tilde{U} = u/u_n$
Fig. 2.11. *Exemplary distribution of nondimensional velocity*



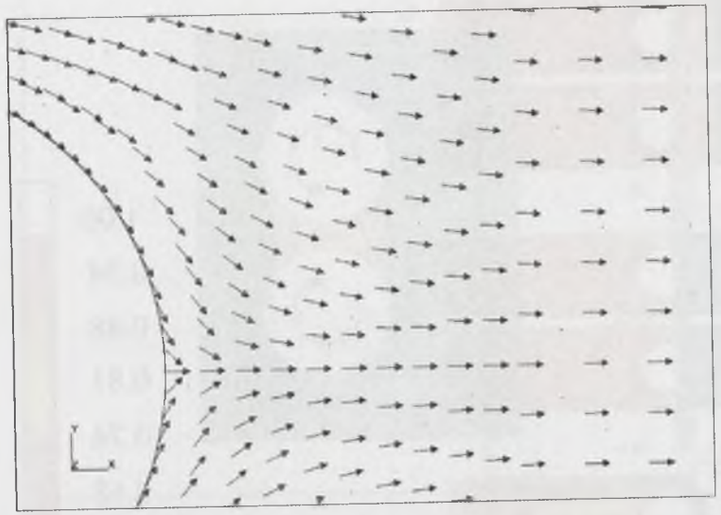
Rys. 2.12. *Opływ profilu kołowego, przepływ potencjalny, prędkość bezwymiarowa* $\bar{U} = u/u_n$

Fig. 2.12. *External flow around the circular profile, potential flow, dimensionless velocity magnitude*



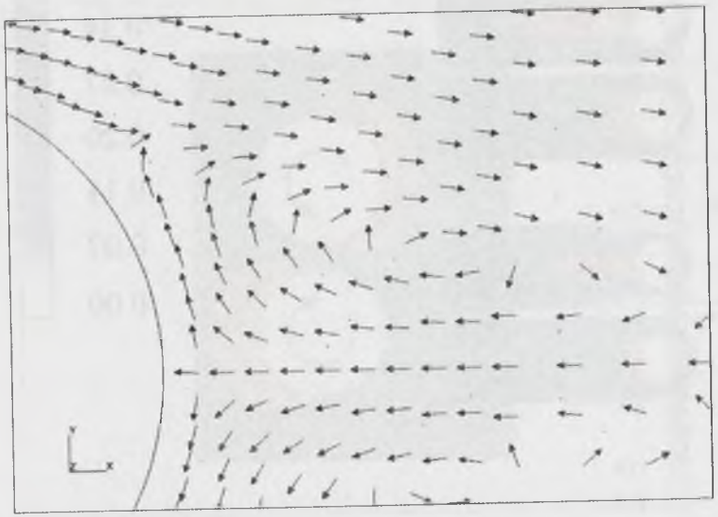
Rys. 2.13. *Opływ profilu kołowego, przepływ nieściśliwy, prędkość bezwymiarowa* $\bar{U} = u/u_n$

Fig. 2.13. *External flow around the circular profile, incompressible flow, dimensionless velocity magnitude*



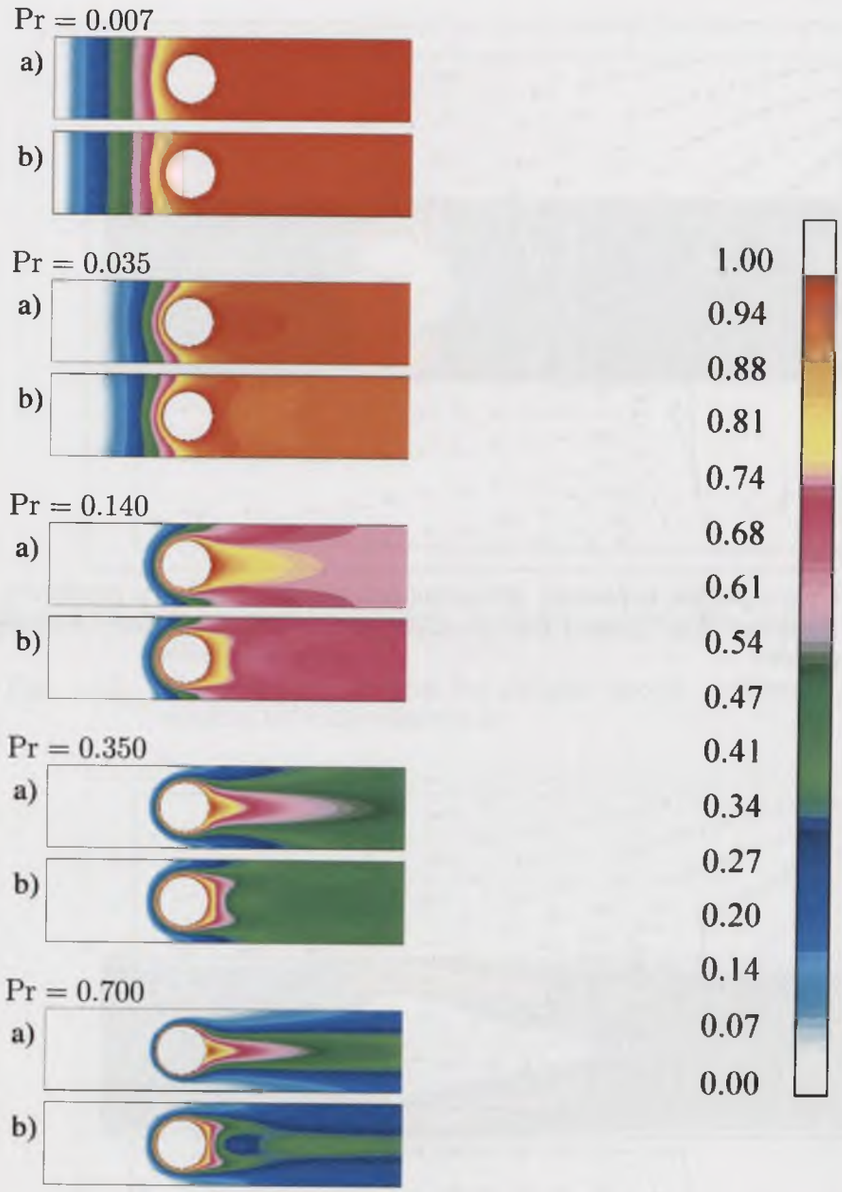
Rys. 2.14. *Opływ profilu kołowego, przepływ potencjalny, wektory prędkości*

Fig. 2.14. *External flow around the circular profile, potential flow, velocity vectors*



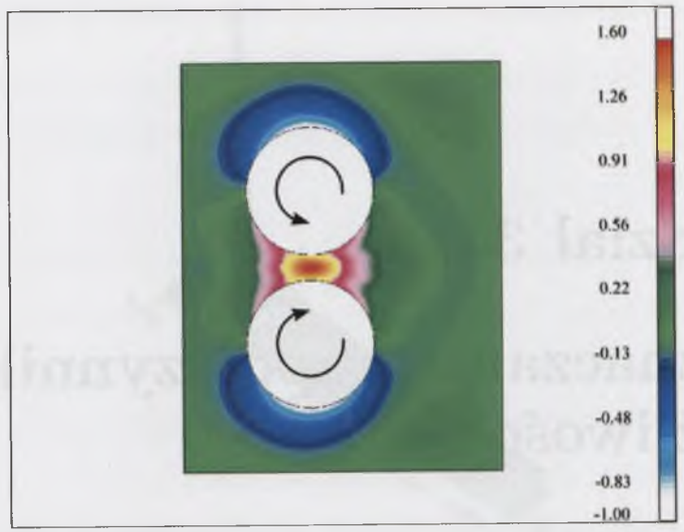
Rys. 2.15. *Opływ profilu kołowego, przepływ wirowy płynu nieściśliwego, wektory prędkości*

Fig. 2.15. *External flow around the circular profile, incompressible fluid flow, velocity vectors*



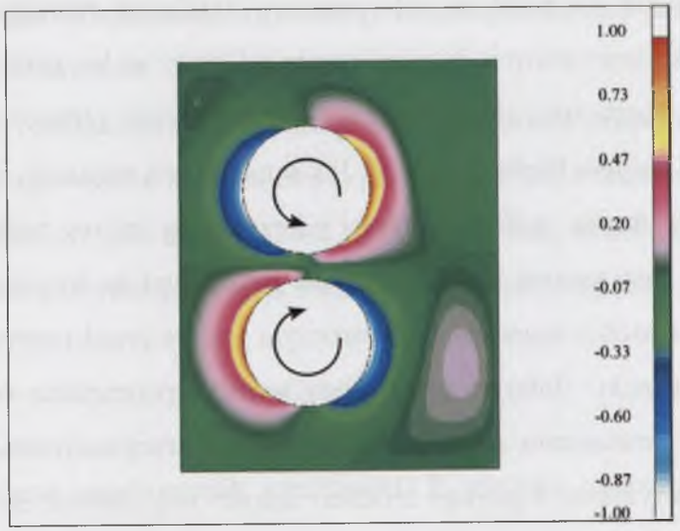
Rys. 2.16. *Wpływ liczby Prandtla na rozkład pola bezwymiarowej temperatury* $\Theta = (T - T_{min})/(T_{max} - T_{min})$; *a) przepływ potencjalny, b) przepływ płynu nieściśliwego, lepkiego*

Fig. 2.16. *The influence of the Prandtl number on the dimensionless temperature distribution; a) potential flow, b) incompressible fluid flow*



Rys. 2.17. *Przepływ płynu nieściśliwego w kanale z ruchomymi elementami, zredukowana składowa pozioma wektora prędkości,* $\bar{U}_x = u_x/u_0$, Re = 100

Fig. 2.17. *Driven cavity with rotating cylinders, horizontal component of velocity,* Re = 100



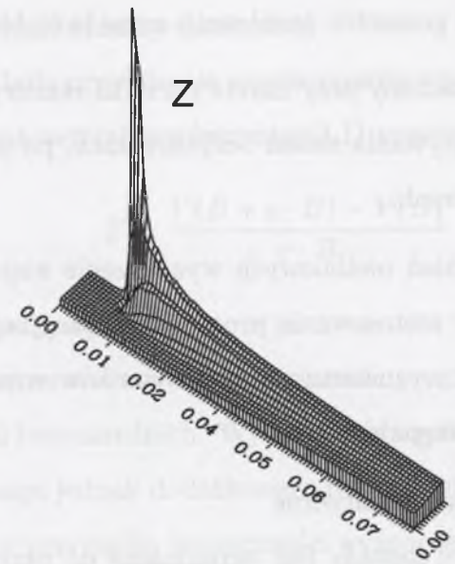
Rys. 2.18. *Przepływ płynu nieściśliwego w kanale z ruchomymi elementami, zredukowana składowa pionowa wektora prędkości,* $\bar{U}_y = u_y/u_0$, Re = 100

Fig. 2.18. *Driven cavity with rotating cylinders, vertical component of velocity,* Re = 100

Rozdział 3.

Wyznaczanie współczynników wrażliwości

Złe uwarunkowanie zagadnień odwrotnych wyklucza w większości przypadków zastosowanie klasycznych metod wykorzystywanych do rozwiązywania problemów bezpośrednich. Niezbędne się staje zatem zastosowanie dodatkowych zabiegów mających na celu poprawę stabilności rozwiązania. Wśród metod wykorzystywanych do rozwiązania tej grupy zadań chętnie stosowane są metody oparte na pojęciu *wpółczynnika wrażliwości* pierwotnie opracowanego przez Jamesa Becka [3, 4, 42]. Jak sama nazwa wskazuje, współczynnik wrażliwości określa czułość wielkości mierzonej na zmiany wielkości identyfikowanej. Tym samym rozkład wartości współczynnika wrażliwości zawiera szereg informacji o zagadnieniu odwrotnym jeszcze przed przystąpieniem do jego rozwiązania. Informacje te mogą wskazać potencjalne obszary trudności przy rozwiązaniu zadania odwrotnego lub zracjonalizować przeprowadzenie ekperymentu będącego źródłem danych wejściowych do rozwiązania pełnego zagadnienia odwrotnego. Jeżeli wartości współczynnika wrażliwości są niewielkie w całym analizowanym obszarze, bądź jego wartości są ze sobą skorelowane, rozwiązanie zagadnienia odwrotnego może się okazać nieosią-



Rys. 3.1. *Przykładowy rozkład wartości współczynnika wrażliwości*
Fig. 3.1. *Exemplary distribution of sensitivity coefficient*

galne. Z kolei rozkład wartości współczynnika wrażliwości wskazuje obszary najdogodniejsze do lokalizacji czujników pomiarowych, będących źródłem informacji wejściowych do zadania odwrotnego.

Przykładowy rozkład wartości współczynnika wrażliwości temperatury płynu względem brzegowego strumienia ciepła przy przepływie w kanale prostokątnym przedstawiony jest na rysunku 3.1. Współczynnik wrażliwości definiowany jest jako pierwsza pochodna wielkości mierzonej względem identyfikowanej:

$$Z = \frac{\partial Y}{\partial B} \tag{3.1}$$

gdzie Z oznacza współczynnik wrażliwości, Y wielkość mierzoną, B natomiast wielkość identyfikowaną.

Współczynnik wrażliwości (dla zagadnień odwrotnych liniowych, jak np. niektóre przypadki przewodzenia ciepła) ma następujące własności:

- nie jest funkcją wielkości poszukiwanej;

- zależy tylko od geometrii problemu i może być obliczany jednokrotnie;
- może być wyznaczany przy użyciu narzędzi numerycznych przeznaczonych do rozwiązywania zadań bezpośrednich, po przedefiniowaniu warunków brzegowych.

W przypadku zagadnień nieliniowych wyznaczenie współczynników wrażliwości może wymagać zastosowania procedury iteracyjnej.

Istnieje wiele metod wyznaczania współczynników wrażliwości. Warto tu wymienić metody następujące:

- przez rozwiązanie analityczne

  Zastosowanie tej metody jest ograniczone do przypadków, w których znane jest rozwiązanie analityczne zagadnienia bezpośredniego. Współczynnik wrażliwości wyznacza się tu przez różniczkowanie rozwiązania analitycznego względem identyfikowanej wielkości.

- przez zagadnienie brzegowe (lub początkowo-brzegowe dla przypadków nieustalonych)

  W tym podejściu układ równań opisujący zagadnienie bezpośrednie wraz z warunkami brzegowymi jest różniczkowany względem identyfikowanej wielkości. W przypadku zagadnień liniowych otrzymuje się równania identyczne jak opisujące zagadnienie bezpośrednie. Jak już wspomniano, można zatem użyć tego samego oprogramowania do jego wyznaczenia. W przypadku występowania nieliniowości struktura równań zmienia się. Użycie oprogramowania rozwiązującego zagadnienia bezpośrednie wymaga już więc dodatkowych zabiegów. Metoda ta, z uwagi na wiele zalet, została wykorzystana w niniejszej pracy.

- przez zastosowanie różnicy skończonej

  Metoda ta zakłada przybliżenie współczynnika wrażliwości różnicą skończoną. Dla oznaczeń jak w równaniu (3.1) przyjmuje się:

$$Z = \frac{Y(B + \varepsilon \cdot B) - Y(B)}{\varepsilon \cdot B} \tag{3.2}$$

  gdzie ε oznacza małą liczbę.

  W metodzie tej można wprost wykorzystać oprogramowanie do rozwiązywania zadań bezpośrednich. Wyznaczenie współczynnika wrażliwości tą drogą wymaga jednak dodatkowego rozwiązania zagadnienia bezpośredniego, co w przypadku konieczności wyznaczenia rozkładu wartości współczynnika wrażliwości dla zadań nieliniowych może się okazać bardzo czaso- i obliczeniochłonne. Ponadto pojawia się tu dodatkowy problem właściwego doboru liczby ε. Jak wiadomo, liczba to powinna być możliwie mała, jednak ze względu na dyskretny charakter rozwiązania numerycznego w każdym przypadku posiada swą optymalną wartość. Zbyt silne jej zmniejszenie spowoduje błędne rozwiązanie numeryczne. Dlatego też w każdym przypadku ε powinna być dobierana indywidualnie, co dodatkowo zwiększa koszt rozwiązania.

W niniejszej pracy wykorzystano metodę wyznaczania współczynników wrażliwości poprzez zagadnienie brzegowe, która polega na różniczkowaniu równań opisujących zagadnienie proste względem poszukiwanej wielkości brzegowej. W zagadnieniach liniowych z warunkami brzegowymi pierwszego lub drugiego rodzaju metoda ta pozwala na proste i szybkie wyznaczenie równań opisujących współczynniki wrażliwości. Co więcej, równania te mają budowę identyczną jak równania wyjściowe, co pozwala na korzystanie z tego samego narzędzia numerycznego, które służy do rozwiązywania zagadnienia bezpośredniego. Modyfikacji ulegają jedynie wartości warunków brzegowych.

W przypadku równań opisujących zjawisko konwekcyjnej wymiany ciepła, z uwagi na nieliniowość równań, wymagane są dodatkowe zabiegi, pozwalające zbliżyć strukturę otrzymanych równań do struktury równań wyjściowych.

3.1. Wyznaczanie współczynników wrażliwości - przepływ potencjalny

W przypadku zadania odwrotnego sformułowanego jak w niniejszej pracy oraz przy założeniu przepływu płynu jako potencjalnego konieczne jest zdefiniowanie dwóch rodzajów współczynników wrażliwości:

- wrażliwości temperatury względem normalnej składowej prędkości przy dopływie $\tilde{u}_n$:

$$Z_T = \partial T / \partial \tilde{u}_n, \tag{3.3}$$

oraz

- wrażliwości potencjału względem prędkości przy dopływie:

$$Z_\varphi = \partial \varphi / \partial \tilde{u}_n \tag{3.4}$$

Normalna składowa prędkości przy dopływie $\tilde{u}_n$, względem której przeprowadzone jest różniczkowanie, może być składową występującą w węźle, składową wyrównaną wzdłuż całego profilu dopływowego czy wreszcie funkcją prędkości rzeczywistej, w zależności od odtwarzanej wielkości.

Jak już wspomniano, w niniejszej pracy do wyznaczenia współczynników wrażliwości posłużono się metodą rozwiązania zagadnienia brzegowego, polegającą na zróżniczkowaniu równań opisujących zjawisko względem wielkości poszukiwanej.

W analizowanym przypadku różniczkowaniu poddano równanie (2.3), co prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial^2 (Z_T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (Z_T)}{\partial y^2} = \frac{\rho c}{k} \left(u_x \frac{\partial (Z_T)}{\partial x} + u_y \frac{\partial (Z_T)}{\partial y} \right) + S_A \tag{3.5}$$

W powyższym równaniu S_A jest członem źródłowym. Człon źródłowy S_A ma postać:

$$S_A = \frac{\rho c}{k} \left(-\frac{\partial Z_\varphi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Z_\varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{3.6}$$

Do obliczeń współczynników wrażliwości temperatury konieczna jest zatem znajomość współczynników wrażliwości potencjału.

Warunki brzegowe można łatwo określić przez różniczkowanie względem poszukiwanej prędkości brzegowej układu warunków brzegowych zadania bezpośredniego. I tak, dla geometrii przedstawionej na rysunku (2.3):

- dopływ

$$Z_T = 0 \tag{3.7}$$

- wypływ oraz osie symetrii

$$\partial Z_T / \partial n = 0 \tag{3.8}$$

- ściany

$$Z_T = 0 \tag{3.9}$$

Jak widać, równania (3.5) oraz (2.3) mają tę samą strukturę. Można więc, po przepisaniu kodu definiującego człon źródłowy, wykorzystać to samo oprogramowanie, które jest używane do rozwiązania zagadnienia bezpośredniego. Warunki brzegowe są jednorodne, co potwierdza, że analizowana procedura odwrotna może być stosowana jedynie do obszarów, w których człon źródłowy S_A osiąga niezerowe wartości. Tak się dzieje w przypadkach występowania niezerowego gradientu temperatury. Tak więc odtwarzanie prędkości

brzegowej na podstawie pomiarów temperatury wewnętrznej jest możliwe tylko w przepływach nieizotermicznych.

Zależność opisująca potencjałowy współczynnik wrażliwości Z_φ może być wyprowadzona poprzez różniczkowanie formuły (2.2) względem poszukiwanej prędkości u_i:

$$\nabla^2 Z_\varphi = 0 \tag{3.10}$$

Warunki brzegowe przedstawiają następujące równania:

- dopływ

$$\partial Z_\varphi / \partial n = 1 \tag{3.11}$$

- ściany

$$\partial Z_\varphi / \partial n = 0 \tag{3.12}$$

- wypływ

$$Z_\varphi = 0 \tag{3.13}$$

Jak można łatwo zauważyć, równania (2.2) oraz (3.10) mają identyczną budowę, różnią się jedynie warunkami brzegowymi. Mogą więc być rozwiązane tymi samymi narzędziami numerycznymi. Ponadto potencjałowy współczynnik wrażliwości jest funkcją tylko geometrii, nie musi więc być wyznaczany iteracyjnie. Fakty te znakomicie redukują koszty i czas rozwiązywania zagadnienia.

