ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

7. 3341/07 BILINIOWE MODELE CIĄGÓW CZASOWYCH W ANALIZIE SYGNAŁÓW





POLITECHNIKA ŚLĄSKA ZESZYTY NAUKOWE Nr 1753

> IBLIOTEKA Główna

Ewa BIELIŃSKA

BILINIOWE MODELE CIĄGÓW CZASOWYCH W ANALIZIE SYGNAŁÓW

3341/07

GLIWICE

Opiniodawcy Prof. dr hab. inż. Ewaryst RAFAJŁOWICZ Prof. dr hab. inż. Tomasz P. ZIELIŃSKI

Kolegium redakcyjne

REDAKTOR DZIAŁU – Dr inż. Krzysztof SIMEK SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta LEŚKO

REDAKTOR NACZELNY - Prof. dr hab. inż. Andrzej BUCHACZ

Projekt okładki Tomasz LAMORSKI

Druk z materiału przygotowanego przez Autorkę

Wydano za zgodą Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Śląskiej Gliwice 2007

Spis treści

Rozdz	ał 1. Wprowadzenie	9
1.1.	Stan zagadnienia	10
1.2.	Wkład autorski	11
1.3.	Zawartość pracy	13
1.4.	Spis oznaczeń	15
Rozdz	ał 2. Podstawowe pojęcia i założenia	18
2.1.	Proces	18
	2.1.1. Momenty procesów losowych	20
	2.1.2. Estymacja momentów	23
2.2.	Model	25
2.3.	Podatność predykcyjna i własności prognostyczne	27
2.4.	Identyfikowalność	30
Rozdz	ał 3. Modele procesów losowych	33
3.1.	Stochastyczne modele liniowe	34
	3.1.1. Zalety liniowych modeli gaussowskich	35
	3.1.2. Ograniczenia liniowych modeli gaussowskich	36
	3.1.3. Identyfikowalność	36
3.2.	Stochastyczne modele nieliniowe	41
	3.2.1. Modele NARMA	41
	3.2.2. Modele biliniowe BARMA	12
	3.2.3. Modele progowe TARMA	13
	3.2.4. Modele ARCH i GARCH	14
	3.2.5. Modele wykładnicze	15
	3.2.6. Własności nieliniowych modeli stochastycznych	15

4	Spis tr	eści
Rozdz	ział 4. Elementarny proces biliniowy	48
4.1.	Przegląd struktur elementarnych procesów biliniowych	49
4.2.	Elementarny subdiagonalny proces biliniowy	56
4.3.	Elementarny diagonalny proces biliniowy	59
Rozdz	ział 5. Elementarne modele biliniowe	68
5.1.	Stabilność	68
	5.1.1. Elementarne modele biliniowe subdiagonalne	68
	5.1.2. Elementarne modele biliniowe diagonalne	70
5.2.	Odwracalność	71
	5.2.1. Elementarne modele biliniowe subdiagonalne	72
	5.2.2. Elementarne modele biliniowe diagonalne	73
5.3.	Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych	75
	5.3.1. Identyfikowalność systemowa	76
	5.3.2. Identyfikowalność strukturalna	76
	5.3.3. Identyfikowalność parametryczna	83
Rozdz	ział 6. Metody estymacji parametrów elementarnych modeli	
bilir	niowych	99
6.1.	Metody wywodzące się z zasady minimalizacji błędu predykcji	100
	6.1.1. Metoda minimalizacji sumy kwadratów błędów	100
	6.1.2. Metoda największej wiarygodności	101
	6.1.3. Metoda powtarzanego residuum	102
6.2.	Metody momentów	103
	6.2.1. Zwykła metoda momentów	104
	6.2.2. Uogólniona metoda momentów	106
Bozdz	iał 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych	111
7 1	Elementarna modela biliniana w modelawaniu i badaniach sumulaavinych	111
1.1.	7.1.1 Modelowania aukłasź	112
	7.1.1. Modelowanie zakłocen	115
79	Flomontarno modela biliniowo w prograzowaniu i układach rogulacji	117
1.2.	7.2.1 Elementarine modele ommowe w progrozowaniu r układach regulacji	110
	7.2.2. Exementarily programmed billinowy	191
	7.2.2. I ostępowanie progrostyczne	121
		120
Rozdz	iał 8. Podsumowanie i wnioski	128

Dodatek A. Momenty elementarnych procesów biliniowych	. 132
A.1. Subdiagonalny elementarny proces biliniowy EB(k,l)	. 132
A.1.1. Pierwszy moment	. 132
A.1.2. Obliczenia pomocnicze	. 133
A.1.3. Momenty zwykłe	. 134
A.1.4. Drugi moment łączny	. 135
A.1.5. Trzeci moment łączny	. 136
A.2. Elementarny diagonalny proces biliniowy $EB(k,k)$. 137
A.2.1. Pierwszy moment	. 137
A.2.2. Obliczenia pomocnicze	. 138
A.2.3. Momenty zwykłe	. 139
A.2.4. Drugi moment łączny	. 139
A.2.5. Trzeci moment łączny	. 142
A.2.6. Czwarty moment zwykły	. 145
Dodatek B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych	147
Dodatek C. Przykłady procesów opisanych modelami biliniowymi	. 155
C.1. Dekantacja	. 155
C.2. Destylacja	. 159
C.3. Ekstrakcja	. 164
C.4. Układ oddechowy	. 167
C.5. Układ sercowo-naczyniowy	. 169
Dodatek D. Przykłady predykcji	. 171
D.1. Przykłady działania predyktora dla danych symulowanych	. 171
D.2. Przykład predykcji dla rzeczywistych danych	. 180
Ribliografia	
Dibliografia	. 187

Contents

1 . In	troduction	9
1.1	State of the art	10
1.2	Author's contribution	11
1.3	Lay-out of the book	13
1.4	Glosary of notation	15
2 Som	ne basic concepts and assumptions	18
2.1	Process	18
	2.1.1 Moments of stochastic processes	20
	2.1.2 Estimation of the moments	23
2.2	Model	25
2.3	Predictability and prediction efficiency	27
2.4	Identifiability	30
3 . Ra	andom time series models	33
3.1	Stochastic linear models	34
	3.1.1 Advantages of linear Gaussian models	35
	3.1.2 Limitations of linear Gaussian models	36
	3.1.3 Identifiability	36
3.2	Nonlinear stochastic models	41
	3.2.1 NARMA models	41
	3.2.2 Bilinear models BARMA	42
	3.2.3 Threshold models <i>TARMA</i>	43
	3.2.4 ARCH and GARCH models	44

		3.2.5	Exponential models	45
		3.2.6	Characteristics of nonlinear stochastic models	45
4.	Ele	ementa	ary bilinear process	48
4	.1	Survey	v of elementary bilinear processes structures	49
4	.2	Eleme	ntary subdiagonal bilinear process	56
4.	.3	Eleme	ntary diagonal bilinear process	59
5.	Ele	ementa	ary bilinear models	68
5.	.1	Stabili	ity	68
		5.1.1	Subdiagonal elementary bilinear models	68
		5.1.2	Diagonal elementary bilinear models	70
5.	.2	Inverti	ibility	71
		5.2.1	Subdiagonal elementary bilinear models	72
		5.2.2	Diagonal elementary bilinear models	73
5.	.3	Eleme	ntary bilinear models identifiability	75
		5.3.1	System's identifiability	76
		5.3.2	Structure's identifiability	76
		5.3.3	Parameters' identifiability	83
6.	Me	thods	of estimation of elementary bilinear model's parameters	99
6.	.1	Metho	ds derived from prediction error minimization	100
		6.1.1	Sum of squared errors minimization	100
		6.1.2	Maximum likelihood method	101
		6.1.3	Repetitive residuum method	102
6	.2	Metho	ds of moments	103
		6.2.1	Simple method of moments	104
		6.2.2	Generalized method of moments	106
7.	Po	ssible	applications of elementary bilinear models	111
7.	.1	Eleme	ntary bilinear models in process modelling and simulation studies	111
		7.1.1	Modelling of disturbances	113
		7.1.2	Elementary linear-bilinear model	115
7	.2	Eleme	ntary bilinear models in process forecasting	117

	121
7.2 Bilinear models in control	125
8. Summary and conclusions	128
A. Moments for elementary bilinear processos	1 2 0
The moments for elementary billiear processes	132
A.1.1 The first moment	132
A.1.2 Auxiliary calculation	133
A.1.3 Plain moments	134
A.1.4 The second total moment	135
A.1.5 The third total moment	136
A.2 Diagonal elementary bilinear process $EB(k,k)$	137
A.2.1 The first moment	137
A.2.2 Auxiliary calculation	138
A.2.3 Plain moments	139
A.2.4 The second total moment	139
A.2.5 The third total moment	142
A.2.6 The fourth plain moment	145
B. Identification of elementary bilinear processes – some examples .	147
C. Examples of nonlinear processes	155
C.1 Decantation	155
C.2 Distillation	159
C.3 Extraction	164
C.4 Human respiratory system	167
C.5 Human heart-vessel system	169
D. Prediction – some examples	171
D.1 Examples of simulated data prediction	171
-	
D.2 An example of real data prediction	180
D.2 An example of real data prediction	180 187

8

Rozdział 1

Wprowadzenie

Stochastyczne modele ciągów czasowych są stosowane w analizie sygnałów od końca lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Szczególną rolę w rozwoju i rozpowszechnieniu metod analizy sygnałów z wykorzystaniem modeli ciągów czasowych odegrali Box i Jenkins [51]. Zbiór stochastycznych liniowych modeli ciągów czasowych wzbogacili o okresowy, jednorodnie niestacjonarny model *SARIMA* (Seasonal Auto Regressive Integrated Moving Average). Podali metodykę oraz procedury numeryczne, pozwalające na jego identyfikację.

Aström [13], stosując modele Boxa-Jenkinsa, zaproponował algorytmy predykcji i regulacji, pozwalające osiągnąć minimalną wariancję błędu predykcji bądź regulacji. Wartość minimalnej wariancji błędu zależy od horyzontu predykcji, wariancji składnika losowego w modelu zakłóceń i opóźnienia obiektu. Idea Aströma została wykorzystana przez Keysera i Cauvernberge [84] w predykcji wielokrokowej.

W latach osiemdziesiątych i dalszych następował rozwój metod liniowej filtracji sygnałów, który wpłynął na powstawanie nowych technik identyfikacji i predykcji. Jednak bariera dokładności predykcji wyznaczona przez liniowy model badanego zjawiska jako błąd liniowej predykcji minimalnowariancyjnej nie została przekroczona. Dokładność ta może zostać zwiększona w wyniku zastosowania do opisu sygnałów modeli nieliniowych, o mniejszym niż w modelach liniowych udziale składnika losowego. Modele nieliniowe, podobnie jak liniowe, mogą być tworzone jako:

- modele zjawiskowe (fenomenologiczne), z wykorzystaniem równań bilansowych oraz zależności fizykochemicznych,
- modele statystyczne wejściowo-wyjściowe (lub tylko wyjściowe), uzyskane w wyniku przetwarzania informacji o wejściach i wyjściach (lub tylko wyjściach) procesu.

1.2. Wkład autorski

Rozdział 1. Wprowadzenie

Modele statystyczne wejściowo-wyjściowe uzyskiwane są przy znacznie mniejszych nakładach niż modele zjawiskowe, ale jednocześnie opisują proces w węższym zakresie niż modele zjawiskowe. Modelują jedynie te cechy procesu, które znajdują odzwierciedlenie w zebranych danych pomiarowych.

O ile techniki tworzenia statystycznych liniowych modeli wejściowo-wyjściowych są znane, udokumentowane i z powodzeniem stosowane, to żadna z technik tworzenia modeli nieliniowych, proponowanych w ostatnim czterdziestoleciu, nie zyskała powszechnej akceptacji [57]. Przyczyną jest ogromna rozmaitość możliwych struktur modeli nieliniowych, podczas gdy struktura modelu liniowego jest jednoznacznie określona jako liniowa kombinacja wielkości wejściowych modelu. Do najczęściej proponowanych w ostatnich latach typów nieliniowych modeli wejściowo-wyjściowych należą:

- kaskadowe struktury złożone z bloków modelujących statyczną nieliniowość i liniową dynamikę procesów (modele Wienera i Hammersteina) np. [76], [77], [82],
- sztuczne sieci neuronowe, pozwalające uzyskać nieliniowy model wejściowo- wyjściowy, typu czarnej skrzynki, za pomocą dostępnych, gotowych pakietów programowych do tworzenia i uczenia sieci, np. [80], [103], [113],
- nieliniowe modele ciągów czasowych, wśród których najczęściej wyróżniane są nieliniowe modele wielomianowe, modele progowe i modele biliniowe, np.[45], [89], [90], [118].

Niniejsza praca dotyczy wykorzystania elementarnych modeli biliniowych do analizy sygnałów. Modele rozpatrywane w pracy są modelami ciągów czasowych (nazwane są również modelami wyjściowymi lub sygnałowymi), to znaczy takimi, które są zbudowane jedynie na podstawie ciągu danych wyjściowych z procesu. Tego typu modele znajdują przede wszystkim zastosowanie w przypadkach, w których wejścia procesu są nieznane lub niedostępne pomiarowo.

1.1. Stan zagadnienia

Wśród biliniowych modeli ciągów czasowych na szczególną uwagę zasługują modele biliniowe o najprostszej strukturze. Zainteresowanie takimi modelami datuje się od publikacji Grangera i Andersena [72], w której zaproponowano model:

$$x_i = e_i + \beta_{11} e_{i-1} x_{i-1}, \tag{1.1}$$

gdzie e_i jest procesem gaussowskim o zerowej wartości średniej i wariancji λ^2 . Autorzy na podstawie obserwacji zachowania się ciągu danych x_i wygenerowanych przez model (1.1) podali bez dowodów niektóre własności tego modelu, między innymi stabilność i odwracalność. Zwrócili uwagę na niesprecyzowane własności modelu dla pewnego przedziału parametrów $\beta_{11}\lambda \in (0.6, 0.707)$.

W [118] Tong wyprowadził warunki stabilności i odwracalności modelu (1.1), uściślając tym samym własności podane w [72]. Od tego czasu warunek odwracalności uważany za równoznaczny z warunkiem identyfikowalności modelu przyjmowany był jako:

 $eta_{11}^2\lambda^2 < 0.5$

Modele biliniowe wzmiankowane były w publikacjach [56], [78], [104], [73], [125], [124], często jako przykłady czy kontrprzykłady przy testowaniu procedur identyfikacji. Uwagę autorki zwrócił fakt, że przykłady ilustrujące działanie metod identyfikacji, w tym również identyfikacji nieparametrycznej, dobierane były w publikacjach bez komentarza, z pewnego podzbioru parametrów węższego od zbioru parametrów dopuszczalnych ze względu na odwracalność modelu. Jedynie Brunner, Hess [53] odnotowali potencjalne problemy z estymacją biliniowych modeli ciągów czasowych dla pewnych obszarów przestrzeni parametrów.

Ponieważ opinie o przydatności prostych modeli biliniowych do opisu sygnałów skrajnie się różnią np. [93], [118], a zdaniem autorki modele takie mogą stanowić cenne narzędzie w analizie sygnałów, monografia poświęcona jest elementarnym modelom biliniowym.

1.2. Wkład autorski

W pracy przedstawiono analizę właściwości elementarnych modeli biliniowych, możliwości i sposobu ich identyfikacji, a także zastosowania w prognozowaniu i regulacji procesów.

