

# DEUTSCHE BAUZEITUNG

## MITTEILUNGEN ÜBER ZEMENT, BETON- UND EISENBETONBAU

\*\*\*\*\*  
UNTER MITWIRKUNG DES VEREINS DEUTSCHER PORTLAND-  
CEMENT-FABRIKANTEN UND DES DEUTSCHEN BETON-VEREINS

18. Jahrgang 1921.

NO. 17.

### Bemerkenswerte Brückenausführungen des Auslandes in Eisenbeton II\*).

Hierzu die Abbildungen auf S. 132 und 133.

#### 4. Brücke über den Mersey bei Warrington.



In der am Mersey- und Manchester-Schiffahrts-Kanal gelegenen Industriestadt Warrington ist nach dem Kriege eine als elastischer Bogen ausgebildete Straßenbrücke erbaut worden, die den Fluß mit einer flachen Spannung von rd. 41<sup>m</sup> überschreitet und durch die Einschaltung vorläufiger Gelenke im Scheitel und Kämpfer

nach Bauweise Considère während der Ausführung, sowie durch die Benutzung von über der Brücke liegenden Trägern, an denen mit Rücksicht auf die geringe, zur Verfügung stehende Höhe über dem für die Schifffahrt frei zu haltenden Durchfahrtsprofil die Schalung aufgehängt werden mußte, Interesse verdient. Wir entnehmen die nachstehende Beschreibung und die beigegebenen Abbildungen der englischen Zeitschrift „Engineering“ vom 11. Februar d. J.\*\*).

Die Brücke ist das 6. Bauwerk an der gleichen

Stelle, die einen wichtigen, alten Verkehrsweg darstellt. Holz- und Steinbrücken haben hier mehrfach abgewechselt. Das letzte Bauwerk, eine Steinbrücke, stand seit 1837 im Verkehr. Ihr baulicher Zustand war zwar gut, ihre sehr geringe Breite von nur 7,30<sup>m</sup> genügte aber dem Verkehrsbedürfnis in keiner Weise mehr. Auch durch Auskragungen war den Anforderungen nicht zu entsprechen, es wurde daher ein Neubau in 24,4<sup>m</sup> Breite beschlossen. Es sprach bei diesem Entschluß auch der Umstand mit, daß die vorhandenen Zwischenpfeiler der Schifffahrt hinderlich waren, sodaß der Neubau in einer einzigen Spannung beschlossen wurde. Er fällt in seiner Lage mit dem alten Bauwerk zusammen, sodaß die neue Brücke in zwei Teilen ausgeführt werden mußte. Der zuerst fertig gestellte Teil hatte den Gesamtverkehr bis nach Abbruch der alten Brücke und Fertigstellung des zweiten Brückenstreifens aufzunehmen.

Von den für den Neubau eingeforderten Entwürfen

\*) Vergl. No. 4 der „Mitteilungen“.

\*\*\*) Eine auszügliche Wiedergabe auch in „Lc Génie civil“ vom 30 Juli d. J.

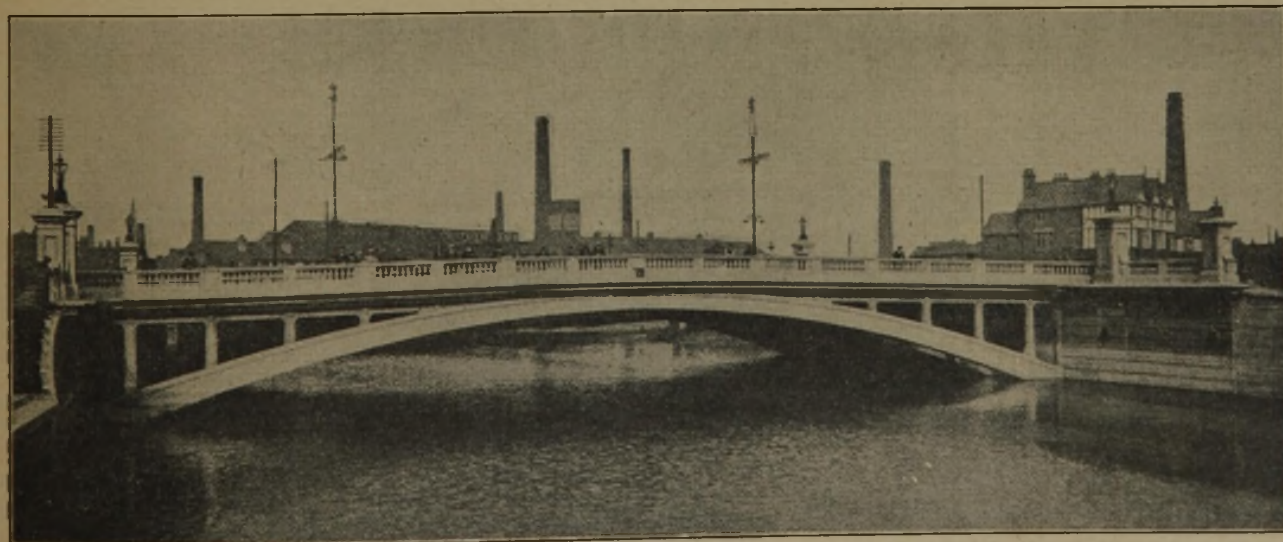


Abbildung 1. Ansicht der fertigen Brücke über den Mersey in Warrington.



wurde derjenige der Considère-Construction-Comp. zur Ausführung gewählt, der einen elastischen Bogen mit die Fahrbahn tragenden Stützen vorsieht, dessen gefällige Gesamterscheinung unsere Abbildung 1 erkennen läßt. Die Brückenbreite ist in eine Anzahl von Einzelrippen aufgelöst, über die sich die Fahrbahntafel streckt. Diese Rippen haben, wie aus Abbildung 2, S. 132 hervorgeht, eine Längsbewehrung parallel zu den beiden Leibungen von je 15 Rundeisen erhalten und 8 durchlaufende Spiralen von 20 cm Durchm. In der Nähe der Kämpfer treten noch je 7 weitere Längseisen dazu. Verteilungseisen und Bügel vervollständigen die Bewehrung. Der Schub, den jede Rippe auf die Widerlager ausübt, steigt bis 350 t, ist also sehr groß. Dementsprechend sind die ebenfalls aus Abbildung 2 ersichtlichen aufgelösten Widerlager ausgebildet. Sie bestehen aus je 2 Streben für jede Rippe, die unter sich durch Querversteifungen verbunden sind und sich auf eine durchgehende geneigte Fundamentplatte stützen. Diese Platte ruht unmittelbar auf dem gewachsenen Boden, wird aber noch von in den festen Tonboden eingerammten Eisenbetonpfählen — 9 für jede Rippe — getragen, die möglichst parallel zu der Mittelkraft aus Eigengewichtsschub der Brücke und Erdlast auf die Fundamentplatte gerichtet sind. Um einer Verschiebung des ganzen Widerlagers noch weiter entgegen zu wirken, ist die Platte am oberen Ende senkrecht aufgebogen. Die Platte liegt mit ihrem tiefsten Punkt 2,74 m unter NW., sodaß zu ihrer Ausführung die Baustelle mit einem Fangdamm umschlossen werden mußte, zu dessen Herstellung eiserne Spundwände verwendet wurden.

An die Brückenwiderlager schließen sich Ufermauern an, die als Winkelstützmauer in Eisenbeton ausgebildet sind, die auf Eisenbetonwand stehen und mit Eisenbetonankern gehalten werden.

Um eine zuverlässige Berechnung der Rippen durchführen zu können und die Wirkung von Schwindspannungen des Betons, sowie von den anfänglichen Setzungen des Bauwerkes auszuschalten, ist ein Verfahren angewendet, wie es Considère schon 1910 empfohlen hat<sup>\*\*\*</sup>). Es besteht in der Einschaltung vorläufiger Gelenke im Scheitel und an den Kämpfern, die erst nach Aufbringung der gesamten Eigenlast der Brücke sorgfältig geschlossen wurden. Für die tote Last wirkt also dieser Bogen als Dreigelenkbogen und läßt sich demgemäß genau berechnen. Die Brücke kann sich unter dem Einfluß des Eigengewichtes frei bewegen und setzen, ohne Gefahr der Ueberanstrengung der Rippen und von Ribbildung in diesen.

Die vorläufigen Gelenke sind dadurch geschaffen, daß der Querschnitt der Rippe an den 3 Stellen auf nur 0,23 qm herabgesetzt wird durch rechteckige Ausklinkungen (vergl. Abbildung 2). Dieser Querschnitt muß natürlich, um Ueberanstrengung zu vermeiden, stark bewehrt werden. Es sind hier noch besondere

Längseisen und Spiralen von nur 2,5 cm Ganghöhe eingelegt. Es können so die Pressungen aufgenommen werden, die bis 105 kg/cm<sup>2</sup> steigen. Mit Rücksicht auf den plötzlichen Querschnittswechsel ist außer der Druckbewehrung auch eine kräftige Schubbewehrung an diesen Stellen erforderlich. Das Bild eines Gelenkes zeigt Abbildung 3, S. 133.

Zur Berechnung der Wirkung der Verkehrslasten wurden Einflußlinien benutzt und zwar für 7 Querschnitte in gleichen Abständen. Zu dem Einfluß der Lasten tritt noch der der Temperatur, der für  $\pm 17^\circ \text{C}$ . berücksichtigt wurde.