3.2. Wyznaczanie współczynników wrażliwości - przepływ wirowy płynu nieściśliwego

W przypadku przepływu wirowego płynu nieściśliwego opisanego równaniami Naviera-Stokesa procedura wyznaczania współczynników wrażliwości ulega znacznemu skomplikowaniu z uwagi na nieliniowość równań.

Różniczkowanie równania Fouriera-Kirchhoffa względem normalnej prędkości dopływowej prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial Z_T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial Z_T}{\partial y}\right) + S_A = \rho c\frac{\partial}{\partial x}(uZ_T) + \rho c\frac{\partial}{\partial y}(vZ_T) \tag{3.14}$$

gdzie

$$Z_T = \frac{\partial T}{\partial \tilde{u}_n} \tag{3.15}$$

jest współczynnikiem wrażliwości temperatury względem normalnej składowej prędkości przy dopływie. Normalna składowa prędkości przy dopływie $\tilde{u}_n$, względem której przeprowadzone jest różniczkowanie, może być składową występującą w węźle, składową wyrównaną wzdłuż profilu dopływowego lub wreszcie funkcją prędkości rzeczywistej, w zależności od odtwarzanej wielkości.

Człon S_A występujący w równaniu (3.14), powstały w efekcie nieliniowości równania F-K, może być przedstawiony w następującej formie:

$$S_A = \frac{\rho c}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_n}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}_n}\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{3.16}$$

Zarówno pola prędkości, jak i temperatury są funkcjami poszukiwanej wielkości $\tilde{u}_n$. Wartość S_A może więc zostać obliczona na podstawie wartości temperatury i prędkości pochodzącej z poprzedniej iteracji. W celu utrzymania struktury równania (3.14) w postaci podobnej do równania F-K, człon S_A należy potraktować jak człon źródłowy, co pozwoli na wykorzystanie oprogramowania używanego do rozwiązywania równania Fouriera-Kirchhoffa po uprzednim przedefiniowaniu członu źródłowego.

Pochodne cząstkowe $\partial u/\partial \tilde{u}_n$ oraz $\partial v/\partial \tilde{u}_n$ występujące w równaniu (3.16) mogą być traktowane jak współczynniki wrażliwości składowych prędkości wewnętrznej względem składowej normalnej prędkości brzegowej:

$$Z_u = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_n} \tag{3.17}$$

$$Z_v = \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}_n} \tag{3.18}$$

Uwzględniając powyższe równania w równaniu (3.16) otrzymuje się następującą jego postać:

$$S_A = \frac{\rho c}{k}\left(Z_u \frac{\partial T}{\partial x} + Z_v \frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{3.19}$$

Równania opisujące współczynniki wrażliwości Z_u oraz Z_v można uzyskać przez różniczkowanie równań Naviera-Stokesa względem poszukiwanej wartości prędkości brzegowej:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uZ_u) + \frac{\partial}{\partial y}(vZ_u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_u}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{u}_n \partial x} - S_u \tag{3.20}$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x}(uZ_v) + \frac{\partial}{\partial y}(vZ_v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_v}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{u}_n \partial y} - S_v \tag{3.21}$$

Człony S_u oraz S_v powstały w wyniku nieliniowości równań Naviera-Stokesa i zostaną omówione w dalszej kolejności. Człony zawierające ciśnienie mogą być przedstawione następująco:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tilde{u}_n \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial \tilde{u}_n}\right) = \frac{\partial Z_p}{\partial x} \tag{3.22}$$

Podobnie można podejść do różniczki ciśnienia występującej w równaniu (3.21). Pojawia się tu nowa wielkość Z_p, która może być traktowana jak kolejny współczynnik wrażliwości: tym razem opisuje on wrażliwość ciśnienia na zmiany prędkości dopływowej:

$$Z_p = \frac{\partial p}{\partial \tilde{u}_n} \tag{3.23}$$

Wykorzystując definicję (3.23) w równaniach (3.20) oraz (3.21) można otrzymać:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uZ_u) + \frac{\partial}{\partial y}(vZ_u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_u}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial Z_p}{\partial x} - S_u \tag{3.24}$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x}(uZ_v) + \frac{\partial}{\partial y}(vZ_v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial Z_v}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial Z_p}{\partial y} - S_v \tag{3.25}$$

Jak można łatwo zauważyć, budowa równań (3.24) oraz (3.25) jest podobna do równań Fouriera-Kirchhoffa uzupełnionych dodatkowymi członami źródłowymi. Kilka słów komentarza wymaga traktowanie współczynników wrażliwości Z_p. Tak jak w przypadku ciśnienia nie istnieją równania opisujące rozkład tych współczynników. Ale w związku z faktem, że są one pochodnymi ciśnienia, równanie ciągłości (2.10) może być użyte do ich wyznaczenia. Różniczkowanie równania ciągłości prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial Z_u}{\partial x} + \frac{\partial Z_v}{\partial y} = 0 \tag{3.26}$$

Na podstawie twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego można pokazać, iż dla dowolnego, zamkniętego konturu S prawdą jest:

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{Z}\, \mathrm{d}S = 0 \tag{3.27}$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest jednostkowym wektorem normalnym, a $\mathbf{Z}$ wektorem wrażliwości o składowych (Z_u, Z_v).

Wykorzystując tę właściwość wektora $\mathbf{Z}$, można wyznaczyć współczynniki wrażliwości Z_p w sposób podobny do wyznaczenia ciśnienia. Współczynniki Z_u oraz Z_v spełniające równania (3.24) oraz (3.25) nie spełniają równania (3.27) dla niepoprawnych wartości Z_p. Wynika z tego, że równanie (3.26) może być wykorzystane do iteracyjnego wyznaczenia współczynników Z_p w sposób podobny do stosowanego w procedurach SIMPLE, SIMPLEC lub podobnych. Co więcej, z uwagi na fakt, iż współczynnik Z_p występuje w równaniach (3.24) oraz (3.25) jedynie w pierwszej pochodnej, procedura ta nie

wymaga żadnych warunków brzegowych na Z_p. Otrzyma się wówczas wartości Z_p z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej.

Dodatkowe człony źródłowe występujące w równaniach (3.24) oraz (3.25) są opisane równaniami:

$$S_u = \rho\left(Z_u\frac{\partial u}{\partial x} + Z_v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.28}$$

oraz

$$S_v = \rho\left(Z_u\frac{\partial v}{\partial x} + Z_v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{3.29}$$

Powyższe człony są funkcjami zarówno Z_u, jak i Z_v. Rozwiązanie układu wymaga zatem rozwiązywania wszystkich równań jednocześnie lub rozwiązania iteracyjnego, wykorzystującego wartości Z_u i Z_v pochodzące z wcześniejszych iteracji. Jak widać, mimo iż struktura równań (3.24) i (3.25) jest zbliżona do równań Fouriera-Kirchhoffa, konieczne jest zastosowanie procedury iteracyjnej. Pozwala to jednak na łatwe wykorzystanie oprogramowania służącego do rozwiązywania zagadnień bezpośrednich.

Warunki brzegowe można określić przez różniczkowanie względem poszukiwanej prędkości brzegowej układu warunków brzegowych zagadnienia bezpośredniego. I tak, dla geometrii przedstawionej na rysunku 2.3 warunki brzegowe równania (3.14) przedstawiają się następująco:

- dopływ

$$Z_T = 0 \tag{3.30}$$

- wypływ oraz osie symetrii

$$\partial Z_T/\partial n = 0 \tag{3.31}$$

- ściany

$$Z_T = 0 \tag{3.32}$$

Jak wynika z analizy warunków brzegowych, tylko w obszarach z niezerowym członem źródłowym S_A można oczekiwać niezerowych wartości współczynników wrażliwości Z_T. Postać członu źródłowego (3.16) wskazuje, iż sytuacja taka może wystąpić jedynie w obszarach z niezerowym gradientem temperatury.

Przed rozwiązaniem układu równań (3.24), (3.25) oraz (3.26) należy poprawnie zdefiniować warunki brzegowe, które najłatwiej otrzymać różniczkując warunki brzegowe bezpośredniego zagadnienia przepływowego względem identyfikowanej prędkości brzegowej.

Nieliniowość układu równań powoduje konieczność zastosowania procedury iteracyjnej przy jego rozwiązywaniu. Procedura ta może być przedstawiona w następujący sposób:

1. założenie wartości startowych Z_u,Z_v oraz Z_p;
2. wyznaczenie wartości członów źródłowych S_u oraz S_v przy użyciu równań (3.28) oraz (3.29);
3. wyznaczenie nowych wartości Z_u i Z_v - równania (3.24) oraz (3.25);
4. powrót do kroku 2. aż do uzyskania zbieżności Z_u i Z_v;
5. korekta rozkładu Z_p przy wykorzystaniu równania (3.27);
6. powrót do kroku 2. aż do uzyskania zbieżności Z_p;
7. obliczenia rozkładu współczynników Z_T wg równań (3.14), (3.16).

Jak można łatwo zauważyć, wyznaczenie rozkładu współczynnika wrażliwości jest w przypadku przepływów nieściśliwych znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku przepływów potencjalnych. Wiąże się to z charakterem przepływu płynu nieściśliwego oraz, co jest z tym związane, ze znacznie bardziej skomplikowanym opisem matematycznym zjawiska.

3.3. Wyniki obliczeń rozkładów wartości współczynnika wrażliwości

Wykorzystując przedstawione algorytmy dla przepływów potencjalnych i wirowych płynu nieściśliwego przeprowadzono następnie obliczenia współczynników wrażliwości dla różnych geometrii i różnych definicji poszukiwanego parametru. Obliczenia przeprowadzono zarówno dla przepływów potencjalnych, jak i przepływów wirowych płynu nieściśliwego opisanych równaniami Naviera-Stokesa. Jako wielkość identyfikowaną przyjmowano:

- wyrównaną prędkość normalną przy dopływie,
- średnią prędkość masową przy dopływie,
- węzłową wartość prędkości normalnej przy dopływie,
- parametr funkcji aproksymującej rozkład prędkości normalnej przy dopływie.

Wyniki obliczeń przedstawione są w kolejnych podrozdziałach pracy.

3.3.1. Przepływ potencjalny przy opływie profilu kołowego

Na rysunkach 3.2 oraz 3.3 przedstawione są rozkłady wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości temperatury względem prędkości brzegowej $\tilde{Z}_T$ dla płynu przepływającego z tak niewielką prędkością, iż przepływ ten można traktować jak potencjalny. Przedstawione wartości odniesiono do maksymalnej wartości współczynnika występującej w analizowanym obszarze:

$$\tilde{Z}_i = \frac{Z_i}{Z_i^{max}}, \quad i = \{T, u, v\} \tag{3.33}$$

Rys. 3.2. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_T$ *w przypadku potencjalnego przepływu płynu,* Re = 0.1

Fig. 3.2. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_T$ *for the Reynolds number* Re = 0.1

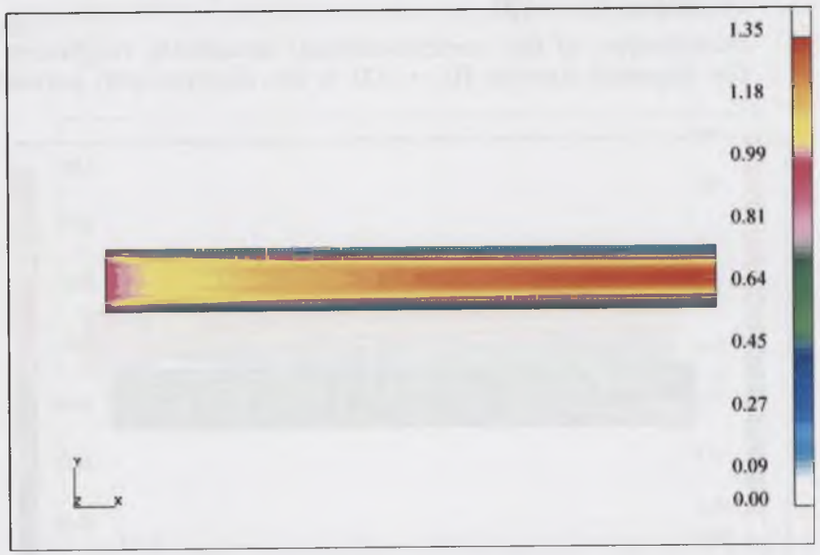
Rys. 3.3. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_T$ *w przypadku potencjalnego przepływu płynu,* Re = 1.0

Fig. 3.3. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_T$ *for the Reynolds number* Re = 1.0

Obliczenia przeprowadzono dla przypadku opływu profilu walcowego, w geometrii pokazanej na rysunku 2.3, przyjmując warunki brzegowe jak w rozdziale 2.1.2. niniejszej pracy. Założono dwie prędkości przepływu: rysunek 3.2 odpowiada liczbie Reynoldsa Re = 0.1, podczas gdy rysunek 3.3 przedstawia wyniki uzyskane dla Re = 1.0. Jako parametr identyfikowany przyjęto wyrównaną prędkość przy dopływie do analizowanego obszaru. Analizując przedstawione wyniki, można zauważyć, iż położenie obszaru zawierającego maksymalne wartości współczynnika wrażliwości, a więc obszaru dogodnego do umiejscowienia czujników pomiarowych, przesuwa się wraz ze zmianą liczby Reynoldsa. Ponadto obszar ten odsunięty jest od fragmentu brzegu, na którym dokonywana jest identyfikacja poszukiwanego parametru. Co więcej, wartości współczynnika wrażliwości dążą do zera w otoczeniu wspomnianego fragmentu brzegu. Oznacza to, że zbliżanie czujników pomiarowych do obszaru identyfikacji przyniesie w efekcie znaczne pogorszenie otrzymywanych rezultatów procedury odwrotnej. Zjawisko takie wynika z geometrii układu: identyfikowana prędkość położona jest *pod prąd* punktu, w którym występuje zaburzenie temperatury. Przy innych konfiguracjach, jak np. dla geometrii analizowanej w punkcie 3.3.2. pracy, zjawisko to już nie jest tak wyraźne.

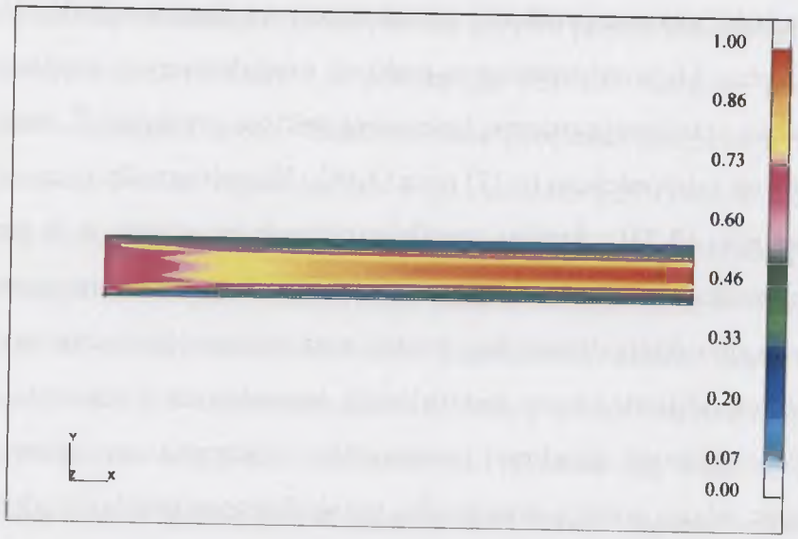
3.3.2. Przepływ wirowy płynu nieściśliwego w kanale równoległościennym

Na rysunkach 3.4, 3.5 oraz 3.6 zestawiono rozkłady zredukowanej prędkości i zredukowanych współczynników wrażliwości dla przepływu płynu opisanego równaniami Naviera-Stokesa w kanale równoległościennym dla liczby Reynoldsa Re = 500. Na dopływie do kanału założono wyrównaną prędkość, wskutek czego wzdłuż drogi przepływu rozwija się paraboliczny profil prędkości. Można to zaobserwować na rysunku 3.4, gdzie zaprezentowano rozkład wartości wektora prędkości zredukowanej wg formuły (2.41). Na rysunkach 3.5 oraz 3.6 przedstawione są rozkłady zredukowanych współczynników wrażliwości składowej poziomej i pionowej wektora prędkości $\bar{Z}_u$ oraz $\bar{Z}_v$ zdefiniowanych zależnościami (3.17) oraz (3.18). Współczynniki te zredukowano wg zależności (3.33). Analiza wyników pozwala zauważyć, iż w przypadku współczynnika wrażliwości składowej zgodnej z kierunkiem przepływu $\bar{Z}_u$ nie następuje charakterystyczne *wygaszanie* wartości współczynnika wrażliwości. Za fakt ten odpowiedzialny jest składnik konwekcyjny strumienia. Współczynnik wrażliwości składowej prostopadłej do kierunku przepływu wygasa natomiast wraz z rozwijaniem profilu parabolicznego prędkości płynu.



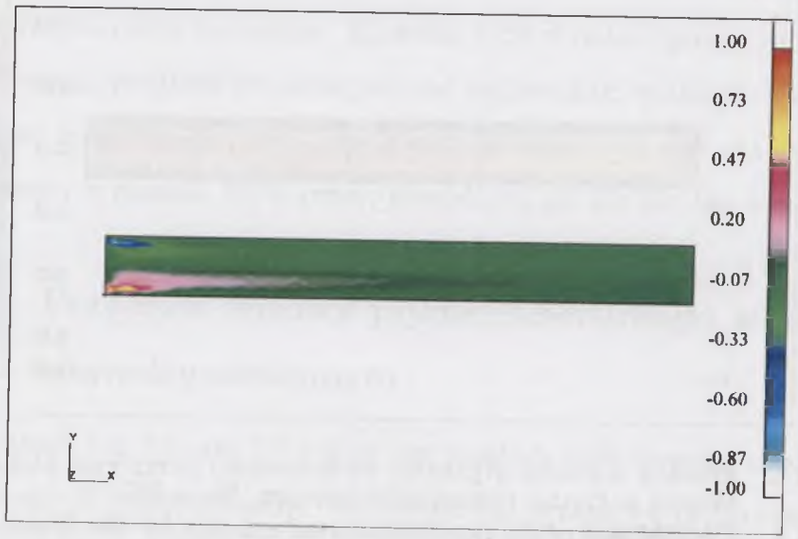
Rys. 3.4. *Rozkład wartości prędkości zredukowanej przepływu płynu nieściśliwego w kanale równoległościennym,* Re = 500

Fig. 3.4. *Distribution of the nondimensional velocity for the Reynolds number* Re = 500 *in the channel with parallel walls*



Rys. 3.5. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_u$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego w kanale równoległościennym,* Re = 500

Fig. 3.5. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_u$ *for the Reynolds number* Re = 500 *in the channel with parallel walls*



Rys. 3.6. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_v$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego w kanale równoległościennym,* Re = 500

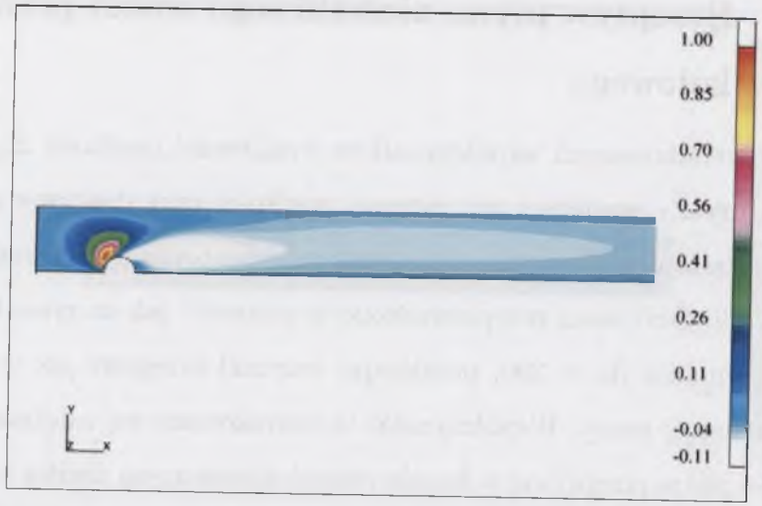
Fig. 3.6. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_v$ *for the Reynolds number* Re = 500 *in the parallel channel*

3.3.3. Przepływ płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego

Rozkład zredukowanych współczynników wrażliwości prędkości $\tilde{Z}_u$, $\tilde{Z}_v$ oraz temperatury $\tilde{Z}_T$ względem wyrównanej prędkości przy dopływie dla płynu nieściśliwego opływającego profil kołowy zaprezentowano na rysunkach 3.7, 3.8 oraz 3.9. Obliczenia przeprowadzono w geometrii jak na rysunku 2.3 dla liczby Reynoldsa Re = 200, przyjmując warunki brzegowe jak w rozdziale 2.1.2. niniejszej pracy. Współczynniki te zredukowano wg zależności (3.33). Podobnie jak w przepływie w kanale równoległościennym można zaobserwować brak wygaszania współczynnika wrażliwości składowej prędkości zgodnej z kierunkiem przepływu oraz zerowanie współczynnika składowej poprzecznej prędkości.