Chociaż praca dotyczy szczególnego rodzaju modeli ciągów czasowych, to wiąże się ona z wieloletnimi badaniami autorki nad różnymi modelami ciągów czasowych i ich wykorzystaniem oraz w znacznym zakresie ze zdobytych w tej dziedzinie doświadczeń korzysta. Szczegółowe wyniki przedstawione zostały w następujących publikacjach:

- Badania nad modelami ciągów czasowych i ich wykorzystaniem w procesach technologii chemicznej i modelowaniu stężenia metanu w wyrobiskach kopalnianych opublikowane zostały w [16], [17], [19], [22], [23].
- Przegląd metod prognozowania wykorzystujących modele ciągów czasowych opublikowano w [25].
- Algorytmy predykcji zbudowane na podstawie modeli ciągów czasowych wraz z zastosowaniami opublikowane są w [20], [21], [24].
- Zagadnienia związane z efektywnością predykcji opublikowane zostały w [18],
 [27].
- Metody predykcji wielokrokowej opisano w [28].
- Biliniowe modele ciągów czasowych oraz predyktory wynikające z tych modeli opisano w [26], [30], [31], [32], [33].
- Zagadnienia związane z identyfikacją modeli biliniowych opublikowano w [34].
- Algorytmy regulacji wykorzystujące modele biliniowych ciągów czasowych opublikowano w [35], [36], [37], [38], [39].
- Cząstkowe zagadnienia dotyczące elementarnych modeli biliniowych i możliwości ich zastosowania opublikowano w [41], [42], [43].
- Zbiorcze publikacje autorki dotyczące analizy modeli ciągów czasowych i ich zastosowań to skrypt [29], monografia [40] i podręcznik akademicki [44].

W świetle wiedzy autorki, do oryginalnych osiągnięć przedstawionych w pracy należą następujące elementy:

- 1. Zaproponowanie sposobu wykorzystania elementarnych modeli biliniowych w analizie sygnałów.
- 2. Wyznaczenie analitycznych zależności łączących momenty zwykłe, momenty centralne i momenty łączne z parametrami elementarnych procesów biliniowych.
- 3. Podważenie istniejącego poglądu, że dla ciągów czasowych warunek identyfikowalności parametrycznej jest równoważny warunkowi odwracalności.
- 4. Określenie warunku identyfikowalności systemowej dla elementrnych procesów biliniowych i dyskusja identyfikowalności parametrycznej dla elementarnych modeli biliniowych.
- 5. Określenie sposobu identyfikacji elementarnych modeli biliniowych za pomocą zwykłej metody momentów i uogólnionej metody momentów.

- 6. Zaproponowanie modelu L-EB (liniowo-elementarno-biliniowego) i sposobu jego identyfikacji.
- 7. Określenie, na podstawie modelu L EB algorytmu predykcji minimalizującej średniokwadratowy błąd predykcji.
- 8. Zaproponowanie nieliniowego algorytmu regulacji dla obiektów z biliniowym modelem toru zakłócenia, minimalizującego wariancję błędu regulacji.

1.3. Zawartość pracy

Praca złożona jest z ośmiu rozdziałów, w których zawarta jest główna myśl pracy, i czterech dodatków, które zawierają szczegółowe wyprowadzenia i przykłady ilustrujące wybrane zagadnienia.

W rozdziale drugim zdefiniowano s model i proces oraz ich podstawowe własności, w tym identyfikowalność, podatność predykcyjną i własności prognostyczne. Oba pojęcia, model i proces, używane w naukach technicznych wydają się intuicyjnie oczywiste, o ile dotyczą badań stosowanych. W badaniach teoretycznych i badaniach symulacyjnych często zaciera się granica między procesem, który sam stanowi swoisty model, a jego modelem. W związku z tym, czasem nie wiadomo, czy dyskutowane warunki, np. stabilności, odwracalności, identyfikowalności, dotyczą procesu czy modelu procesu. W rozdziale zawarte są także definicje innych pojęć stosowanych w pracy (np. ciąg czasowy, biały szum, ciąg niezależny, momenty, estymatory momentów.)

Rozdział trzeci zawiera opis najczęściej stosowanych modeli stochastycznych ciągów czasowych. Ponieważ najpowszechniej stosowane są liniowe modele stochastyczne ciągów czasowych, część rozdziału poświęcona jest tym właśnie modelom, ich właściwościom i ograniczeniom. Druga część rozdziału poświęcona jest wybranym stochastycznym modelom nieliniowym.

Rozdział czwarty poświęcony jest elementarnym procesom biliniowym. Dla subdiagonalnych i diagonalnych elementarnych procesów biliniowych zostały podane analityczne zależności wiążące momenty i parametry procesów. Ogólne zależności obowiązują, przy założeniu że pobudzenie procesu jest procesem nieskorelowanym, o zerowej wartości oczekiwanej i symetrycznym rozkładzie. Podano również szczególne zależności, przy założeniu że pobudzenie ma rozkład normalny lub równomierny. Zależności te będą wykorzystane przy identyfikacji modelu procesów w rozdziale siód-

1.4. Spis oznaczeń

Rozdział 1. Wprowadzenie

mym. Ponieważ, jak to wynika z treści rozdziału czwartego, własności estymatorów momentów nieliniowego ciągu czasowego są bardzo trudne do oszacowania, w tym rozdziale pokazano własności estymatorów wynikające z badań symulacyjnych. Dla elementarnych procesów biliniowych znaleziono ich liniowe, gaussowskie odpowiedniki i porównano podatność predykcyjną procesów i ich odpowiedników.

Rozdział piąty dotyczy elementarnych modeli biliniowych. Dyskutowane są warunki stabilności i odwracalności modeli. Podane są warunki identyfikowalności systemowej, które dla modeli subdiagonalnych nie zależą, a dla modeli diagonalnych zależą od rozkładu pobudzenia. W rozdziale dyskutowane są również warunki identyfikowalności parametrycznej modeli.

W rozdziale szóstym opisano metody pozwalające dokonać estymacji perametrów elementarnych modeli biliniowych. Najwięcej uwagi poświęcono metodom momentów – zwykłej i uogólnionej podając algorytm, według którego można prowadzić identyfikację elementarnych modeli biliniowych.

Rozdział siódmy poświęcony jest zastosowaniom elementarnych modeli biliniowych w symulacji, prognozowaniu i regulacji. W tym rozdziale wprowadzony jest model L - EB i na jego podstawie określony algorytm predykcji minimalizującej wariancję błędu predykcji, dla residuum przedstawionego modelem diagonalnym i subdiagonalnym.

Rozdział ósmy zawiera podsumowanie i wnioski.

W dodatku A umieszczono wyprowadzenie zależności między momentami i parametrami elementarnych procesów biliniowych. Zależności mają charakter ogólny, z których, po przyjęciu założeń o rodzaju rozkładu pobudzenia, wynikają zależności podane w rozdziale piątym.

W dodatku B podano przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych zwykłą metodą momentów, uogólnioną metodą momentów oraz metodą ELMS. Na podstawie umieszczonych wyników można porównać skuteczność metod identyfikacji z rozdziału siódmego, zweryfikować słuszność warunku identyfikowalności przedstawionego w rozdziale szóstym, a także zaobserwować własności estymatorów momentów, w zależności od parametrów procesu.

W dodatku C zilustrowano możliwość wykorzystania modelu L - EB z rozdziału ósmego do modelowania sygnałów pochodzących z wybranych procesów technologii chemicznej oraz procesów biomedycznych. Doświadczenia prowadzone były w ten

sposób, że na podstawie modelu matematycznego, danego dla każdego z procesów w postaci zbioru równań różniczkowych, generowano ciągły sygnał wyjściowy, uzyskany w wyniku pobudzenia modelu fenomenologicznego sygnałami wejściowymi z addytywnym zakłóceniem losowym. Sygnał wyjściowy, próbkowany z okresem próbkowania T_s , stanowił ciąg obserwacji, dla którego starano się zidentyfikować model L-EB. Zamieszczone wyniki, obok przydatności modelu L-EB, testują działanie metod identyfikacji elementarnych modeli biliniowych.

Dodatek D zawiera przykłady zastosowania algorytmu predykcji biliniowej podanego w rozdziale ósmym. Przykłady działania algorytmu dla danych symulowanych mają na celu zilustrowanie poprawności działania algorytmu, w sytuacji gdy struktura procesu, z którego pochodzą dane, jest taka sama jak struktura predyktora, a także wtedy, gdy struktura procesu jest inna niż struktura zidentyfikowanego modelu, na podstawie którego został skonstruowany predyktor. Oprócz tych przykładów w dodatku D sprawdzono działanie zaproponowanej w pracy metodyki postępowania na wzorcowych danych (benchmark), dotyczących mierzonej aktywności słonecznej. Dane te są od lat testowane, a ich zbiór z każdym rokiem się powiększa. Mimo pozornej regularności wykazują silnie nieliniowe zachowanie i uważane są za trudne do prognozowania. Na zbiorze danych z lat 1700-1979 zidentyfikowano model L - EB i na jego podstawie zbudowano prognozy na lata 1980–2005. Wyniki porównano z prognozami uzyskanymi na podstawie nieliniowego modelu SETAR uzyskanego na tym samym zbiorze danych przez Tonga [118]. Ponadto porównano prognozy wielokrokowe na lata 1980–1984 i wyznaczono prognozy na lata 2006–2009.

1.4. Spis oznaczeń

Poniżej przedstawiono ważniejsze oznaczenia, stosowane w monografii.

- u wektor deterministycznych sygnałów wejściowych procesu
- *i* czas dyskretny, numer próbki
- x_i wartość zmiennej losowej x w chwili i
- x_i ocena wartości zmiennej losowej x_i
- $\hat{x}_{i+k|i}$ prognoza zmiennej x_i z horyzontem k wyliczona w chwili i, na podstawie danych do chwili i

D operator jednokrokowego opóźnienia, zdefiniowany następująco:

16	Rozdział 1. Wprowadzenie
	$D^k x_i = x_{i-k}$
	$D^k(x_i x_{i-p}) = x_{i-k} x_{i-p-k}$
	$D^k(x_i)x_{i-p} = x_{i-k}x_{i-p}$
A(D)	wielomian operatora D: $A(D) = 1 + a_1D + a_2D^2 + \ldots + a_{dA}D^{dA}$
$E\{\}$	operator wartości oczekiwanej
$E\{x_i\}$	wartość oczekiwana zmiennej losowej x_i
$var(x_i)$	wariancja zmiennej losowej x_i
$P(x_i)$	prawdopodobieństwo zdarzenia x_i
$p(x_i)$	gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej x_i
e_i	losowe pobudzenie procesu
w_i	losowe pobudzenie modelu
$m_e^{(r)}$	moment zwykły r-tego rzędu pobudzenia e_i procesu
$m_e^{\prime(r)}$	moment centralny r-tego pobudzenia e_i procesu
$m_w^{(r)}$	moment zwykły r-tego rzędu pobudzenia w_i modelu
$m_w^{(r)}$	moment centralny r-tego rzędu pobudzenia w_i modelu
$M_{\pi}^{(r)}$	moment zwykły r-tego rzędu zmiennej losowej x_i
$M_x^{(r)}$	moment centralny r-tego rzędu zmiennej losowej x_i
$M_x^{(r)}$	ocena momentu zwykłego r-tego rzędu zmiennej losowej \boldsymbol{x}_i
$\hat{M}_{x}^{\prime(r)}$	ocena momentu centralnego r-tego rzędu zmiennej losowej \boldsymbol{x}_i
λ	odchylenie standardowe ciągu losowego o rozkładzie symetrycznym
S _p	współczynnik podatności predykcyjnej procesu
Sm	współczynnik efektywności predykcyjnej modelu
proces E	B(k, l) proces Elementarny Biliniowy o strukturze k,l
model \mathcal{E}	$\mathcal{B}(k,l)$ model Elementarny Biliniowy o strukturze k,l
model L	- EB model Liniowo - Elementarno-Biliniowy
model T	ARMA model progowy Treshold ARMA
model S	ETARMA model samopobudzający Self Excited TARMA
model B	ARMA model biliniowy Bilinear ARMA
model G	ARCH model heteroskedastyczny (Generalised
	Autoregressive Conditionally Heteroscedastic)

metoda najmniejszych kwadratów

rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów

metoda LS

metoda **RLS**

1.4. Opin Onnuclion	1.4.	Spis	oznaczeń
---------------------	------	------	----------

metoda ZMM metoda GMM

uogólniona metoda momentów

zwykła metoda momentów

2.1. Proces

19

w czasie. Przedstawiona monografia dotyczy losowych procesów, dyskretnych w czasie, dla których dostępne pomiarowo są jedynie sygnały wyjściowe¹, które tym samym są jedynym źródłem informacji o procesie. Badaniem własności procesów losowych, o dostępnych pomiarowo jedynie sygnałach wyjściowych, zajmowali się m.in. [2]–[11], [45], [51], [55], [72], [73], [104], [118].

Zbiory obserwacji sygnałów wejściowych u_i i/lub wyjściowych y_i procesu, dokonywanych w dyskretnych, równoodległych przedziałach czasu i uporządkowanych według czasu, tworzą dyskretne ciągi czasowe, nazywane dalej ciągami czasowymi. Ciągi czasowe obserwowane na wyjściu procesów losowych są traktowane jako realizacje tych procesów.

Szczególną rolę w analizie sygnałów pełni ciąg nazywany dyskretnym białym szumem. Dyskretny biały szum e_i jest ciągiem czasowym o dowolnym, niezmiennym w czasie rozkładzie, spełniającym warunki²:

$$E\{e_i\} = 0,$$
 (2.1)

$$E\{e_i e_j\} = \begin{cases} \lambda^2 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$
(2.2)

W szczególności dyskretny biały szum jest szumem gaussowskim, gdy jego gęstość rozkładu prawdopodobieństwa, dla każdej chwili czasu i, dana jest zależnością:

$$p(e_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\lambda}} \exp\left(-\frac{e_i}{2\lambda^2}\right).$$
(2.3)

Definicja 2.1. Ciąg czasowy, którego elementy nie są związane ze sobą żadną zależnością czasową, będziemy nazywać ciągiem czasowym o elementach niezależnych lub w skrócie – niezależnym ciągiem czasowym.

Z definicji 2.1 wynika, że:

- każdy niezależny ciąg czasowy jest ciągiem nieskorelowanym,

- nie każdy ciąg nieskorelowany jest ciągiem niezależnym.

W konsekwencji, ciąg niezależny jest całkowicie nieprzewidywalny, podczas gdy przyszłe wartości ciągu nieskorelowanego, ale zależnego przy spełnieniu określonych

¹ Przykładowo, w procesie generacji mowy pomiarowo dostępny jest wyjściowy sygnał mowy, proces aktywności słonecznej obserwowany jest jako liczba plam pojawiających się na Słońcu.

² Ciąg losowy o takich właściwościach nazywa się niekiedy dyskretnym białym szumem w szerokim sensie [109].

Rozdział 2

Podstawowe pojęcia i założenia

Celem analizy sygnałów jest przetworzenie skończonej liczby danych pochodzących z procesu dyskretnego lub uzyskanych w wyniku równomiernego próbkowania sygnału ciągłego w taki sposób, by wydobyć z nich istotną informację zawartą w tym sygnale. Monografia dotyczy możliwości analizy sygnałów losowych przy wykorzystaniu pewnego rodzaju stochastycznych modeli ciągów czasowych.

W badaniach stosowanych granica między procesem a jego modelem jest ostro zarysowana. Informacje o otaczającej rzeczywistości odbieramy w postaci dochodzących do nas sygnałów o różnym charakterze. Sygnały te są wynikiem zachodzących zespołów wzajemnie uwarunkowanych zjawisk. Zespół tych zjawisk jest procesem, opis zjawisk jest modelem. W rozważaniach teoretycznych i badaniach symulacyjnych sytuacja jest znacznie mniej klarowna, gdyż sam proces jest opisany matematycznie, więc formalnie sam jest modelem.

W kolejnych podrozdziałach zdefiniowano zespół pojęć stosowanych w tej monografii. Jest to istotne o tyle, że w literaturze dotyczącej ciągów czasowych, np. [7], [11], proces i model często bywają używane wymiennie. Zdarza się, zwłaszcza gdy dotyczy to identyfikacji, predykcji i regulacji, że rodzą się wątpliwości, czy stabilność, odwracalność, identyfikowalność, predykcyjność, podatność regulacyjna dotyczą procesu czy modelu.