Die Ausführung der Brücke war durch die Forderung erschwert, daß für die Schifffahrt eine lichte Durchfahrts Höhe in der Mitte der Brücke von 9,14 m verlangt war, die während des Baues um nicht mehr als 18 cm eingeschränkt werden durfte. Eine Einrüstung der Rippen von unten war daher hier nicht möglich. Es wurden daher über den Rippen 15 m weit gespannte, aus Eisen und Holz zusammengesetzte Fachwerkträger verlegt, an denen die eigentliche Lehre des mittleren Bogenteiles nebst Schalung aufgehängt werden konnte. Dem Bogen wurde dabei im Scheitel eine Ueberhöhung von 10 cm gegeben, um Setzungen und Durchbiegungen auszugleichen. Unmittelbar nach der Ausrüstung zeigte der Bogen eine Senkung von 7,5 cm. Nach 18 Monaten nach Verkehrsüberleitung war das vorgesehene Maß von 10 cm erreicht. Abb. 4 u. 5, S. 133, zeigen die Ausführung.

Um der Fahrbahn auch freie Bewegungsmöglichkeit zu lassen, waren über den Gelenken in dieser auch durchgehende Schlitze angeordnet. Außerdem erhielten die Fahrbahnstützen in Richtung der Brückenachse möglichst geringe Breite, sodaß sie den Bewegungen leicht folgen konnten.

Um Schwindspannungen im Beton nach Möglichkeit auszuschalten, wurde die Rippenlänge außerdem in eine Reihe von Abschnitten geteilt, die getrennt für sich betoniert wurden. Erst nach Betonierung der ganzen Rippe wurden diese Aussparungen geschlossen und die vorläufigen Gelenke, wie schon erwähnt, erst nach Fertigstellung des ganzen Bauwerkes.

Die Brücke enthält im Ganzen 242 t Eisen und 1835 cbm Beton.

Bei einer Probelastung der Brücke wurde diese zuerst in der Mitte möglichst dicht gestellt mit 5 Straßenbahnwagen zu je 12 t und 2 Dampfwalzen von 20 und 15 t belastet. Die Scheiteldurchbiegung war für diese Gesamtlast von 95 t nur 0,8 mm. Beim raschen Ueberfahren mit einer 20 t-Walze, gefolgt von 5 Straßenbahnwagen zu 12 t, also 80 t Gesamtlast, war die Durchbiegung nur halb so groß, die größte Ausschwingung infolge der Vibration nur wieder 0,8 mm. Das elastische Verhalten der Brücke war also ein gutes. — Fr. E.

<sup>\*\*\*</sup>) „Engineering“ vom 9. Mai 1910.

## Ueber Betonfußböden in Nutzbauten.

Von Landesbauinspektor a. D. Winkelmann in Wiesbaden.



Die Anforderungen, die an Fußböden gestellt werden müssen, sind verschieden, je nachdem, ob es sich um Fußböden in besser ausgestatteten Gebäuden, in einfachen Wohngebäuden oder in nicht für Wohnzwecke benutzten Gebäuden handelt. Für Gebäude mit besserer Ausstattung rechnet man von vornherein mit höheren Kosten des Fußbodens als für reine Nutzbauten: bei ersteren spielt neben der Güte des Bodens das Aussehen eine große Rolle, für die anderen tritt dieser Gesichtspunkt in den Hintergrund und es wird in erster Linie nach den Kosten der verschiedenen Arten des Fußbodenbelages gefragt.

Für die Beurteilung der Kosten bzw. der Wirtschaftlichkeit einer Fußbodenart sind aber nicht nur die Kosten der ersten Herstellung in Betracht zu ziehen, sondern auch die Kosten späterer Ausbesserungen und seine Dauer, d. h. der Zeitraum, nach dem die gänzliche Erneuerung erforderlich wird. Man hat daher für Nutzbauten hauptsächlich zu erwägen, welche Bauart bei geringen Anlagekosten die größte Dauer verbürgt. Dieser Gesichtspunkt gewinnt noch eine besondere Bedeutung dadurch, daß in den meisten Fällen (namentlich für gewerbliche Gebäude) die Ausbesserungen und noch mehr die Erneuerung des Bodens mit den

unliebsamsten Störungen und Unterbrechungen des Betriebes oder Verkehrs verbunden sind.

Für die nicht zu Wohnzwecken benutzten Gebäude pflegt von der Verwendung des Holzes zum Fußboden abgesehen zu werden; der Steinfußboden bildet die Regel, so namentlich für Werkstätten, Fabrikräume, Lagerräume, Kesselhäuser, Wagen- und Automobilhallen, Küchen, Wasch- und Baderäume, Flure, Treppen, Räume für Heizungsanlagen, Keller, sodann für landwirtschaftliche Gebäude, für Höfe, Torfahrten und Gehwege im Freien.

Der Steinfußboden kann aus den verschiedensten Stoffen hergestellt werden. Viele derselben haben aber eine für lebhaften oder schweren Verkehr zu geringe Härte; sie werden schnell abgenutzt, geben viel Staub und müssen oft ausgetauscht und erneuert werden, wodurch sie auf die Dauer kostspieliger als die Böden aus härterem Stoff werden. Die härtesten Stoffe für diesen Zweck sind einzelne Natursteine wie Granit, Porphyrt, Basalt, von denen die beiden ersten aber teuer sind, während der letztere zum Glattwerden neigt. Auch kommen die Natursteine mehr für Flächen außerhalb der Gebäude in Betracht, weniger für Innenräume, wo man nicht gern Pflaster als Fußboden verwendet. Zementfußböden nutzen sich bei starkem Verkehr



schnell ab und entwickeln einen für Menschen, Tiere und Maschinen schädlichen Staub. Man hat wohl darin Abhilfe gesucht, daß man dem Zement-Estrich oder den Feinbeton-Mischungen härtere Stoffe wie Eisenfeilspäne oder Hartsteingrus oder auch zähe Stoffe beimischt; jedoch sind derartige Mittel meist nicht von durchgreifender Wirkung, weil die Zementmörtel- bzw. Beton-Teilchen doch wieder stärker angegriffen werden als die Teilchen der hinzugesetzten härteren Stoffe. Mittels der Druckwasser-Pressen hat man zwar widerstandsfähigere Zement- und Betonplatten erzielt, aber die damit erreichte Verbesserung konnte nur mit einer erheblichen Verteuerung der Platten erkauft werden.

Sodann ist in vielen Fällen, besonders für manche gewerbliche Betriebe, die Forderung zu stellen, daß der Fußboden unempfindlich ist gegen schädlich wirkende Stoffe wie Säuren, Laugen, Öle und andere Flüssigkeiten, durch die er beschmutzt oder zerstört werden kann. Damit in Verbindung steht die weitere Forderung, daß der Fußboden leicht zu reinigen sein soll. Nun sind wohl Fußbodenbeläge hergestellt, die undurchlässig für Flüssigkeiten sind, aber sie sind ziemlich teuer und kommen deshalb für reine Nutzbauten wenig in Frage. Manche von ihnen ertragen keinen schweren Verkehr. Es besteht daher das Bedürfnis nach einem billigen, zugleich harten und unempfindlichen Stoff für Fußböden.

Seit kurzem wird ein Fußboden hergestellt, der die vorstehend aufgestellten 4 Hauptforderungen der Dauerhaftigkeit, Unempfindlichkeit, Sauberkeit und Billigkeit erfüllt, nämlich der Belag aus dem „Herrmann'schen Hartbeton“. Er besitzt die Härte des allerhärtesten Naturgesteines (bester Granit) und ist infolgedessen äußerst widerstandsfähig gegen Abnutzung. Laut Prüfungszeugnis der Technischen Hochschule zu Darmstadt hat er nach 440 Umdrehungen der Bauschinger'schen Scheibe einen Abschleifverlust von nur 0,11  $\text{ccm/qcm}$ . Zum Vergleich seien folgende Zahlenwerte herangezogen:

1. Nach den Mitteilungen der Techn. Versuchsanstalt zu Berlin 1903, S. 249—267 ergaben 77 Versuche mit maschinell gepreßten Zementplatten einen Abnutzungsmittelwert von 0,54  $\text{ccm/qcm}$ .

2. Nach derselben Quelle wurden 14 Klinkerplatten mit besonders widerstandsfähiger Oberfläche aus einer größeren Anzahl Platten ausgesucht und ergaben eine mittlere Abnutzungsziffer von 0,26  $\text{ccm/qcm}$ .

3. Neuere Versuche mit hochgepreßten (250 Atm.) Kunststeinplatten lieferten nach den Mitteilungen des Materialprüfungsamtes Groß-Lichterfelde 1913, S. 117—145 aus 84 Versuchen einen Mittelwert von 0,28  $\text{ccm/qcm}$ .

4. Für hydraulisch gepreßte Basaltplatten werden von der sie anfertigenden Firma nachstehende Werte angegeben: 0,11—0,12—0,14—0,17  $\text{ccm/qcm}$ .

5. In den Mitteilungen des Materialprüfungsamtes Groß-Lichterfelde 1910, S. 185 ff. ist für die härtesten natürlichen Gesteine angegeben:

Granit, Mittelwert aus 60 Versuchen	0,148 $\text{ccm/qcm}$
Allerbester Granit	0,115 „
Quarzporphyr, Diabas, Basalt	0,110 „

## Biegungstheorie krummer Stabgebilde und deren Anwendung auf die Ermittlung der elastischen Formänderung gebogener Stäbe und auf die Berechnung der Rahmen.

Von Oberingenieur S. Glucksmann in Bremen.