Rys. 3.7. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_u$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego,* Re = 200

Fig. 3.7. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_u$ *for the Reynolds number* Re = 200 *for the external flow around the circular profile*



Rys. 3.8. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_v$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego,* Re = 200

Fig. 3.8. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_v$ *for the Reynolds number* Re = 200 *for the external flow around the circular profile*

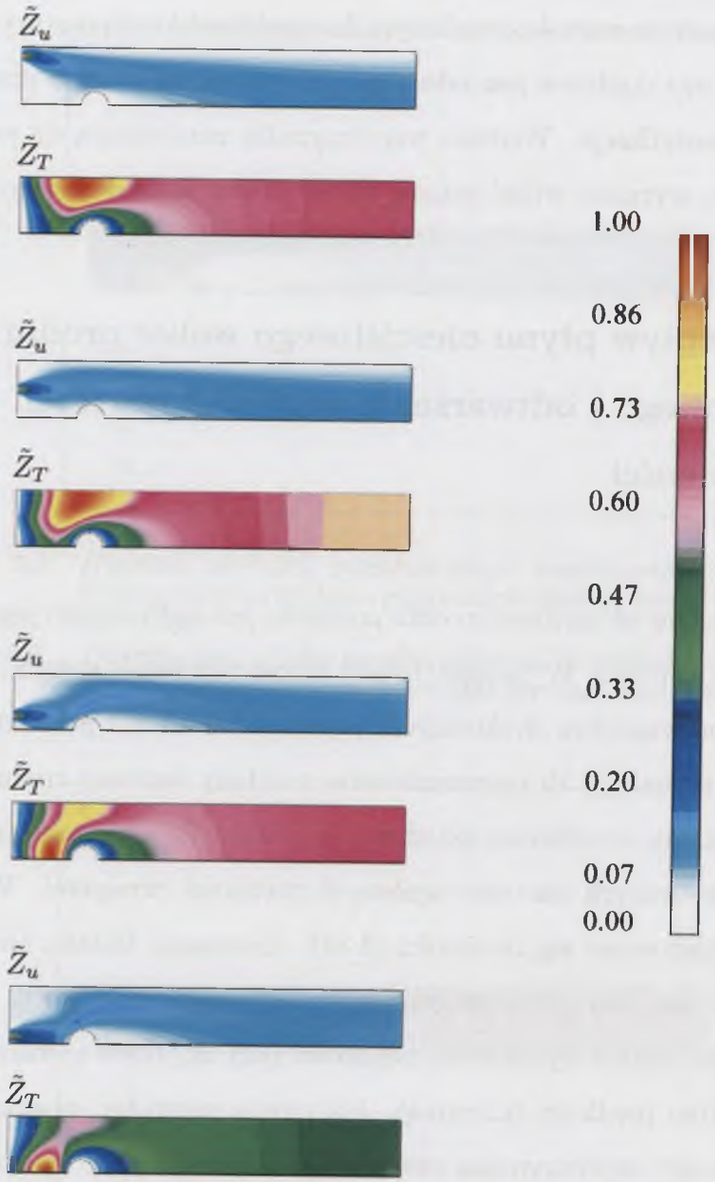
Rys. 3.9. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_T$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego,* Re = 200

Fig. 3.9. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_T$ *for the Reynolds number* Re = 200 *for the external flow around the circular profile*

Obszar maksymalnych wartości współczynnika wrażliwości temperatury względem prędkości przy dopływie jest odsunięty od brzegu, na którym przeprowadzana jest identyfikacja. Wartości współczynnika zmniejszają się wzdłuż drogi przepływu, wyraźnie widać jednak wpływ członu konwekcyjnego.

3.3.4. Przepływ płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego - odtwarzanie węzłowej wartości prędkości

Jednym ze sposobów identyfikacji profilu prędkości jest odtwarzanie jego zdyskretyzowanych wartości. W tym celu należy wyznaczyć współczynniki wrażliwości określone względem dyskretnych, węzłowych wartości poszukiwanej prędkości. Na rysunku 3.10 zaprezentowano rozkłady wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości składowej prędkości $\tilde{Z}_u$ oraz temperatury $\tilde{Z}_T$ względem wybranych wartości węzłowych prędkości brzegowej. Współczynniki te zredukowano wg zależności (3.33). Geometrię układu oraz warunki brzegowe przyjęto jak w podrozdziale 3.3.2. niniejszej pracy, z tym wyjątkiem, iż w miejsce wyrównanej prędkości przy dopływie założono paraboliczny rozkład prędkości brzegowej. Jak można zauważyć, obszar maksymalnych wartości współczynnika wrażliwości temperatury $\tilde{Z}_T$ zmienia swe położenie w funkcji położenia węzła, w którym identyfikowana jest prędkość, przy czym można również zaobserwować wyraźne odsunięcie tego obszaru od identyfikowanego odcinka brzegu.



Rys. 3.10. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości $\tilde{Z}_u$ oraz $\tilde{Z}_T$ w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego,* Re = 200, *identyfikacja wartości dyskretnej względem czterech wybranych węzłów*

Fig. 3.10. *Distribution of the nondimensional nodal sensitivity coefficient $\tilde{Z}_u$ and $\tilde{Z}_T$ for the Reynolds number* Re = 200 *for the external flow around the circular profile*

3.3.5. Przepływ płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego - odtwarzanie średniej prędkości masowej

Jednym ze sposobów definiowania warunków brzegowych równania bilansu pędu jest podanie średniej prędkości masowej płynu. Prędkość tę można zdefiniować następująco:

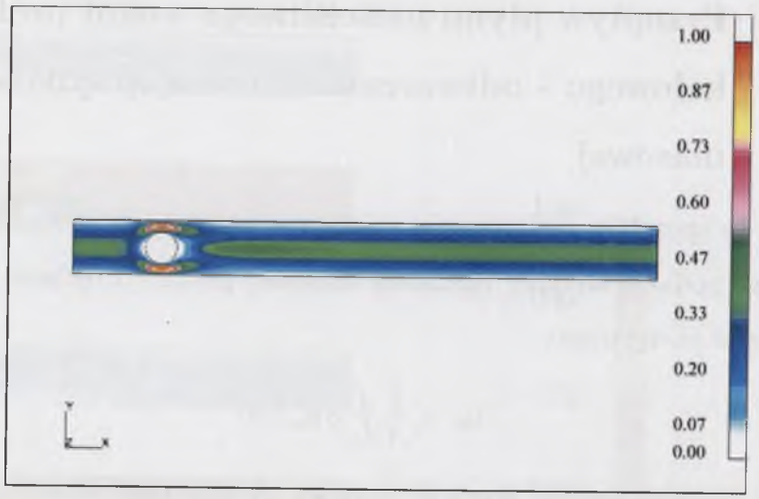
$$\bar{u}_n = \frac{1}{A}\int_A \rho\, u_n \,\mathrm{d}A \tag{3.34}$$

gdzie $\bar{u}_n$ oznacza średnią prędkość masową, A pole powierzchni profilu dopływowego, u_n normalną prędkość na dopływie, ρ zaś gęstość.

Jako warunek brzegowy, wielkość ta może być oczywiście celem procedury odwrotnej. Na rysunkach 3.11 oraz 3.12 przedstawiono rozkłady wartości zredukowanego wg formuły (3.33) współczynnika wrażliwości prędkości poziomej $\tilde{Z}_u$ oraz temperatury $\tilde{Z}_T$ względem prędkości masowej zdefiniowanej wg zależności (3.34). Geometrię oraz warunki brzegowe przyjęto jak w punkcie 3.3.2.

3.3.6. Przepływ płynu nieściśliwego wokół ruchomego profilu kołowego - odtwarzanie prędkości kątowej

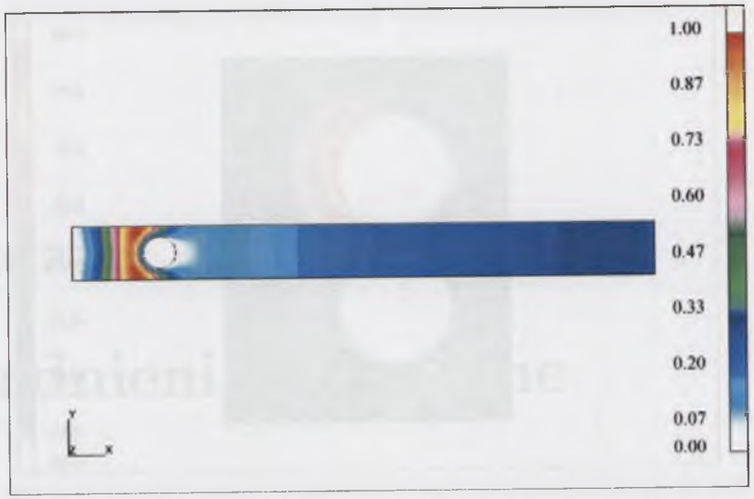
W analizowanym przykładzie nieściśliwy płyn znajduje sie w kanale prostokątnym, w którym umieszczono dwa ruchome profile kołowe, obracające się w przeciwnych kierunkach (górny zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) ze stałą prędkością kątową ω. Wskutek lepkości płynu, w płynie powstaje pole prędkości płynu. Warunki brzegowe zdefiniowano następu-



Rys. 3.11. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_u$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego,* Re = 200, *odtwarzanie prędkości masowej*

Fig. 3.11. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_u$ *for the Reynolds number* Re = 200 *for the external flow around the circular profile, calculated with respect to the mass velocity*

jąco: ściany górna i dolna kanału pozostawały zaizolowane, podczas gdy na ścianach lewej i prawej zdefiniowano warunek brzegowy pierwszego rodzaju. Na rysunkach 3.13, 3.14 oraz 3.15 przedstawiono rozkłady zredukowanych wg (3.33) współczynników wrażliwości $\tilde{Z}_u$, $\tilde{Z}_v$ oraz $\tilde{Z}_T$. Współczynniki wyznaczone zostały względem prędkości kątowej górnego cylindra. Obliczenia przeprowadzono dla liczby Reynoldsa Re = 100. Jak można zobserwować, obszary maksymalnych wartości współczynników nie są już tak wyraźnie odsunięte od identyfikowanych krawędzi brzegowych, jak miało to miejsce w przypadku kanałów przepływowych.



Rys. 3.12. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_T$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół profilu kołowego,* Re = 200, *odtwarzanie prędkości masowej*

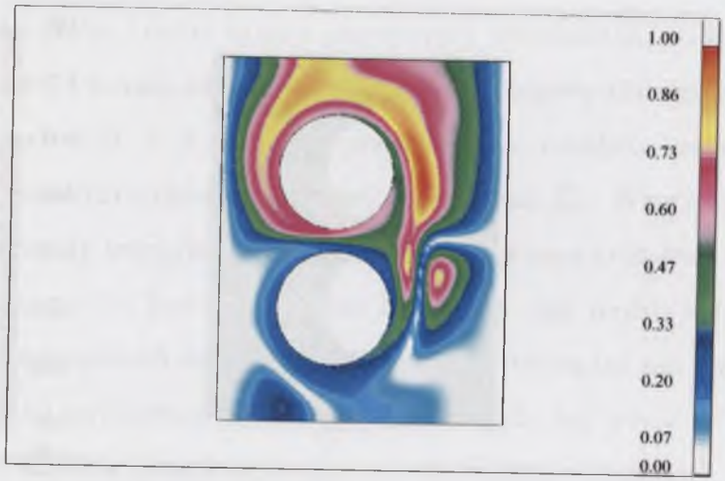
Fig. 3.12. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_T$ *for the Reynolds number* Re = 200 *for the external flow around the circular profile, calculated with respect to the mass velocity*

Rys. 3.13. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości* $\tilde{Z}_u$ *w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół ruchomego profilu kołowego,* Re = 100, *odtwarzanie prędkości masowej*

Fig. 3.13. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient* $\tilde{Z}_u$ *for the Reynolds number* Re = 100 *for the external flow around the rotating circular profile, calculated with respect to the rotational speed of profile*

Rys. 3.14. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości $\tilde{Z}_v$ w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół ruchomego profilu kołowego,* Re = 100, *odtwarzanie prędkości masowej*

Fig. 3.14. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient $\tilde{Z}_v$ for the Reynolds number* Re = 100 *for the external flow around the rotating circular profile, calculated with respect to the rotational speed of profile*



Rys. 3.15. *Rozkład wartości zredukowanego współczynnika wrażliwości $\tilde{Z}_T$ w przypadku przepływu płynu nieściśliwego wokół ruchomego profilu kołowego,* Re = 100, *odtwarzanie prędkości masowej*

Fig. 3.15. *Distribution of the nondimensional sensitivity coefficient $\tilde{Z}_T$ for the Reynolds number* Re = 100 *for the external flow around the rotating circular profile, calculated with respect to the rotational speed of profile*

Rozdział 4.

Zagadnienia odwrotne

Jak już wspomniano, zagadnienie odwrotne analizowane w niniejszej pracy zostało zdefiniowane jako **identyfikacja prędkości brzegowej na podstawie informacji o temperaturze przepływającego płynu wewnątrz analizowanego obszaru** [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65]. Do jego rozwiązania wykorzystano metodę współczynników wrażliwości. Definicje oraz sposób wyznaczania współczynników wrażliwości dla tak postawionego zadania odwrotnego zaprezentowano w rozdziale 3. niniejszej pracy.

Rozwiązanie pełnego zagadnienia odwrotnego sprowadza się do minimalizacji sumy kwadratów zdefiniowanej następująco:

$$S(\tilde{\mathbf{u}}_n) = \sum_{i=1}^{I} [Y_i - T_i(\tilde{\mathbf{u}}_n)]^2 \tag{4.1}$$

gdzie S oznacza sumę kwadratów błędów odtwarzanej funkcji, Y_i wartość temperatury zmierzonej przez sensor i, $\tilde{\mathbf{u}}_n$ jest wektorem poszukiwanych wartości składowych normalnych prędkości przy dopływie, $T_i(\tilde{\mathbf{u}}_n)$ wartość temperatury dla sensora i obliczoną dla aktualnej estymaty $\tilde{\mathbf{u}}_n$. Liczba sensorów jest równa I, natomiast wektor poszukiwanych wartości ma rozmiar N, przy czym $I \geq N$.

Równanie (4.1) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$S(\tilde{\mathbf{u}}_n) = [\mathbf{Y_i} - \mathbf{T_i}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n})]^\mathbf{T} [\mathbf{Y_i} - \mathbf{T_i}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n})] \tag{4.2}$$

gdzie indeks T oznacza transpozycję, a wektor $\mathbf{Y}$ zawiera wyniki pomiarów ze wszystkich czujników.

W celu określenia minimum normy S należy ją zróżniczkować względem poszukiwanych prędkości, a otrzymane różniczki przyrównać do zera:

$$\frac{\partial S(\tilde{\mathbf{u}}_n)}{\partial \tilde{u}_{n1}} = \frac{\partial S(\tilde{\mathbf{u}}_n)}{\partial \tilde{u}_{n2}} = \cdots = \frac{\partial S(\tilde{\mathbf{u}}_n)}{\partial \tilde{u}_{nN}} = 0 \tag{4.3}$$

co można przedstawić macierzowo:

$$\left[-\frac{\partial \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_n)}{\partial(\tilde{\mathbf{u}}_n)}\right]^T [\mathbf{Y_i} - \mathbf{T_i}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n})] = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

Pierwszy człon w powyższym równaniu jest *macierzą wrażliwości* (*Jakobianem*)

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}) = \left[\frac{\partial \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_n)}{\partial(\tilde{\mathbf{u}}_n)}\right] \tag{4.5}$$

i zawiera wartości współczynników wrażliwości temperatury względem identyfikowanej prędkości brzegowej Z_T (3.15) w miejscach lokalizacji czujników pomiarowych. Do ich wyznaczenia została wykorzystana procedura zaprezentowana w rozdziale 3. niniejszej pracy.

Wobec powyższego:

$$-2\mathbf{J}^T(\tilde{\mathbf{u}}_n)[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n})] = \mathbf{0} \tag{4.6}$$

Analizowany problem odwrotny jest problemem nieliniowym, wskutek czego elementy macierzy wrażliwości są funkcjami nieznanych wartości prędkości brzegowych $\tilde{\mathbf{u}}_n$. Z tego powodu rozwiązanie równania (4.6) wymaga procedury iteracyjnej. Jedną z dróg jest linearyzacja funkcji opisującej wektor temperatury $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n})$:

$$\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k}) + \mathbf{J}^\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k}) \tag{4.7}$$

Przedstawiona linearyzacja jest rozwinięciem w szereg Taylora temperatury $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n})$ wokół aktualnych w iteracji k wartości $\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k}$. Wyższe człony zostały pominięte. Uwzględniając (4.7) w (4.6) otrzymuje się:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^{\mathbf{k+1}} = \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k} + \left[\left(\mathbf{J}^\mathbf{k}\right)^\mathbf{T} \mathbf{J}^\mathbf{k}\right]^{-1} \left(\mathbf{J}^\mathbf{k}\right)^\mathbf{T} \left[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k})\right] \tag{4.8}$$

Opisana metoda iteracyjna jest metodą Gaussa-Newtona. Wadą opisanej metody Gaussa-Newtona jest jej duża wrażliwość na przybliżenie początkowe. Gdy wartość $\tilde{u}_n^0$ nie jest trafnie wybrana (co najczęściej ma miejsce w praktyce), metoda Gaussa-Newtona jest rozbieżna. W celu rozwiązania tego problemu w niniejszej pracy wykorzystano metodę Levenberga-Marquardta. Przy wykorzystaniu tej metody procedura iteracyjna zostaje zmodyfikowana do postaci:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^{\mathbf{k+1}} = \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k} + \left[\left(\mathbf{J}^\mathbf{k}\right)^\mathbf{T} \mathbf{J}^\mathbf{k} + \beta^\mathbf{k}\mathbf{\Omega}^\mathbf{k}\right]^{-1} \left(\mathbf{J}^\mathbf{k}\right)^\mathbf{T} \left[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{n}^\mathbf{k})\right] \tag{4.9}$$

gdzie β^k jest tzw. *parametrem tłumiącym*, a macierz $\mathbf{\Omega}^k$ macierzą diagonalną. Człon $\beta\Omega$ wprowadza się w celu zmniejszenia oscylacji i niestabilności spowodowanych złym uwarunkowaniem problemu. Klasyczna metoda Levenberga-Marquardta (L-M) jest kombinacją metody największego spadu i metody Gaussa-Newtona. Początkowo wartość parametru β^k jest większa i metoda L-M jest podobna do metody największego spadu zapewniającej niewrażliwość rozwiązania na przybliżenie początkowe. W dalszych iteracjach β^k jest zmniejszane i metoda L-M przechodzi w metodę Gaussa-Newtona zapewniającą szybką dokładność i zbieżność metody w pobliżu rozwiązania $\tilde{u}_n$ spełniającego warunek minimum (4.1).

Istnieje wiele odmian metody Levenberga-Marquardta różniących się między sobą doborem macierzy $\mathbf{\Omega}$. W niniejszej pracy macierz ta jest zdefiniowana następująco:

$$\mathbf{\Omega^k} = diag[(\mathbf{J^k})^{\mathbf{T}}(\mathbf{J^k})] \tag{4.10}$$

gdzie *diag* oznacza główną przekątną macierzy.

Przy wykorzystaniu powyższych zależności pełna procedura odwrotna może być przedstawiona następująco:

1. założenia startowej wartości wektora $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}$ oraz startowej wartości parametru tłumiącego β^k;
2. rozwiązanie bezpośredniego zagadnienia konwekcyjnego dla aktualnej estymaty $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}$ w celu określenia wektora temperatury $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}})$;
3. określenie sumy kwadratów odchyłek wg równania (4.1);
4. obliczenie pola współczynników wrażliwości Z_T wg procedury opisanej w rozdziale 3. niniejszego opracowania, a następnie określenie Jakobianu $\mathbf{J^k}$ oraz macierzy $\mathbf{\Omega}^k$ za pomocą (4.10);
5. rozwiązanie układu równań wynikającego z metody Levenberga-Marquardta:

$$\left[\left(\mathbf{J^k}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{J^k} + \beta^{\mathbf{k}}\mathbf{\Omega^k}\right]\mathbf{\Delta}\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{J^k}\right)^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}})\right] \tag{4.11}$$

   ze względu na $\mathbf{\Delta}\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}$;
6. obliczenie nowej estymaty $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}}$ jako:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}; \tag{4.12}$$

7. rozwiązanie zagadnienia prostego z nową estymatą $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}}$ w celu wyznaczenia $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}})$ oraz $S(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}})$;
8. jeżeli $S(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}}) \geq S(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}})$, zastąpienie β^k przez $10\beta^k$ i powrót do punktu 5.;

9. jeżeli $S(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}}) < S(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}})$, zaakceptowanie nowej estymaty $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}}$ oraz zastąpienie β^k przez $0.1\beta^k$;
10. jeżeli nie uzyskano zadowalającej zbieżności, zastąpienie k przez $k+1$ i powrót do punktu 4.

Jako kryterium zbieżności przyjmuje się [8]:

$$\begin{aligned} S(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}}) &\leq \varepsilon_1 \\ ||(\mathbf{J^k})^{\mathbf{T}}[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}})]|| &< \varepsilon_2 \\ ||\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k+1}} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}|| &< \varepsilon_3 \end{aligned} \tag{4.13}$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ oznaczają przyjęte dokładności.