2.1. Proces

Procesem nazywamy przetworzenie sygnału lub grupy sygnałów u w inny sygnał lub grupę sygnałów y. Jeżeli sygnały u, y są określone tylko w dyskretnych momentach czasu, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_i$ dla i = 1, 2, ...N, proces nazywa się procesem dyskretnym

2.1. Proces

Rozdział 2. Podstawowe pojęcia i założenia

warunków mogą być przewidywalne. Przykładowo, gaussowski biały szum e_i jest ciągiem nieskorelowanym i niezależnym, natomiast ciąg $w_i = e_i + e_{i-1}e_{i-2}$ jest nadal ciągiem nieskorelowanym, ale zależnym.

Dyskretny gaussowski biały szum ze względu na swoje właściwości jest pojęciem niezwykle przydatnym przy teoretycznej analizie asymptotycznych własności procesów stochastycznych. Gaussowskie ciągi czasowe mają kilka istotnych własności [119]:

- 1. Nieskorelowane ciągi gaussowskie są jednocześnie niezależne.
- Liniowa operacja dokonana na ciągu gaussowskim daje w wyniku również ciąg gaussowski.
- Operacja nieliniowa wykonana na ciągu gaussowskim powoduje, że na ogół przestaje on być ciągiem gaussowskim.
- 4. Dla dowolnego procesu losowego o skończonych pierwszych dwóch momentach istnieje proces gaussowski o takich samych dwóch pierwszych momentach [107]. Powyższe własności uzasadniają powszechne stosowanie liniowych modeli gaussowskich w analizie i prognozowaniu sygnałów. Istnieją jednak procesy generujące ciągi czasowe wyraźnie niegausowskie (np. akustyka oceanu, przypadkowe wibracje mechaniczne [120]), które wymagają modeli innych niż liniowe modele gaussowskie.

2.1.1. Momenty procesów losowych

Dla procesów losowych zdefiniowano funkcje nazywane momentami, np. [96], [100], zależne od gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $p(y_i)$, lecz przy pewnych założeniach możliwe do oszacowania bez koniecznej znajomości $p(y_i)$. Ponieważ w praktyce określenie analitycznej postaci funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa jest trudne do wykonania, oszacowanie jej wiąże się z błędami, a założenie rozkładu gaussowskiego nie zawsze odpowiada rzeczywistości, więc momenty stanowią ważne źródło informacji o procesach losowych.

Dla procesu losowego y_i , o gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $p(y_i)$, moment zwykły r-tego rzędu jest definiowany jako:

$$M_{y_i}^{(r)} = E\{y_i^r\},\$$

(2.4)

gdzie:

- E{} jest operatorem wartości oczekiwanej:

$$E\{y_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} y_i p(y_i) dy_i. \tag{2.5}$$

Pierwszy moment zwykły jest wartością oczekiwaną procesu y_i .

Moment centralny rzędu r procesu losowego jest zdefiniowany jako:

$$M'_{y_i}^{(r)} = E\{(y_i - E\{y_i\})^r\}.$$
(2.6)

Przy czym:

- drugi moment centralny jest nazywany wariancją ciągu czasowego y_i , często oznaczaną jako σ_{in}^2 .
- Trzeci moment centralny jest miarą symetrii odchyłek wartości ciągu y_i od wartości średniej.
- Czwarty moment jest miarą spłaszczenia rozkładu $p(y_i)$.

Pozostałe momenty opisują inne cechy rozkładu, przy czym parzyste momenty są zawsze nieujemne. Należy zwrócić uwagę, że pewne momenty procesu losowego mogą nie istnieć. Przykładowo, dla stacjonarnego procesu losowego o rozkładzie Cauchy'ego o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa:

$$p(y) = rac{1}{\pi} \left[rac{lpha}{lpha^2 + y^2}
ight]$$

pierwszy moment zwykły nie ma skończonej wartości. Wyższe momenty również nie są skończone [67].

Pierwsze cztery momenty zwykłe łączne losowego procesu y_i określone są następująco:

$$\mathcal{A}_{y_i}^{(1)} = E\{y_i\},\tag{2.7}$$

$$M_{y_i}^{(2)}(k) = E\{y_i y_{i+k}\},\tag{2.8}$$

$$M_{y_i}^{(3)}(k,l) = E\{y_i y_{i+k} y_{i+l}\},$$
(2.9)

$$M_{u_i}^{(4)}(k,l,m) = E\{y_i y_{i+k} y_{i+l} y_{i+m}\}.$$
(2.10)

Analogicznie można zdefiniować momenty centralne łączne $M'^{(n)}_{y_i}$:

 $M'_{y_i}^{(1)} = E\{y_i - E\{y_i\}\},\tag{2.11}$

$$M'^{(2)}_{u}(k) = E\{(y_i - E\{y_i\})(y_{i+k} - E\{y_i\})\}, \qquad (2.12)$$

2.1. Proces

Rozdział 2. Podstawowe pojęcia i założenia

 $M_{y_{i}}^{\prime(3)}(k,l) = E\{(y_{i} - E\{y_{i}\})(y_{i+k} - E\{y_{i}\})(y_{i+l} - E\{y_{i}\})\},$ (2.13) $M_{y_{i}}^{\prime(4)}(k,l,m) = E\{(y_{i} - E\{y_{i}\})(y_{i+k} - E\{y_{i}\})(y_{i+l} - E\{y_{i}\})(y_{i+m} - E\{y_{i}\})\}.$ (2.14)

Informację niesioną przez momenty łączne można scharakteryzować następująco:

- Drugi moment centralny łączny tworzy funkcję autokowariancji procesu losowego i jednocześnie jest miarą zależności liniowych istniejących w procesie.
- Trzeci moment centralny łączny $M'_{y_i}(3)(k,l)$ jest miarą zależności biliniowych istniejących w procesie.
- Czwarty moment centralny łączny $M'^{(3)}_{\mu_*}(k, l, m)$ jest miarą zależności nieliniowych trzeciego rzędu.

Pozostałe momenty niosą dodatkowe informacje o procesie.

Dla procesów losowych o rozkładzie gaussowskim kolejne momenty centralne wynoszą odpowiednio:

$$M_{y_{i}}^{\prime(n)} = 0 \qquad dla \ n \ nieparzystych, M_{y_{i}}^{\prime(2n)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ...(2n-1)\sigma_{y_{i}}^{2n}, \ dla \ n=1,2,3,....$$
(2.15)

Proces gaussowski jest całkowicie scharakteryzowany przez wartość oczekiwaną i wariancję:

$$M_{y_i}^{(1)} = E\{y_i\},\tag{2.16}$$

$$M_{y_i}^{(2)} = E\{y_i^2\} = \sigma_{y_i}^2, \tag{2.17}$$

co oznacza, że wszystkie wyższe momenty procesu można wyrazić jako funkcje wartości oczekiwanej i wariancji.

Procesy losowe charakteryzują się tym, że ich wszystkie bądź tylko niektóre momenty mogą zależeć od czasu, lub mogą być od czasu niezależne.

Proces losowy y_i nazywamy procesem stacjonarnym w wąskim (ścisłym) sensie, jeśli jego wszystkie momenty (zwykłe, centralne i łączne) są niezmienne w czasie.

$$M_{y_i}^{(r)} = M_y^{(r)} \quad dla \ r = 1, 2, ..., \infty$$
 (2.18)

$$M_{y_i}^{(\prime r)} = M_y^{\prime (r)} \quad dla \ r = 1, 2, ..., \infty$$
(2.19)

Proces losowy y_i nazywamy procesem stacjonarnym w szerokim sensie (słabo stacjonarnym), gdy jego pierwszy i drugi moment (zwykły, centralny i łączny) nie zależą od czasu:

$$M_{uv}^{(r)} = M_{uv}^{(r)} dla \ r = 1, 2$$
 (2.20)

$$M_{w}^{(\prime r)} = M_{w}^{\prime (r)} \quad dla \ r = 1,2 \tag{2.21}$$

2.1.2. Estymacja momentów

Estymatorem momentów nazywa się regułę, według której na podstawie ciągu obserwacji y_i dla i = 0, 1, 2, ..., N wyliczane są szacunkowe oceny momentów M, nazywane również momentami z próby. Istnieją różne metody wyznaczania tych ocen, przy czym najczęściej stosowane są estymatory momentów o postaci:

średnia z próby:

$$\hat{M}_{y}^{(1)} = \hat{\overline{y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}, \qquad (2.22)$$

wariancja z próby:

$$\hat{M}'_{\bar{y}}^{(2)} = \hat{\sigma}_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2, \qquad (2.23)$$

moment zwykły r-tego rzędu z próby:

$$\hat{M}_{y}^{(r)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_{i})^{r}, \qquad (2.24)$$

moment centralny r-tego rzędu z próby:

$$\hat{\mathcal{U}}_{y}^{(r)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_{i} - \hat{\overline{y}})^{r},$$
(2.25)

autokowariancja z próby, czyli drugi moment centralny łączny z próby:

$$\hat{M}'_{y}^{(2)}(k) = \gamma_{k} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (y_{i} - \hat{\overline{y}})(y_{i+k} - \hat{\overline{y}}), \qquad (2.26)$$

trzeci moment centralny łączny z próby:

$$\hat{M'}_{y}^{(3)}(k,l) = \frac{1}{N - max(k,l)} \sum_{i=1}^{N - max(k,l)} (y_i - \bar{y})(y_{i+k} - \bar{y})(y_{i+l} - \bar{y}). \quad (2.27)$$

Oceny momentów uzyskane na podstawie powyższych estymatorów jako funkcje zmiennych losowych same są również zmiennymi losowymi [75]. O skuteczności estymatora decydują jego własności, takie jak:

2.2. Model

Obciążoność: Estymator jest nieobciążony, gdy wartość oczekiwana oceny parame-

- tru $\hat{\Theta}$ uzyskanej za pomocą estymatora jest równa szacowanemu parametrowi Θ . Zgodność: Zgodność oznacza zbieżność estymatora do szacowanego parametru według prawdopodobieństwa³ (niezależnie od wartości tego parametru). Nieobciążony estymator jest zgodny, jeśli jego wariancja zdąża do zera, gdy N dąży do nieskończoności.
- Efektywność: Estymator jest efektywny, gdy wariancja uzyskanej oceny jest możliwie mała. Estymator najefektywniejszy daje ocenę parametru o najmniejszej wariancji ⁴.
- **Prostota:** Prostota estymatora ooznacza niewielką złożoność postępowania potrzebnego do wyznaczenia oceny.

Estymatory momentów dane zależnościami (2.22-2.27) niewątpliwie charakteryzują się prostotą obliczeniową. Inne ich własności nie są tak oczywiste. Goldberger [67] i Oderfeld [102] określają właściwości estymatorów momentów dla nieskorelowanych zmiennych losowych i niektórych estymatorów momentów dla skorelowanych zmiennych losowych, niezależnie od rozkładu. Pokazują, że dla nieskorelowanych zmiennych losowych estymatory momentów zwykłych są nieobciążone, a estymatory momentów centralnych są asymptotycznie nieobciążone. Wariancje ocen momentów $\hat{M}_y^{(r)}$ i $\hat{M}_y^{(r)}$ zależą odpowiednio od wartości momentów: $M_y^{(r)} ... M_y^{(2r)}$ i $\hat{M}_y^{(r)} ... M_y^{(2r)}$.

Określenie własności estymatorów momentów dla zmiennych losowych skorelowanych jest znacznie trudniejsze niż dla nieskorelowanych. W [67] pokazano, że dla zmiennych losowych skorelowanych:

- estymator wartości średniej (2.22) jest nieobciążony,
- estymator wartości średniej (2.22) jest zgodny, gd
y $M^{'(2)}(k)$ szybko maleje ze wzrostemk,
- estymator wariancji (2.23) jest obciążony, ale jest asymptotycznie nieobciążony dla ciągów, dla których estymator wartości średniej jest zgodny,
- wariancja estymatora wariancji zależy od czwartego momentu rozkładu.
- ³ Zbieżność p lim, [75]: $\lim_{N \to \infty} P[|\Theta_n \Theta| > \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$

⁴ Dla oceny efektywności estymatora wykorzystuje się nierówność Cramera-Rao , np. [117], [75].

2.2. Model

Dla zrozumienia obserwowanych procesów tworzymy, mniej lub bardziej świadomie, modele pozwalające rozpoznać procesy tego samego typu i przewidzieć ich zachowanie. Proces, dla którego nie jesteśmy w stanie znaleźć żadnego modelu, pozostaje nierozpoznany. Modele, których rodzaj, strukturę i parametry wybieramy, mogą być tworzone z wykorzystaniem informacji niesionej przez sygnały pozostające we wzajemnych zależnościach przyczynowo-skutkowych lub tylko na podstawie sygnałów wyjściowych z procesu, przy założeniu że przyczyny obserwowanych zjawisk są nieznane lub niedostępne pomiarowo.

Poszukiwany model procesu zależy od celu, jakiemu ma służyć, posiadanej wiedzy o procesie oraz dostępnej informacji. Niepełna wiedza o zachodzącym procesie, a także udział niemierzalnych zakłóceń powodują, że bywa on opisywany przez *modele stochastyczne*, czyli modele z udziałem składnika losowego, o następującej postaci:

$$y_i = f(u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, w_i, \mathbf{p}),$$
(2.28)

gdzie:

- f() funkcja liniowa lub nieliniowa,

- w_i tzw. sygnał innowacji, najczęściej określany jako dyskretny biały szum,
- **p** wektor parametrów.

Model o postaci (2.28) nazywany jest modelem parametrycznym. Jeśli f() jest funkcją liniową względem wielkości wejściowych modelu i parametrów modelu, to (2.28) jest modelem liniowym. W przeciwnym wypadku jest modelem nieliniowym.

Dla modeli liniowych wystarczające jest założenie, że ciąg innowacji w_i jest wewnętrznie nieskorelowany. Dla modeli nieliniowych często dodatkowo zakłada się, że ciąg w_i jest ciągiem niezależnym⁵.

Dyskretny biały szum jest z definicji nieprognozowalny na podstawie modeli liniowych, lecz w szczególnych przypadkach może być prognozowalny przy wykorzystaniu modeli nieliniowych. Niezależny dyskretny biały szum w_i jest nieprognozowalny, ze względu na brak jakichkolwiek zależności łączących jego elementy. Jeśli stanowi on pobudzenie modelu, to wyznacza granicę zrozumienia obserwowanej rzeczywistości z maksymalną dokładnością określoną przez wariancję białego szumu $m_w^{(2)}$. Jednocześnie stwarza szansę, by to, co leży poniżej tej granicy, mogło być przewidziane, jeżeli

⁵ Por. Definicja 2.1.

Rozdział 2. Podstawowe pojęcia i założenia

tylko zostaną odpowiednio zaprojektowane algorytmy identyfikacji modelu i predykcji. Stopień rozpoznania procesu jest więc scharakteryzowany przez udział składnika losowego w opisie tego procesu. Można zaobserwować zmniejszanie się udziału losowości w modelu w miarę wzrostu zrozumienia mechanizmów różnych zdarzeń i umiejętności ich opisu.

W [46] Bohlin określił i sklasyfikował podstawowe typy modeli procesów. Niniejsza monografia dotyczy modeli ciągów czasowych nazywanych czasem modelami sygnałowymi.

Modelami sygnałowymi albo modelami ciągów czasowych nazywamy modele opisujące wyjście y_i procesu jako funkcję poprzednich wartości sygnału wyjściowego y_{i-l} dla l = 1, 2, ...L i sygnału innowacji w_{i-k} dla k = 0, 1, 2, ..., K. Sygnał innowacji, będący składnikiem modelu, jest najczęściej ciągiem *losowym* o założonych właściwościach stochastycznych, np. gaussowskim białym szumem lub sygnałem błędu modelu.

Modele ciągów czasowych znajdują zastosowanie w prognozowaniu stacjonarnych procesów stochastycznych (sygnał innowacji jest wtedy białym szumem). Mogą być również wykorzystywane do kompresji danych na potrzeby transmisji. Pozwalają one odtworzyć oryginalną sekwencję danych na podstawie znanego sygnału innowacji w_i , będącego wówczas deterministycznym ciągiem różnic:

$w_i = y_i - y_{i|i-k}.$

Należy pamiętać, że modele ciągów czasowych:

nie mogą być wykorzystywane do sterowania,

- mogą tracić ważność, gdy ulegnie zmianie charakter (np. rozkład) pobudzenia.