Es sei ein ebener Stab von beliebiger Krümmung gegeben, dessen Ende  $B$  fest eingespannt ist und an dessen freiem Ende  $A$  ein Drehmoment  $M$  angreift. Durch den Punkt  $A$  als Anfang legen wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz  $AX$  und  $AY$ , in Bezug auf welches ein beliebiger Punkt  $C$  der Stabachse die Koordinaten  $x$

6. In der kürzlich erschienenen Abhandlung „Bodenplattenbelag und Fugenmörtel“ von Reg.-Baumeister Emil Lauser im Baumaterialien-Markt, Leipzig, No. 16 vom 15. April 1921 sind folgende Abnutzungswerte aufgeführt: Granit 0,10—0,32; Porphyrt 0,13; Melaphyr 0,43; Basalt 0,12 bis 0,63; Kalkstein 1,33; Muschelkalk 0,53; Kohlendstein 0,12; Buntsandstein 0,23; Sandstein 1,66—3,32; Grauwacke 0,12 bis 0,41; Basaltplatten 0,31; Granitoidplatten 0,23; Zementplatten 0,24—0,85; Terrazzoplatten 0,48; Kunstgranit 0,16; Tonplatten 0,23—0,27; Steinzeugplatten hellgrau 0,10; Steinzeugplatten weiß 0,04. Die Härte des Herrmann'schen Hartbetons wird hiernach nur von derjenigen der weißen gebrannten Steinzeugplatten überboten, die aber für die meisten der vorgenannten Verwendungszwecke schon wegen ihrer viel höheren Kosten und teils auch wegen ihrer Sprödigkeit nicht in Frage kommen. Der Hartbeton besitzt auch erheblich mehr Druckfestigkeit als ein gewöhnlicher Beton von gleich starker Mischung. Er ist frostbeständig und verträgt andererseits die höchste Ofenhitze (2000°), Eigenschaften, die ihn für viele gewerbliche Zwecke besonders geeignet erscheinen lassen. Hartbetonplatten geben einen hellen Klang.

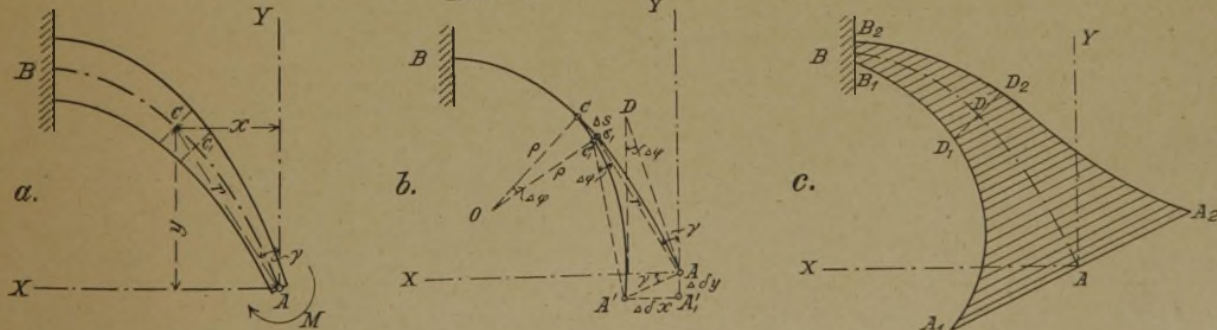
Dieser Hartbeton läßt sich durch Imprägnierung völlig wasserdicht (auch für höchsten Druck), andererseits gegen Säuren, Laugen, Öle, Benzin, Spiritus und viele andere den Beton angreifende oder beschmutzende Stoffe unempfindlich machen, sodaß er zu allgemeinsten Verwendung als Belag (auch für Bottiche, Röhren) geeignet ist. Der Hartbeton-Fußboden ist daher auch leicht zu reinigen.

Die Herstellung des Hartbetons ist nicht schwieriger als die des gewöhnlichen Betons; sie beruht hauptsächlich auf der Auswahl der geeigneten Stoffe. Sie erfordert auch keine besonderen Einrichtungen. Die Erhärtungszeit ist der des gewöhnlichen Betons gleich. Der Hartbeton läßt sich sowohl in Platten wie auch als fugenloser Belag (Estrich auf einem Unterbeton) verwenden. Auch Kunststeine und Betonpflastersteine können nach dieser Methode hergestellt werden, die gegenüber gleich harten Natursteinen den Vorzug eines viel geringeren Preises haben. Hartbetonpflaster wird wegen des starken Sandgehaltes weder bei trockenem noch bei nassem Wetter glatt werden, sodaß es sich auch für Strecken, die in Steigung liegen, eignen wird.

In Folge der Einfachheit der Herstellung des Hartbetons erhöhen sich seine Kosten gegenüber den Kosten des gewöhnlichen Betons nur wenig. Er entspricht somit allen Anforderungen, die man an Fußböden für Nutzbauten stellen muß.

Für tragende Bauteile ist der Herrmann'sche Hartbeton noch nicht zur Verwendung gekommen. Da er am Eisen wie der gewöhnliche Beton haftet und dasselbe nicht angreift und da andererseits seine Druckfestigkeit erheblich größer ist als die des gewöhnlichen Betons, wird er auch für solche Zwecke verwendet werden können. Eine besondere Rechnung muß dann im Einzelfall ergeben, ob die Möglichkeit einer Verringerung der Abmessungen des Bauteiles ungeachtet der höheren Kosten der Einheit vorteilhaft erscheint.

Abb. 1.



und  $y$  besitzt (Abbildung 1a). Bei  $C$  greifen wir aus dem Stab ein unendlich kleines Stabelement  $CC_1$  heraus, das durch zwei senkrecht zur Stabachse in  $C$  und  $C_1$  gelegte

Schnitte begrenzt ist. Zunächst wollen wir annehmen, daß nur das einzige Element  $CC_1$  elastisch ist, die übrigen Teile des Stabes dagegen starr sind. Unter der Wirkung des angreifenden Momentes  $M$  wird das Achsenelement  $CC_1$  seine Form ändern (Abbildung 1b) und es geht in die Lage  $CC_1'$  über, wobei die durch  $C$  und  $C_1$  senkrecht zur Stabachse geführten Querschnitte, die infolge der unend-

lich kleinen Länge der Strecke  $CC_1$  als parallel angenommen werden dürfen, den Winkel  $CC_1' = \angle \varphi$  einschließen und die Strecke  $OC = OC_1$  den Krümmungshalb-



messer des Stabelementes  $CC_1$  nach seiner Formänderung bildet<sup>1)</sup>. Der Teil  $BC$  des Stabes ändert infolge seiner vorausgesetzten Starrheit weder seine Form noch Lage, wogegen der ebenfalls als starr vorausgesetzte Teil  $C_1A$  seine Form zwar nicht ändert, jedoch die Bewegung des Querschnittes  $C_1$  mitmachen muß und somit aus der Lage  $C_1A$  in die Lage  $C_1A'$  übergeht. Der Ablenkungswinkel der Tangente in  $A$  beim Uebergang dieses Punktes nach  $A'$ , gleich  $\angle DA'$ , ist ebenfalls dem Winkel  $\angle \varphi$  gleich, da infolge der Starrheit des Stabteiles  $C_1A$  alle in seiner Ebene liegenden Geraden sich um den Winkel  $\angle \varphi$  um den Punkt  $C$  drehen müssen. Ferner beschreibt bei dieser Drehung des Stabteiles  $C_1A$  jeder Punkt seiner Achse einen Bogen, der dem Produkt aus der Entfernung des betr. Punktes von  $C$  und dem Winkel  $\angle \varphi$  gleich ist. Somit

tungen der beiden Koordinatenachsen sind der Summe einzelner Ablenkungen und Verschiebungen gleich, d. h.  $\varphi_M = \Sigma(\angle \varphi)$ ,  $\delta_{xM} = \Sigma(\angle \delta_x)$  und  $\delta_{yM} = \Sigma(\angle \delta_y)$ .

Zwischen dem Krümmungshalbmesser der deformierten Stabachse und dem Biegemoment an der betr. Stelle bestehen folgende Beziehungen<sup>2)</sup>:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ , wo  $\rho$  der Krümmungshalbmesser,  $M$  das Biegemoment,  $E$  der Elastizitätsmodulus des Materiales und  $J$  das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes an der betreffenden Stelle des Stabes ist.

Wird die Länge des Achsenelementes  $CC_1$  mit  $\Delta s$  bezeichnet, so ist

$$\Delta s = \rho \cdot \Delta \varphi \text{ oder } \Delta \varphi = \frac{1}{\rho} \cdot \Delta s = \frac{M}{EJ} \cdot \Delta s.$$

Wenn wir in die Ausdrücke für  $\varphi = \Sigma(\angle \varphi)$ ,  $\delta_x = \Sigma(\angle \delta_x)$  und  $\Delta y = \Sigma(\angle \delta_y)$  den Wert für  $\Delta \varphi$  einsetzen, so erhalten wir:

$$a) \varphi_M = \Sigma(\angle \varphi) = \frac{M}{E} \Sigma\left(\frac{\Delta s}{J}\right) = \frac{M}{E} \cdot \mathfrak{F} \dots \dots \dots (1)$$

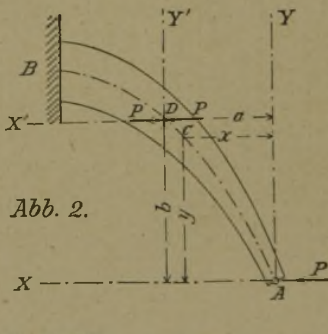
$$b) \delta_{xM} = \Sigma(\angle \delta_x) = \Sigma(y \cdot \Delta \varphi) = \frac{M}{E} \Sigma\left(\frac{y \cdot \Delta s}{J}\right) = \frac{M}{E} \cdot \mathfrak{S}_x \dots (2)$$

$$c) \delta_{yM} = \Sigma(\angle \delta_y) = \Sigma(x \cdot \Delta \varphi) = \frac{M}{E} \Sigma\left(\frac{x \cdot \Delta s}{J}\right) = \frac{M}{E} \cdot \mathfrak{S}_y \dots (3)$$

Die Ausdrücke  $\Sigma\left(\frac{\Delta s}{J}\right)$ ,  $\Sigma\left(\frac{y \cdot \Delta s}{J}\right)$  und  $\Sigma\left(\frac{x \cdot \Delta s}{J}\right)$  stellen die Fläche  $\mathfrak{F}$ , das statische Moment  $\mathfrak{S}_x$  in Bezug auf die X-Achse und  $\mathfrak{S}_y$  in Bezug auf die Y-Achse einer ebenen Figur dar, deren Achse mit der Stabachse identisch ist und deren Breite an jeder Stelle der Achse die Größe  $\frac{1}{J}$  besitzt, wo  $J$  das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes an der betreffenden Stelle bedeutet (Abbildung 1 c, S. 131). Diese Figur werden wir in Folgendem die „Elastizitätsfläche“ des Stabes nennen.