4.1. Wyniki identyfikacji prędkości brzegowej

Wykorzystując przedstawiony algorytm identyfikacji prędkości brzegowej przeprowadzono obliczenia sprawdzające, których rezultaty są zaprezentowane w niniejszym rozdziale. Obliczenia wykonano dla przepływów potencjalnych oraz wirowych płynu nieściśliwego, opisanych równaniami Naviera-Stokesa. Identyfikowano zarówno wyrównaną prędkość dopływową, jak i profil prędkości.

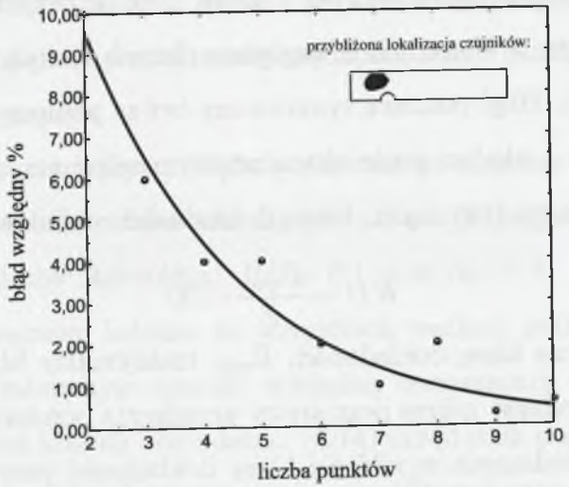
W celu pozyskania danych pomiarowych temperatury zastosowano powszechnie używany tzw. *eksperyment numeryczny* polegający na zastąpieniu rzeczywistych pomiarów wynikami rozwiązania zagadnienia bezpośredniego. Aby zasymulować rzeczywiste wyniki pomiarów, rozwiązanie zagadnienia bezpośredniego zostało zaburzone błędem pseudolosowym o rozkładzie normalnym. Spreparowane w ten sposób rezultaty rozwiązania zagadnienia bezpośredniego używane były następnie jako dane wejściowe do rozwiązania zagadnienia odwrotnego.

W kolejnych punktach pracy zaprezentowane są wyniki poszczególnych testów. Obliczenia przeprowadzono dla geometrii przedstawionej na rysunku 2.3. Jak już wspomniano, identyfikacja prędkości brzegowej w oparciu o pomiary temperatury możliwa jest tylko w obszarach, w których występuje zaburzenie temperatury (ogrzewanie lub ochładzanie płynu). W analizowanym obszarze płyn o znanej temperaturze opływa rurę grzejną, której zadanie polega na utworzeniu gradientu temperatury, a ponadto jej obecność wprowadza zaburzenie przepływu. Powierzchnie górna i dolna traktowane są jak osie symetrii, a więc powierzchnie izolujące zarówno dla równania bilansu energii, jak i pędu. Identyfikowano prędkość przy dopływie do kanału, zakładając ją jako wyrównaną w całym przekroju, następnie zaś jako funkcję położenia. Czujniki pomiarowe umieszczano w obszarach względnie dużych wartości współczynnika wrażliwości.

4.1.1. Wyniki identyfikacji wyrównanej prędkości przy dopływie - przepływ potencjalny

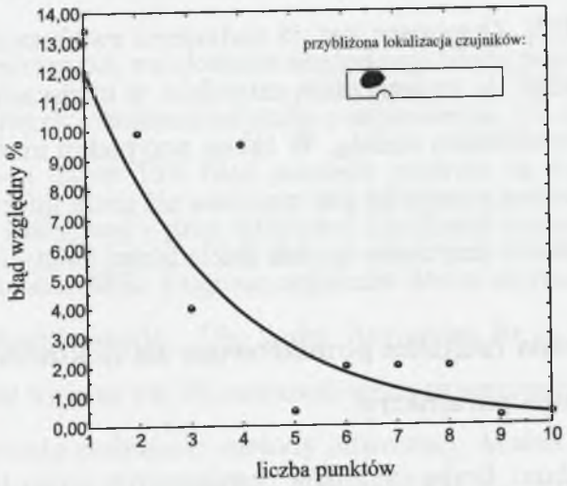
Wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność identyfikacji

Rysunki 4.1 oraz 4.2 przedstawiają wpływ liczby punktów pomiarowych na dokładność odtwarzanej wyrównanej prędkości dopływowej. Błąd względny odniesiono do wartości składowej normalnej prędkości przy dopływie przyjmowanej podczas eksperymentu numerycznego. Założono na tyle niewielką prędkość przy dopływie, aby przepływ płynu mógł być traktowany jak potencjalny; prędkości odpowiada bezwymiarowa liczba Reynoldsa Re = 1.



Rys. 4.1. *Wpływ liczby czujników pomiarowych na dokładność identyfikacji wyrównanej prędkości dopływowej,* Re = 1, *przepływ potencjalny, klasa dokładności przyrządu 5%*

Fig. 4.1. *The influence of the number of the measurement sensors on the estimation of uniform boundary velocity,* Re = 1, *potential flow, measuring accuracy 5%*



Rys. 4.2. *Wpływ liczby czujników pomiarowych na dokładność identyfikacji wyrównanej prędkości dopływowej,* Re = 1, *przepływ potencjalny, klasa dokładności przyrządu 10%*

Fig. 4.2. *The influence of the number of the measurement sensors on the estimation of uniform boundary velocity,* Re = 1, *potential flow, measuring accuracy 10%*

Liczba sensorów zmieniana była od 1 do 10. Jak już wspomniano, czujniki umieszczane były w obszarach o względnie dużych wartościach współczynnika wrażliwości. Błąd pomiaru symulowany był za pomocą generatora liczb pseudolosowych z błędem średniokwadratowym zależnym od klasy dokładności symulowanego przyrządu. Klasę dokładności zdefiniowano jako [11]:

$$KD = \frac{B_{max}}{Z} \cdot 100 \tag{4.14}$$

gdzie KD oznacza klasę dokładności, B_{max} maksymalny błąd bezwzględny pomiaru, Z natomiast zakres pomiarowy urządzenia pomiarowego.

Rysunek 4.1 przedstawia wyniki dla klasy dokładności przyrządu pomiarowego 5%, rysunek zaś 4.2 dla klasy 10%. Tak niskie dokładności przyrządów znacznie odbiegają od klasy przyrządów stosowanych w praktyce, przyjęto je jednak w celach testowych. Już od liczby sensorów równej 10 uzyskuje się wysokie dokładności identyfikowanej wielkości. Należy tu wspomnieć, iż zwiększanie liczby punktów pomiarowych nie zawsze musi zwiększać dokładność estymacji [22]. Oczywiste jest, iż nadmierne zwiększanie liczby pomiarów musi prowadzić do umieszczania czujników w miejscach, gdzie wartości współczynnika wrażliwości maleją. W takim przypadku może się zdarzyć, iż informacja pobierana z czujnika jest mniejsza niż szum informacyjny z niego płynący, co w efekcie przyniesie spadek dokładności identyfikacji.

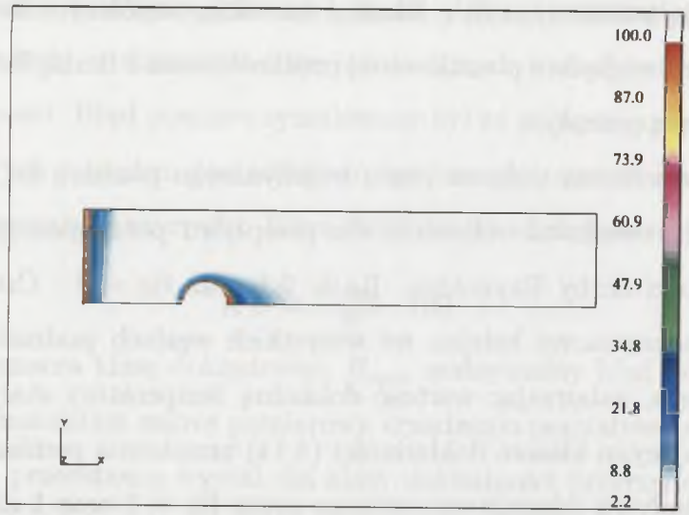
Wpływ położenia czujnika pomiarowego na dokładność identyfikowanego parametru

Jak już wspomniano, liczba czujników pomiarowych winna być nie mniejsza niż liczba odtwarzanych parametrów. W przypadku identyfikacji wyrównanej prędkości przy dopływie może więc być większa lub równa jedności. W niniejszej części pracy przeanalizowano, jak błąd pomiarowy pojedynczego pomiaru przenosi się na błąd identyfikacji. Oczywiście, jest to ściśle związane

z lokalizacją pomiaru, czyli z lokalną wartością współczynnika wrażliwości temperatury względem poszukiwanej prędkości, oraz z liczbą Reynoldsa charakteryzującą przepływ.

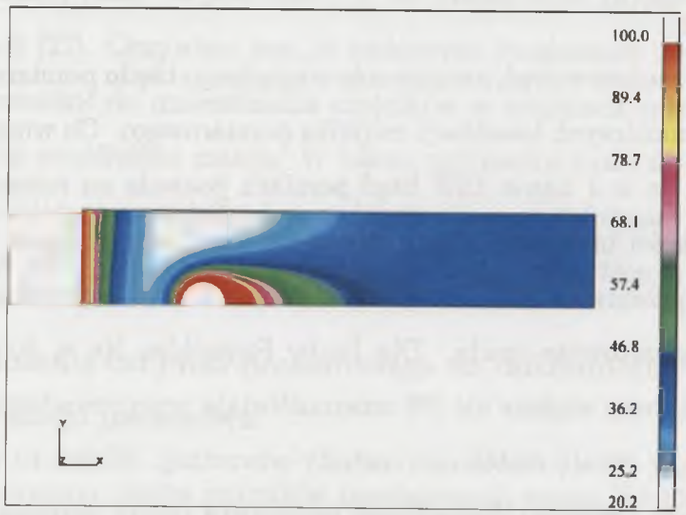
W celu sprawdzenia wpływu błędu pojedynczego pomiaru na błąd identyfikacji przeprowadzono obliczenia dla przepływu potencjalnego zakładając dwie wartości liczby Reynoldsa: Re = 0.1 oraz Re = 1. Czujnik pomiarowy zlokalizowanowo kolejno we wszystkich węzłach podziału numerycznego obszaru, zaburzając wartość dokładną temperatury stałymi błędami odpowiadającymi klasom dokładności (4.14) urządzenia pomiarowego 1, 10, 15 dla przepływu scharakteryzowanego przez Re = 1 oraz 1 dla przepływu Re = 0.1. Na rysunkach 4.3 – 4.6 przedstawiono mapy barwne obrazujące względny błąd wynikowy identyfikacji prędkości brzegowej dla danej lokalizacji pojedynczego pomiaru. Błąd względny odniesiono do wartości składowej normalnej prędkości przy dopływie przyjmowanej podczas eksperymentu numerycznego.

Jak można zaobserwować, zwiększanie względnego błędu pomiarowego zmniejsza obszar możliwych lokalizacji czujnika pomiarowego. Co więcej, dla liczby Reynoldsa Re = 1 nawet 15% błąd pomiaru pozwala na rozsądną identyfikację prędkości brzegowej - przy właściwej lokalizacji czujnika błąd odtwarzania nie przekracza 28%. Przy zmniejszaniu liczby Reynoldsa dokładność estymacji gwałtownie spada. Dla liczby Reynoldsa Re = 0.1 praktycznie błędy pomiarowe większe niż 1% uniemożliwiają przeprowadzenie identyfikacji powodując utratę stabilności metody odwrotnej. Można to wytłumaczyć dominującym udziałem dyfuzyjnego transportu ciepła podczas przepływów z tak niewielkimi prędkościami. Powinno się oczywiście pamiętać, iż w rzeczywistych pomiarach należy zwiększyć liczbę czujników pomiarowych, co zaowocuje zwiększeniem dokładności identyfikacji.



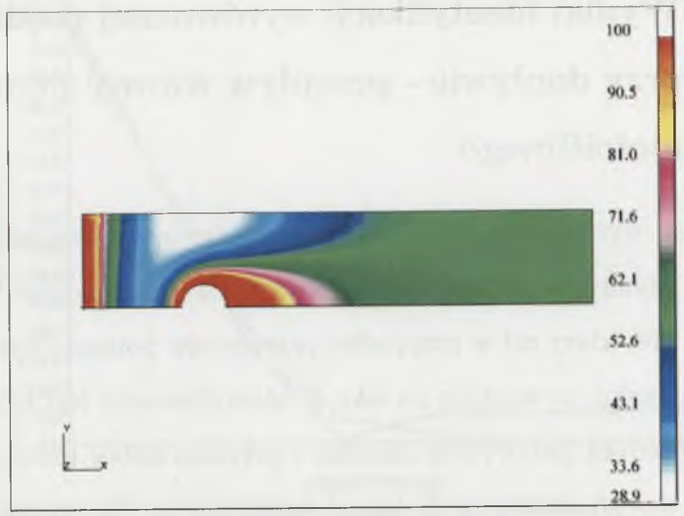
Rys. 4.3. *Wpływ lokalizacji czujnika pomiarowego na względny błąd identyfikowanej prędkości dopływowej, przepływ potencjalny,* Re = 1, *klasa dokładności 1%*

Fig. 4.3. *The influence of the measurement sensor location on the relative error of boundary velocity estimation, potential flow,* Re = 1, *measuring accuracy 1%*



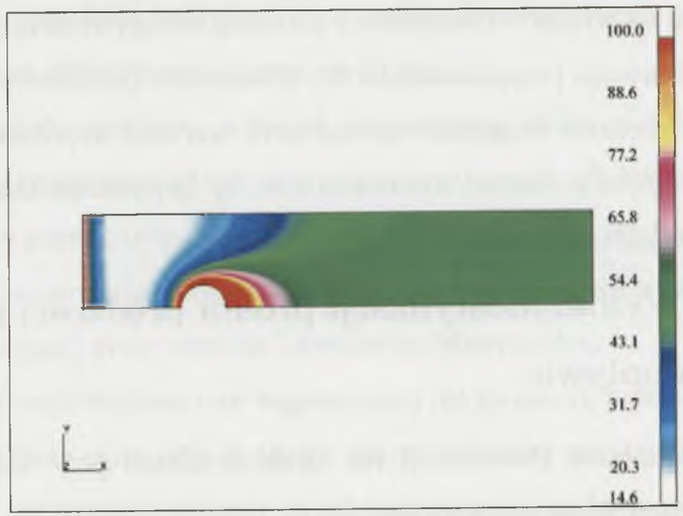
Rys. 4.4. *Wpływ lokalizacji czujnika pomiarowego na względny błąd identyfikowanej prędkości dopływowej, przepływ potencjalny,* Re = 1, *klasa dokładności 10%*

Fig. 4.4. *The influence of the measurement sensor location on the relative error of boundary velocity estimation, potential flow,* Re = 1, *measuring accuracy 10%*



Rys. 4.5. *Wpływ lokalizacji czujnika pomiarowego na względny błąd identyfikowanej prędkości dopływowej, przepływ potencjalny,* Re = 1, *klasa dokładności 15%*

Fig. 4.5. *The influence of the measurement sensor location on the relative error of boundary velocity estimation, potential flow,* Re = 1, *measuring accuracy 15%*



Rys. 4.6. *Wpływ lokalizacji czujnika pomiarowego na względny błąd identyfikowanej prędkości dopływowej, przepływ potencjalny,* Re = 0.1, *klasa dokładności 1%*

Fig. 4.6. *The influence of the measurement sensor location on the relative error of boundary velocity estimation, potential flow,* Re = 0.1, *measuring accuracy 1%*

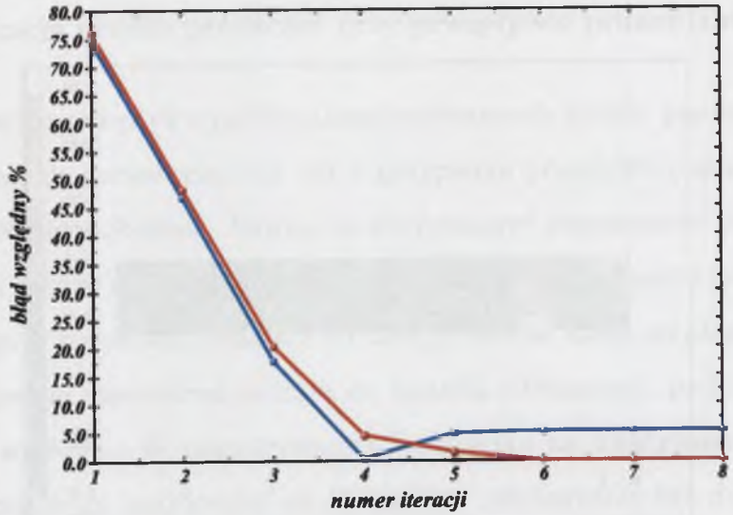
4.1.2. Wyniki identyfikacji wyrównanej prędkości przy dopływie - przepływ wirowy płynu nieściśliwego

Odtwarzanie wyrównanej prędkości przy dopływie w przypadku wirowego przepływu płynu nieściśliwego wymaga zastosowania znacznie bardziej czasochłonnej procedury niż w przypadku przepływów potencjalnych. Jednakże w tym przypadku, ze względu na fakt, iż identyfikowany jest tylko jeden parametr, procedura jest wysoce stabilna i przynosi dobre rezultaty nawet w przypadku mocno zaburzonych danych wejściowych. Na rysunku 4.7 przedstawiono dokładność identyfikacji w funkcji kroku iteracyjnego dla dwóch klas dokładności przyrządu: 0 oraz 10%. Błąd względny odniesiono do wartości składowej normalnej prędkości przy dopływie przyjmowanej podczas eksperymentu numerycznego. Jak widać, nawet 10-procentowe zaburzenie przenosi się na wyniki odtwarzania z mniejszą intensywnością już po 4 iteracjach. Obliczenia przeprowadzono dla 50 sensorów pomiarowych umiejscowionych w obszarze względnie największych wartości współczynnika wrażliwości. Nie było konieczne stosowanie metody Levenberga-Marquardta, co znacznie skróciło czas obliczeń.

4.1.3. Wyniki identyfikacji profilu prędkości przy dopływie

Jeżeli przedmiotem identyfikacji jest profil prędkości przy dopływie, jego identyfikacja możliwa jest poprzez:

- odtwarzanie wartości prędkości we wszystkich węzłach leżących na identyfikowanym brzegu,
- aproksymację profilu funkcją, której parametry podlegają odtwarzaniu.



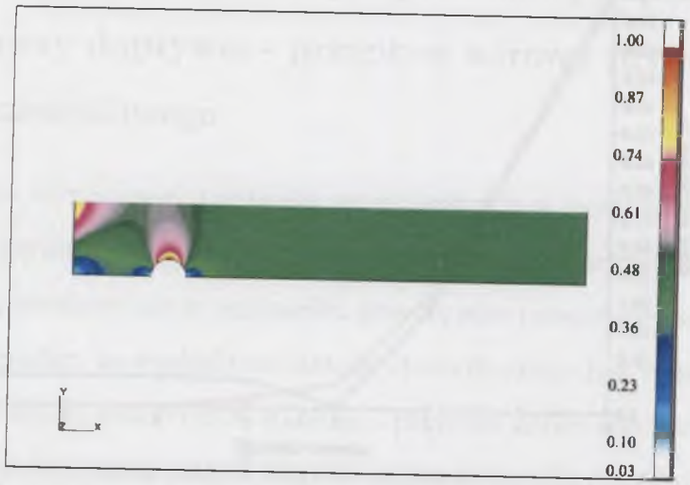
Rys. 4.7. *Dokładność identyfikacji prędkości dopływowej w kolejnych iteracjach procedury odwrotnej, przepływ wirowy płynu nieściśliwego,* Re = 500, *klasa dokładności 0, 10%*

Fig. 4.7. *The relative error of boundary velocity estimation achieved in the succeding iterations, incompressible fluid, rotational flow,* Re = 500, *measuring accuracy 0, 10%*

Pierwszy ze sposobów jest prostszy w realizacji numerycznej, podczas gdy drugi przynosi zdecydowanie lepsze rezultaty.

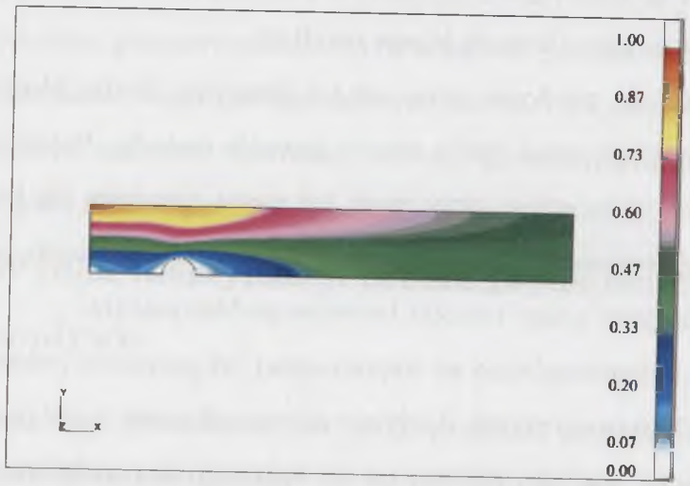
Jak powszechnie wiadomo, wraz ze zwiększeniem liczby identyfikowanych parametrów gwałtownie spada uwarunkowanie metody. Należy zatem ograniczać liczbę parametrów, przy czym już nawet niewielka ich liczba stwarza konieczność stosowania dodatkowych technik stabilizacyjnych, jak wykorzystana w niniejszej pracy metoda Levenberga-Marquardta.