Własności modeli

Własności parametrycznych modeli ciągów czasowych wynikają z dobranej struktury (postaci funkcji f()) i parametrów p.

- W zależności od wartości parametrów p modele są stabilne bądź niestabilne (w sensie BIBO).
- Modele są przyczynowe, gdy sygnał wyjściowy w chwili i zależy jedynie od przeszłych wartości sygnałów wyjściowych y_{i-k} . W przeciwnym przypadku modele są nieprzyczynowe.

2.3. Podatność predykcyjna i własności prognostyczne

- Modele są odwracalne, gdy pozwalają na podstawie sygnału wyjściowego y_i z modelu wyznaczyć sygnał wejściowy w_i dla każdej chwili *i*, w przeciwnym razie są nieodwracalne.
- Modele są *identyfikowalne*, gdy można na podstawie analizy dostępnych sygnałów wyjściowych określić strukturę i parametry modelu. W przeciwnym wypadku są nieidentyfikowalne.
- Modele mogą mieć parametry stałe bądź zmienne w czasie. Klasyfikowane są wówczas jako stacjonarne bądź niestacjonarne względem parametrów.
- Modele mogą mieć korzystne bądź niekorzystne własności predykcyjne, pozwalające na podstawie modelu zbudowanego na określonym zbiorze danych wnioskować o przyszłości.

Modele stabilnych procesów powinny być: stabilne, przyczynowe i identyfikowalne. Dodatkowo, gdy mają być stosowane do kompresji czy predykcji sygnałów, muszą być odwracalne.

W przypadku gdy dla badanego procesu można dopasować kilka różnych modeli, Haber i Unbehauen [79] zalecają następującą strategię wyboru modelu:

- modele parametryczne przed modelami nieparametrycznymi,
- modele o mniejszej liczbie parametrów przed modelami o większej liczbie parametrów,
- modele, dla których istnieją prostsze metody estymacji parametrów przed pozostałymi modelami,
- modele, dla których prostsza jest identyfikacja struktury modelu przed pozostałymi modelami.

Powyższa strategia wyboru modelu, zaproponowana oryginalnie dla modeli wejściowo-wyjściowych⁶, może być również zastosowana dla modeli sygnałowych.

2.3. Podatność predykcyjna i własności prognostyczne

Z doświadczeń wynika, że istnieją procesy (np. zapotrzebowanie na energię elektryczną w ciągu doby w zależności od pory roku), których wyjścia są względnie łatwo przewidywalne. Prognozowanie pogody jest już zadaniem znacznie trudniejszym.

⁶ Sygnał wejściowy jest znany i dostępny pomiarowo

2.3. Podatność predykcyjna i własności prognostyczne

Rozdział 2. Podstawowe pojęcia i założenia

Gaussowski dyskretny biały szum jest klasycznym przykładem procesu nieprognozowalnego. Poszczególne procesy różnią się więc między sobą podatnością predykcyjną. Definicja 2.2. Podatność predykcyjna jest właściwością procesu, oznaczającą potencjalną możliwość przewidzenia zachowania się zmiennych wyjściowych z procesu.

Choć podatność predykcyjna procesu jest w zasadzie pojęciem intuicyjnym, na potrzeby badań symulacyjnych, prowadzonych dla procesów zdefiniowanych matematycznie:

$$y_i = f(y_{i-l}, e_{i-k}) \, \mathrm{dla} \, k = 0, 1, 2, ...K, \ l = 1, 2, ...L,$$
 (2.29)

można sformułować warunek strukturalnej nieprognozowalności:

Definicja 2.3. Proces stochastyczny y_i będziemy nazywać strukturalnie nieprognozowalnym, gdy każdy niezerowy wyraz $\Phi_{i,j}$ jego aproksymacji szeregiem:

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Phi_{i,j}, \qquad (2.30)$$

można przedstawić następującą zależnością:

$$\Phi_{i,j} = e_i \varphi(e_{i-j}, y_{i-j}), \tag{2.31}$$

gdzie:

- e_i - niedostępne pomiarowo, nieskorelowane pobudzenie procesu,

- a_j - współczynnik liczbowy.

Procesy niespełniające definicji 2.3 będziemy nazywać procesami strukturalnie prognozowalnymi. Dla procesów strukturalnie prognozowalnych można zdefiniować miarę podatności predykcyjnej procesu [40]:

Definicja 2.4. Miara podatności predykcyjnej s_p jest funkcją udziału wariancji składnika losowego λ^2 w całkowitej wariancji analizowanej zmiennej wyjściowej σ_{μ}^2 :

$$s_p = 1 - \frac{\lambda^2}{\sigma_y^2}.\tag{2.32}$$

Dla procesu deterministycznego, dla którego $\lambda^2 = 0$, miara podatności predykcyjnej $s_p = 1$. Dla białego szumu $\sigma_p^2 = \lambda^2$ i miara podatności predykcyjnej $s_p = 0$. Procesy losowe, strukturalnie prognozowalne niebędące białym szumem charakteryzują się miarą podatności predykcyjnej, leżącą w przedziale (0, 1). Generalnie, im większy jest udział składnika losowego w procesie, tym bliższa zeru jest miara podatności predykcyjnej procesu s_p i tym gorszą podatnością predykcyjną się on cechuje.

Dobra podatność predykcyjna procesu nie jest równoznaczna z wysoką jakością prognozy, gdyż do wyliczenia prognozy potrzebny jest model cechujący się dobrymi własnościami prognostycznymi, a uzyskanie takiego modelu nie zawsze jest możliwe. Prostym przykładem procesu matematycznie zdefiniowanego o podatności predykcyjnej $s_p = 1$, który w praktyce (bez znajomości dokładnego modelu i warunków początkowych) jest nieprognozowalny, jest chaos, opisany nieliniowym równaniem deterministycznym.

Własności prognostyczne modelu

Od modeli przeznaczonych do prognozowania procesów bądź sterowania procesami wymaga się, by posiadały własności uogólniające, czyli aby nie traciły ważności poza zbiorem danych, na podstawie którego zostały opracowane. Własności uogólniające modelu są równoznaczne z własnościami prognostycznymi modelu.

Definicja 2.5. Model ma dobre własności prognostyczne, jeśli pozwala zbudować poprawną prognozę zmiennej wyjściowej procesu.

Granger i Newbold [71] w charakterze miary własności prognostycznych modelu stosują stosunek wariancji predykcji minimalnowariancyjnej, otrzymanej na podstawie modelu, do wariancji zmiennej prognozowanej, przy założeniu że prognozowana zmienna ma skończoną wariancję.

$$r = \frac{var(\hat{y}^{MV})}{var(y)} \tag{2.33}$$

W monografii jako miarę własności prognostycznych modelu zastosowano nieco zmodyfikowaną postać miary 2.33, zwaną *współczynnikiem efektywności predykcji* [40], o budowie podobnej do (2.32).

Definicja 2.6. Współczynnik efektywności predykcji:

$$s_m = 1 - \frac{var(\varepsilon^{MV})}{var(y)},\tag{2.34}$$

gdzie $var(\varepsilon^{MV})$ jest minimalną wariancją błędu predykcji opracowanej na podstawie modelu, określa własności prognostyczne modelu.

Rozdział 2. Podstawowe pojęcia i założenia

Dla $var(\varepsilon^{MV}) = 0$ współczynnik efektywności predykcji jest równy $s_m = 1$. Dla $var(\varepsilon^{MV}) = var(y)$ współczynnik efektywności predykcji wynosi $s_m = 0$. Model ma dobre własności prognostyczne, gdy miara s_m jest bliska jedności.

2.4. Identyfikowalność

Identyfikowalność procesu jest właściwością procesu oznaczającą możliwość jego poprawnego zidentyfikowania [88]. O poprawnym zidentyfikowaniu badanego procesu, w sensie struktury i parametrów, można dyskutować jedynie na gruncie badań symulacyjnych, podczas których zarówno struktura, jak i parametry identyfikowanego procesu są znane.

W badaniach stosowanych rzeczywiste procesy często są na tyle złożone, że rozpatruje się je z różnych punktów widzenia, a opis (model) procesu różni się w zależności od rozważanego aspektu. W badaniach stosowanych identyfikowalność dotyczy raczej możliwości odtworzenia określonych właściwości (zachowań, charakterystyk) procesu na podstawie specyficznego modelu badanego procesu, a nie procesu jako całości. W związku z czym nie ma jednolitej definicji identyfikowalności, a także ogólnych warunków identyfikowalności procesów [46].

Identyfikowalność, choć naturalnie związana z procesem, dotyczy zarówno procesu, jak i modelu. W dalszym ciągu tej monografii będziemy rozróżniać identyfikowalność systemową, która ma istotne znaczenie w badaniach stosowanych i dotyczy wyłącznie procesu, oraz identyfikowalność systemową, strukturalną i parametryczną, istotne w badaniach symulacyjnych i dotyczące zarówno procesu, jak i modelu. Poniżej podane zostaną definicje rodzajów identyfikowalności omawianej w dalszym ciągu pracy.

Definicja 2.7. Identyfikowalność systemowa oznacza, że możliwe jest znalezienie takiego modelu (w sensie struktury i parametrów), który odzwierciedla obserwowane zachowanie procesu. Przez zachowanie procesu rozumie się:

 reakcje na zadane wymuszenia, w przypadku procesów o wejściach dostępnych pomiarowo,

 charakterystyki statystyczne (rozkłady, momenty) w przypadku procesów o wejściach nieznanych lub niedostępnych pomiarowo.

2.4. Identyfikowalność

W identyfikowalności systemowej nie jest istotna struktura i parametry modelu, lecz efekt końcowy modelowania. W szczególności może istnieć wiele różnych modeli równie dobrze odtwarzających wybrane charakterystyki procesu.

Definicja 2.8. Identyfikowalność strukturalna procesu oznacza, że możliwe jest znalezienie struktury modelu zgodnej ze strukturą procesu.

Badanie identyfikowalności strukturalnej procesu stochastycznego jest częścią analizy procesu. Ma na celu określenie relacji między momentami stochastycznymi procesu, których spełnienie pozwala określić typ i strukturę procesu.

Definicja 2.9. Identyfikowalność strukturalna modelu określonego rodzaju oznacza, że możliwe jest znalezienie struktury modelu określonego rodzaju, niekoniecznie zgodnej ze strukturą procesu, która pozwoli odtworzyć wybrane charakterystyki procesu.

Identyfikowalność strukturalna modelu ma znaczenie zarówno w badaniach stosowanych, jak i badaniach symulacyjnych. Rzeczywista struktura procesu losowego nie jest znana, znane są jedynie oceny momentów stochastycznych procesu. Warunki identyfikowalności strukturalnej modelu określają, czy model o hipotetycznie przyjętej strukturze może zostać zidentyfikowany na podstawie ocen momentów stochastycznych procesu losowego. Dla określonego procesu losowego modele o pewnych strukturach mogą być identyfikowalne, a o innych nie.

Definicja 2.10. Identyfikowalność parametryczna procesu oznacza, że jeśli istnieją modele o tej samej strukturze, lecz o różnych parametrach, które tak samo dobrze opisują badany proces, a wśród tych modeli istnieje model o parametrach równych w przybliżeniu parametrom procesu, to zbiór danych pochodzących z procesu zawiera informacje pozwalające wybrać parametry modelu odpowiadające parametrom procesu.

Identyfikowalność parametryczna procesu odgrywa rolę w badaniach symulacyjnych i analizie procesu.

Definicja 2.11. Identyfikowalność parametryczna modelu oznacza, że możliwe jest jednoznaczne określenie parametrów modelu odtwarzającego wybrane charakterystyki procesu.

Identyfikowalność parametryczna modelu odgrywa rolę w badaniach symulacyjnych i badaniach stosowanych. W badaniach stosowanych, gdy prawdziwe parame-

Rozdział 2. Podstawowe pojęcia i założenia

try procesu nie są znane, identyfikowalność parametryczna oznacza możliwość jednoznacznego określenia parametrów modelu. Warunki identyfikowalności formułowane w literaturze najczęściej dotyczą identyfikowalności parametrycznej modelu.

Z praktycznego punktu widzenia, identyfikowalność systemowa jest bardziej istotna niż parametryczna, ponieważ:

- znajomości opisu procesu z dokładnością do parametrów można oczekiwać jedynie w badaniach symulacyjnych,
- w praktyce akceptowany jest model adekwatnie przedstawiający określone właściwości procesu.

Z drugiej strony, stochastyczny model procesu uwzględnia udział składnika losowego, a skoro tak, to model z mniejszym udziałem składnika losowego jest bardziej pożądany od modelu o identycznych charakterystykach statystycznych, lecz o większym udziałe losowości. W takim przypadku identyfikowalność parametryczna nabiera znaczenia. Warto wiedzieć, czy dla procesu z danym udziałem losowości potrafimy znaleźć model o zbliżonym udziałe losowości, czy może tylko model odzwierciedlający charakterystyki statystyczne, lecz ze znacznie większym udziałem składnika losowego. W pierwszym przypadku znaleziony model ma korzystne własności prognostyczne. W drugim przypadku należy ostrożnie podejść do możliwości wykorzystania takiego modelu dla prognozowania, natomiast z powodzeniem można wykorzystać go w badaniach symulacyjnych do modelowania sygnałów. Rozdział 3

Modele procesów losowych

Badania procesów losowych mają na celu między innymi wykrycie reguł dynamicznych, które powodują generację obserwowanych ciągów. Stochastyczne modele ciągów czasowych są parametrycznymi modelami generujących je procesów. Oczywiste jest, że określenie reguły dynamicznej wymaga zrozumienia zachodzących w procesie zjawisk, co w praktyce jest osiągalne tylko w bardzo ograniczonym zakresie. Kiedy wyjaśnienie teoretyczne dla obserwowanego procesu nie istnieje lub jest niepełne, można zastosować następujący schemat postępowania, [118]:

- Oszacować istotne cechy obserwowanego zbioru danych (ciągu czasowego), takie jak:
 - wartość średnia,
 - wariancja,
 - stacjonarność wartości średniej,
 - stacjonarność wariancji,
 - okresowość,
 - cykliczność.
- 2. Skonstruować empiryczny model ciągu czasowego, zawierający w sobie tyle teoretycznej wiedzy o procesie generacji, ile w danym przypadku jest możliwe.
- 3. Sprawdzić, czy skonstruowany model wystarczająco wyjaśnia cechy oszacowane w pierwszym punkcie i w razie potrzeby udoskonalić model.

Realizacja punktu drugiego najczęściej sprowadza się do określenia względnie szerokiej klasy modeli, zdolnych wyjaśnić cechy oszacowane w punkcie pierwszym. Modele te są następnie identyfikowane za pomocą dostępnych technik identyfikacji i weryfikowane jak w punkcie trzecim. W kolejnych podrozdziałach zostaną przedstawione najczęściej stosowane stochastyczne modele ciągów czasowych.

Rozdział 3. Modele procesów losowych

3.1. Stochastyczne modele liniowe

Liniowe modele procesów losowych mają postać liniowych filtrów H(D) pobudzanych losowym sygnałem wejściowym w_i , nazywanym sygnałem pobudzającym lub pobudzeniem modelu:

$$y_i = H(D)w_i, \tag{3.1}$$

gdzie:

- D - operator opóźnienia (Delay):

$$D^n w_i = w_{i-n}, (3.2)$$

- H(D) - wielomian:

$$H(D) = h_0 + h_1 D + \dots + h_\infty D^\infty.$$
 (3.3)

W liniowej teorii procesów stochastycznych¹ zakłada się, że w_i jest nieskorelowanym procesem losowym o niezmiennym rozkładzie, tzw. dyskretnym białym szumem w szerokim sensie [109]. Wyjściem modelu jest ciąg stochastyczny y_i , którego własności zależą od statystycznych własności sygnału pobudzającego w_i i dynamiki procesu H(D).