Nehmen wir nun an, daß an dem Punkt  $A$  nicht ein Moment  $M$ , sondern eine Kraft  $P$  angreift (Abbildung 2), deren Richtung mit der X-Achse zusammenfällt. Diese Kraft ruft im Punkte  $C$ , dessen Koordinaten  $x$  und  $y$  sind, ein Moment  $M = P \cdot y$  hervor, weshalb  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{Py}{EJ}$  und  $\Delta \varphi = \frac{1}{\rho} \cdot \Delta s = \frac{P}{E} \cdot \frac{y \Delta s}{J}$  ist.

Abb. 2.



Dementsprechend erhalten wir für diesen Fall:

a) die Ablenkung der Tangente in  $A$

$$\varphi_P = \Sigma(\angle \varphi) = \frac{P}{E} \Sigma\left(\frac{y \Delta s}{J}\right) = \frac{P}{E} \cdot \mathfrak{S}_x \dots \dots \dots (4)$$

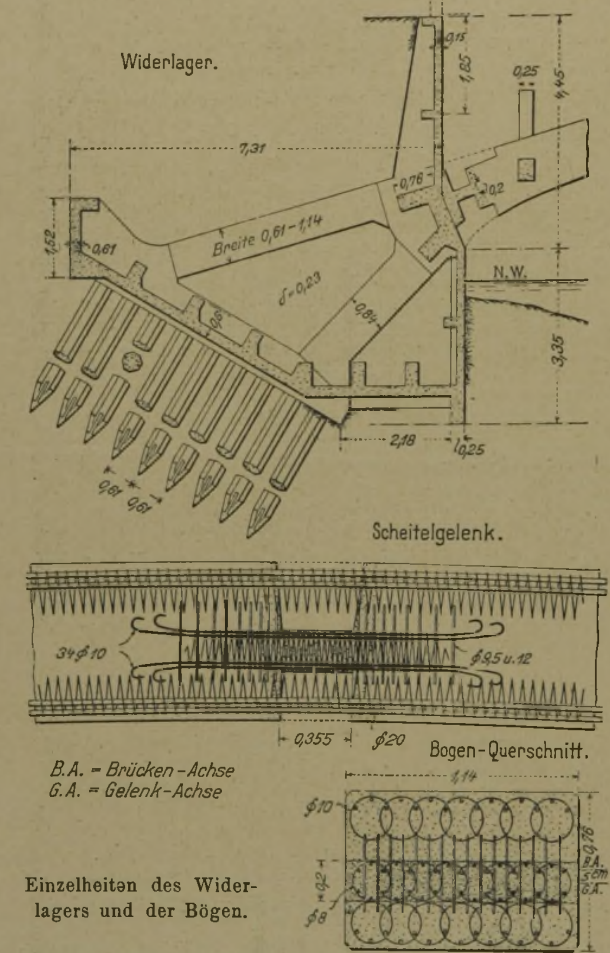


Abbildung 2. Straßenbrücke bei Warrington.

**Bemerkenswerte Brückenausführungen des Auslandes in Eisenbeton.**

beschreibt der Punkt  $A$  einen Bogen  $AA' = \angle \delta_r = r \cdot \angle \varphi$ , wo  $r$  die Entfernung des Punktes  $A$  vom Punkt  $C$  bedeutet. Die Komponenten der Bewegung  $\angle \delta_r$  in den Richtungen der beiden Koordinatenachsen sind

$$\angle \delta_x = AA'_1 = \angle \delta_r \cdot \cos \gamma = r \cdot \cos \gamma \cdot \Delta \varphi = y \cdot \Delta \varphi$$

$$\angle \delta_y = AA'_2 = \angle \delta_r \cdot \sin \gamma = r \cdot \sin \gamma \cdot \Delta \varphi = x \cdot \Delta \varphi,$$

wo  $\gamma$  den Winkel zwischen der Richtung der Verschiebung  $\angle \delta_r$  und der X-Achse bedeutet. Da  $\angle \delta_r = AA'_1$  senkrecht zu  $AC = r$  ist, so ist  $\gamma$  dem Winkel zwischen  $AC = r$  und der Y-Achse ebenfalls gleich.

Wenn wir nunmehr die Voraussetzung bezüglich der Starrheit der Stabteile  $BC$  und  $C_1A$  aufgeben und sämtliche Elemente des Stabes uns elastisch denken, so erleidet ein jedes derselben unter dem Angriff des für jeden Punkt der Stabachse konstanten Biegemomentes  $M$  eine entsprechende Formänderung, die ihrerseits eine entsprechende Ablenkung der Tangente in  $A$ , gleich  $\angle \varphi$ ; und eine Verschiebung des Punktes  $A$  in der Richtung der X-Achse, gleich  $\angle \delta_{x_1}$ , und in der Richtung der Y-Achse, gleich  $\angle \delta_{y_1}$ , bedingt. Die Gesamtablenkung der Tangente in  $A$ , sowie die Gesamtverschiebungen von  $A$  in den Rich-

<sup>1)</sup> Streng genommen gilt das Gesagte nur für Stäbe mit gerader Achse. Doch lassen sich obige Ausführungen ohne merklichen Fehler auch auf Stäbe mit krummer Achse anwenden, deren Krümmungshalbmesser  $r$  im Vergleich zur Höhe  $h$  des Stabquerschnittes groß genug ist. In einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit des Verfassers, die das vorliegende Thema in seiner ganzen Ausführlichkeit behandelt, wird nachgewiesen, daß die auf Grund obiger Annahme berechneten größten Biegungsspannungen bei einem Verhältnis  $r:h = 3$  nur um 10–12%, bei  $r:h = 10$  bloß um 3%, und bei noch größeren Verhältnissen von denjenigen fast gar nicht abweichen, die auf Grund des Verfahrens berechnet werden, das für Stäbe mit scharfer Krümmung in Betracht kommt, wie z. B. bei Lasthaken, Ringscheiben und dergl., bei denen das Verhältnis der Größen des Krümmungshalbmessers zur Querschnittshöhe klein ist und deren Behandlung nicht den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet.

<sup>2)</sup> Die für die krummen Stäbe geltende genaue Formel für diesen Fall ist:  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{M}{EJ}$ , wo  $\rho$  den Krümmungshalbmesser der Stabachse vor deren Formänderung und  $\rho_1$ , desgl. nach der Formänderung bedeutet. Auf Grund des in der Fußbemerkung <sup>1)</sup> Gesagten dürfen wir jedoch für Stäbe von nicht zu scharfer Krümmung die für den geraden Stab geltende Biegeformel  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$  anwenden.



b) die Verschiebung von  $A$  in der  $X$ -Richtung

$$\delta_{xP} = \Sigma(y \cdot \Delta y) = \frac{P}{E} \Sigma\left(\frac{y^2 \Delta s}{J}\right) = \frac{P}{E} \cdot \mathfrak{I}_x \dots (5)$$

c) die Verschiebung von  $A$  in der  $Y$ -Richtung

$$\delta_{yP} = \Sigma(x \cdot \Delta y) = \frac{P}{E} \Sigma\left(\frac{xy \Delta s}{J}\right) = \frac{P}{E} \cdot \mathfrak{Z} \dots (6)$$

Die Ausdrücke  $\Sigma\left(\frac{y \Delta s}{J}\right)$ ,  $\Sigma\left(\frac{y^2 \Delta s}{J}\right)$ ,  $\Sigma\left(\frac{xy \Delta s}{J}\right)$  be-

deuten der Reihe nach das statische Moment  $\mathfrak{S}_x$  (in Bezug auf die  $X$ -Achse, bezw. die Krafttrichtung), das Trägheitsmoment  $\mathfrak{I}_x$  in Bezug auf dieselbe Achse und das Zentrifugalmoment  $\mathfrak{Z}_{xy}$  in Bezug auf die  $X$ - und die  $Y$ -Achse der in der Abbildung 1c dargestellten „Elastizitätsfläche“  $A_1 A_2 B_2 B_1$  des krummen Stabes  $AB$  (Abbildung 1a, S. 131).