Obliczenia przeprowadzono we wspomnianej już geometrii przedstawionej na rysunku 2.3, przy czym przy dopływie założono liniowy profil prędkości zmieniającej się od wartości zerowej na osi opływanych rur do wartości maksymalnej na osi symetrii pomiędzy rurami. Rozkłady prędkości przy tak zdefiniowanej prędkości dopływowej dla przepływów potencjalnego oraz wirowego zaprezentowane są na rysunkach 4.8 oraz 4.9.



Rys. 4.8. *Rozkład zredukowanej prędkości ($u/u_{n,\max}$) przy założonym profilu prędkości dopływowej, przepływ potencjalny*

Fig. 4.8. *Distribution of the nondimensional velocity ($u/u_{n,\max}$) for the assumed inlet velocity profile, potential flow*

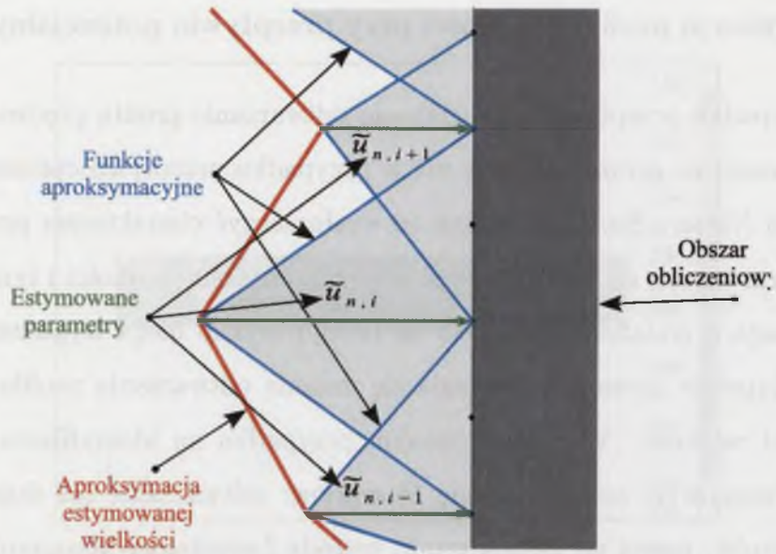


Rys. 4.9. *Rozkład zredukowanej prędkości ($u/u_{n,\max}$) przy założonym profilu prędkości dopływowej, wirowy przepływ płynu nieściśliwego*

Fig. 4.9. *Distribution of the nondimensional velocity ($u/u_{n,\max}$) for the assumed inlet velocity profile, incompressible fluid, rotational flow*

Identyfikacja profilu prędkości przy przepływie potencjalnym

W przypadku przepływu potencjalnego odtwarzanie profilu prędkości przyniosło znacznie gorsze rezultaty niż w przypadku przepływu opisanego równaniami Naviera-Stokesa. Można to wytłumaczyć charakterem przepływu, w którym bardzo szybko następuje wyrównanie pola prędkości i tym samym informacja o zmianach prędkości na brzegu szybko ulega wygaszeniu (rys. 4.8). Zupełnie niemożliwa okazała się metoda odtwarzania profilu poprzez wartości węzłowe. W rozpatrywanym przypadku na identyfikowanym odcinku brzegowym znajdowało się 15 węzłów: odtwarzanie tak dużej liczby parametrów, nawet po zastosowaniu metody Levenberga-Marquardta, kończyło się niezbieżnością metody. Działo się tak już przy użyciu niezaburzonych, a więc dokładnych danych wejściowych. Szumy numeryczne były wzmacniane w kolejnych iteracjach aż do utraty stabilności procedury. Stabilne rezultaty udało się natomiast uzyskać przy wykorzystaniu drugiego ze sposobów identyfikacji, tj. przy identyfikowaniu parametrów funkcji aproksymującej profil prędkości. Podejście takie jest nieliniową adaptacją metody opracowanej przez R.Białeckiego [6] dla zagadnień liniowych. Idea tej metody zakłada, iż poszukiwany profil prędkości dopływowej może być przedstawiony jako złożenie funkcji liniowych (rys. 4.10). Funkcje aproksymacyjne mogą być generalnie wyższego rzędu, ale ze złego uwarunkowania zagadnień odwrotnych wynika, że odtwarzanie wyższych częstotliwości funkcji aproksymacyjnych jest niewskazane, a często wręcz niemożliwe. Zatem powinno się unikać funkcji wyższego rzędu, np. wielomianów stopnia wyższego niż drugi. Jak wykazały testy numeryczne, wykorzystywanie liniowych funkcji aproksymacyjnych daje stabilne rezultaty, osiągane dzięki filtracyjnym właściwościom funkcji liniowych wygaszającym błędy wyższych częstotliwości. Aproksymacja profilu prędkości funkcją łamaną zmniejsza liczbę odtwarza-



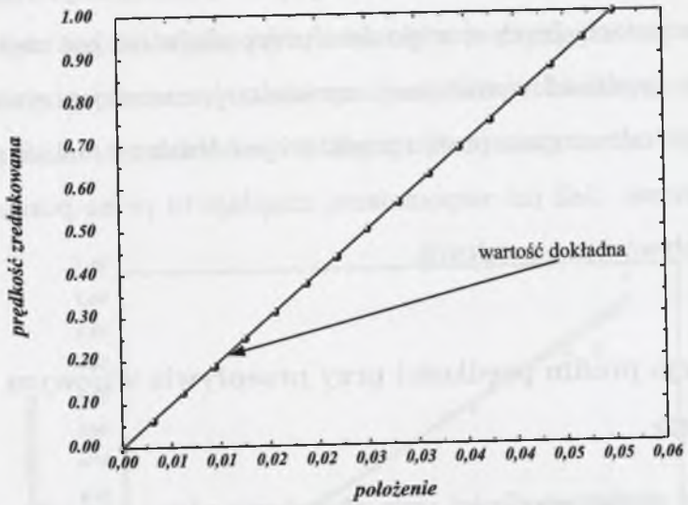
Rys. 4.10. *Aproksymacja profilu prędkości funkcjami liniowymi*
Fig. 4.10. *Approximation of the boundary velocity with linear functions*

nych parametrów i poprawia uwarunkowanie finalnego układu równań. I tak, dopływowa prędkość normalna może być przedstawiona jako:

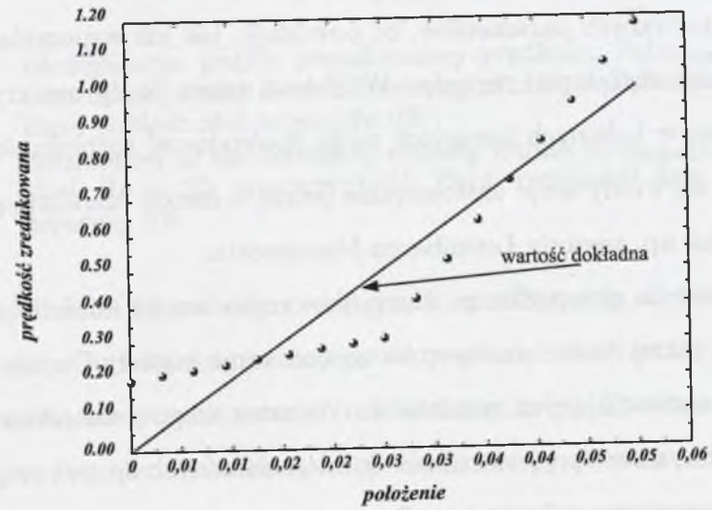
$$\tilde{u}_n = \sum_{j=1}^{J} \tilde{u}_{n,j}\, N_j(\mathbf{r}) \tag{4.15}$$

gdzie J oznacza liczbę funkcji aproksymujących, $N_j(\mathbf{r})$ zaś znaną funkcję położenia. Jak widać, przy tak zdefiniowanej aproksymacji profilu prędkości do wyznaczenia pozostaje jedynie J wartości $\tilde{u}_{n,j}$, co znacznie podnosi uwarunkowanie metody. Należy oczywiście zmodyfikować definicję współczynnika wrażliwości i tym samym procedurę jego wyznaczania.

W przypadku przepływów potencjalnych założenie liczby odtwarzanych parametrów $J = 3$ dało bardzo dobre rezultaty dla niezaburzonych danych wejściowych. Maksymalna klasa dokładności, przy której procedura zachowywała się stabilnie, wynosi 1%. Zwiększenie błędu owocowało niestabilnością procedury. Wyniki obliczeń (przy zastosowaniu metody Levenberga-Marquardta) zaprezentowane są na rysunkach 4.11 oraz 4.12.



Rys. 4.11. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$, Re = 25, *przepływ potencjalny, klasa dokładności przyrządu 0%*
Fig. 4.11. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, Re = 25, *potential flow, measuring accuracy 0%*



Rys. 4.12. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$, Re = 25, *przepływ potencjalny, klasa dokładności przyrządu 1%*
Fig. 4.12. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, Re = 25, *potential flow, measuring accuracy 1%*

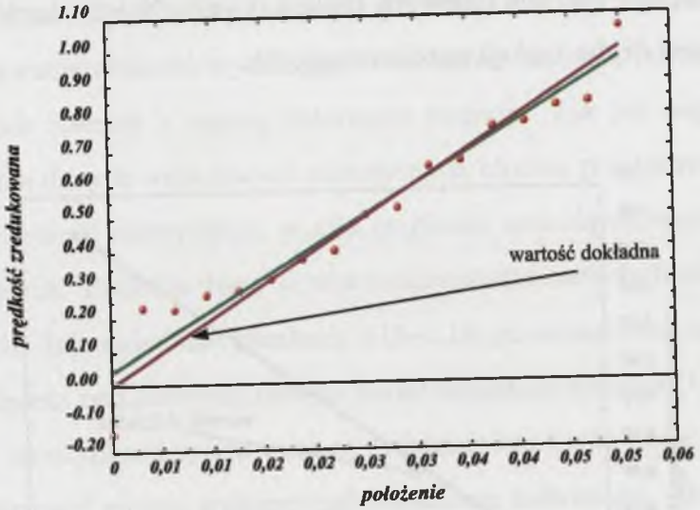
Analiza wyników prowadzi do konkluzji, iż odtwarzanie profilu prędkości przepływów potencjalnych w większości przypadków nie jest możliwe. O ile odtwarzanie prędkości wyrównanej czy średniej masowej przynosi stabilne wyniki, o tyle odtwarzanie profilu prędkości jest bardzo wrażliwe na wszelkie błędy wejściowe. Jak już wspomniano, znajduje to pełne potwierdzenie w fizyce przepływów potencjalnych.

Identyfikacja profilu prędkości przy przepływie wirowym płynu nieściśliwego

Identyfikację profilu prędkości przy przepływie płynu nieściśliwego, opisanego równaniami Naviera-Stokesa, przeprowadzono zarówno przez odtwarzanie prędkości we wszystkich węzłach rozpatrywanego odcinka brzegowego, jak również przez estymację parametrów funkcji aproksymującej rozkład prędkości. Odtwarzanie profilu przez wartości węzłowe prędkości znacznie zwiększa liczbę estymowanych parametrów, co powoduje, jak już wspomniano, gwałtowny spadek stabilności metody. W efekcie nawet błędy numeryczne pojawiające się w kolejnych iteracjach mogą spowodować rozbieżność metody. Konieczne się wtedy staje zastosowanie jednej z metod stabilizujących rozwiązanie, jak np. metody Levenberga-Marquardta.

W analizowanym przypadku na identyfikowanym brzegu mieściło się 16 węzłów. Przy takiej liczbie parametrów zastosowanie metody Gaussa (4.8) nie przyniosło zadowalających rezultatów. Wskutek złego uwarunkowania macierzy układu, nawet przy zastosowaniu niezaburzonych danych wejściowych nie osiągnięto zbieżności metody. Dopiero wprowadzenie członu tłumiącego w sensie metody Lavenberga-Marquardta przyniosło oczekiwany skutek w postaci stabilnego rozwiązania, osiąganego jednak tylko dla niezaburzonych danych wejściowych.

Wyniki wspomnianej identyfikacji przedstawiono na rysunku 4.13. Jak widać, osiągnięto zadowalającą, jakkolwiek nie najwyższą, dokładność identyfikacji. Niestety, próba przeprowadzenia identyfikacji dla danych wejściowych rzeczywistych, a więc zakłóconych błędem pomiarowym, skończyła się niepowodzeniem.

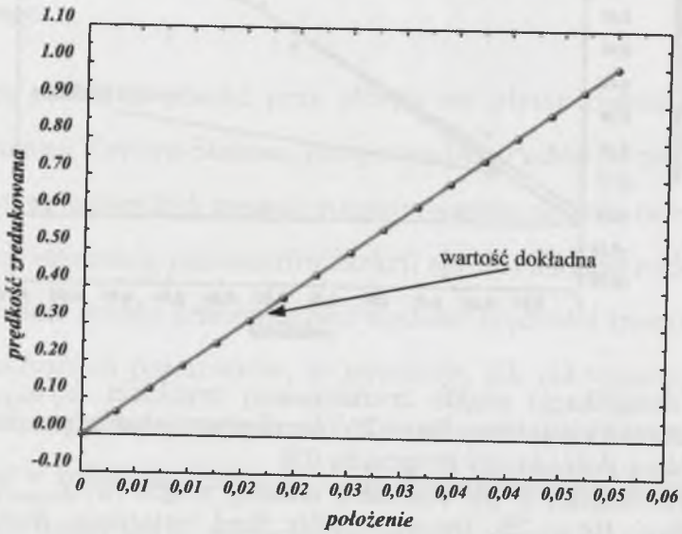


Rys. 4.13. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez wartości węzłowe,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 0%*

Fig. 4.13. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *nodal method,* Re = 25, *incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 0%*

Analiza rysunku 4.13 pozwala zauważyć, iż aproksymacja otrzymanych wyników funkcją liniową (oryginalny profil prędkości jest liniowy) daje dość dobre przybliżenie poszukiwanego rozkładu prędkości. Aproksymację tę zaznaczono na rysunku 4.13 zieloną linią. Korzystniej jest zatem odtwarzać nie wartości węzłowe prędkości, lecz funkcję aproksymującą, co znacznie zmniejsza liczbę identyfikowanych parametrów i tym samym zwiększa stabilność metody. W rozpatrywanym przypadku wystarczyłoby odtwarzać trójkątny profil prędkości, a więc tylko jeden parametr. Jednak założenie o znanym,

liniowym kształcie profilu jest tu poczynione tylko do celów badawczych i w rzeczywistych warunkach należy posłużyć się metodą (4.15) opisaną w poprzednim podrozdziale. Warto tu zauważyć, iż zmniejszanie liczby funkcji J sprowadza zadanie do opisanego przypadku trójkątnego rozkładu prędkości, podczas gdy zwiększanie J zbliża zagadnienie do przypadku odtwarzania wartości węzłowych (dla liniowych funkcji $N_j(\mathbf{r})$). Należy dążyć więc do jak najmniejszej liczby funkcji aproksymujących.

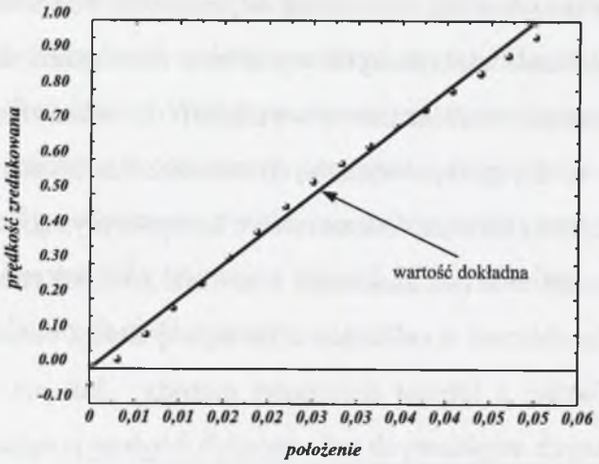


Rys. 4.14. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 3 funkcje aproksymacyjne,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 0%*

Fig. 4.14. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *three functions, incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 0%*

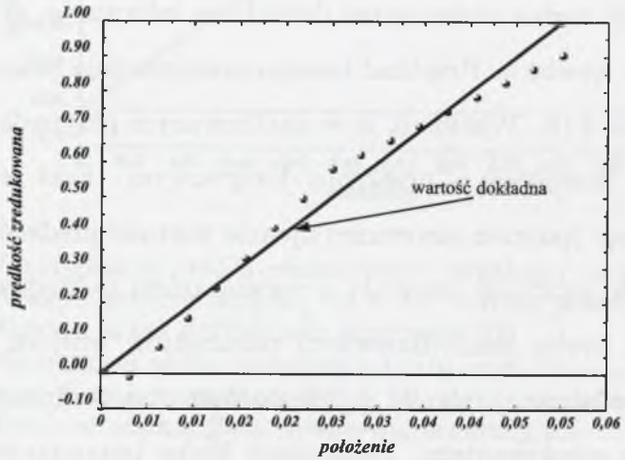
Obliczenia numeryczne potwierdziły celowość identyfikacji parametrów funkcji aproksymacyjnych w miejsce odtwarzania wartości węzłowych. Przeprowadzono je dla liczby funkcji J równej 2, 3 oraz 5. Na rysunku 4.14 przedstawiono wyniki identyfikacji profilu prędkości przy użyciu 3 funkcji aproksymacyjnych oraz niezaburzonych danych wejściowych. Jak widać, uzyskano bardzo wysoką zgodność otrzymanych wyników z rozwiązaniem dokładnym. Porównując otrzymane rozwiązanie z wynikami dla identyfikacji wartości węzłowych (rys. 4.13), przeprowadzonych również dla niezakłóconych danych wejściowych, bez trudu można zauważyć korzyści płynące ze stosowania wspomnianej metody. Nie bez znaczenia pozostaje również znacznie krótszy czas wykonywania obliczeń wynikający z mniejszej liczby odtwarzanych parametrów, jak również z lepszej zbieżności metody. Jak już wspomniano, wykorzystanie danych wejściowych zaburzonych błędem pomiarowym powodowało rozbieżność identyfikacji profilu prędkości metodą odtwarzania wartości węzłowych. Podobne testy przeprowadzono dla metody funkcji aproksymacyjnych. Jak widać na rysunkach 4.15–4.18, po zaburzeniu danych wejściowych błędem pomiarowym metoda nadal pozostaje stabilna. Oczywiście, dokładność identyfikacji spada wraz ze zwiększeniem błędu pomiarowego.

Podczas estymacji można wykorzystać dodatkowe informacje, jakie mamy o identyfikowanym zjawisku. Przykład takiego postępowania pokazano na rysunkach 4.17 oraz 4.18. Wiadomo, iż w analizowanym przypadku nie mogą istnieć wsteczne przepływy w przekroju dopływowym. Fakt ten wykorzystano odfiltrowując (poprzez zerowanie) ujemne wartości prędkości dopływowej, co poprawiło zgodność estymaty z rozwiązaniem dokładnym. Z kolei sprawdzono, jak liczba identyfikowanych parametrów wpływa na dokładność procedury odwrotnej; wyniki zaprezentowano na rysunkach 4.19 oraz 4.20. Zgodnie z oczekiwaniami, zwiększanie liczby parametrów zmniejsza dokładność identyfikacji, podczas gdy ich zmniejszanie prowadzi do bardziej dokładnych rezultatów. Należy więc dążyć do jak najmniejszej liczby identyfikowanych parametrów, optymalna ich liczba zależy jednak indywidualnie od analizowanego zagadnienia.