Modele o postaci (3.1) nazywane są modelami filtracyjnymi, ponieważ ciąg y_i powstaje w wyniku liniowej filtracji H(D) ciągu w_i . Model (3.1) można zapisać w sposób równoważny:

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} h_j w_{i-j}.$$
 (3.4)

Przy założeniu szczególnych postaci transmitancji filtru H(D) otrzymuje się podstawowe modele ciągów czasowych znane jako [51], [127]:

- Model średniej ruchomej MA(dC):

$$H(D) = C(D), \tag{3.5}$$

$$y_i = C(D)e_i = \sum_{j=0}^{dC} c_j w_{i-j},$$
(3.6)

$$C(D) = 1 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots + c_{dC} D^{dC}.$$
(3.7)

¹ Dopuszczalność opisu procesów losowych o skończonej wariancji modelem liniowym (3.4) uzasadnia Priestley [104], powołując się na prace Koopmansa.

- 3.1. Stochastyczne modele liniowe
- Model autoregresywny AR(dA):

$$H(D) = \frac{1}{A(D)},\tag{3.8}$$

$$y_i = \frac{1}{A(D)} w_i = w_i - \sum_{j=1}^{dA} a_j y_{i-j},$$
(3.9)

$$A(D) = 1 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{dA} D^{dA}.$$
(3.10)

- Model mieszany ARMA(dA, dC):

$$H(D) = \frac{C(D)}{A(D)},$$
 (3.11)

$$y_i = \frac{C(D)}{A(D)} w_i = \sum_{j=0}^{dC} c_j w_{i-j} - \sum_{j=1}^{dA} a_j y_{i-j}.$$
(3.12)

Często zakłada się, że w_i jest białym szumem gaussowskim. Wówczas ciąg wyjściowy jako wynik liniowej transformacji ciągu gaussowskiego jest również ciągiem gaussowskim.

Chociaż rzeczywiste procesy bywają nieliniowe i niegaussowskie, to często są opisywane stochastycznymi modelami liniowymi (3.4), ponieważ dla procesów niegaussowskich o skończonych drugich momentach, a z takimi najczęściej mamy do czynienia, można zawsze znaleźć model gaussowski o takim samym pierwszym i drugim momencie jak badany proces². Modele gaussowskie mają szereg korzystnych właściwości, ale stosujac je należy uwzględnić także ich ograniczenia.

3.1.1. Zalety liniowych modeli gaussowskich

Liniowe modele gaussowskie są chętnie stosowane w analizie procesów losowych ze względu na to, że:

- Stanowią dobrą pierwszą aproksymcję wielu rzeczywistych zjawisk.
- Stosowane od lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku, sprawdziły się w analizie i prognozowaniu danych, np. [51], [73], [118], a także w sterowaniu procesami np. [13].
- Matematycznie, liniowe równania różnicowe stanowiące model są najprostszymi równaniami różnicowymi.

² Por. rozdział 2.1.

- Probabilistyczna interpretacja procesów gaussowskich jest czytelna i zrozumiała. Statystyczne zależności dla wielu liniowych procesów gaussowskich mogą być teoretycznie uzasadnione.
- Metody analizy i identyfikacji liniowych gaussowskich modeli ARMA są znane
 [51]. Są dostępne gotowe pakiety programowe do analizy i identyfikacji takich modeli, np. Matlab Identification Toolbox, Statistica.

3.1.2. Ograniczenia liniowych modeli gaussowskich

Ograniczenia w stosowaniu liniowych modeli gaussowskich w analizie procesów losowych wynikają z tego, że modele te:

- odtwarzają jedynie statystyczne własności drugiego rzędu badanych procesów,
- generują ciągi o symetrycznym rozkładzie, więc nie nadają się do modelowania danych charakteryzujących się silną asymetrią odchyłek wartości ciągu od średniej,
- nie nadają się do modelowania zjawisk, charakteryzujących się losowo pojawiającymi się dużymi amplitudami sygnałów, niebędących błędami,

nie nadają się do modelowania danych charakteryzujących się cyklicznością.
 Istnieją dwie możliwości naturalnej ewolucji liniowych gaussowskich modeli (np. AR, MA czy ARMA):

- odrzucenie założenia o gaussowskim rozkładzie pobudzenia w_i modelu,
- przyjęcie nieliniowej struktury modelu, przy gaussowskim rozkładzie pobudzenia w_i .

3.1.3. Identyfikowalność

Do identyfikacji procesów, opisywanych stochastycznymi modelami ciągów czasowych lub autonomicznymi równaniami stanu, nie można zastosować planowanego eksperymentu identyfikacyjnego. Dlatego warunki identyfikowalności takich procesów są znacznie mniej rozpoznane niż warunki identyfikowalności dla procesów z jawnym wejściem.

- Dla procesów z jawnym wejściem, w tym również dla procesów nieliniowych, proponowane są efektywne metody badania identyfikowalności, np. [83], [106], [121].
- Metody badania identyfikowalności procesów autonomicznych, opisanych równaniami stanu, są znacznie mniej rozwinięte. Pewne rozwiązania proponowane są w [59] i [60].

3.1. Stochastyczne modele liniowe

 Dla ciągów czasowych brak jest ogólnych metod badania identyfikowalności, a w literaturze identyfikowalność ciągu czasowego utożsamiana jest z odwracalnością modelu tego ciągu, [118], [127].

Utożsamienie odwracalności modelu i identyfikowalności procesu jest słuszne dla procesów liniowych, co można zilustrować prostym przykładem nieodwracalnego procesu MA(1):

Przykład 3.1

Dany jest proces MA(1):

$$y_i = e_i + ce_{i-1} = C(D)e_i, (3.13)$$

opisany równaniem:

$$e_i = e_i + 2e_{i-1}, (3.14)$$

gdzie e_i jest dyskretnym, gaussowskim białym szumem o wariancji $\lambda^2 = 1$. Proces (3.14) charakteryzuje się zmiennością, opisaną funkcją tworzącą autokowariancji, zdefiniowaną jako:

2

$$\Gamma(D) = \lambda^2 C(D^{-1}) C(D),$$
(3.15)

która dla procesu (3.14) jest równa:

$$\Gamma(D) = \lambda^2 (1 + 2D^{-1})(1 + 2D), \qquad (3.16)$$

a po rozwinięciu:

$$\Gamma(D) = \lambda^2 (2D^{-1} + 5 + 2D) = \gamma_1 D^{-1} + \gamma_0 D^0 + \gamma_1 D.$$
(3.17)

Stąd bezpośrednio wynika, że:

$$\gamma_0 = \sigma_y^2 = 5\lambda^2 = 5$$
$$\gamma_1 = 2\lambda^2 = 2.$$

Załóżmy, że ograniczamy badania do klasy modeli liniowych. Analiza zbioru danych generowanych przez system (3.14), wykonana metodą Boxa, Jenkinsa [51] z wykorzystaniem empirycznej funkcji autokorelacji i korelacji cząstkowej pozwala określić nie tylko typ modelu MA, ale również jego rząd, dC = 1. Z (3.16) wynika, że istnieją co najmniej dwa modele tego samego typu, opisujące zmienność danych:

3.1. Stochastyczne modele liniowe

- $\hat{y}_i = w_i + 2w_{i-1}$, który jest modelem przyczynowym, lecz nieodwracalnym,
- $\hat{y}_i = w_i + 2w_{i+1}$, który nie jest modelem przyczynowym, więc jako taki leży poza zakresem zaintercsowań, gdyż nie nadaje się do modelowania rzeczywistych procesów.

Ciąg w_i jest gaussowskim białym szumem o wariancji $\lambda^2 = 1$. Proste przekształcenia pokazują, że taką samą funkcję tworzącą autokowariancji:

$$\Gamma(D) = 4\lambda^2 (1 + 0.5D^{-1})(1 + 0.5D) = 4\lambda^2 (0.5D^{-1} + 1.25 + 0.5D), \qquad (3.18)$$
$$\gamma'_0 = \sigma_y^2 = 1.25(4\lambda^2) = 5,$$
$$\gamma'_1 = 0.5(4\lambda^2) = 2$$

ma inna para modeli:

- $\hat{y}_i = w'_i + 0.5 w'_{i-1}$, który jest modelem przyczynowym i odwracalnym,
- $y_i = w'_i + 0.5w'_{i+1}$, który nie jest modelem przyczynowym.

Ciąg pobudzający w_i' jest w tym przypadku gaussowskim białym szumem o wariancji $\lambda^2=4.$

Reasumując:

- Istnieją cztery różne modele o tej samej strukturze, lecz różnych parametrach, opisujące proces (3.14).
- Pomijając dwa modele nieprzyczynowe jako modele nieużyteczne, pozostają dwa modele przyczynowe – model nieodwracalny i odwracalny procesu (3.14), które generują ciągi danych wyjściowych o autokowariancji równej autokowariancji procesu.
- Brak jest wskazówki, który model odpowiada systemowi generującemu badany ciąg danych. Proces (3.14) jest więc nieidentyfikowalny parametrycznie na podstawie drugiego momentu łącznego.
- Pamiętając, że procesy gaussowskie są całkowicie określone przez dwa pierwsze momenty, rozpatrywanie wyższych momentów nie doprowadzi do poprawnej identyfikacji procesu.

Identyfikacja parametryczna metodą minimalizacji błędu predykcji

Większość identyfikowanych modeli procesów znajduje zastosowanie w prognozowaniu i sterowaniu procesów, stąd wiele metod identyfikacji wyznacza parametry modelu tak, by założona funkcja błędu predykcji dokonanej na podstawie znalezionego modelu była minimalna.

Funkcję przyporządkowującą ciągowi błędów predykcji wielkość skalarną można wybrać na wiele sposobów. Södreström i Stoica w [108] pokazują, że wiele metod identyfikacji, w tym metoda najmniejszej sumy kwadratów, rozszerzona metoda najmniejszej sumy kwadratów i metoda największej wiarygodności jest szczególnym przypadkiem metody minimalizacji błędu predykcji. Aby metoda ta mogła być stosowana, musi być możliwe obliczenie ciągu błędów predykcji $\varepsilon(i)$ na podstawie modelu $y(\Theta, i|i-1)$ i ciągu dostępnych danych y_i . Oznacza to, że ciąg

$$\varepsilon(i) = y(i) - y(\Theta, i|i-1) \tag{3.19}$$

musi być zbieżny, co jest równoważne odwracalności modelu MA. Θ oznacza w ogólności wektor parametrów modelu, a dla modelu MA(1) odpowiada parametrowi c modelu.

Dla procesu z przykładu 3.1 można przekształcić przyczynowy, nieodwracalny model

$$y_i = w_i + 2w_{i-1} \tag{3.20}$$

tak, by uzyskać jego odwracalny odpowiednik:

$$w(i) = \frac{\hat{y}_i}{1+2D} = \frac{0.5\hat{y}_{i+1}}{1+0.5D^{-1}}.$$
(3.21)

Przekształcenia doprowadzają do modelu odwracalnego, ale nieprzyczynowego. Jedynym modelem będącym jednocześnie modelem odwracalnym i przyczynowym jest model o parametrach $\hat{c} = 0.5$ i $\hat{\lambda}^2 = 4$ odbiegających istotnie od parametrów obiektu.

Nieodwracalny proces (3.14) jest więc parametrycznie nieidentyfikowalny metodami związanymi z minimalizacją błędu predykcji. Możliwa jest jedynie identyfikacja modelu odwracalnego, który ma takie same własności drugiego rzędu jak badany proces. Niestety, współczynnik efektywności predykcji zidentyfikowanego modelu:

$$s_m = 1 - \frac{4\lambda^2}{\sigma_y^2} = 0.2 \tag{3.22}$$

i jest znacznie niższy od współczynnika podatności predykcyjnej procesu, dla którego:

$$s_p = 1 - \frac{\lambda^2}{\sigma_y^2} = 0.8.$$
 (3.23)

Reasumując:

- Dla procesu MA(1) i w_i będącego stacjonarnym białym szumem o symetrycznym rozkładzie, wyniki identyfikacji są niejednoznaczne.
- Analiza drugiego momentu pokazanego na rys.3.1 wskazuje, że istnieją dwa modele



- Rys. 3.1: Unormowana k-ta kowariancja, $r_k = \frac{M^{(2)}(k)}{M^{(2)}(0)}$ Fig. 3.1: Normalized k^{th} covariance, $r_k = \frac{M^{(2)}(k)}{M^{(2)}(0)}$
- o takich samych własnościach statystycznych, z których tylko jeden jest modelem odwracalnym (minimalnofazowym).
- Metody oparte na minimalizacji błędu predykcji identyfikują jedynie odwracalne modele ciągów czasowych.

Uwaga:

Istnieją dziedziny, np. oceanografia, geofizyka, biomedycyna [100], w których jest uzasadnione stosowanie modeli nieodwracalnych (nieminimalnofazowych). Wynika stąd potrzeba tworzenia identyfikowalnych modeli nieodwracalnych. W [15] Benveniste i in. proponują stochastyczny, liniowy, nieodwracalny model ciągu czasowego, który jest identyfikowalny dzięki temu, że pobudzany jest niestacjonarnym ciągiem gaussowskim. Inny nieodwracalny model dla pewnej klasy stochastycznych procesów sejsmologicznych proponują Kormylo i Mendel w [86]. Również w tym przypadku pobudzenie modelu jest procesem gaussowskim o zmiennej wariancji. Model jest identyfikowalny, jeśli wariancja pobudzenia modelu spełnia sformułowane w [86] warunki.

3.2. Stochastyczne modele nieliniowe

3.2. Stochastyczne modele nieliniowe

Nieliniowe modele ciągów czasowych bywają stosowane wówczas, gdy modele liniowe nie odtwarzają w zadowalający sposób istotnych cech badanych sygnałów. Istnieją doświadczalne dowody [115], zgodne zresztą z intuicją, że liniowe modele stosowane do krótkoterminowej predykcji ciągów czasowych pozwalają osiągnąć zadowalającą dokładność, natomiast dla długoterminowej predykcji znacznie lepiej sprawdzają się modele nieliniowe.

Struktura nieliniowego modelu ciągu czasowego może być liniowa lub nieliniowa względem parametrów modelu. Ze względu na to, że dla struktur liniowych względem parametrów procedury estymacji parametrów są mniej złożone numerycznie niż dla struktur nieliniowych względem parametrów, wielomianowe modele nieliniowe należą do najczęściej stosowanych. Do estymacji parametrów wielomianowych modeli nieliniowych można wykorzystać techniki takie same jak dla modeli liniowych.

Nicliniowymi modelami ciągów czasowych liniowymi względem parametrów są:

- modele NARMA (Nonlinear ARMA),
- biliniowe BARMA (Bilinear ARMA),
- progowe TARMA (Threshold ARMA),
- modele ARCH, GARCH (Generalised Autoregressive Conditionally Heteroscedastic).

Przykładem modeli nieliniowych względem parametrów są modele wykładnicze. Poniżej zostaną opisane wymienione typy modeli.