Um die Ablenkung der Tangente in einem beliebigen Punkte  $D$  der Stabachse und die Verschiebung des letzteren infolge Angriffes der Kraft  $P$  an dem freien Ende des Stabes

Somit erhalten wir die aus der gleichzeitigen Wirkung der Kraft  $P$  und des Momentes  $M$  sich ergebenden Formänderungsgrößen durch die Addition der betreffenden Einzelgrößen und zwar wird:

a) die Ablenkung der Tangente in  $D$

$$\varphi_D = \varphi_P + \varphi_M = \frac{P}{E} (\mathfrak{S}_x' + b \cdot \mathfrak{F}') \dots (7)$$

b) die Verschiebung von  $D$  in der  $X$ -Richtung

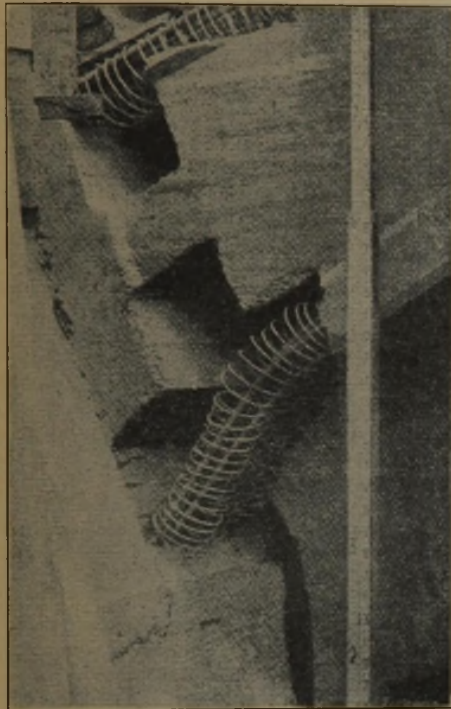


Abbildung 3. Ausbildung der vorläufigen Gelenke.

zu bestimmen, legen wir ein zweites Koordinatenkreuz  $DX'$  und  $DY'$  mit dem Anfang in  $D$  (Abbildung 2), das dem Achsenkreuz  $XAY$  parallel ist. Es seien die Koordinaten von  $D$  im System  $XAY$   $a$  und  $b$ . Ferner wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen:  $\mathfrak{F}$  bedeutet den Teil  $B_1 B_2 D_2 D_1$  der Elastizitätsfläche, die dem Stabteil  $BD$  (Abbildung 1c) entspricht,  $\mathfrak{S}_x'$  das statische Moment der letzteren in Bezug auf die  $X'$ -Achse,  $\mathfrak{S}_y'$  desgleichen in Bezug auf die  $Y'$ -Achse,  $\mathfrak{I}_x'$  ihr Trägheitsmoment in Bezug auf die  $X'$ -Achse und  $\mathfrak{Z}'$  ihr Zentrifugalmoment in Bezug auf die Achsen  $X'$  und  $Y'$ .

Im Punkte  $D$  wollen wir zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte  $P$  und  $-P$  wirken lassen, die der in  $A$  angreifenden Kraft  $P$  gleich und parallel sind. Dann wirkt auf den Punkt  $D$  eine Kraft  $P$  (in gleicher Richtung wie  $P$  auf den Punkt  $A$ ) und ein Kräftepaar  $P \cdot b = M$ . Infolge des Angriffes der Kraft  $P$  an  $D$  erhalten wir nach den Formeln (4), (5) und (6) folgende Formänderungsgrößen für den letzteren Punkt:

$$\varphi_P = \frac{P}{E} \cdot \mathfrak{S}_x', \quad \delta_{xP} = \frac{P}{E} \cdot \mathfrak{I}_x' \quad \text{und} \quad \delta_{yP} = \frac{P}{E} \cdot \mathfrak{Z}'$$

und als Folge des Angriffes des Momentes  $M$  an  $D$  erhalten wir nach den Formeln (1) bis (3):

$$\varphi_M = \frac{Pb}{E} \cdot \mathfrak{F}', \quad \delta_{xM} = \frac{Pb}{E} \cdot \mathfrak{S}_x' \quad \text{und} \quad \delta_{yM} = \frac{Pb}{E} \cdot \mathfrak{S}_y'$$



Abbildung 4. Ausführung der Bogenrippen.

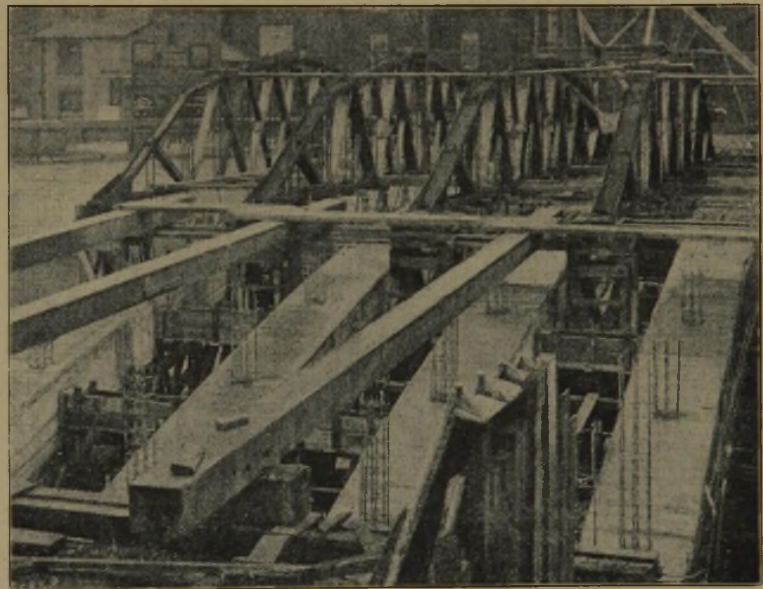


Abbildung 5. Hilfsträger für das Lehrgerüst.  
Brücke über den Mersey bei Warrington.  
Bemerkenswerte Brückenausführungen des Auslandes in Eisenbeton.

$$\delta_{yD} = \delta_{xP} + \delta_{xM} = \frac{P}{E} (\mathfrak{I}_x' + b \cdot \mathfrak{S}_x') \dots (8)$$

c) die Verschiebung von  $D$  in der  $Y$ -Richtung

$$\delta_{yD} = \delta_{yP} + \delta_{yM} = \frac{P}{E} (\mathfrak{Z}' + b \cdot \mathfrak{S}_y') \dots (9)$$

Besitzt der Stab einen unveränderlichen Querschnitt und somit auch ein unveränderliches Trägheitsmoment  $J$  des letzteren und bezeichnet:

- $s$  die Länge der Stabachse von  $B$  bis  $A$ ,
  - $\mathfrak{S}_x$  das statische Moment der letzteren in Bezug auf die  $X$ -Achse,
  - $\mathfrak{S}_y$  desgleichen in Bezug auf die  $Y$ -Achse,
  - $\mathfrak{I}_x$  ihr Trägheitsmoment in Bezug auf die  $X$ -Achse und
  - $\mathfrak{Z}$  ihr Zentrifugalmoment in Bezug auf die Achsen  $X$  und  $Y$
- und  $s'$ ,  $\mathfrak{S}_x'$ ,  $\mathfrak{S}_y'$ ,  $\mathfrak{I}_x'$  und  $\mathfrak{Z}'$  der Reihe nach die nämlichen



Größen des Stabteiles  $BD$  in Bezug auf die Achsen  $X'$  bzw.  $Y'$ , so sind die betreffenden Formänderungsgrößen:

$$\varphi_M = \frac{M}{EJ} \cdot s \dots \dots \dots (10) \quad \delta_{xM} = \frac{M}{EJ} \cdot S_x \dots \dots \dots (11)$$

$$\delta_{yM} = \frac{M}{EJ} \cdot S_y \dots \dots \dots (12) \quad \varphi_P = \frac{P}{EJ} \cdot S_x \dots \dots \dots (13)$$

$$\delta_{xP} = \frac{P}{EJ} \cdot T_x \dots \dots \dots (14) \quad \delta_{yP} = \frac{P}{EJ} \cdot Z \dots \dots \dots (15)$$

$$\varphi_D = \frac{P}{EJ} (S'_x + b \cdot s') \dots \dots \dots (16) \quad \delta_{xD} = \frac{P}{EJ} (T'_x + b \cdot S'_x) \dots \dots \dots (17)$$

$$\delta_{yD} = \frac{P}{EJ} (Z' + b \cdot S'_y) \dots \dots \dots (18)$$

Ist die Achse des Stabes keine krumme, sondern eine gebrochene Linie, deren jeder geraden Strecke  $s_i$  ein für diese konstanter Querschnitt und somit auch ein konstantes Trägheitsmoment  $J_i$  entspricht, so nehmen die Formeln (1) bis (9) folgende Form an:

$$\varphi_M = \frac{M}{E} \sum_B^A \left( \frac{s_i}{J_i} \right) \dots \dots (19) \quad \varphi_P = \frac{P}{E} \sum_B^A \left( \frac{S_{x_i}}{J_i} \right) \dots \dots (22)$$

$$\delta_{xM} = \frac{M}{E} \sum_B^A \left( \frac{S_{x_i}}{J_i} \right) \dots \dots (20) \quad \delta_{xP} = \frac{P}{E} \sum_B^A \left( \frac{T_{x_i}}{J_i} \right) \dots \dots (23)$$

$$\delta_{yM} = \frac{M}{E} \sum_B^A \left( \frac{S_{y_i}}{J_i} \right) \dots \dots (21) \quad \delta_{yP} = \frac{P}{E} \sum_B^A \left( \frac{Z_i}{J_i} \right) \dots \dots (24)$$

$$\varphi_D = \frac{P}{E} \left[ \sum_B^D \left( \frac{S'_{x_i}}{J_i} \right) + b \sum_B^D \left( \frac{s'_i}{J_i} \right) \right] \dots \dots (25)$$

$$\delta_{xD} = \frac{P}{E} \left[ \sum_B^D \left( \frac{T_{x_i}}{J_i} \right) + b \sum_B^D \left( \frac{S'_{x_i}}{J_i} \right) \right] \dots \dots (26)$$

$$\delta_{yD} = \frac{P}{E} \left[ \sum_B^D \left( \frac{Z'_i}{J_i} \right) + b \sum_B^D \left( \frac{S'_{y_i}}{J_i} \right) \right] \dots \dots (27)$$

Das Summationszeichen  $\sum_B^A$  bzw.  $\sum_B^D$  weist auf die

Summenbildung im Bereiche von der Einspannungsstelle  $B$  des Stabes bis zum Punkte  $A$  bzw.  $D$  hin.