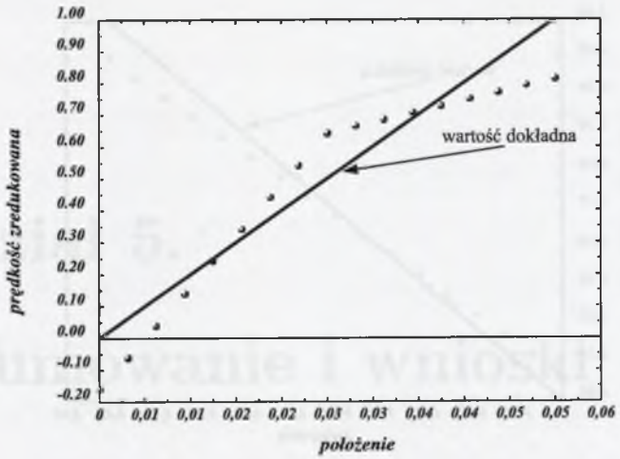
Rys. 4.15. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 3 funkcje aproksymacyjne,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 1%*

Fig. 4.15. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *three functions, incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 1%*



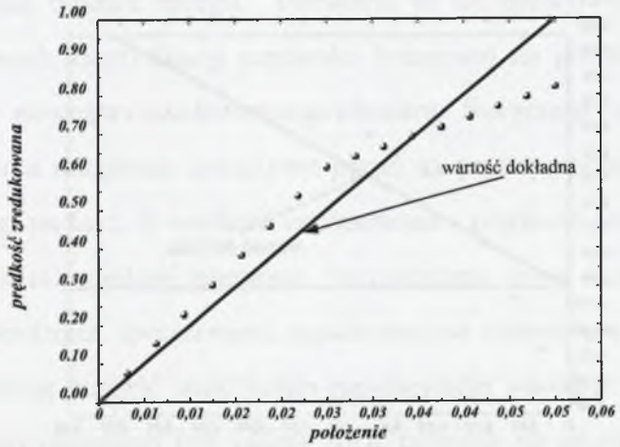
Rys. 4.16. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 3 funkcje aproksymacyjne,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 2%*

Fig. 4.16. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *three functions, incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 2%*



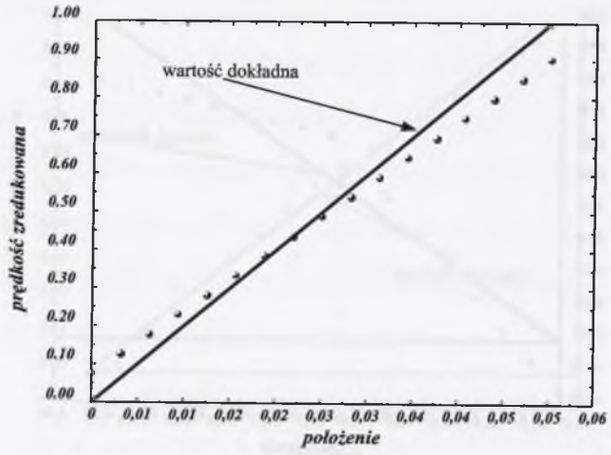
Rys. 4.17. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 3 funkcje aproksymacyjne,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 5%*

Fig. 4.17. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *three functions, incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 5%*



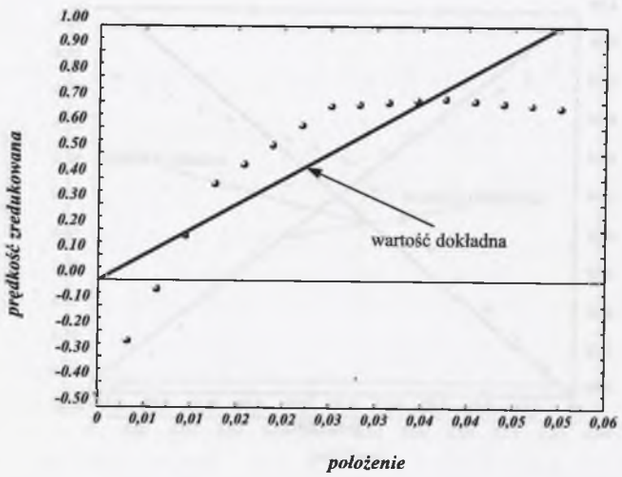
Rys. 4.18. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 3 funkcje aproksymacyjne,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, filtrowanie wartości ujemnych, klasa dokładności przyrządu 5%*

Fig. 4.18. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *three functions, incompressible fluid, rotational flow, negative flow filter, measuring accuracy 5%*



Rys. 4.19. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 2 funkcje aproksymacyjne,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 5%*

Fig. 4.19. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *two functions, incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 5%*



Rys. 4.20. *Identyfikacja profilu zredukowanej prędkości* $(u/u_{n\,\max})$ *poprzez 5 funkcji aproksymacyjnych,* Re = 25, *wirowy przepływ płynu nieściśliwego, klasa dokładności przyrządu 5%*

Fig. 4.20. *Estimation of the boundary velocity profile* $(u/u_{n\,\max})$, *approximation functions method,* Re = 25, *five functions, incompressible fluid, rotational flow, measuring accuracy 5%*

Rozdział 5.

Podsumowanie i wnioski

Zasadniczym celem pracy było poszerzenie wiedzy na temat zastosowania technik odwrotnych w zadaniach konwekcyjnej wymiany ciepła. W szczególności podjęto próbę rozwikłania pełnego zagadnienia odwrotnego dla konwekcyjnego przepływu ciepła obejmującego zarówno równania bilansu pędu, jak i równania bilansu energii. Pozwoliło to na opracowanie algorytmów umożliwiających identyfikację prędkości brzegowej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz analizowanego obszaru. Stwarzają one zatem możliwość określenia natężenia przepływu płynu za pomocą pomiarów temperatury. Z uwagi na fakt, iż wielkość estymowana - prędkość jest opisana przez inne równania niż wielkość mierzona - temperatura, autor określił tę klasę zagadnień odwrotnych *sprzężonymi zagadnieniami odwrotnymi.* Wspomniane algorytmy mogą znaleźć praktyczne zastosowanie wszędzie tam, gdzie pomiar wielkości mierzonej jest tańszy bądź prostszy do przeprowadzenia niż pomiar wielkości identyfikowanej. Ideę tak zdefiniowanych zagadnień odwrotnych można przenieść na inną grupę zjawisk fizycznych, jak np. transport zanieczyszczeń w wodzie czy w gruncie, czy też zjawiska zachodzące w atmosferze. Zaproponowane algorytmy mogą być wykorzystane do wyznaczenia prędkości przepływu wód gruntowych. Znajomość natężenia przepływu

wód gruntowych jest bardzo istotna w wielu praktycznych przedsięwzięciach. Przykładem tu może być oszacowanie potencjału energetycznego gruntu przy instalacji gruntowego wymiennika pomp ciepła, projektowanie procesu mrożenia górotworu czy też analiza migracji zanieczyszczeń w gruncie.

W ramach niniejszej pracy zrealizowano w szczególności zadania cząstkowe:

- przegląd literatury oraz analiza obecnego stanu wiedzy w dziedzinie modelowania odwrotnych zagadnień przenoszenia ciepła i masy,
- rozwinięcie kodu komputerowego do obliczeń pól potencjału, prędkości i temperatury zagadnień bezpośrednich wykorzystującego metodę CVFEM (Control Volume Finite Element Method) i jego weryfikacja,
- opracowanie algorytmu do określania wyrównanej prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu niewirowego,
- opracowanie algorytmu do określania rozkładu prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu niewirowego,
- opracowanie algorytmu do określania wyrównanej prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu cieczy newtonowskiej,
- opracowanie algorytmu do określania rozkładu prędkości dopływowej i wewnętrznej na podstawie pomiarów temperatury wewnątrz obszaru dla przepływu cieczy newtonowskiej.

W ramach zadania obejmującego udoskonalenie posiadanego kodu komputerowego służącego do określania rozkładów prędkości i temperatury w przepływającym płynie przeprowadzono jego gruntowną modernizację znacznie rozszerzając możliwości jego zastosowania. W szczególności:

- opracowano moduł do obliczania pola potencjału w przepływach potencjalnych;
- opracowano interface do komercyjnego pakietu MSC Patran, umożliwiający wykorzystanie wspomnianego pakietu w zakresie prac pre- oraz postprocesingowych: tworzenie geometrii układu, definicja warunków brzegowych, generacja siatki, definicja materiałów oraz wizualizacja wyników;
- znacznie rozszerzono zakres akceptowalnych warunków brzegowych;
- przystosowano oprogramowanie do obliczeń rozkładu współczynników wrażliwości potencjału, prędkości, ciśnienia czy temperatury.

W zakresie zagadnień odwrotnych opracowano metody wyznaczania współczynników wrażliwości temperatury względem prędkości brzegowej, zarówno dla przepływów potencjalnych, jak i przepływów wirowych płynu nieściśliwego, opisanego równaniami Naviera-Stokesa. Dużą wagę przywiązano do takiego sformułowania algorytmów, by łatwa się stała ich implementacja komputerowa, również przy wykorzystaniu komercyjnego oprogramowania CFD (np. Fluent). Aby było to możliwe, pakiet powinien spełniać jedynie dwa wymagania:

- możliwość tworzenia własnych pętli iteracyjnych wykorzystujących moduły pakietu;
- możliwość definiowania własnych członów źródłowych.

Większość liczących się na rynku pakietów CFD takie możliwości posiada. Wykorzystując opracowane algorytmy wyznaczania współczynników wrażliwości rozwiązano pełne zagadnienie odwrotne wykorzystując (tam gdzie było to konieczne) metodę Levenberga-Marquardta. Zagadnienie takie zdefiniowano zarówno dla przepływów potencjalnych, jak i wirowych płynów nieści-

śliwych, laminarnych, za cel identyfikacji przyjmując wyrównaną prędkość w profilu dopływowym oraz rozkład prędkości na brzegu.

Analiza opracowanych metod i wyników obliczeń pozwala na sformułowanie następujących wniosków i spostrzeżeń:

- sprzężenie temperatura $\Leftrightarrow$ prędkość dla warunków analizowanych w pracy jest wystarczająco silne, aby odtworzyć prędkość na podstawie pomiarów temperatury;
- zastosowanie opracowanych algorytmów możliwe jest tylko w obszarach, w których występuje zakłócenie pola temperatury;
- optymalna lokalizacja punktów pomiarowych zależy od geometrii układu, od wartości prędkości dopływowej oraz od miejsca, w którym występuje nagrzewanie lub ochładzanie płynu;
- można wskazać przypadki, w których obszar najkorzystniejszy do umieszczenia czujników pomiarowych jest odsunięty od profilu dopływowego - zbliżanie czujników do tego miejsca może spowodować większe błędy odtwarzania;
- w przypadku przepływów potencjalnych zastosowanie procedury ogranicza się w zasadzie do odtwarzania wyrównanej prędkości dopływowej bądź do odtwarzania prędkości masowej; odtwarzanie profilu prędkości jest bardzo czułe na błędy pomiarowe nawet przy zastosowaniu dodatkowych technik stabilizacyjnych;
- identyfikacja wyrównanej prędkości dopływu, z uwagi na małą liczbę estymowanych parametrów, nie wymaga w większości przypadków stosowania dodatkowych technik stabilizacyjnych. Problem jest na tyle dobrze uwarunkowany, iż wystarcza zastosowanie metody Gaussa;

- odtwarzanie profilu prędkości, bez względu na metodę (poprzez wartości węzłowe czy też poprzez odtwarzanie aproksymacji profilu) wymaga zastosowania dodatkowych technik stabilizacyjnych z uwagi na złe uwarunkowanie zagadnienia;
- odtwarzanie profilu prędkości jest znacznie bardziej efektywne poprzez identyfikowanie parametrów rozkładu prędkości niż poprzez estymację wartości węzłowych. W przypadku gdy liczba węzłów leżących na analizowanym brzegu jest znaczna, uwarunkowanie spada na tyle mocno, że już same szumy numeryczne skutecznie uniemożliwiają osiągnięcie stabilnych rezultatów identyfikacji profilu prędkości na drodze estymacji wartości węzłowych prędkości;
- podczas odtwarzania profilu prędkości metodą identyfikacji funkcji aproksymacyjnej należy dbać o to, aby ich liczba była jak najniższa przy zachowaniu warunku, że średni błąd kwadratowy $S = \sqrt{S/(I-1)}$ (gdzie S oznacza minimalną sumę kwadratów) jest mały. Oczywiście, zależy to od rzeczywistego kształtu profilu.

Za szczególne osiągnięcie pracy można uznać nowatorskie podejście do sformułowania konwekcyjnego zagadnienia odwrotnego obejmujące zarówno równania bilansu energii, jak i bilansu pędu i ciągłości. Większość opublikowanych sformułowań odwrotnych zagadnień brzegowych polega na odtwarzaniu warunków brzegowych równania opisującego rozkład wielkości mierzonej, zarówno w przypadku przewodzenia ciepła, jak i konwekcji czy promieniowania. W niniejszej pracy prędkość brzegowa wpływa bezpośrednio na rozkład prędkości w płynie, a ta dopiero ma bezpośredni związek z mierzonym polem temperatury poprzez równanie bilansu energii. Jak już wspomniano, idea tak sformułowanego zagadnienia odwrotnego może znaleźć zastosowa-

nie przy analizie innych zjawisk fizycznych, jak np. transport zanieczyszczeń w gruncie.

Ponadto za nowatorskie osiągnięcia pracy można uznać algorytmy wyznaczania współczynników wrażliwości temperatury względem prędkości dopływowej zarówno dla przepływów potencjalnych, jak i przepływów płynów nieściśliwych. Analiza rozkładu wartości współczynników wrażliwości pozwala na optymalizację lokalizacji czujników pomiarowych jeszcze przed przystąpieniem do rozwiązania właściwego zagadnienia odwrotnego.

Dodatek A.

Matematyczny opis konwekcyjnej wymiany ciepła

Wyjąwszy zjawiska relatywistyczne lub jądrowe, przepływ każdego płynu, niezależnie od jego charakteru i rodzaju płynu, opiera się na trzech prawach [19, 48]:

- zasada zachowania ilości substancji,
- II zasada dynamiki Newtona,
- I zasada termodynamiki.

W opisie zjawiska występują ponadto dodatkowe zależności (często również nazywane *prawami*), opisujące charakter rozpatrywanego płynu czy przepływu. Jako przykład można tu przytoczyć prawo Darcy'ego opisujące przepływ w materiałach porowatych, które nie stanowi jednak fundamentalnego prawa przepływu płynów traktowanego w sposób ogólny [33].

Jak wiadomo, przepływ płynów można analizować w zmiennych Lagrange'a lub Eulera. Analiza Lagrange'a polega na śledzeniu losów pojedynczej cząstki płynu i znajduje zastosowanie głównie w analizie przepływów jednowymiarowych, nieustalonych [13]. Chwilowe położenie cząstki w czasie τ określone jest zależnością:

$$x = x(a, b, c, \tau)$$
$$y = y(a, b, c, \tau) \tag{A.1}$$
$$z = z(a, b, c, \tau)$$

gdzie a, b, c to współrzędne początkowego położenia, τ natomiast oznacza czas. Równania (A.1) opisują jednocześnie trajektorię analizowanej cząstki. W analizie Eulera parametry płynu są określane w danym miejscu przestrzeni i czasu (x, y, z, τ), np.:

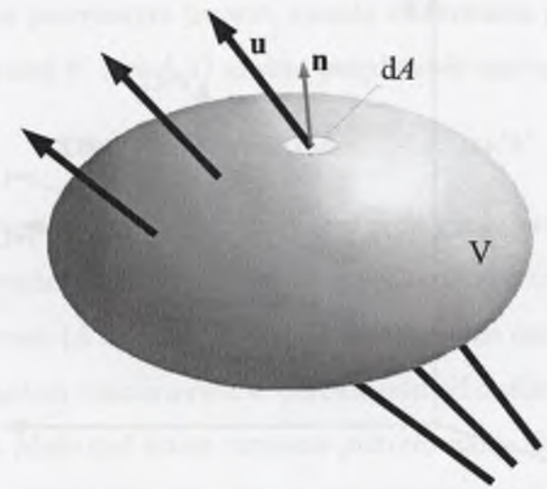
$$u = u(x, y, z, \tau)$$
$$v = v(x, y, z, \tau) \tag{A.2}$$
$$w = w(x, y, z, \tau)$$
$$t = t(x, y, z, \tau)$$

gdzie u, v, w to składowe wektora prędkości, t jest temperaturą, a τ oznacza czas. Zarówno w zagadnieniach ustalonych, jak i w dwu- czy jednowymiarowych liczba zmiennych ulega oczywiście zmniejszeniu.

Równania opisujące zjawisko konwekcji we współrzędnych Lagrange'a mają na ogół inną postać niż we współrzędnych Eulera. W niniejszej rozprawie wykorzystywana jest analiza Eulera.

A.1. Zasada zachowania ilości substancji

Dla założeń przyjętych w niniejszej pracy zasada zachowania ilości substancji może być sprowadzona do zasady zachowania masy. Zasada ta mówi, iż: *Masa doprowadzona w danym czasie do układu jest równa sumie przyrostu masy w układzie i masy wyprowadzonej z układu.*



Rys. A.1. *Przepływ masy przez objętość kontrolną*
Fig. A.1. *Mass flow through a control volume*

Jeżeli rozważymy dowolną objętość kontrolną V umieszczoną w polu przepływu płynu $\mathbf{u}$ (rys.A.1), to całkową postać zasady zachowania masy można przedstawić w następujący sposób:

$$\int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \rho \mathrm{d}V = 0 \tag{A.3}$$

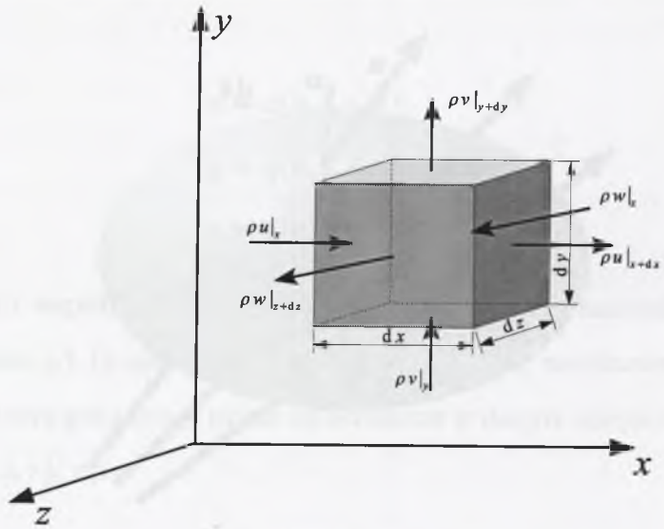
gdzie A jest powierzchnią objętości kontrolnej V, $\mathbf{n}$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni.

Dla stanu ustalonego oraz stałych parametrów płynu (a więc dla warunków odpowiadającym założeniom niniejszej pracy) równanie (A.3) upraszcza się do postaci:

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, \mathrm{d}A = 0 \tag{A.4}$$

Różniczkową postać równania (A.3) można otrzymać analizując elementarny prostopadłościan o bokach $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ (rys. A.2):

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0 \tag{A.5}$$



Rys. A.2. *Przepływ masy przez elementarną objętość kontrolną*
Fig. A.2. *Mass flow through a differential control volume*

Dla stanu ustalonego i płynu nieściśliwego równanie (A.5) przyjmuje zatem postać:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{A.6}$$

A.2. Zasada zachowania pędu

Drugim z fundamentalnych praw mechaniki płynów jest II zasada dynamiki Newtona, którą można sformułować następująco:
Prędkość zmiany pędu układu mechanicznego jest równa geometrycznej sumie sił zewnętrznych działających na układ. Dla stanu nieustalonego można zapisać:

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m\,\mathbf{u}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{P} \tag{A.7}$$

gdzie $\mathbf{P}$ oznacza pęd układu, m jego masę, $\mathbf{u}$ wektor prędkości, $\mathbf{F}$ natomiast wypadkową sił zewnętrznych działających na układ.

Opierając się na powyższym prawie, zasadę zachowania pędu dla dowolnej objętości kontrolnej V (rys.A.1) można przedstawić następująco:

$$\Sigma \mathbf{F} = \int_A \mathbf{u}\rho\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial\tau}\int_V \rho\mathbf{u}\mathrm{d}V \tag{A.8}$$

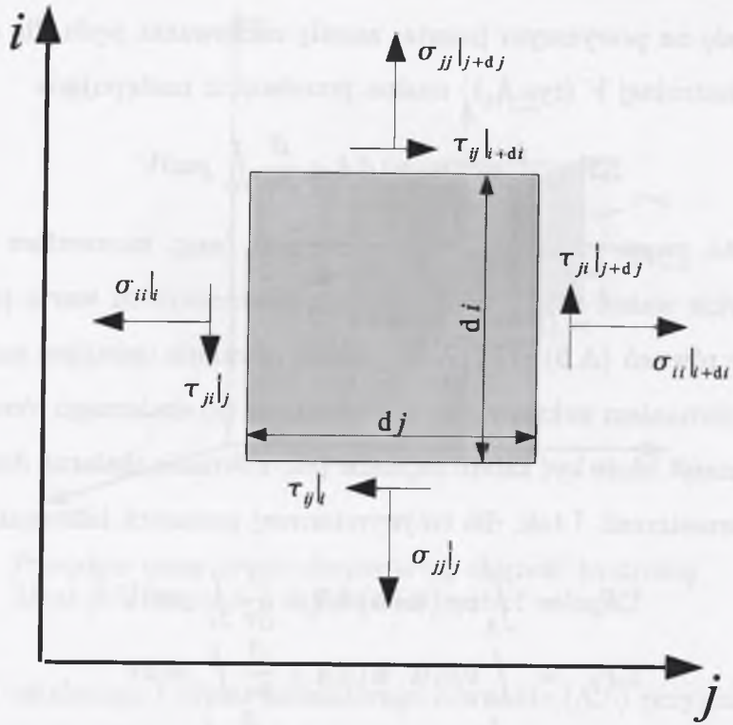
Równanie to, zwane niekiedy *twierdzeniem pędu* (ang. *momentum theorem*) jest niezwykle ważne w mechanice płynów. Zaznaczyć tu warto podobieństwo formy równań (A.3) oraz (A.8), jednak równanie opisujące zachowanie pędu jest równaniem wektorowym w odróżnieniu od skalarnego równania zachowania masy. Może być zatem zapisane jako równanie skalarne dla każdego kierunku przestrzeni. I tak, dla trójwymiarowej geometrii kartezjańskiej:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \int_A u\rho\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial\tau}\int_V \rho u\mathrm{d}V \\
\Sigma F_y &= \int_A v\rho\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial\tau}\int_V \rho v\mathrm{d}V \\
\Sigma F_z &= \int_A w\rho\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial\tau}\int_V \rho w\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{A.9}$$

gdzie F_x, F_y oraz F_z to składowe wypadkowej siły $\mathbf{F}$ działającej na płyn odpowiednio w kierunkach osi x, y, z.
W zadaniach stacjonarnych w równaniach (A.8) oraz (A.9) należy pominąć pochodne czasowe występujące po prawych stronach równań.