3.2.1. Modele NARMA

Modele nieliniowe NARMA, wprowadzone i badane przez Billingsa [45] i Chena [55], [56], złożone są z liniowych i nieliniowych członów, będących funkcjami wyjść y_{i-k} i innowacji w_{i-k} :

$$y_i = F(y_{i-1}, \dots, y_{i-n_y}, w_{i-1}, \dots, w_{i-n_w}) + w_i.$$
(3.24)

Zakłada się, że innowacje są nieskorelowanym procesem losowym o zerowej wartości średniej. Strukturę modelu określa zbiór liczb $(n_y, n_{y1}, ..., n_{yn}, n_w, n_{w1}, ..., n_{wn}, k_n)$. Jeśli struktura modelu jest znana, to estymacja parametrów modelu może być wykonana klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. Zasadniczym problemem jest

3.2. Stochastyczne modele nieliniowe

jednak wybranie struktury modelu spośród możliwych struktur, których dla modeli NARMA może być bardzo wiele. Przykładowo, część NAR modelu może mieć postać:

$$\mathcal{Y}_{i}^{NAR} = A_{0} + \sum_{k=1}^{n_{y}} a_{k} y_{i-k} + \sum_{k1=1}^{n_{y}1} \sum_{k2=k1}^{n_{y}2} a_{k1,k2} y_{i-k1} y_{i-k2} \\
+ \dots + \sum_{k1=1}^{n_{y}} \dots \sum_{kn=kn-1}^{n_{y}n} a_{k1,\dots,kn} y_{i-k1} \dots y_{i-kn} + w_{i}.$$
(3.25)

Część NMA modelu może mieć postać:

$${}^{IMA} = C_0 + \sum_{k=1}^{n_w} c_k w_{i-k} + \sum_{k_{1}=1}^{n_w 1} \sum_{k_{2}=k_1}^{n_w 1} c_{k_{1,k_2}} w_{i-k_1} w_{i-k_2} + \dots + \sum_{k_{1}=1}^{n_w 1} \dots \sum_{k_n=k_{n-1}}^{n_w n} c_{k_1,\dots,k_n} w_{i-k_1} \dots w_{i-k_n}.$$
(3.26)

Wyjście modelu jest sumą

$$y_i = y_i^{NAR} + y_i^{NMA}$$

3.2.2. Modele biliniowe BARMA

Modele biliniowe są podklasą nieliniowych modeli wielomianowych. Ogólna postać modelu biliniowego przedstawiona jest równaniem:

$$y_i + \sum_{j=1}^{dA} a_j y_{i-j} = \sum_{j=0}^{dC} c_j w_{i-j} + \sum_{k=1}^{P} \sum_{l=1}^{Q} \beta_{kl} w_{i-k} y_{i-l}.$$
 (3.27)

Pobudzeniem modelu biliniowego jest dyskretny biały szum w_i . Założenie niezależności pobudzenia nie jest konieczne, aczkolwiek przyjęcie takiego założenia umożliwia wyznaczenie własności prognostycznych modelu. Struktura modelu biliniowego (3.27) określona jest przez zbiór liczb (dA, dC, P, Q). Struktura ta, choć niewątpliwie prostsza od struktury nieliniowego modelu wielomianowego (3.24), jest i tak na tyle złożona, że uniemożliwia ogólną analizę właściwości modelu. Z tego względu w praktyce stosuje się biliniowe modele ciągów czasowych o uproszczonej strukturze. Chen i Billings [56] zaproponowali następującą klasyfikację modeli biliniowych:

– Jeśli $\beta_{kl} = 0$ dla wszystkich k i l z wyjątkiem przypadku k = l, model biliniowy nazywa się modelem diagonalnym.

– Jeśli $\beta_{kl} = 0$ dla k < l, model biliniowy nazywa się modelem superdiagonalnym.

43

(0.00)

– Jeśli $\beta_{kl} = 0$ dla k > l, model biliniowy nazywa się modelem subdiagonalnym.

Model BARMA redukuje się do modelu ARMA, gdy dla każdej wartości k i l współczynnik $\beta_{kl} = 0$.

W 1978 roku Granger i Andersen [72] podali bez dowodu pewne interesujące właściwości modelu biliniowego o najprostszej strukturze (0,0,1,1):

$$y_i = w_i + \beta_{11} w_{i-1} y_{i-1} \tag{3.28}$$

i od tej pory datuje się zainteresowanie prostymi modelami biliniowymi. W rozdziale 4 zostaną dokładniej omówione własności modeli biliniowych o strukturze (0, 0, k, l), opisanych równaniem:

$$y_i = w_i + \beta_{kl} w_{i-k} y_{i-l} \tag{3.29}$$

i nazywanych elementarnymi modelami biliniowymi $\mathcal{EB}(k, l)$.

3

3.2.3. Modele progowe TARMA

Jeżeli właściwości procesu nie zmieniają się w sposób ciągły, lecz zmiany zachodzą w pewnych możliwych do określenia przez zbiór warunków przedziałach, to można zastosować do opisu procesu progowe modele AR, MA lub ARMA nazywane modelami TAR, TMA lub TARMA (Threshold **ARMA**). Modele progowe charakteryzują się tym, że ich parametry i/lub struktura zmieniają się skokowo, po spełnieniu sformułowanego wcześniej warunku, np.:

$$y_{i} = w_{i} + \sum_{j=1}^{dC} c_{j} w_{i-j} - \sum_{j=1}^{dA} a_{j} y_{i-j}$$
 jeśli zachodzi warunek 1,

$$y_{i} = w_{i} + \sum_{j=1}^{d\Gamma} \gamma_{j} w_{i-j} - \sum_{j=1}^{dA} \alpha_{j} y_{i-j}$$
 jeśli zachodzi warunek 2. (3.30)

Jeśli warunki sformułowane są względem wartości sygnału y_{i-k} , na przykład, $r_1 < y_{i-k} < r_2$, gdzie r_1, r_2 są znanymi wartościami liczbowymi, to model *TARMA* nazywa się modelem samopobudzającym – *SETARMA* (Self Exciting *TARMA*), [52], [118].

Strukturę modelu *TARMA* stanowi zbiór warunków i zbiór struktur modeli liniowych wewnątrz przedziałów wyznaczonych tymi warunkami.

3.2. Stochastyczne modele nieliniowe

3.2.4. Modele ARCH i GARCH

Modele ARCH zaproponowane przez Engle [62], a w wersji uogólnionej GARCH przez Bollersleva [47], [48], [49] zostały wprowadzone dla opisu procesów losowych y_i , których wariancja zmienia się w czasie i zależy od poprzednich obserwacji (tzn. duża wariancja wpływa na dużą wariancję w przyszłości). Mówimy, że obszary o dużej zmienności obserwacji są ze sobą skupione (podobnie jak obszary o małej zmienności obserwacji). Ogólnie model ARCH(m) określony jest jako:

$$y_{i} = \sigma_{i}e_{i}$$

$$\sigma_{i}^{2} = a_{0} + a_{1}y_{i-1}^{2} + \dots + a_{m}y_{i-m}^{2}$$
(3.31)

gdzie e_i jest dyskretnym białym szumem gaussowskim o jednostkowej wariancji. Ciąg y_i jest nieskorelowany, ale nie jest niezależny. Ma zerową wartość średnią. Bezwarunkowa wariancja jest stała i równa:

$$Var(y_i) = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^{m} a_i}.$$
(3.32)

Ze wzoru (3.32) wynikają ograniczenia na parametry modelu, ponieważ wariancja musi być dodatnia.

Proces ARCH można przekształcić do postaci procesu AR modelowanego na kwadratach obserwacji wyjściowego ciągu y_i . Oznacza to, że szukając efektu ARCH w procesie y_i , można wykorzystać funkcję korelacji cząstkowej i metodykę zaproponawaną przez Boxa [51] dla procesu y_i^2 . Do wad modeli ARCH można zaliczyć fakt, że dodatnie i ujemne przyrosty obserwowanego ciągu wyjściowego mają taki sam wpływ na modelowaną zmienność procesu (ponieważ skupiamy się na ich kwadratach). Poza tym model ARCH nie wyjaśnia czynników wpływających na zmienność ciągu, a jedynie opisuje zachowanie warunkowej wariancji, a na współczynniki modelu narzucone są znaczące ograniczenia.

Idea zastosowania nowego modelu pojawiła się wtedy, gdy okazało się, że w praktyce modele *ARCH* zawierają wiele parametrów, często więcej niż dziesięć. Modele *GARCH* są modelami oszczędnymi. Mają postać:

$$y_{i} = \sigma_{i} e_{i}$$

$$\sigma_{i}^{2} = a_{0} + \sum_{k=1}^{K} a_{k} y_{i-k}^{2} + \sum_{i=1}^{J} b_{i} \sigma_{i-i}^{2},$$
(3.33)

dla

$$a_0 > 0, a_i \ge 0, b_i \ge 0$$

i określane są jako modele GARCH(K, J).

Modele ARCH i GARCH znajdują zastosowanie w modelowaniu zjawisk ekonomicznych, a w szczególności przy analizie zmienności rynków finanasowych.

3.2.5. Modele wykładnicze

Modele wykładnicze [45] przedstawione są równaniem:

$$y_{i} = \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_{j} + \beta_{j} \exp(-y_{i-k_{j}}^{2}) \right] a_{j} y_{i-j} + e_{i}, \qquad (3.34)$$

gdzie α_j , β_j , a_j są parametrami modelu, a wyznaczenie struktury modelu jest równoznaczne z wyznaczeniem k_j .

3.2.6. Własności nieliniowych modeli stochastycznych

Dla stochastycznych gaussowskich modeli liniowych drugi moment centralny (funkcja autokowariancji) stanowi uniwersalną miarę opisującą ich własności. Dla stochastycznych modeli nieliniowych, ze względu na ich różnorodność, brak jest niestety równie uniwersalnej, ogólnej miary pozwalającej opisać ich własności [74]. Z tego względu badania własności prowadzone są oddzielnie dla określonych rodzajów stochastycznych modeli nieliniowych, a wybrane własności mogą być określone tylko dla szczególnych przypadków modeli.

Analizą własności wielomianowych modeli nieliniowych zajmowali się m.in.Chen, Billings. W [56] przedyskutowali pojęcie lokalnej i globalnej stabilności i odwracalności wielomianowych modeli ciągów czasowych. Prowadzone przez nich rozważania można podsumować następująco:

- Stabilność i odwracalność modeli liniowych jest ich własnością globalną w takim sensie, że nie zależy ona od statystycznych właściwości sygnału pobudzającego w_i (zakładając, że jest on sygnałem o skończonej wariancji). Inaczej mówiąc, stabilność systemów liniowych nie zależy od warunków początkowych y_0 i amplitudy pobudzenia w_i .
- Dla modeli nieliniowych stabilność w ogólności zależy od warunków początkowych y_0 i amplitudy pobudzenia w_i .

- Badanie warunków stabilności dla uogólnionego modelu nieliniowego jest bardzo złożonym problemem i tylko dla nielicznych, szczególnych modeli nieliniowych takie warunki mogą zostać wyprowadzone.
- Proces nieliniowy

$$y_i = f_N(y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, w_{i-1}, w_{i-2}, \dots) + w_i$$
(3.35)

może być stabilny, gdy waunki początkowe pochodzą z ograniczonego przedziału:

$$y_0 \in S_1(\bar{y}, \rho_2), \tag{3.36}$$

a sygnał pobudzający w_i jest stacjonarny w wąskim sensie i ograniczony:

$$w_i \in S_2(0, \sigma_2).$$
 (3.37)

Wartości ograniczeń ρ_2 i σ_2 zależą od rodzaju nieliniowości.

– Jeśli ρ_2 i σ_2 mogą być dowolnie duże, model nieliniowy jest globalnie stabilny.

- W przeciwnym wypadku jest on lokalnie stabilny w przedziale S_1 i S_2 .
- Model globalnie stabilny pozostaje stabilny niezależnie od rozkładu sygnału pobudzającego, o ile tylko ten jest stacjonarny.

Model lokalnie stabilny pozostaje stabilny tylko dla ograniczonych pobudzeń. Wniosek: Stosowanie modeli lokalnie stabilnych wyklucza w praktyce możliwość wykorzystania, w charakterze pobudzenia modelu, gaussowskiego białego szumu a także innych szumów o rozkładach nieograniczonych.

W [89] Mathews i Lee podają warunki stabilności w sensie BIBO dla modelu biliniowego, opisanego równaniem:

$$y_{i} = \sum_{j=1}^{dA} a_{j} y_{i-j} + \sum_{j=0}^{dC} c_{j} w_{i-j} + \sum_{k=1}^{P} \sum_{l=1}^{Q} \beta_{kl} w_{i-k} y_{i-l}, \qquad (3.38)$$

zakładając, że sygnał pobudzający ma ograniczoną amplitudę:

$$w_i| \le |w_{max}|. \tag{3.39}$$

Model (3.38) będzie stabilny w sensie BIBO, jeśli:

– wszystkie pierwiastki r_i równania:

$$(1 - \sum_{j=1}^{dA} a_j z^{dA-j}) = \prod_{j=1}^{dA} (1 - |r_j| z^{-1}) = 0$$
(3.40)

mają wartości bezwzględne mniejsze od jedności,

3.2. Stochastyczne modele nieliniowe

- spełniony jest warunek:

$$w_{max} |\sum_{k=1}^{P} \sum_{l=1}^{Q} |\beta_{k,l}| \le \prod_{j=1}^{dA} (1 - |r_j|).$$
(3.41)

Kolejne rozdziały tej monografii będą poświęcone innym własnościom modeli biliniowych o najprostszej strukturze.

4.1. Przeglad struktur elementarnych procesów biliniowych

W literaturze, np. [72], [74], [73], zakłada się często, że e_i ma rozkład gaussowski, co implikuje, że jest ciągiem niezależnym. Ze względu na to, że rozkład gaussowski dopuszcza istnienie e_i o nieograniczonej amplitudzie, ciąg wyjściowy jest również nieograniczony amplitudowo. Założenie gaussowskiego rozkładu pobudzenia z jednej strony ułatwia analizę właściwości stochastycznych procesu, z drugiej jednak strony stanowi przypadek nierealny, gdyż wszystkie rzeczywiste, nieeksplozywne procesy mają amplitudy ograniczone. Ciąg EB(kl) utworzony jest w wyniku nieliniowego przekształcenia procesu gaussowskiego, sam więc nie jest procesem gaussowskim.

Niniejszy rozdział poświęcony jest własnościom elementarnych procesów biliniowych. W pierwszej kolejności zostaną przeanalizowane możliwe struktury elementarnych procesów biliniowych pod kątem ich podatności predykcyjnej.

Następnie, dla procesów podatnych na predykcję, przedyskutowane zostaną ich statystyczne własności scharakteryzowane przez momenty łączne.

Ponieważ istotne jest, by dla danego procesu elementarnego biliniowego można było znaleźć odpowiadający mu model, w rozdziale 5 przeanalizowane zostaną właściwości elementarnych modeli biliniowych, warunki stabilności, odwracalności, identyfikowalności, własności predykcyjne oraz modele równoważne.

4.1. Przegląd struktur elementarnych procesów biliniowych

Struktury elementarnych procesów biliniowych wyznaczane są przez wartości przesunięć k i l sygnałów $e_{i-k_1} y_{i-l}$. Własności procesu EB(k, l), w tym również własności predykcyjne, zależą zarówno od jego struktury, jak i parametrów.

Miara podatności predykcyjnej określona w rozdziale 2.3 wyznacza podatność predykcyjną procesu, przy założeniu że struktura procesu umożliwia prognozowanie.

Struktura $\mathbf{k} = 0, 1 \neq 0$ Proces EB(0, l) opisany równaniem:

 $y_i = e_i + \beta_{0l} e_i y_{i-l},$

ma tylko dwa niezerowe wyrazy określone jako:

 $\Phi_{i,j} = e_i y_{i-1}^j \beta_{0l}^j \quad \text{dla } j = 0, 1.$

Rozdział 4

Elementarny proces biliniowy

Zainteresowanie modelami biliniowymi o najprostszej strukturze datuje się od publikacji Grangera i Andersena [72]. Modelami takimi zajmowali się m.in. Tong [118], Granger i Terasvirta [73], Martins [92], [93], Berlin Wu [124]. Opinie o ich użyteczności wahają się od entuzjastycznych ¹ do sceptycznych ². Aby określić własne stanowisko w tej kwestii, najpierw zostaną poddane analizie własności procesów biliniowych o najprostszej strukturze, a następnie zostaną przeanalizowane ich modele.

Definicja 4.1. Proces opisany równaniem:

$$y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l},$$

(4.1)

gdzie:

 β_{kl} – stały współczynnik liczbowy.

 e_i – dyskretny, niezależny biały szum o zerowej wartości oczekiwanej, wariancji λ^2 i ograniczonych wyższych momentach,

1

nazywać będziemy dalej elementarnym procesem biliniowym EB(k, l).

Definicja 4.2. Ciąg y_i utworzony na podstawie równania (4.1) nazywać będziemy elementarnym ciągiem biliniowym.

Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami równanie ciągu (4.1) jest jednocześnie równaniem definicyjnym procesu generującego ten ciąg. Strukturę procesu wyznacza dwójka liczb (k, l).

(4.2)

¹ "The bilinear model has been used successfully to model time series that have been traditionally difficult to fit with classical linear time series methods", [93].

² "Using economic data, bilinear models have not been found to be very relevant", [118].