Wie wir aus obigen Ableitungen ersehen, wird die Ermittlung der Formänderungsgrößen eines krummen Stabes auf die Berechnung bzw. Konstruktion seiner Elastizitätsfläche und Feststellung deren statischer, Trägheits- und Zentrifugalmomente in Bezug auf die Krafrichtung ( $X$ -Achse) und eine zu der letzteren im Angriffspunkt  $A$  der Kraft senkrechten Achse ( $Y$ -Achse) bzw. auf zwei durch einen beliebigen Punkt  $D$  der Stabachse gehende und zu dem erwähnten Achsenpaar parallele Achsen ( $X'$ - und  $Y'$ -Achse) zurückgeführt. Bei unveränderlichem Stabquerschnitt tritt an Stelle der Elastizitätsfläche einfach die Stabachse und die statischen, Trägheits- und Zentrifugalmomente derselben in Bezug auf die vorhin erwähnten Koordinatenachsen ( $X$ - und  $Y$ -Achse bzw.  $X'$ - und  $Y'$ -Achse).

Des beschränkten Raumes wegen kann hier auf die weitere Behandlung der Stäbe mit veränderlichem Querschnitt und deren Berechnung mittels der Elastizitätsfläche nicht eingegangen werden und wir beschränken uns deshalb im Folgenden nur auf die Untersuchung der Stäbe mit unveränderlichem Querschnitt, sowie der Stabgebilde mit gebrochener Achse, deren einzelne Glieder unveränderliche, jedoch unter einander verschiedene Querschnitte besitzen.

Das von uns eingeschlagene Verfahren bietet die Möglichkeit der Berechnung der Formänderungen, sowie einer leicht faßlichen Lösung derjenigen Aufgaben der Statik, deren Berechnung nur auf Grund der vorherigen Kenntnis der elastischen Formänderungen möglich ist; ferner ermöglicht uns das Verfahren durch die Ausnutzung der aus der Statik bekannten Fundamentalsätze über die statischen, Trägheits- und Zentrifugalmomente eine einfache, in vielen Fällen sogar eine äußerst leichte Lösung verschiedener Probleme über gebogene Stabgebilde. Dabei haben die abgeleiteten Formeln eine allgemeine Gültigkeit und werden in gleichem Maße auf gerade Träger, krumme Stabgebilde, wie auch auf Rahmen angewandt, wie dies aus den folgenden Beispielen zu ersehen ist.

1. Einseitig eingespannter Träger.  
a) Last  $P$  am freien Ende des Stabes. (Abbildung 3).

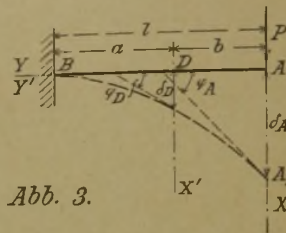


Abb. 3.

Die Ablenkung der Endtangente in  $A$  ist nach Formel (13) gleich

$$\varphi_A = \frac{P}{EJ} \cdot S_x = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{P}{2EJ} \cdot l^2 \quad (28)$$

Die Ablenkung der Tangente in  $D$  ist nach Formel (16) gleich

$$\varphi_D = \frac{P}{EJ} (S'_x + b s) = \frac{P}{EJ} (a^2 + b a) \dots \dots (29)$$

Die Durchbiegung in  $A$  ist nach Formel (14) gleich

$$\delta_A = \frac{P}{EJ} \cdot T_x = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3} \dots \dots \dots (30)$$

Die Durchbiegung in  $D$  ist nach Formel (17) gleich

$$\delta_D = \frac{P}{EJ} (T'_x + b S'_x) = \frac{P}{EJ} \left( \frac{a^3}{3} + b a^2 \right) = \frac{P a^2}{EJ} \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right) \quad (31)$$

b) Last  $P$  greift zwischen  $A$  und  $B$  an. (Abbildung 4).

$$\varphi_C = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l_1^2}{2} \dots \dots (32) \quad \delta_C = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l_1^3}{3} \dots \dots (33)$$

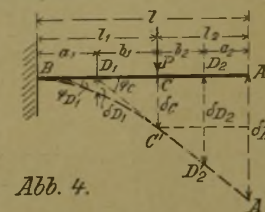


Abb. 4.

$$\varphi_{D_1} = \frac{P}{EJ} \left( \frac{a_1^2}{2} + b_1 a_1 \right) \quad (34)$$

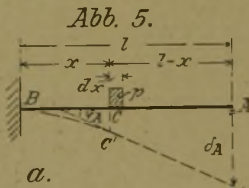
$$\delta_{D_1} = \frac{P a_1^2}{EJ} \left( \frac{a_1}{3} + \frac{b_1}{2} \right) \quad (35)$$

$$\varphi_{D_2} = \varphi_C = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l_1^2}{2} \quad (36)$$

$$\delta_{D_2} = \delta_C + b_2 \varphi_C = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l_1^3}{3} + \frac{P}{EJ} \cdot \frac{b_2 l_1^2}{2} = \frac{P l_1^2}{EJ} \left( \frac{l_1}{3} + \frac{b_2}{2} \right) \quad (37)$$

$$\varphi_A = \varphi_C = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l_1^2}{2} \dots \dots (38) \quad \delta_A = \frac{P l_1^2}{EJ} \left( \frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{2} \right) \dots \dots (39)$$

c) Gleichmäßig verteilte Belastung. (Abbildung 5).

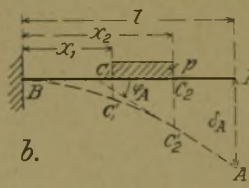


a.

Ist im Fall  $b$  (Abbildung 5a)  $P = p \cdot dx$ ,  $l_1 = x$  und  $l_2 = l - x$ , so ist

$$\varphi_A = \frac{p \cdot dx}{EJ} \cdot \frac{x^2}{2}$$

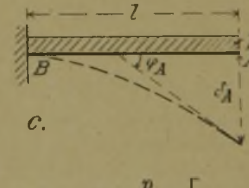
$$\delta_A = \frac{p \cdot dx}{EJ} \cdot x^2 \left( \frac{x}{3} + \frac{l-x}{3} \right) = \frac{p x^2}{6EJ} (3l-x) dx$$



b.

Ist die Last von  $C_1$  bis  $C_2$  gleichmäßig verteilt (Abbildung 5b), so ist

$$\varphi_A = \frac{p}{2EJ} \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{p}{6EJ} (x_2^3 - x_1^3) \dots \dots (40)$$



c.

$$\delta_A = \frac{p}{6EJ} \int_{x_1}^{x_2} (3lx^2 - x^3) dx = \frac{p}{6EJ} \left[ l(x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4) \right] \dots \dots (41)$$

Für den Fall der vollen Belastung (Abbildung 5c) wird  $x_1 = 0$  und  $x_2 = l$  und wir erhalten:

$$\varphi_A = \frac{p l^3}{6EJ} \dots \dots (42) \quad \delta_A = \frac{p l^4}{8EJ} \dots \dots (43)$$

2. Auf zwei Stützen frei aufliegender Träger.  
a) Konzentrierte Last in beliebigem Punkt  $C$ .

(Abb. 6a a. f. S.). Die Auflagerreaktionen  $A = \frac{Pb}{l}$  und  $B = \frac{Pa}{l}$  suchen die Trägerteile  $CA$  und  $CB$  nach oben



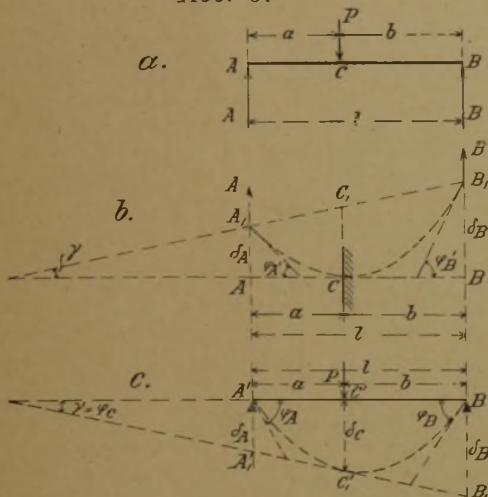
zu biegen (Abbildung 6b). Die Ablenkungen der Tangenten in A und B sind nach Formel (28)

$$\varphi'_A = \frac{A}{EJ} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{P}{2EJ} \cdot \frac{a^2 b}{l}, \quad \varphi'_B = \frac{B}{EJ} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{P}{2EJ} \cdot \frac{ab^2}{l}$$

und die Durchbiegung der Punkte A und B nach Formel (30)

$$\delta_A = \frac{A}{EJ} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{P}{3EJ} \cdot \frac{a^3 b}{l}, \quad \delta_B = \frac{B}{EJ} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{P}{3EJ} \cdot \frac{ab^3}{l}$$

Abb. 6.