A.2.1. Przepływ płynu lepkiego

Podczas przepływu płynu lepkiego na jego elementy, oprócz sił objętościowych, działają siły powierzchniowe, które mają składową normalną i styczną. Jeżeli wyodrębnimy myślowo elementarną objętość płynu $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, to jest ona poddana siłom przedstawionym na rysunku (rys. A.3). Według przyjętych oznaczeń τ_{ij} jest naprężeniem stycznym działającym w kierunku osi układu współrzędnych j normalne do osi i, natomiast σ_{ii} to naprężenie normalne działające w kierunku osi i.



Rys. A.3. *Rozkład naprężeń działających na elementarną objętość kontrolną,* $(i,j) = \{(x,y),(z,y),(x,z)\}$

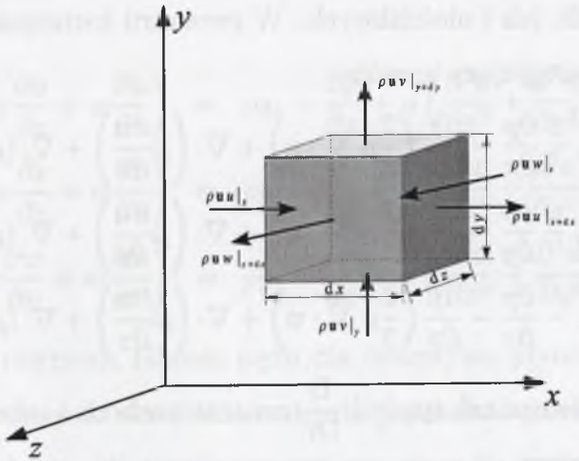
Fig. A.3. *Forces acting on a infinitesemal control volume*

Podobnie jak w przypadku równania bilansu masy, różniczkową postać równania (A.8) można otrzymać analizując wspomnianą elementarną objętość płynu (rys.A.4). Prowadzi to do zależności:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \rho g_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \rho g_y+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \qquad \text{(A.10)}\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \rho g_z+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}$$

gdzie g_x, g_y oraz g_z oznaczają składowe jednostkowych sił masowych.

Jak można łatwo zauważyć, lewe strony równań (A.10) wyrażają prędkość zmian pędu w czasie, prawe natomiast przedstawiają siły działające na elementarną objętość kontrolną.



Rys. A.4. *Strumień pędu przez elementarną objętość kontrolną*

Fig. A.4. *Momentum flux through a differential control volume*

Naprężenia w płynie mogą być opisane zależnościami Stokesa [72]:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}=\tau_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
\tau_{yz}=\tau_{zy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad \text{(A.11)}\\
\tau_{zx}=\tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

gdzie μ oznacza współczynnik lepkości dynamicznej płynu. Naprężenia normalne dla płynu newtonowskiego można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)-p\\
\sigma_{yy} &= \mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)-p \qquad \text{(A.12)}\\
\sigma_{zz} &= \mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)-p
\end{aligned}$$

W powyższej zależności p jest ciśnieniem.

Wykorzystując równanie (A.11) oraz (A.12) w równaniach (A.10) otrzymujemy tzw. *równania Naviera-Stokesa*, będące różniczkowym zapisem zasady zachowania pędu dla płynów newtonowskich. Są one prawdziwe zarówno dla

płynów ściśliwych, jak i nieściśliwych. W geometrii kartezjańskiej można je przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}\tau} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\mu\ \nabla\cdot\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) + \nabla\cdot(\mu\nabla u)\\
\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}\tau} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\mu\ \nabla\cdot\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right) + \nabla\cdot(\mu\nabla v) \qquad (A.13)\\
\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}\tau} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{3}\mu\ \nabla\cdot\mathbf{u}\right) + \nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) + \nabla\cdot(\mu\nabla w)
\end{aligned}$$

W powyższych równaniach symbol $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}$ oznacza pochodną substancjalną zdefiniowaną równaniem:

$$\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}\tau} = \frac{\partial b}{\partial \tau} + u\frac{\partial b}{\partial x} + v\frac{\partial b}{\partial y} + w\frac{\partial b}{\partial z}$$

gdzie b jest dowolną wielkością skalarną.

W przypadku przepływów płynów nieściśliwych $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, co przy założeniu stałości lepkości prowadzi do prostszej, dobrze znanej wersji równań Naviera-Stokesa:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}\tau} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}\tau} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (A.14)\\
\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}\tau} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

Powyższe równania można ponadto przedstawić w zwartej, wektorowej postaci:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}\tau} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} \qquad (A.15)$$

Dla zagadnień ustalonych pochodna cząstkowa względem czasu, występująca w pochodnej substancjalnej, jest równa zeru. Uwzględnienie tego faktu w równaniach bilansu pędu sprowadza równania Naviera-Stokesa do postaci:

$$\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (A.16)\\
\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

Przedstawione równania bilansu pędu dla przepływu płynów lepkich mogą być wykorzystywane do określania rozkładu prędkości i ciśnienia dla różnych rodzajów przepływu. W zasadzie są przeznaczone do przepływów laminarnych, jednak po uwzględnieniu naprężeń turbulentnych mogą być z powodzeniem stosowane w obliczeniach przepływów turbulentnych. Jak widać, postać równań bilansu pędu sprawia, iż ich rozwiązanie nie należy do zadań prostych. Jedynie dla nieskomplikowanych geometrii możliwe jest znalezienie rozwiązania analitycznego. W pozostałych przypadkach pozostaje modelowanie numeryczne. Rozwiązanie numeryczne równań bilansu pędu również kryje w sobie szereg trudności, choćby ze względu na fakt, iż nie istnieje równanie bezpośrednio opisujące rozkład ciśnienia w płynie. Problem ten, jak również inne trudności pojawiające się przy numerycznym rozwiązaniu równań Naviera-Stokesa przedstawiono dokładniej w niniejszej pracy.

A.2.2. Przepływ płynu nielepkiego

Jeżeli analizowany jest przepływ płynu nielepkiego ($\mu = 0$), wtedy równania Naviera-Stokesa (A.15) sprowadzają się w przypadku przepływu nieustalonego do postaci:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}\tau} = \rho\mathbf{g} - \nabla p \qquad (A.17)$$

Powyższe równanie jest wektorowym zapisem tzw. *równań Eulera*, będących matematycznym zapisem zasady zachowania pędu płynów nielepkich.

Równania te odnoszą się zarówno do płynów ściśliwych, jak i nieściśliwych, różnica polega jedynie na traktowaniu gęstości jako stałej lub zmiennej w czasie lub w przestrzeni.

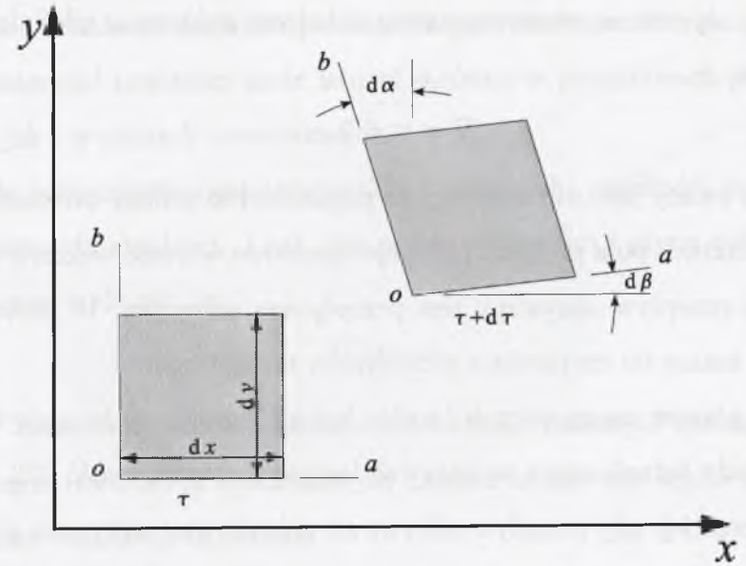
W stanach ustalonych równania Eulera przybierają postać:

$$\begin{aligned} \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \tag{A.18}$$

Podobnie jak w przypadku równań Naviera-Stokesa, nieliniowość równań Eulera (A.17) powoduje, iż niemożliwe jest scałkowanie ich w postaci ogólnej. Rozwiązanie równań Eulera wymaga więc przyjęcia założeń upraszczających bądź zastosowania technik numerycznych. Rozwiązanie analityczne możliwe jest do osiąganięcia w dwóch przypadkach: w stanach ustalonych oraz w przepływach niewirowych (potencjalnych). W pierwszym przypadku rozwiązanie stanowi równanie Bernoulliego, w drugim natomiast całka Lagrange'a-Cauchy'ego. Teoria przepływu płynów nielepkich znajduje zastosowanie między innymi w analizie opływów ciał, czyli w tzw. *przepływach zewnętrznych* (ang. external flows).

A.2.3. Przepływ potencjalny

W większości przypadków w czasie przepływu płynów jego elementy ulegają przesunięciom oraz odkształceniom, a ponadto wykonują obroty (rys. A.5). Jak można zauważyć na rysunku, element płynu, w czasie $d\tau$, oprócz przesunięcia na płaszczyźnie xy ulegnie deformacji oraz obrotowi. W związku z deformacją za kąt obrotu elementu można przyjąć średni kąt obrotu krawę-



Rys. A.5. *Rotacja elementu płynu*
Fig. A.5. *Rotation of a fluid element*

dzi oa oraz ob. A zatem prędkość kątową elementu (rotację) względem osi $0z$ można wyrazić zależnością:

$$\omega_z=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}+\frac{d\beta}{d\tau}\right) \tag{A.19}$$

Wykorzystując związki pomiędzy kątami $d\alpha$, $d\beta$ i składowymi prędkości płynu nietrudno wykazać, iż:

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{A.20}$$

Powyższą procedurę można przeprowadzić dla płaszczyzn zy oraz xz i określić rotację elementów w kierunku osi x:

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{A.21}$$

oraz w kierunku osi y:

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{A.22}$$

Rotacje ω_x, ω_y oraz ω_z stanowią zatem składowe wektora ω zdefiniowanego następująco:

$$\nabla \times \mathbf{u} = 2\omega \tag{A.23}$$

Wektor ten zwany jest *wirowością pola prędkości* lub krótko *wirowością*. Jeżeli w punktach pola prędkości istnieje niezerowa wartość wektora wirowości, to taki przepływ nazywany jest *przepływem wirowym*. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z *przepływem niewirowym*.

Przepływy płynów rzeczywistych (a więc lepkich) zawsze cechują się wirowością. Niekiedy jednak mogą wykazywać bardzo słabą wirowość [12]. Dzieje się tak najczęściej, gdy przepływ odbywa się głównie pod wpływem sił grawitacyjnych i ciśnieniowych, przy małym udziale sił oddziaływania ścian ograniczających. Przykładem *prawie niewirowego* przepływu cieczy rzeczywistej może być przepływ w tzw. przelewie zatopionym czy przepływ wód gruntowych.

Warunek niewirowości pola prędkości $\omega = 0$ sprowadza się do trzech równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{A.24}$$

Warunki niewirowości (A.24) stanowią jednocześnie warunki konieczne i wystarczające istnienia pewnej funkcji skalarowej φ zwanej *potencjałem prędkości*. Funkcja ta związana jest z prędkością zależnością wektorową:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \tag{A.25}$$

a więc:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{A.26}$$

Jedynym warunkiem istnienia potencjału jest niewirowość pola prędkości. Zatem potencjał prędkości może istnieć zarówno w przepływach płynów ściśliwych, jak i w stanach nieustalonych.

Równanie różniczkowe opisujące rozkład potencjału prędkości można uzyskać z równania ciągłości. I tak, dla stanu ustalonego i płynu nieściśliwego można łatwo wykazać, iż:

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{A.27}$$

gdzie ∇^2 oznacza operator Laplace'a. Jak widać, potencjał opisany jest dobrze znanym równaniem różniczkowym Laplace'a, tak więc jego wyznaczenie nie stwarza większych trudności.

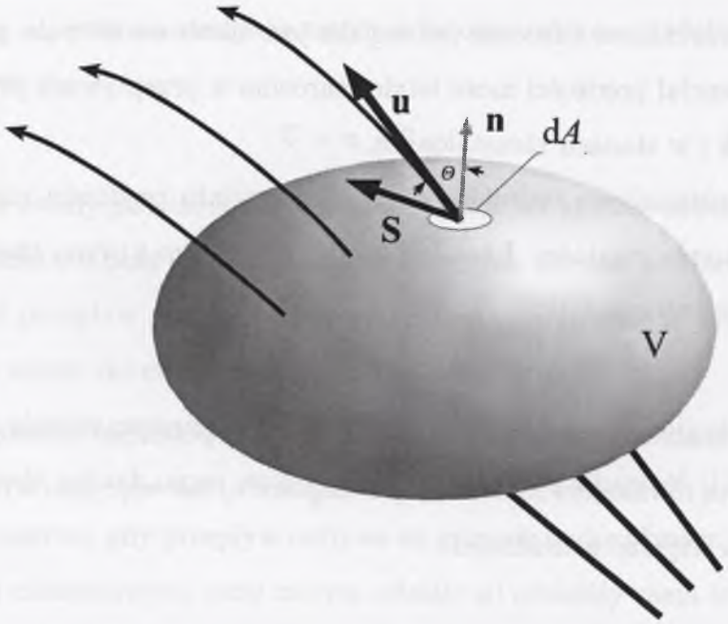
A.3. Zasada zachowania energii

Zasadę zachowania energii można przedstawić w ogólnej postaci w następujący sposób [51]: *Energia doprowadzona do układu równa jest sumie przyrostu energii układu i energii wyprowadzonej z układu.* W przypadku zjawisk przepływu płynu wygodnie jest wyrazić powyższą zasadę w nieco inny sposób: *Ciepło doprowadzone do układu jest równe sumie zmiany całkowitej energii układu i pracy wykonanej przez układ.*

Dla nieskończenie małego czasu można zatem napisać:

$$\delta Q = \mathrm{d}E + \delta W \tag{A.28}$$

W powyższym równaniu Q oznacza ciepło doprowadzone, W pracę wykonaną przez układ, E zaś całkowitą energię układu. W powyższym równaniu jedynie energia układu jest różniczką zupełną. Zarówno ciepło pochłonięte, jak i praca układu są funkcjami drogi przemiany i zależą od sposobu realizacji przemiany, stąd odmienne oznaczenie różniczki w zależności (A.28). W związku z ruchem płynu zmiana całkowitej energii układu zależna jest



Rys. A.6. *Przepływ przez objętość kontrolną (**S** - siły powierzchniowe)*
Fig. A.6. *Flow and shear work for a general control volume*

od energii płynu dopływającego i opuszczającego objętość kontrolną oraz od zmiany energii płynu w niej pozostającego (rys. A.6). A zatem:

$$\mathrm{d}E = \left(\int_A e\rho((\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}A\right)\mathrm{d}\tau + \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_V e\rho\mathrm{d}V\right)\mathrm{d}\tau \tag{A.29}$$

gdzie e jest energią właściwą układu i stanowi sumę energii wewnętrznej, kinetycznej i potencjalnej:

$$e = e_u + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + gz \tag{A.30}$$

W pracy wykonywanej przez układ można wyróżnić trzy elementy składowe:

- pracę mechaniczną, W_s,
- pracę przeciwko siłom ścinającym, związaną z pokonaniem naprężeń stycznych (**S**, rys. A.6), W_μ,

- pracę przeciwko naprężeniom normalnym, zwaną *pracą przepływu* czy *pracą przetłaczania*, W_n,

czyli

$$W = W_s + W_\mu + W_n \tag{A.31}$$

Pracę przetłaczania wyraża zależność:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}W_n = \int_A p\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}A \tag{A.32}$$

gdzie p jest ciśnieniem.

Wykorzystując zależności (A.29)÷(A.32) w równaniu (A.28) można otrzymać całkową postać zasady zachowania energii:

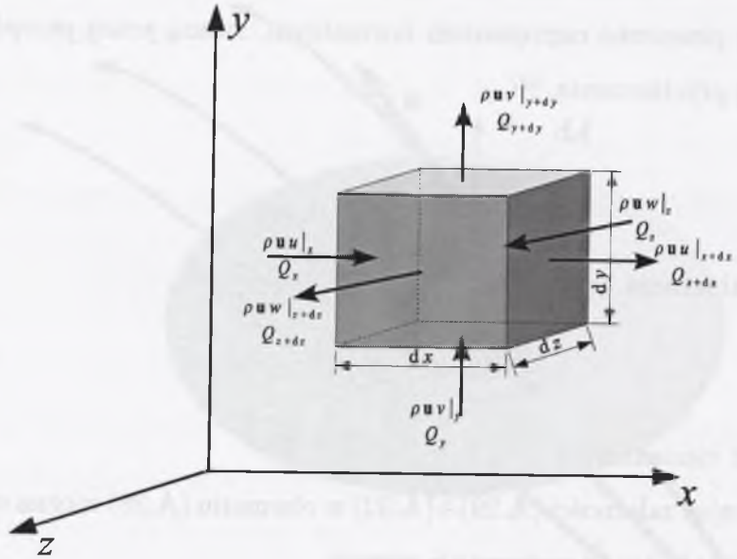
$$\frac{\delta}{\mathrm{d}\tau}Q - \frac{\delta}{\mathrm{d}\tau}(W_s + W_\mu) = \tag{A.33}$$
$$= \int_A \left(e_u + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + gz + \frac{p}{\rho}\right)\rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial\tau}\int_V e\rho\mathrm{d}V$$

Uwzględnienie faktu, że energia wewnętrzna powiększona o pracę przetłaczania jest entalpią $h = e_u + \frac{p}{\rho}$, pozwala przedstawić powyższe równanie w postaci:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}\tau}Q - \frac{\delta}{\mathrm{d}\tau}(W_s + W_\mu) = \tag{A.34}$$
$$= \int_A \left(h + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + gz\right)\rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}A + \frac{\partial}{\partial\tau}\int_V e\rho\mathrm{d}V$$

Równanie (A.34) stanowi sformułowanie I zasady termodynamiki dla objętości kontrolnej V.

Różniczkową postać równania można uzyskać podobnie jak w przypadku zasady zachowania masy czy pędu. Dla elementarnej objętości płynu $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (rys. A.7) można zapisać poszczególne człony równania (A.28). I tak, ciepło pochłonięte przez element jest równe:



Rys. A.7. *Przepływ ciepła przez elementarną objętość kontrolną*
Fig. A.7. *Heat transfer through a differential control volume*

$$\delta Q = \left(Q_x - Q_{x+\mathrm{d}x}\right) + \left(Q_y - Q_{y+\mathrm{d}y}\right) + \left(Q_z - Q_{z+\mathrm{d}z}\right) + \mathrm{d}Q_v \qquad \text{(A.35)}$$

gdzie Q_v to ciepło wydzielone w wewnętrznych źródłach ciepła o wydajności odniesionej do jednostki objętości $\dot{q}_v$.

Wykorzystując prawo Fouriera oraz rozkładając Q_{j+dj} w szereg Taylora:

$$Q_j - Q_{j+dj} = -\frac{\partial Q}{\partial j}\,\mathrm{d}j, \qquad j = \{x, y, z\},$$

można sprowadzić zależność (A.35) do postaci:

$$\delta Q = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}_v\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(A.36)}$$

czyli

$$\delta Q = \left[\nabla\cdot(k\nabla T) + \dot{q}_v\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(A.37)}$$

gdzie k oznacza izotropowy współczynnik przewodzenia ciepła.

Pomijając pracę użyteczną, praca wykonana przez element przeciwko naprężeniom stycznym, normalnym oraz siłom masowym przedstawia się następująco:

$$\delta W = \delta W_x + \delta W_y + \delta W_z \qquad \text{(A.38)}$$

gdzie δW_x, δW_y oraz δW_z oznaczają pracę wykonaną przeciw siłom działającym odpowiednio w kierunkach x, y, z. Prace te opisane są zależnością (rys. A.7, A.3):

$$\begin{aligned}
\delta W_x &= -\left[\rho u g_x + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau \\
\delta W_y &= -\left[\rho v g_y + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(A.39)} \\
\delta W_z &= -\left[\rho w g_z + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

gdzie g_x, g_y, g_z oznaczają składowe jednostkowych sił masowych.