4.1. Przegląd struktur elementarnych procesów biliniowych

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

Na podstawie definicji (2.3) proces EB(0, l) jest strukturalnie nieprognozowalny. Przyszła wartość $y_{i+h|i}$ dla $h \leq l$ zależy od znanych w chwili *i* wartości sygnałów $y_{i-(l-h)}$ przemnożonych przez nieznaną w chwili *i* wartość sygnału e_{i+h} . Prognozę $y_{i+h|i}$ można wyznaczyć jedynie jako wartość oczekiwaną procesu (4.2) w chwili i+h:

$$y_{i+h|i} = E\{y_{i+h}\} = 0.$$
(4.3)

Błąd predykcji jest równy:

$$\varepsilon_{i+h|i} = y_{i+h},\tag{4.4}$$

a wariancja błędu predykcji jest równa var(y).

Chociaż podatność predykcyjna procesu, zdefiniowana jako udział wariancji skład-



Rys. 4.1: Właściwości strukturalnie nieprognozowalnego procesu EB(0,4) Fig. 4.1: Properties of the structurally unpredictable process EB(0,4)

nika losowego w całkowitej wariancji ciągu³, określona zależnością (2.32), wynosi:

$$s_p = \beta_{0l}^2 \lambda^2, \tag{4.5}$$

³ Dla procesów liniowych wystarcza, że składnik losowy e_i jest nieskorelowany, dla procesów nieliniowych dodatkowo jest on niezależny.

to ze względu na strukturalną nieprognozowalność procesu współczynnik efektywności predykcji, wyrażony zależnością (2.34), jest równy zeru:

$$s_m = 1 - \frac{var(y)}{var(y)} = 0.$$
 (4.6)

Dla przykładowego ciągu danych pochodzących z procesu EB(0,4) na rys.(4.1) pokazano fragment pojedynczej realizacji procesu, histogram i oceny wybranych momentów centralnych i łącznych wyliczone z próby. Oceny trzeciego momentu są w przybliżeniu zerowe, z wyjątkiem wartości $\hat{M}_{u}^{(3)}(0,l)$ i $\hat{M}_{u}^{(3)}(l,0)$.

Struktura k $\neq 0$, l = 0 Proces opisany równaniem:



Rys. 4.2: Właściwości strukturalnie nieprognozowalnego procesu EB(4,0)

Fig. 4.2: Properties of the structurally unpredictable process EB(4,0)

$$y_i = \frac{e_i}{1 - \beta_{k0} e_{i-k}} \tag{4.7}$$

jest strukturalnie nieprognozowalnym, nieprzyczynowym procesem EB(k, 0):

$$y_i = e_i + \beta_{k0} e_{i-k} y_i. \tag{4.8}$$

Wynikiem dzielenia (4.7) jest nieskończony szereg:

$$y_i = e_i + \beta_{k0}e_{i-k}e_i + \beta_{k0}^2e_ie_{i-k}^2 + \beta_{k0}^3e_ie_{i-1}^3 + \dots,$$
(4.9)

4.1. Przegląd struktur elementarnych procesów biliniowych

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

którego każdy wyraz można przedstawić jako:

$$\Phi_{i,j} = e_i e_{i-k}^j \beta_{k0}^j \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots .$$
(4.10)

Przyszła wartość $y_{i+h|i}$ dla $h \leq k$ zależy od znanych w chwili *i* wartości sygnałów $e_{i-(k-h)}$ przemnożonych przez nieznany w chwili *i* sygnał e_{i+h} . Prognozę można wyliczyć jedynie jako:

$$\hat{y}_{i+h|i} = E\{y_{i+h}\} = 0, \tag{4.11}$$

stąd błąd predykcji jest w każdej chwili równy wartości ciągu, a wariancja błędu predykcji jest równa wariancji ciągu. Podatność predykcyjna procesu, określona zależnością (2.32), wynosi:

$$s_p = \beta_{k0}^2 \lambda^2. \tag{4.12}$$

Jednak ze względu na strukturalną nieprognozowalność procesu współczynnik efektywności predykcji, wyrażony zależnością (2.34), jest równy zeru:

$$s_m = 1 - \frac{var(y)}{var(y)} = 0.$$
 (4.13)

Dla przykładowego ciągu EB(4,0) na rys. 4.2 pokazano fragment pojedynczej realizacji, histogram i wybrane momenty centralne i łączne wyliczone z próby. Oceny trzeciego momentu łącznego są bliskie zeru, z wyjątkiem wartości: $\hat{M}_{y}^{(3)}(0,k)$ i $\hat{M}_{y}^{(3)}(k,0)$.

Struktura $k \neq 0, l = k$

Proces opisany równaniem:

$$y_i = e_i + \beta_{kk} e_{i-k} y_{i-k}, \tag{4.14}$$

nazywany jest elementarnym procesem biliniowym diagonalnym. Przyszła wartość y_{i+h} dla $h \leq k$ zależy od sumy:

– iloczynów znanych w chwili i wartości sygnałów $y_{i-(k-h)}$ i $e_{i-(k-h)}$,

– nieznanej w chwili i wartości e_{i+h} .

Na podstawie definicji 2.3 proces EB(k, k) jest więc strukturalnie prognozowalny. W rozdziałach 4.3 i 5 pokazano, że zarówno podatność predykcyjna, jak i współczynnik efektywności predykcji dla tego procesu są większe od zera. Na rys.(4.3) pokazano, dla przykładowego ciągu danych pochodzących z procesu EB(4, 4), fragment pojedynczej realizacji, histogram i wybrane momenty centralne i łączne wyliczone z próby. Ocena trzeciego momentu ma wyraźne maksimum w punkcie $\hat{M}_y^{(3)}(k, k)$.





Rys. 4.3: Właściwości strukturalnie prognozowalnego procesu EB(4,4) Fig. 4.3: Properties of the structurally predictable process EB(4,4)

Proces opisany równaniem:

nazywany jest elementarnym procesem biliniowym subdiagonalnym EB(k < l, l). Jest on strukturalnie prognozowalny. Przyszła wartość y_{i+h} dla $h \le k$ zależy od sumy:

 $y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l},$

– iloczynów znanych w chwili i wartości sygnałów $e_{i-(k-h)}$ i $y_{i-(l-h)}$,

– nieznanej w chwili i wartości e_{i+h} .

Podatność predykcyjna procesu, określona zależnością (2.32), jest większa od zera. W rozdziale 4.2 pokazano, że wynosi ona:

$$s_p = \beta_{kl}^2 \lambda^2. \tag{4.10}$$

W rozdziale 5 pokazano, że jest ona równa współczynnikowi efektywności predykcji (2.34):

$$s_m = 1 - \frac{var(e)}{var(y)} = \beta_{kl}^2 \lambda^2.$$
 (4.17)

Dla przykładowego ciągu danych pochodzących z procesu EB(2,4) na rys.(4.4) pokazano fragment pojedynczej realizacji, histogram i wybrane momenty wyliczone z próby. Ocena trzeciego momentu ma wyraźne maksimum dla $\hat{M_y}^{(3)}(k,l)=\hat{M_y}^{(3)}(l,k).$

Struktura $k > l, l \neq 0$

Proces przebiegający zgodnie z równaniem:



Rys. 4.4: Właściwości strukturalnie prognozowalnego procesu EB(2,4) Fig. 4.4: Properties of the structurally predictable process EB(2,4)

$$y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l},$$

(4.18)

nazywany jest procesem superdiagonalnym EB(k>l,l). Przyszła wartość y_{i+h} dla $h \leq l$ zależy od sumy:

znanych w chwili i wartości iloczynów sygnałów $y_{i-(l-h)}$ i $e_{i-(k-h)}$,

nieznanej w chwili i wartości e_{i+h} ,

więc zgodnie z definicją proces ten jest strukturalnie prognozowalny. Efektywną predykcję można wyznaczyć dla horyzontów $h \leq l < k.$

Na rys.4.5 pokazano fragment pojedynczej realizacji, histogram i wybrane momenty centralne i łączne wyliczone z próby dla procesu EB(4,2). Ocena trzeciego momentu ma wyraźne maksimum dla $\hat{M_y}^{(3)}(k,l) = \hat{M_y}^{(3)}(l,k).$

4.1. Przegląd struktur elementarnych procesów biliniowych



Rys. 4.5: Właściwości strukturalnie prognozowalnego procesu EB(4,2)

Fig. 4.5: Properties of the structurally predictable process EB(4,2)

Reasumujac:

- Elementarne procesy biliniowe EB(k, l), dla których przynajmniej jeden z parametrów strukturalnych k, l jest równy zeru, są strukturalnie nieprognozowalne.
- Strukturalna nieprognozowalność można rozpoznać analizując oceny trzeciego momentu łącznego, wyznaczone na podstawie realizacji procesu EB(k, l).
- Jeżeli maksimum oceny trzeciego momentu łącznego $M^{(3)}(k, l)$ ciągu leży na osi k lub l, a pozostałe wartości sa zerowe lub bliskie zeru, ciągu nie da się prognozować przy zastosowaniu modeli liniowych i/lub biliniowych.
- Jeśli maksimum oceny trzeciego momentu łacznego leży poza osiami k, l, można próbować zbudować efektywny predyktor biliniowy dla takiego ciągu.

Przedmiotem dalszych rozważań są tylko strukturalnie prognozowalne elementarne procesy biliniowe EB(k, l), to znaczy takie, dla których $k \neq 0$ i $l \neq 0$.

54

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

4.2. Elementarny subdiagonalny proces biliniowy

Struktura probabilistyczna elementarnego subdiagonalnego procesu biliniowego EB(k,l):

$$y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l} \tag{4.19}$$

scharakteryzowana jest przez zbiór momentów stochastycznych zwykłych, centralnych i łącznych. Ze względu na biliniowe zależności w równaniu (4.19) do pełnego scharakteryzowania procesu powinny wystarczyć momenty od pierwszego do trzeciego włącznie. Znając równanie definicyjne procesu (4.19), można, korzystając z własności operatora wartości oczekiwanej, wyznaczyć analityczne formuły, określające poszczególne momenty. Sposób wyznaczenia momentów pokazano w dodatku A.1.

W tabeli 4.1 zestawiono zależności określające trzy pierwsze momenty łączne i czwarty moment zwykły dla subdiagonalnego procesu EB(k, l) przedstawione jako funkcje parametrów β_{kl} oraz drugiego $m_c^{(2)}$ i czwartego $m_e^{(4)}$ momentu sygnału pobudzającego e_i .

W tabeli 4.2 zestawiono formuły określające momenty, przy założeniu że pobudzenie

Tabela 4.1: Momenty centralne subdiagonalnego procesu EB(k,l)

Moment	Formuła
$M_{y}^{(1)}$	0
$M_{y}^{(2)}(0)$	$\frac{m_e^{(2)}}{1-\beta_{kl}^2 m_e^{(2)}}$
$M_{y}^{(2)}(m) \ dla \ m = 1, 2,$	0
$M_{*}^{(3)}(0,0)$	0
$M_{y}^{(3)}(l_{1}, l_{2}) \ dla \ l_{1} \neq k, l_{2} \neq l$	0
$M_y^{(3)}(k,l)$	$\beta_{kl} m_e^{(2)} M_y^{(2)}(0)$
$M_y^{(4)}(0,0,0)$	$\frac{m_e^{(4)} + 6\beta_{kl}^2 (m_e^{(2)})^2 M_y^{(2)}(0)}{1 - \beta_{kl}^4 m_e^{(4)}}$

4.2. Elementarny subdiagonalny proces biliniowy

 e_i ma symetryczny rozkład gaussowski $e_i \in N(0, \lambda^2)$ i równomierny $e_i \in R(-a, a)$ w przedziale (-a, a).

Tabela 4.2: Momenty procesu subdiagonalnego EB(k,l) dla pobudzenia o rozkładzie normalnym i równomiernym

Moment	Formuła dla $e_i \in N(0, \lambda^2)$	Formuła dla $e_i \in R(-a,a)$
$M_y^{(1)}$	0	0
$M_y^{(2)}(0)$	$\frac{\lambda^2}{1-\beta_{kl}^2\lambda^2}$	$\frac{a^2}{3 - \beta_{kl}^2 a^2}$
$M_y^{(2)}(m)$ dla $m = 1, 2,$	0	0
$M_y^{(3)}(0,0)$	0	0
$M_y^{(3)}(k,l)$	$\frac{\beta_{kl}\lambda^4}{1-\beta_{kl}^2\lambda^2}$	$\frac{\beta_{kl}a^4}{3(3-\beta_{kl}^2a^2)}$
$M_{u}^{(3)}(l_{1}, l_{2}) $ dla $l_{1} \neq k, l_{2} \neq l_{1}$	0	0
$M_{\mathbb{V}}^{(4)}(0,0,0)$	$\frac{3\lambda^4(1+3\beta^2\lambda^2)}{(1-3\beta^4\lambda^4)(1-\beta^2\lambda^2)}$	$\frac{a^4(9a-3\beta^2a^3+10\beta_{kl}^2)}{3(5-\beta^4a^5)(3-\beta^2a^2)}$

Własności subdiagonalnego procesu ${\cal EB}(k,l)$

Z analizy momentów zebranych w tabeli 4.1 wynika, że:

– proces EB(k, l) ma skończoną wariancję, o ile spełniony jest warunek:

β

$$^{2}m^{(2)} < 1,$$
 (4.20)

(1 00)

– proces EB(k, l) ma skończony czwarty moment, o ile spełniony jest warunek:

 $\beta^4 m_*^{(4)} < 1, \tag{4.21}$

– niezależnie od rozkładu pobudzenia e_i proces EB(k, l) jest procesem niegaussowskim, nieskorelowanym i o skończonej wariancji, o ile jest spełniony warunek (4.20).

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

Gaussowski odpowiednik procesu EB(k, l)

Dla niegaussowskiego procesu EB(k, l) o skończonej wariancji istnieje proces gaussowski o takiej samej wartości średniej i funkcji autokowariancji, nazywany odpowiednikiem gaussowskim procesu EB(k, l).

Odpowiednikiem gaussowskim procesuEB(k,l)jest gaussowski biały szum, e_i^{Gs} o wariancji λ_{Gs}^2 :

$$\Lambda_{Gs}^{2} = \frac{m_{e}^{(2)}}{1 - \beta^{2} m_{e}^{(2)}} \tag{4.22}$$

Na rys. 4.6 przedstawiono przykładową realizację procesu EB(3,4) i przykładową



Rys. 4.6: Porównanie ocen momentów dla procesu EB(2,4) i równoważnego mu gaussowskiego białego szumu

Fig. 4.6: Comparison of the estimated moments of an EB(2,4) process and an equivalent white noise

4.3. Elementarny diagonalny proces biliniowy

realizację równoważnego mu gaussowskiego białego szumu oraz oceny ich funkcji autokorelacji oraz czterech momentów centralnych i trzeciego momentu łącznego. Oba procesy zauważalnie się różnią trzecim momentem łącznym $\hat{M_y}^{(3)}(l_1, l_2)$ i czwartym momentem centralnym $\hat{M_y}^{(4)}(0, 0, 0)$.

Podatność predykcyjna subdiagonalnego procesu EB(k,l)

Po uwzględnieniu analitycznej zależności $M_y^{(2)}(0)$ od parametrów β_{kl} i $m_{\epsilon}^{(2)}$ podanej w tabeli 4.1, maksymalna podatność predykcyjna s_p procesu EB(k, l):

$$s_p = 1 - \frac{m_e^{(2)}(0)}{M_y^{(2)}(0)} \tag{4.23}$$

sprowadza się do:

$$s_p = \beta_{kl}^2 m^{(2)}. \tag{4.24}$$

Dla procesów o skończonej wariancji, a tylko takie są w pracy brane pod uwagę, z warunku (4.20) wynika, że współczynnik podatności predykcyjnej jest zawsze mniejszy od jedności:

$$0 < s_p < 1.$$
 (4.25)

Dla procesu EB(k, l) podatność predykcyjna zależy nie tylko od współczynnika β_{kl} , lecz także od własności pobudzenia $m_e^{(2)}$, podczas gdy dla procesów liniowych podatność predykcyjna zależy jedynie od współczynników filtru liniowego [40].