Hierbei denken wir uns die beiden Trägerteile in C eingespannt (Abbildung 6b) und an deren freien Enden die Kräfte A und B angreifen. Der deformierte Träger kommt in die Lage A<sub>1</sub>CB<sub>1</sub>, wobei die Verbindungslinie A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> mit der ursprünglichen Lage A'B' des Trägers den Winkel  $\gamma = \frac{\delta_B - \delta_A}{l}$  einschließt.

Da in Wirklichkeit die Trägerenden A und B nach der Durchbiegung des Trägers ihre Höhenlage nicht ändern (Abbildung 6c), so muß der deformierte Träger A<sub>1</sub>CB<sub>1</sub> um den Winkel  $\gamma$  zurückgedreht werden, wobei die Tangenten in A<sub>1</sub> und B<sub>1</sub> dieselbe Drehung mitmachen müssen. Die endgültigen Ablenkungen der Endtangente sind somit  $\varphi_A = \varphi'_A + \gamma$  und  $\varphi_B = \varphi'_B - \gamma$  und da

$$\gamma = \frac{\delta_B - \delta_A}{l} = \frac{Pab}{3EJl^2} (b^2 - a^2) = \frac{P}{3EJl} (ab^2 - a^2b),$$

so ist

$$\varphi_A = \frac{P}{2EJl} a^2 b + \frac{P}{3EJl} (ab^2 - a^2b) = \frac{Pab}{6EJl} (a + 2b) \quad (44a)$$

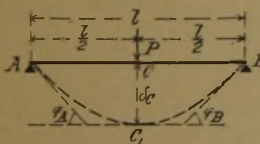
$$\varphi_B = \frac{P}{2EJl} ab^2 - \frac{P}{3EJl} (ab^2 - a^2b) = \frac{Pab}{6EJl} (2a + b) \quad (44b)$$

$$\varphi_C = \gamma = \frac{Pab}{3EJl} (b - a) \quad (44c)$$

Die Durchbiegung des Angriffspunktes C der Kraft P ist gleich

$$\delta_C = \delta_A + a\gamma = \frac{Pa^3b}{3EJl} + \frac{P}{3EJl} (a^2b^2 - a^3b) = \frac{Pa^2b^2}{3EJl} \quad (45)$$

Abb. 7.



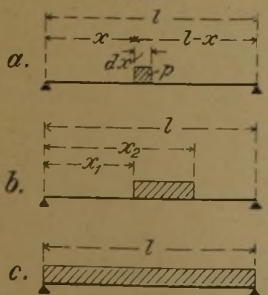
$$\varphi_C = 0 \quad (47)$$

Greift die Kraft P in der Mitte des Trägers an (Abbildung 7), so ist a gleich b gleich  $\frac{l}{2}$  und wir erhalten:

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{Pl^2}{16EJ} \quad (46)$$

$$\delta_C = \frac{Pl^3}{48EJ} \quad (48)$$

Abb. 8.



b) Gleichmäßig verteilte Last.

Ist  $P = p \cdot dx$  (Abbild. 8a),  $a = x$  und  $b = l - x$ , so ist nach Formel (44a)

$$\varphi_A = \frac{p \cdot dx}{6EJl} (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)$$

und nach Formel (44b)

$$\varphi_B = \frac{p \cdot dx}{6EJl} (x l^2 - x^3).$$

Ist die Last auf eine längere Strecke gleichmäßig verteilt (Abbildung 8b), so ist

$$\varphi_A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p \cdot dx}{6EJl} (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x) = \frac{P}{24EJl} [(x_2^4 - x_1^4) - 4l(x_2^3 - x_1^3) + 4l^2(x_2^2 - x_1^2)] \quad (49a)$$

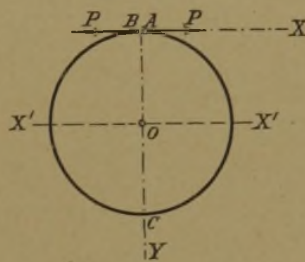
$$\varphi_B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p \cdot dx}{6EJl} (x l^2 - x^3) = \frac{P}{24EJl} [(2x_2^2 - x_1^2) l^2 - (x_2^4 - x_1^4)] \dots \quad (49b)$$

Für den Fall der vollen Belastung (Abbildung 8c) ist  $x_2 = l$  und  $x_1 = 0$  und es wird

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{pl^3}{24EJ} \quad (50)$$

3. Kreisring, der an einer Stelle, wo zwei gleiche und entgegengesetzte Tangentialkräfte angreifen, durchgeschnitten ist.

Abb. 9.



Denken wir uns jede von den beiden Ringhälften AC und BC in C fest eingespannt (Abbildung 9), so ist nach Formel (13)  $\varphi_P = \frac{P}{EJ} \cdot S_x$ , nach Formel (14)

$$\delta_{xP} = \frac{P}{EJ} \cdot T_x^{AC}$$

und nach Formel (15)  $\delta_{yP} = \frac{P}{EJ} \cdot Z^{AC}$ ,

wo  $S_x$ ,  $T_x$  das statische und das Trägheitsmoment der Kreishälfte AC in Bezug

auf die mit der Kraftrichtung identische X-Achse und Z das Zentrifugalmoment derselben auf die Achsen X und Y ist.<sup>3)</sup>

Das polare Trägheitsmoment der Kreislinie in Bezug auf ihren Mittelpunkt ist gleich:  $T_p = 2\pi r \cdot r^2 = 2\pi r^3$ , wenn r den Halbmesser des Kreises bedeutet. Da die Summe von zwei äquatorialen Trägheitsmomenten in Bezug auf zwei durch die Kreismitte senkrecht zu einander gehende Achsen dem Polarträgheitsmoment gleich ist und sie selbst untereinander auch gleich sind, so ist das Trägheitsmoment des ganzen Kreises in Bezug auf eine zu X parallele und durch den Kreismittelpunkt O gehende

Achse X' gleich  $T_o = \frac{1}{2} T_p = \pi r^3$  und sein Trägheitsmoment in Bezug auf die X-Achse ist  $T_a = T_o + 2\pi r \cdot r^2 = 3\pi r^3$ . Das gleiche Trägheitsmoment (in Bezug auf die X-Achse) für eine Kreishälfte AC ist gleich  $T_x = \frac{1}{2} T_a = \frac{3}{2} \pi r^3$ . Das statische Moment einer Kreishälfte AC in Bezug auf die X-Achse ist gleich  $S_x = \pi r \cdot r = \pi r^2$  und ihr Zentrifugalmoment in Bezug auf die Achsen X und Y ist  $Z = \pi r \cdot r \cdot \frac{2r}{\pi} = 2r^3$ , da die Entfernung des Schwerpunktes einer Kreishälfte vom Mittelpunkt des Kreises  $\frac{2r}{\pi}$  gleich ist. Somit erhalten wir:

Ablenkung der Tangente in A

$$\varphi_P = \frac{P}{EJ} \cdot S_x = \frac{P}{EJ} \cdot \pi r^2 \quad (51)$$

Verschiebung von A in der Richtung von X

$$\delta_{xP} = \frac{P}{EJ} \cdot T_x = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{3}{2} \pi r^3 \quad (52)$$

Verschiebung von A in der Richtung von Y

$$\delta_{yP} = \frac{P}{EJ} \cdot Z = \frac{P}{EJ} \cdot 2r^3 \quad (53)$$

Das Auseinandergehen der beiden Kreisenden A und B ist gleich

$$\delta = 2 \delta_{xP} = \frac{P}{EJ} \cdot 3 \cdot \pi r^3 \quad (54)$$

(Schluß folgt.)

<sup>3)</sup> Der Symmetrie halber genügt es, nur eine Ringhälfte zu untersuchen.



## Vermischtes.

**Ein Funkturm aus Eisenbeton.** Ein eigenartiges Bauwerk aus Eisenbeton ist kürzlich in Tokio erbaut worden, nämlich ein Funkturm. Wir sind zwar bis jetzt nur gewöhnt, Funktürme aus Holz- oder Eisenschalung zu sehen, der hohe freistehende Schornstein, der auch hier als Muster gedient hat, ist aber bei genügender Biegefestigkeit auch geeignet, für den seitlichen Zug einer Antenne einen hoch in die Luft liegenden Stützpunkt abzugeben, und der Eisenbeton ist hierfür geradezu der berufene Baustoff, da ihm durch richtige Anordnung der Eiseneinlagen die nötige Biegefestigkeit in geradezu beliebiger Höhe gegeben werden kann. Der Funkturm in Tokio erhebt sich 201,3 m über Gelände und ist mit seiner Gründung 205 m hoch, dürfte also das höchste Massivbauwerk sein.

Der Turm hat am Fuß einen inneren Durchmesser von 16,8 m und eine Wandstärke von 0,84 m; beide Abmessungen nehmen bis zur Spitze geradlinig bis auf 1,2 m und 0,15 m ab. Die Bewehrung besteht aus senkrechten Längseisen und Ringbügeln. Am Fuß sind 200 senkrechte Eisen von 25 mm Durchmesser eingebettet; die Ringbewehrung besteht hier aus 20 mm starken Eisen in 10 cm Abstand. Die Bewehrung ist am dichtesten 30,5 m über dem Boden, wo die Zahl der senkrechten Einlagen 285 beträgt; sie haben einen Durchmesser von 29 mm, während die wagrechten Eisen 16 mm stark sind und 14 cm Abstand haben. An der Spitze sind noch 25 senkrechte Einlagen von 25 mm Durchmesser und 9,5 mm starke Ringe in 18 cm Abstand vorhanden.