A więc:

$$\begin{aligned}
\delta W = -\Bigg[&\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx} + v\sigma_{yy} + w\tau_{yz}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_{zz}) + \rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{g}\Bigg]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(A.40)}
\end{aligned}$$

Przyrost całkowitej energii rozpatrywanego, różniczkowego elementu płynu może zostać wyprowadzony w podobny sposób i po wykorzystaniu pochodnej substancjalnej oraz po pominięciu energii potencjalnej wyraża się zależnością:

$$\mathrm{d}E = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left[e_u + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \qquad \text{(A.41)}$$

Uwzględniając równania (A.37),(A.40) oraz (A.41) w równaniu bilansu energii (A.28) można uzyskać różniczkową postać bilansu energii dla elementu płynu:

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left[e_u+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]=\nabla\cdot(k\nabla T)+\dot{q}_v+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz})+\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}+v\sigma_{yy}+w\tau_{yz})+ \tag{A.42}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\sigma_{zz})+\rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{g}$$

Powyższe równanie zwane jest też *bilansem energii całkowitej*. Jak wynika z równań Naviera-Stokesa (A.10):

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left[\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]=u\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+ \tag{A.43}$$
$$+v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial x}\right)+\rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{g}$$

Po odjęciu równania (A.43) od (A.42) otrzymuje się postać równania zachowania energii:

$$\rho\frac{\mathrm{D}e_u}{\mathrm{D}\tau}=\nabla\cdot(k\nabla T)+\dot{q}_v+\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+$$
$$+\tau_{yx}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\tau_{zy}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\tau_{xz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{A.44}$$

Jak już wspomniano wcześniej, pracę związaną z pokonaniem naprężeń normalnych σ można podzielić na pracę przetłaczania oraz pracę związaną z tarciem wewnętrznym płynu. Po względnieniu zależności Stokesa (A.11) oraz (A.12) powyższe równanie można zapisać następująco:

$$\rho\frac{\mathrm{D}e_u}{\mathrm{D}\tau}=\nabla\cdot(k\nabla T)+\dot{q}_v-p\,\nabla\cdot\mathbf{u}+\Phi \tag{A.45}$$

Trzeci składnik prawej strony równania związany jest z pracą przetłaczania, czwarty natomiast, Φ, z pracą wykonaną przeciwko siłom tarcia. Składnik Φ, wynikający z rozpraszanej pracy przeciwko naprężeniom stycznym i w części normalnym, opisany jest zależnością:

$$\Phi=2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \tag{A.46}$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{u})^2$$

Człon ten zwany jest również *funkcją dyssypacyjną* czy też *dyssypacyjnym źródłem ciepła*.

Jak wiadomo, entalpia jest równa energii wewnętrznej powiększonej o pracę przetłaczania $h=e_u+p/\rho$. Po wykorzystaniu równania ciągłości (A.5) pochodna substancjalna energii wewnętrznej przedstawia się następująco:

$$\frac{\mathrm{D}e_u}{\mathrm{D}\tau}=\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}\tau}-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau}-\frac{1}{\rho}p\,\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{A.47}$$

A zatem równanie bilansu energii (A.45) można wyrazić poprzez zmianę entalpii:

$$\rho\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}\tau}=\nabla\cdot(k\nabla T)+\dot{q}_v+\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}\tau}+\Phi \tag{A.48}$$

gdzie h oznacza entalpię.

Zaznaczyć tu warto, iż pochodna substancjalna ciśnienia ma znaczenie tylko w przepływach przydźwiękowych i ponaddźwiękowych. W większości przepływów rzeczywistych człon ten jest zawyczaj pomijany. Dla gazów doskonałych entalpię można przedstawić jako iloczyn pojemności cieplnej właściwej przy stałym ciśnieniu c_p i temperatury. A więc:

$$\rho c_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}\tau}=\nabla\cdot(k\nabla T)+\dot{q}_v+\Phi \tag{A.49}$$

Jeżeli ponadto uwzględnimy stałość współczynnika przewodzenia ciepła, to uzyskamy następującą postać równania bilansu energii dla gazów doskonałych:

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}\tau} = a\nabla^2 T + \frac{1}{\rho c_p}\dot{q}_v + \frac{1}{\rho c_p}\Phi \tag{A.50}$$

gdzie a oznacza współczynnik wyrównania temperatury.

W przypadku przepływu płynów nieściśliwych, z uwagi na równanie ciągłości (A.6), ostatni składnik równania opisującego rozpraszaną pracę płynu Φ (A.46) jest równy zeru. Ponadto pojemności cieplne właściwe przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu niewiele się różnią, ($c_v \simeq c_p = c$), a więc:

$$\rho c\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}\tau} = \nabla^2 T + \dot{q}_v + \Phi \tag{A.51}$$

oraz

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \tag{A.52}$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]$$

Podobnie jak pochodna substancjalna ciśnienia, rozpraszana praca elementu jest pomijalnie mała przy niewielkich prędkościach przepływu i najczęściej może być zaniedbana. Jedynie w przypadkach, gdy płyn osiąga prędkości przydźwiękowe i ponaddźwiękowe, pominięcie składnika Φ może być źródłem błędów. Dla niewielkich prędkości równanie (A.51) można zatem zapisać następująco:

$$\rho c\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}\tau} = \nabla^2 T + \dot{q}_v \tag{A.53}$$

Jest to dobrze znane w przepływie ciepła równanie Fouriera-Kirchhoffa [20]. Jak widać, rozwiązanie tego równania wymaga znajomości pola prędkości płynu, a ta z kolei rozwiązania równań ciągłości i bilansu pędu.

Literatura

[1] A.K. Alekseev. The solution of an inverse retrospective problem of convection. *High Temperature*, 37:552–558, 1999.

[2] J. Banaszek and M. Rebow. Współczesne spojrzenie na wiarygodność symulacji komputerowej sprzężonych zagadnień cieplno-przepływowych - teoria i przykłady. In *materiały XII Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy*, volume 1, Kraków, 2004.

[3] J. V. Beck et al. *Inverse Heat Conduction: Ill Posed Problems.* Wiley Intersc., New York, 1985.

[4] J.V. Beck. Criteria for comparison of methods of the solution of the inverse heat conduction problems. *Nucl. Eng. Design*, 53:11–22, 1979.

[5] R. A. Bialecki. *Solving Heat Radiation Problems Using the Boundary Element Method.* Computational Mechanics Publications, Southampton UK, Boston USA, 1993.

[6] R.A. Bialecki, E. Divo, A.J. Kassab, and R.A.M. Lahcen. Explicit calculation of smoothed sensitivity coefficients for linear problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, pages 1–25, 2001.

[7] J. Bokar and M.N. Özisik. Inverse analysis for estimating the time varying inlet temperature in laminar flow inside a parallel plate duct. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 38:39–45, 1995.

[8] J. Dennis and R. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.* Prentice Hall, 1983.

[9] F.H.R. Franca et al. Inverse boundary design combining radiation and convection heat transfer. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME*, 123:884–891, 2001.

[10] S. J. Gdula et al. *Przewodzenie ciepła.* Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1984.

[11] C. Graczyk. *Laboratorium miernictwa cieplnego.* Politechnika Śląska Skrypty Uczelniane, Gliwice, 1981.

[12] R. Gryboś. *Podstawy mechaniki płynów.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1989.

[13] R. Gryboś. *Mechanika płynów.* Politechnika Śląska, skrypty uczelniane, Gliwice, 1996.

[14] K. Grysa et al. Solving the inverse thermal stresses problems with the use of Helmholtz equation. In *ZAMM 80*, Germany, 2000.

[15] C.H. Huang and W.C. Chen. A three-dimensional inverse forced convection problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *International Journal Of Heat and Mass Transfer*, 43:3171–3181, 2000.

[16] C.H. Huang and M.N. Özisik. Inverse problem of determining unknown wall heat flux in laminar flow through a parallel plate. *Numerical Heat Transfer*, 21:55–70, 1992.

[17] R.I. Issa. Solution of implicitly discretized fluid flow equation by operator-splitting. *J. Comput. Physics*, 62:40–65, 1985.

[18] S. Kakaç. *Handbook of Single Phase Convective Heat Transfer.* John Wiley and Sons, NY, 1987.

[19] S. Kakaç. *Convective Heat Transfer. Second Edition.* CRC Press, Boca Raton, 1995.

[20] E. Kostowski. *Przepływ ciepła.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2000.

[21] L. A. Kozdoba and P.G Kruzovsky. Methods for solving inverse heat transfer problems. *Naukova Dumka*, 1982.

[22] K. Kurpisz and A.J. Nowak. *Inverse Thermal Problems.* Computational Mechanics Publications, 1995.

[23] H.Y. Li and W.M. Yan. Inverse convection problem for determining wall heat flux in annular duct flow. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME*, 122:460–464, 2000.

[24] J.H. Lin et al. The inverse estimation of the thermal boundary behavior of a heated cylinder normal to a laminar air stream. *International Journal Of Heat and Mass Transfer*, 43:3991–4001, 2000.

[25] F.B. Liu and M.N. Özisik. Estimation of inlet temperature profile in laminar duct flow. *Inverse Problems in Engineering*, 3:131–141, 1996.

[26] F.B. Liu and M.N. Özisik. Inverse analysis of transient turbulent forced convection inside parallel plates. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 39:2615–2618, 1996.

[27] H. Machado and H.R.B. Orlande. Inverse analysis of estimating the timewise and spacewise variation of the wall heat flux in a parallel plate channel. *Int. J. Num. Meth. Heat and Fluid Flow*, 7:696–710, 1997.

[28] T. Metzger et al. Experimental design for thermal dispersion estimation in porous media. In *Proceedings of EUROTHERM Seminar 68 "Inverse Problems and Experimental Design in Thermal and Mechanical Engineering*, Poitters, 2001.

[29] W.J. Minkowycz et al. *Handbook of Numerical Heat Transfer.* J. Wiley and Sons, 1988.

[30] A. Nawrat and J. Skorek. Analiza wpływu położenia punktów pomiarów temperatury na wyniki identyfikacji cieplnego oporu kontaktowego w procesie ciągłego odlewania metali. In *materiały XII Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy*, Kraków, 2004.

[31] A. Nawrat and J. Skorek. Applying sensitivity analyis for identification of thermal resistance in continous casting of metals by inverse approach. *Archives of Thermodynamics*, 25:3–19, 2004.

[32] A. Nawrat and J. Skorek. Inverse finite element technique for identification of thermal resistance of gas-gap between the ingot and mould in continous casting of metals. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 12:141–156, 2004.

[33] D.A. Nield and Bejan A. *Convection in Porous Media.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[34] M.N. Özisik and H.R.B. Orlande. *Inverse Heat Transfer.* Taylor and Francis, 2000.

[35] H.M. Park and O.Y. Chung. Inverse natural convection problem of estimating wall heat flux using a moving sensor. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME*, 121:828–836, 1999.

[36] H.M. Park and O.Y. Chung. On the solution of an inverse natural convection problem using various conjugate gradient methods. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 47:821–842, 2000.

[37] H.M. Park and W.S. Jung. The Karhunen-Loeve Galerkin method for the inverse natural convection problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:155–167, 2001.

[38] S.V. Patankar. A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer*, 4:409–425, 1981.

[39] S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows. *Int. J.Heat Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.

[40] C. Prakash. An improved control volume finite element method for heat and mass transfer, and for fluid flow using equal order velocity-pressure interpolation. *Numerical Heat Transfer*, 9:253–276, 1986.

[41] M. Prud'homme and T.H. Nguyen. Solution of inverse free convection problems by conjugate gradient method: Effects of Rayleigh number. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:2011–2017, 2001.

[42] M. Raynaud and J.V. Beck. Methodology for comparison of inverse heat conduction problems. *ASME J.Heat Transfer*, 110:30–37, 1988.

[43] C. J. Roy. Verification of codes and solutions in computational simulation. In *proc. of Computational Heat Transfer Conference*, Norway, 2004.

[44] R.S. Sampath and N. Zabaras. Inverse thermal design of thermomagnetically driven Boussinesq flows. In *Proceedings of 34 National Heat Transfer Conference*, Pittsburgh, 2000.

[45] Y. Sheng et al. A modification to the simple method for buoyancy driven flows. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 33:65–78, 1998.

[46] J. Skorek. *Zastosowanie metod stochastycznych i spektralnych do rozwiązywania granicznych zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła.* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Gliwice, 1994.

[47] J. Skorek and A. Nawrat. A novel front tracking algorithm in fem modelling of continous casting of pure metals. *Archives of Thermodynamics*, 23:21–41, 2002.

[48] J.C. Slattery. *Advanced Transport Phenomena.* Cambridge University Press, 1999.

[49] B. Staniszewski. *Wymiana ciepła podstawy teoretyczne.* Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1963.

[50] J. Su et al. Estimation of unknown wall heat flux in turbulent circular pipe flow. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 27:945–954, 2000.

[51] J. Szargut. *Termodynamika.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2000.

[52] J. Szargut et al. *Modelowanie numeryczne pól temperatury.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1992.

[53] I. Szczygieł. *Estimation of Boundary Conditions in Convection Heat Transfer Problems.* PhD thesis, Silesian Technical University, Gliwice, Poland, 1995.

[54] I. Szczygieł. Estimation of the boundary conditions in convectional heat transfer problems. In *Proceedings of National Heat Transfer Conference*, Baltimore, 1997.

[55] I. Szczygieł. Utilization of the algor packagein solution of the inverse heat convection problems. In *Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, Cracow, 1998.

[56] I. Szczygieł. Inverse heat convection problems. In *Proceedings of The First UCF-SUT Seminar*, Niedzica Castle, 2002.

[57] I. Szczygieł. Identification of boundary velocity basing on internal temperature measurements - sensitivity analysis. In *Proc of the Inverse Problems in Engineering Symposium*, Tuscaloosa, USA, 2003.

[58] I. Szczygieł. The influence of the low reynolds number flows on the heat transfer phenomena. In *proc. of the II International Conference on Contemporary Problems of Thermal Engineering*, Gliwice-Ustroń, 2004.

[59] I. Szczygieł. Odwrotne zagadnienia konwekcyjnej wymiany ciepła. In *materiały XII Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy*, Kraków, 2004.

[60] I. Szczygieł. Sensitivity analysis of the temperatyre-velocity coupling of the heat convection. In *proc. of Computational Heat Transfer Conference*, Norway, 2004.

[61] I. Szczygieł. Temperature-velocity coupling of the convective heat transfer - sensitivity analysis. *Numerical Heat Transfer*, 2005. w druku.

[62] I. Szczygieł and A. Fic. Identification of the boundary velocity velocity basing on the internal temperature measurements. In *proc of the CHMT 2001 Conference*, Rio de Janeiro, Brasil, 2001.

[63] I. Szczygieł and A. Fic. Odwrotne zagadnienia konwekcyjnej wymiany ciepła w warunkach przepływów potencjalnych. In *materiały XI Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy*, Gliwice, Szczyrk, 2001.

[64] I. Szczygieł and A. Fic. On the sensitivity coefficients in inverse formulation of the heat convection diffusion problems with potential flow. In *proc of the ECCM 2001 Conference*, Cracow, Poland, 2001.

[65] I. Szczygieł and A. Fic. Inverse convection-diffusion problem of estimating boundary velocity based on internal temperature measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 10:271–291, 2002.

[66] J. Taler. *Teoria i praktyka identyfikacji procesów przepływu ciepła.* Ossolineum, Wrocław, Warszawa, Kraków, 1995.

[67] J. Taler and P. Duda. *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2003.

[68] W.Q. Tao et al. A novel segregated algorithm for incompressible flow and heat transfer problems clear (coupled equation algorithm revised)

part 1: Mathematical formulation and solution procedure. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 45:1–17, 2004.

[69] W.Q. Tao et al. A novel segregated algorithm for incompressible flow and heat transfer problems clear (coupled equation algorithm revised) part 2: Application examples. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 45:19–48, 2004.

[70] J.P. van Doormaal and G.D. Raithby. Enhancement of simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7:147–163, 1984.

[71] J.P. van Doormaal and G.D. Raithby. An evaluation of the segregated approach for predicting incompressible fluid flow. *ASME paper 85-HT-9*, 1985.

[72] J.R. Welty et al. *Fundamentals of momentum, heat and mass transfer.* John Wiley and Sons, New York, 2001.

[73] G.Z. Yang and N. Zabaras. The adjoint method for an inverse domain problem in the directional solidification of binary alloys. *Journal Of Computational Physics*, 140:432–452, 1998.

[74] G.Z. Yang and N. Zabaras. An adjoint method for the inverse design of solidification processes with natural convection. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 42:1121–1144, 1998.

[75] B. Yu et al. A modified pressure correction scheme for the simpler method, msimpler. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 39:439–49, 2001.

[76] O.C. Zienkiewicz. *Finite Element Method.* Mc Graw Hill, 1991.

ANALIZA WYBRANYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH KONWEKCJI

Streszczenie

Praca poświęcona jest problemowi rozwiązywania zagadnień odwrotnych konwekcyjnej wymiany ciepła. Rozpatrywany jest przypadek sprzężonych zagadnień odwrotnych, w których wielkości identyfikowana i mierzona opisane są odrębnymi równaniami. Pozwala to na odtwarzanie wielkości, której pomiary są kłopotliwe czy też kosztowne, przy wykorzystaniu pomiarów innej wielkości, łatwiejszych lub tańszych w realizacji.

W szczególności opracowano metody identyfikacji normalnej prędkości brzegowej w oparciu o pomiary temperatury wewnętrznej płynu dla przypadku przepływu potencjalnego oraz przepływu wirowego płynu nieściśliwego, opisanego równaniami Naviera-Stokesa. Metody te pozwalają na identyfikację zarówno wyrównanej prędkości brzegowej, jak i na odtwarzanie jej profilu. Do numerycznego rozwiązania problemu zastosowano bilansowe formułowanie Metody Elementów Skończonych. Do rozwiązania źle uwarunkowanego zadania odwrotnego wykorzystano ideę współczynników wrażliwości oraz metodę Levenberga-Marquardta.

W pracy przedstawiono podstawowe założenia wspomnianych metod oraz ich szczegółowe algorytmy. Przeprowadzono wielowariantowe obliczenia zarówno wyznaczania rozkładów współczynników wrażliwości, jak i rozwiązania pełnego zagadnienia odwrotnego.

ANALYSIS OF INVERSE HEAT CONVECTION PROBLEMS

Summary

The present work is devoted to the inverse problems of convection heat transfer. The coupled inverse problem is investigated: the desired quantity is described by the separate equation than the measured one. Such formulation allows to avoid difficult or expensive measurements of the desired quantity. In particular, the methods for estimation the boundary velocity basing on internal temperature of fluid measurements are presented. They are elaborated for potential flow as well as for incompressible, Navier-Stokes equations described flows. They allow to identify both uniform boundary velocity and the profile of boundary velocity. For the solution of inverse problem the sensitivity coefficients idea is employed. For the stabilization purposes the Levenberg-Marquardt Method is used.

In the presented work the basic assumptions as well as full algorithms of mentioned methods are presented. Several numerical examples presenting distributions of sensitivity coefficients are included. The solutions of whole inverse procedure is also presented.

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice; tel. (0-32) 237-13-81
http://wydawnictwo.polsl.pl

Sprzedaż i Marketing
tel. (0-32) 237-18-48
wydawnictwo_mark@polsl.pl

Nakł. 100+50	Ark. wyd. 9	Ark. druk. 9	Papier offset. 70x100,80g
Oddano do druku 7.03.2005 r.	Podpisano do druku 7.03.2005 r.		Druk ukończ. w marcu 2005 r.

Wydrukowano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1
zam. 115/05

Książki Wydawnictwa można nabyć w księgarniach

GLIWICE

- Punkt Sprzedaży – ul. Akademicka 2 (237-17-87)
- „FORMAT" – Akademicka 5 (architektura i budownictwo)
- „LAMBDA" – ul. Akademicka 2 (237-21-40)
- Punkt Sprzedaży – ul. Akademicka 16 (automatyka, elektronika, informatyka)
- „ŻAK" – ul. Kaszubska

RYBNIK

- „ORBITA" – ul. Rynek 12
- „NEMEZIS" – ul. Hallera 26

ŁÓDŹ

- „POLITECHNIKA 100" – ul. Żeromskiego 116 PŁ.
- Hurtownia „BIBLIOFIL" – ul. Jędrowizna 9a (042) 679-26-77

KATOWICE

- Punkt Sprzedaży – ul. Krasińskiego 8
- Hurtownia „DIK" – ul. Dulęby 7 (032) 204-82-30
- Hurtownia „JERZY" – ul. Słoneczna 24 (258-99-58)

TYCHY

- „I Ja Tours" - ul. Piłsudskiego 10 (217-00-91 w.130)

ZABRZE

- Punkt Sprzedaży – ul. Roosevelta 26

KRAKÓW

- Techniczna – ul. Podwale 4 (012) 422-48-09
- Punkt Sprzedaży WND – AGH, Al. Mickiewicza 30

GDAŃSK

- EKO-BIS – ul. Dyrekcyjna 6 (058) 305-28-53

WARSZAWA

- Studencka – Pl. Politechniki 1 (022) 628-77-58
- Techniczna - ul. Kaliskiego 15 (022) 666-98-02
- Techniczna – ul. Świętokrzyska 14
- MDM – ul. Piękna 31

BIAŁYSTOK

- Dom Książki (Księgarnia 84) – ul. Wiejska 45 c

POZNAŃ

- Księgarnia „POLITECHNIK" – ul. Piotrowo 3 (061) 665-23-24
- Księgarnia Techniczna – ul. Półwiejska 28 (061) 659-00-38

NOWY SĄCZ

- Księgarnia „ATOM" – ul. Hoffmanowej 3 (018) 446-08-72