Die Gründung besteht aus einem 3,7 m hohen Ring von trapezförmigem Querschnitt, der an der Sohle 10 m breit ist. Der Gründungskörper weist kräftige wagrechte Bewehrung mit senkrechten Bügeln auf. Er ruht auf festem Kies und Ton. Seine Sohle liegt 15 m über dem Meeresspiegel, sodaß die Spitze des Bauwerkes eine Seehöhe von etwa 220 m aufweist.

Als Belastung des Turmes ist unter anderem ein Winddruck von 145 kg/m<sup>2</sup> auf die senkrecht zur Windrichtung liegende Mittelebene angenommen. Wärmeschwankungen zwischen -7° und +38° C. sind der Bewehrung zugrunde gelegt. Auch Erdbebenstößen, die in jener Gegend nicht selten sind, soll der Turm gewachsen sein; wohl mag er in sich die genügende Festigkeit haben, um ihnen zu widerstehen, der Gedanke liegt aber nahe, daß er wegen seiner schlanken Form und verhältnismäßig kleinen Aufstandsfläche durch einen kräftigen Erdbebenstoß im ganzen umgeworfen werden könnte. Die Bodenpressung beträgt ohne Berücksichtigung des Winddruckes rd. 2 kg/cm<sup>2</sup>. Der Beton im Mischungsverhältnis 1:2:4 wurde mit einheimischem Zement hergestellt und mit reichlichem Wasserzusatz verarbeitet. Im ganzen wurden rund 4630 cbm Beton, wovon 1253 cbm auf die Gründung und 3377 cbm auf den Schaft entfielen, und 425 t aus Amerika bezogener Stahl verwendet.

Der Turm wurde von einem inneren Holzgerüst aus gebaut. Die Schalung wurde in 1,5 m hohen Ringen hergestellt, von denen immer drei aufeinander gebaut waren; sobald der oberste von diesen drei Ringen ausgefüllt war, wurde der unterste abgenommen und oben aufgesetzt. Die hölzerne Schalung war mit Drahtkabeln umschnürt. Der tägliche Baufortschritt nahm von 67 cbm Beton am Fuß auf 0,9 cbm an der Spitze ab. Die beim Bau beschäftigten Arbeiter waren alle Eingeborene.

Im Inneren des Turmes führt eine Treppe in die Höhe; oben befindet sich eine offene Plattform. Vier äußere Galerien sind über die Höhe gleichmäßig verteilt. An eisernen Armen auf der Spitze des Turmes sind die geneigt nach dem Boden geführten Antennen befestigt, die Nachrichten mit San Franzisko austauschen sollen. (Nach Concrete and Constructional Engineering.) —

Geh. Regierungsrat Wernecke.

**Versagen der Gründung und Wiederherstellung eines amerikanischen Getreidespeichers in Eisenbeton.** Nach einem Vortrag im „Concrete Institute“ berichtete die englische Zeitschrift „The Engineer“ vom 24. Juni 1921 über einen neuen Fall des Versackens, Kippens und Wiederaufrichtens eines Eisenbeton-Getreidesilos. Ueber ähnliche Fälle ist ja schon mehrfach berichtet; es sind alles schlagende Beispiele für die monolithische Wirkung von Eisenbetonbauten auch unter ungewöhnlichsten Verhältnissen, die selbst bei wesentlichen Fundamentschäden den Bestand des Bauwerkes selbst ohne größeren Schaden sichern und die Wiederherstellung in verhältnismäßig einfacher Weise gestattet. Der Fall zeigt aber auch wieder, daß man sich bei schwer belasteten Bauwerken mit großer Gründungsfläche auch bei scheinbar gleichmäßiger Beschaffenheit des Untergrundes nicht damit begnügen darf, diesen an einigen wenigen Punkten zu untersuchen. Namentlich bei Gründungen, die eine gleichmäßige Verteilung der Last auf großer Grundfläche sichern sollen und bei großen Belastungen ist eine sorgfältige Unter-

suchung der ganzen Fläche durch vorherige Bohrungen dringend geboten.

Es handelt sich um einen Bau, der in 2 Teile zerfällt, von denen der eine von 21,3·29,3 m Grundfläche und 21 m Höhe die hauptsächlichsten maschinellen Einrichtungen, der andere von 23,5·59,5 m Grundfläche und 31 m Höhe die Silozellen enthält. Vom letzteren sind 65 Stück kreisrunden Querschnittes in 5 Reihen zu je 13 Stück angeordnet. Die Gesamtaufnahmefähigkeit beträgt 36 350 cbm Getreide. Bei der erstmaligen Füllung der Zellen wurde auf möglichst gleichmäßige Belastung gesehen. Bei einer Füllung bis zu rd. 32 000 cbm setzte sich der Zellenbau plötzlich. Innerhalb einer Stunde war er rd. 30,5 cm senkrecht abgesunken und gleichzeitig machte sich eine Kippbewegung nach Westen geltend, die innerhalb 24 Stunden rd. 27° gegen die Lotrechte betrug, dann trat Stillstand der Bewegung ein.

Das Maschinenhaus ruht auf einer 76 cm starken Betonplatte, in 4,9 m unter Gelände. Der Oberbau überträgt seine Last auf Säulen, die 5—800 t zu tragen haben. Die Gesamtlast des Baues im Betrieb ist 14 400 t. Im Silogebäude haben die Zellen 15 cm starke, eisengewehrte Wände. Die Zellen ruhen auf einer 30 cm starken Deckenplatte, die gleichzeitig ihren Boden bildet. Darunter sind 4 Kanäle für Transportbänder angeordnet von je 0,65 m Querschnitt, die durch 48 cm starke Mauern getrennt sind. Diese stützen sich auf eine 0,61 m starke Betonplatte, die 3,65 m unter Gelände liegt. Zwischen dem Zellenfußboden, den Trennungsmauern und der Fundamentplatte war keine besondere Verbindung durch durchgehende Eisen hergestellt, sondern nur durch die Zementfugen. Trotzdem hat der ganze Bau bei der Senkung und Kippbewegung fest zusammen gehalten.

Die Bodenbeschaffenheit ist in der Gegend des Baues im Allgemeinen gleichmäßig etwa folgende: Unter einer 0,61 m starken Schicht von schwerem, schwarzem Lehm liegt rötlich-grauer Ton 1,5—1,8 m stark, i. Allg. wasserhaltig, der allmählich in blauen Ton übergeht, der bis 12 m unter Gelände hinunter reicht. Hier tritt ein plötzlicher Uebergang in weißen Ton ein, durchsetzt von Knollen von Kalkstein, darunter kommt eine verwitterte Schicht Kalkstein von 0,76 m Stärke und dann fester Kalksteinfels, der also oben 16,2—16,75 m unter Prärie-Oberfläche ansteht. Belastungsversuche auf kleiner Fläche zeigten, daß dem blauen Ton etwa 4,5 kg/cm<sup>2</sup> Last zugemutet werden darf. Planmäßig war aber nur eine Belastung von 3,5 kg/cm<sup>2</sup> vorgesehen. Die gesamte Fundamentfläche hatte bei gefüllten Zellen 50 000, bei leeren 20 000 t zu tragen.

Bohrungen nach dem Unfall ergaben auf 1/2 der Länge der Ostseite des Hauses über dem Fels eine zusammenhängende höhere Bank von Felsbrocken, die jedenfalls zu der Kippbewegung Veranlassung gegeben hat, da sich hier der Ton unter dem Fundament unter der Last weniger stark zusammen drücken konnte als an der Westseite, wo er unter dem Fundament noch eine Stärke von 8,50 m besaß. Der Grundwasserspiegel lag 7,95 m unter Gelände, also 3,25 m über der Sohle des blauen Tones. Der unter diesem lagernde weiße Ton war sehr weich und stark wasserhaltig. Durch Zusammendrücken und seitliches Ausweichen dieses weichen Tones unter der Last ist die senkrechte Setzung offenbar entstanden.

Der ganze Bau hat bei dem Vorgang keine nennenswerten Risse erhalten. Man machte ihn dadurch wieder gebrauchsfähig und stellte seine Standfestigkeit wieder her, daß man parallel der tiefer abgesenkten Westseite Betonpfeiler absenkte und das Fundament durch Pressen an hob und dann durch Untermuerung auf die Pfeiler abstützte. So wurde der ganze Bau wieder lotrecht gerichtet, dessen Sohle nun allerdings am Schluß der Arbeiten auf 4,25 m Tiefe lag. —

**Abgekürzte Ermittlung der Nulllinie bei einfach bewehrten Massivdecken.** In dem Aufsatz in No. 16 soll es auf Seite 123, rechte Spalte, Zeile 8 von oben statt  $a = y_a = \beta \cdot z_a$  richtig heißen:  $a = y_a - \beta \cdot z_a$ , was dem aufmerksamen Leser sicherlich nicht entgangen sein wird. —

**Die Querschnittsbestimmung von einfach und doppelt bewehrten Platten, Balken und Plattenbalken usw.** In dem Aufsatz in No. 14 muß es Seite 110 in Formel 4) in dem 2. Glied ebenso wie in Formel 2) statt  $+fd\beta_2$  heißen  $+f'_e\beta_2$ . —

Inhalt: Bemerkenswerte Brückenausführungen des Auslandes in Eisenbeton II. — Ueber Betonfußböden in Nutzbauten. — Biege- und Torsionstheorie krummer Stabgebilde und deren Anwendung auf die Ermittlung der elastischen Formänderung gebogener Stäbe und auf die Berechnung der Rahmen. — Vermischtes. —

Verlag der Deutschen Bauzeitung, G. m. b. H., in Berlin.  
Für die Redaktion verantwortlich: Fritz Eiselen in Berlin.  
Buchdruckerei Gustav Schenck Nachflg. P. M. Weber in Berlin.