Podatność predykcyjna gaussowskiego odpowiednika procesu EB(k, l), czyli białego szumu, jest równa zeru.

4.3. Elementarny diagonalny proces biliniowy

Elementarny diagonalny proces biliniowy EB(k, k) o strukturze określonej parą liczb (k, k):

$$y_i = e_i + \beta_{kk} e_{i-k} y_{i-k}, \tag{4.26}$$

określony jest przez parametr β_{kk} i zbiór momentów $m_e^{(m)}$ dla m = 1, 2, 3, ... charakteryzujących sygnał pobudzający e_i . Dla pobudzenia gaussowskiego wystarcza znajomość tylko drugiego momentu $m_e^{(2)}$ pobudzenia.

4.3. Elementarny diagonalny proces biliniowy

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

Na podstawie równania definicyjnego (4.26) można wyznaczyć wartości kolejnych momentów zwykłych,centralnych i łącznych procesu EB(k, k) w sposób pokazany w dodatku A.2. Wyznaczone analitycznie formuły, pozwalające wyliczyć moment na podstawie parametrów procesu, zawarto w tabeli 4.3. Formuły pokazane w tabeli są słuszne dla symetrycznego rozkładu pobudzenia. Ogólniejsze zależności, obejmujące również przypadek niesymetrycznego rozkładu pobudzenia, umieszczone są w dodatku A.2.

Tabela 4.3: Momenty dla procesu diagonalnego EB(k,k)

Moment	Formuła
$M_{y}^{(1)}$	$eta_{kk}m_e^{(2)}$
$M_{y}^{(2)}(0)$	$\frac{m_e^{(2)} + \beta_{kk}^2 (m_e^{(4)} - (m_e^{(2)})^2)}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}}$
$M_y^{(2)}(m)$ dla $m \neq k$	$eta_{kk}^2 (m_e^{(2)})^2$
$M_y^{(2)}(k)$	$2eta_{kk}^2 (m_e^{(2)})^2$
$M^{(3)}_{\mu}(0,0)$	$3\beta_{kk}(m_e^{(2)})^2 + \beta_{kk}^3 \frac{m_e^{(6)} - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)} m_e^{(6)} + 3\beta_{kk}^2 (m_e^{(4)})^2}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}}$
$M_y^{(3)}(k,l)$ dla $l < k$	$2eta_{kk}^{3}(m_{e}^{(2)})^{3}$
$M_y^{(3)}(k,k)$	$eta_{kk} m_e^{(4)} + rac{3eta_{kk}^3 m_e^{(2)} m_e^{(4)}}{1 - eta_{kk}^2 m_e^{(2)}}$
$M_y^{(3)}(k,l) ext{ dla } l > k$	$2eta_{kk}^3(m_e^{(2)})^3$
$M_{v}^{(3)}(k, 2k)$	$4\beta_{12}^3(m_e^{(2)})^3$

Dla niektórych symetrycznych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa sygnału pobudzającego e_i parzyste momenty pobudzenia są funkcją drugiego momentu $m_e^{(2)}$:

 $m_e^{(2r)} = k_{2r} (m_e^{(2)})^r, \quad r=1,2,3...$ (4.27)

The state of the Momenty dia process	w $EB(k,k)$) spełniających	warunek	(4.27)
The bala // // W/MPHLV INA ULUCUU		-		

Moment	Formuła
	$eta_{kk}m_e^{(2)}$
111	$m^{(2)}\left(1+(k_{e}-1)\beta_{e}^{2}m_{e}^{(2)}\right)$
$M_{y}^{(2)}(0)$	$\frac{m_{e}}{1 - \beta_{kk}^2 m_{e}^{(2)}}$
$M_y^{(2)}(m)$ dla $m \neq k$	$eta_{kk}^2 (m_e^{(2)})^2$
$M_y^{(2)}(k)$	$2\beta_{kk}^2 (m_e^{(2)})^2$
$M_y^{(3)}(0,0)$	$\beta_{kk}(m_e^{(2)})^2 \frac{3 + (k_6 - 3)\beta_{kk}^2 m_e^{(2)} + (3k_4^2 - k_6)\beta_{kk}^4 (m_e^{(2')})^2}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}}$
$M_y^{(3)}(k,l) \text{ dla } l < k$	$2eta_{kk}^{3}(m_{e}^{(2)})^{3}$
$M_y^{(3)}(k,k)$	$\frac{k_4 \beta_{kk} (m_e^{(2)})^2 \left(1 + 2\beta_{kk}^2 m_e^{(2)}\right)}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}}$
$M_y^{(3)}(k,l) \text{ dla } k < l < 2k$	$2eta_{kk}^{3}(m_{e}^{(2)})^{3}$
$M_y^{(3)}(2k)$	$4eta_{kk}^{*}(m_e^{(2)})^3$

Przykładowo, dla pobudzenia gaussowskiego:

 $m_{e}^{(2)} = 1\lambda^{2},$ $m_{e}^{(4)} = 3\lambda^{4} = 3(m_{e}^{(2)})^{2},$ $m_{e}^{(6)} = 5\lambda^{6} = 5(m_{e}^{(2)})^{3},$ (4.28)

czyli współczynnik
i k_2,k_4,k_6 wynoszą odpowiednio:

 $k_2 = 1,$ $k_4 = 3,$ $k_6 = 5.$

Dla pobudzenia o rozkładzie równomiernym w przedziale [-a, a] kolejne momenty dane są zależnościami:

$$m_{e}^{(2)} = \frac{a^{2}}{3},$$

$$m_{e}^{(4)} = \frac{a^{4}}{5} = \frac{9}{5}(m_{e}^{(2)})^{2},$$

$$m_{e}^{(6)} = \frac{a^{6}}{7} = \frac{27}{7}(m_{e}^{(2)})^{3}.$$
(4.29)

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

Współczynniki k_2, k_4, k_6 są równe:

$$k_2 = 1,$$

 $k_4 = \frac{9}{5},$
 $k_6 = \frac{27}{7}.$

Dla pobudzeń o symetrycznych rozkładach gęstości prawdopodobieństwa, dla których momenty sygnału pobudzającego spełniają warunek (4.27), odpowiednie wartości momentów zebrano w tabeli 4.4.

Zakładając gaussowski rozkład pobudzenia e_i zależności wiążące momenty i parametry procesu ulegają znacznemu uproszczeniu, co jest uwidocznione w tabeli 4.5. Pierwszy moment, czyli wartość oczekiwana procesu EB(k,k) jest różna od zera. Momenty centralne związane są z momentami zwykłymi znanymi zależnościami:

$$M'_{y}^{(1)} = 0, (4.30)$$

$$M'_{y}^{(2)} = M_{y}^{(2)} - (M_{y}^{(1)})^{2}, (4.31)$$

$$M_{y}^{(3)}(0,0) = M_{y}^{(3)}(0,0) - 3M_{y}^{(1)}M_{y}^{(2)}(0) + 2(M_{y}^{(1)})^{3},$$
(4.32)

$$M'^{(3)}(k,k) = M_y^{(3)}(k,k) - M_y^{(1)}M_y^{(2)}(0) - 2M_y^{(1)}M_y^{(2)}(k) + 2(M_y^{(1)})^3.$$
(4.33)

Wartości momentów centralnych procesu EB(k,k) umieszczone są w tabeli 4.6, w której przyjęto następujące oznaczenia:

$$A = k_4 - 2,$$

$$B_1 = k_6 - 3k_4 + 2,$$

$$B_2 = 3k_4^2 - k_6 - 2,$$

$$C = k_4 - 1,$$

$$x = \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}.$$

Tabela 4.5: Momenty zwykłe i łączne procesu EB(k,k) dla pobudzenia procesu o rozkładzie normalnym

Momenty	Formuły dla $e_i \in N(0, \lambda^2)$
$M_y^{(1)}$	$eta_{kk}\lambda^2$
$M_y^{(2)}(0)$	$\frac{\lambda^2(1+2\beta_{kk}\lambda^2)}{1-\beta_{kk}^2\lambda^2}$
$M_y^{(2)}(k)$	$2eta_{kk}^2\lambda^4$
$M_y^{(3)}(0,0)$	$\beta_{kk}\lambda^{4}\frac{3+2\beta_{kk}^{2}\lambda^{2}+22\beta_{kk}^{4}\lambda^{4}}{1-\beta_{kk}^{2}\lambda^{2}}$
$M_y^{(3)}(k,k)$	$3\beta_{kk}\lambda^2 M_{\nu}^{(2)}(0)$
$M_y^{(3)}(k,l)$ dla $l \neq k$	$2eta^3\lambda^6$
$M_y^{(3)}(k,2k)$	$4\beta^3\lambda^6$

Własności procesu EB(k,k)

Na podstawie analizy formuł zawartych w tabelach 4.3 - 4.6 można sformułować następujące własności diagonalnego elementarnego procesu biliniowego EB(k, k): - Proces EB(k, k) ma skończoną wariancję, gdy spełniony jest warunek:

$$\beta_{kk}^2 m^{(2)} < 1, \tag{4.34}$$

który jest taki sam jak dla procesu subdiagonalnego EB(k, l).

– Drugi moment centralny $M'^{(2)}(l)$ procesu EB(k,k) jest zerowy dla wszystkich wartości przesunięcia l, z wyjątkiem l = 0 i l = k. Wykazuje tym samym podobieństwo do funkcji kowariancji procesu MA(k):

$$y_i = (1 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots + c_k D^k + c_{k+1} D^{k+1} + \dots + C_{dC} D^{dC}) w_i,$$

o wszystkich współczynnikach zerowych, z wyjątkiem współczynnika $c_k \neq 0$:

$$y_i = (1 + c_k D^k) w_i$$

gdzie w_i jest dyskretnym gaussowskim białym szumem.

4.3. Elementarny diagonalny proces biliniowy

Tabela 4.6: Momenty centralne dla procesu EB(k,k) z pobudzeniem procesu spełniającym warunek (4.27)

Moment	Formuła
$M'_{y}^{(1)}$	0
$M'^{(2)}_{y}(0)$	$\frac{m_e^{(2)} \left(1 + Ax + x^2\right)}{1 - x}$
${M'}_y^{(2)}(m)$ dla $m \neq k$	0
${M'}_y^{(2)}(k)$	$m_e^{(2)}x$
$M'^{(3)}_{y}(0,0)$	$egin{aligned} η_{kk}(m_e^{(2)})^2 rac{x\left(B_1+B_2x ight)}{1-x} \end{aligned}$
$M^{\prime (3)}_{\ y}(k,l) \ \mathrm{dla} \ l < k$	0
$M'^{(3)}_{\hspace{-0.1cm}/\hspace{-0.1cm}/}(k,k)$	$\frac{\beta_{kk}m_e^{(2)}\left(Cm_e^{(2)} + (Am_e^{(2)} - C)x + 2m_e^{(2)}x^2\right)}{1 - x}$
${M'}_y^{(3)}(k,l)$ dla $k < l < 2k$	0
$M_y^{(3)}(k,2k)$	$2eta_{kk}(m_e^{(2)})^2 x$

- Trzeci moment centralny dla przesunięć zerowych, $M'^{(3)}_{y}(0,0)$ jest miarą asymetrii rozkładu procesu.
- Trzeci moment centralny łączny $M'_y^{(3)}(l_1, l_2)$ ciągu EB(k, k) posiada maksimum dla przesunięć $l_1 = k, l_2 = k$.

Gaussowski odpowiednik procesu EB(k, k)

Odpowiednikiem gaussowskim diagonalnego niegaussowskiego procesu y_i o skończonej wariancji i wartości oczekiwanej $E\{y_i\}$, jest proces z_i :

$$z_i = w_i + c_k w_{i-k} + E\{y_i\},\tag{4.35}$$

gdzie w_i jest gaussowskim dyskretnym białym szumem o wariancji $m_w^{(2)}$. Proces $(z_i - E\{y_i\})$ jest procesem MA(k) o wariancji:

$$\sigma_z^2 = m_w^{(2)} (1 + c_k^2), \tag{4.36}$$

którego parametry: c_k i $m_w^{(2)}$ mogą być obliczone, przy założeniu że pobudzenie e_i procesu EB(k,k) ma rozkład gaussowski, z następującego układu równań:

$$\frac{m_e^{(2)}(1+\beta_{kk}^2m_e^{(2)}+\beta_{kk}^4(m_e^{(2)})^2)}{1-\beta_{kk}^2m_e^{(2)}} = m_w^{(2)}(1+c_k^2),$$

$$\beta_{kk}^2(m_e^{(2)})^2 = c_k m_w^{(2)}.$$
 (4.37)

Przykład 4.1

Odpowiednikiem procesu: EB(k,k)

 $y_i = e_i + \beta_{kk} e_{i-k} y_{i-k},$

dla którego:

$$\beta_{kk} = 0.71$$

 $\lambda^2 = 1,$

jest proces z_i , którego parametry spełniają równanie:

 $c_k^2 - 7c_k + 1 = 0.$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:

$$c_{k1} = 0.15 \text{ oraz} \quad c_{k2} = 6.8$$

i odpowiadające im wartości $m_w^{(2)}$,

$$m_{w1}^{(2)} = \frac{0.5}{c_{k1}} = 3.33, \text{ oraz } m_{w2}^{(2)} = \frac{0.5}{c_{k2}} = 0.07.$$

Podatność predykcyjna procesu EB(k,k)

Maksymalna podatność predykcyjna procesu EB(k,k) wynosi:

$$s_p = 1 - \frac{m_e^{(2)}}{M_u^{(2)}(0)}.$$
(4.38)

Uwzględniając analityczną zależność drugiego momentu od parametrów procesu, umieszczoną w tabeli 4.3 oraz relację między drugim momentem zwykłym i centralnym (4.31) otrzymamy:

$$\sigma_{p} = \frac{\beta_{kk}^{2}(m_{e}^{(4)} - (m_{e}^{(2)})^{2} + \beta_{kk}^{2}(m_{e}^{(2)})^{3})}{m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{2}m_{e}^{(4)} - 2\beta_{kk}^{2}(m_{e}^{(2)})^{2} + \beta_{kk}^{4}(m_{e}^{(2)})^{3}}.$$
(4.39)

4.3. Elementarny diagonalny proces biliniowy

Rozdział 4. Elementarny proces biliniowy

Zależność podatności predykcyjnej procesu diagonalnego EB(k, k) od parametrów procesu jest znacznie bardziej złożona niż odpowiednia zależność (4.24) dla procesu subdiagonalnego EB(k, l).

Dla pobudzenia będącego białym szumem o rozkładzie gaussowskim zależność (4.39) upraszcza się do:

$$s_{p|N} = \frac{\beta_{kk}^2 \lambda^2 (2 + \beta_{kk}^2 \lambda^2)}{1 + \beta_{kk}^2 \lambda^2 + \beta_{kk}^4 \lambda^4}.$$
 (4.40)

Na rys. 4.7 pokazano zależność podatności predykcyjnej procesów EB(k, k) – linia ciągła, i EB(k, l) – linia przerywana, od iloczynu parametrów $\beta^2 \lambda^2$, dla procesów pobudzanych dyskretnym białym szumem gaussowskim. Wyraźnie widać, że proces diagonalny EB(k, k) charakteryzuje się większą podatnością predykcyjną niż proces subdiagonalny EB(k, l).

Podatność predykcyjna gaussowskiego odpowiednika procesu EB(k,k)

Na rys. 4.8 pokazano podatność predykcyjną procesów EB(k,k) i ich odpowiedników gaussowskich, w funkcji parametrów $\beta^2 \lambda^2$. Zamieszczony wyżej przykład 4.1 pokazał, że:

- Dla danego procesu EB(k, k) istnieją dwa procesy MA(k), będące jego gaussowskim odpowiednikiem, tzn. mające drugi moment centralny taki sam jak proces EB(k, k).
- Procesy te różnią się parametrami c_k i $m_w^{(2)}$ oraz podatnością predykcyjną, wyrażoną zależnością:

$$s_p = 1 - \frac{m_e^{(2)}}{M_y^{\prime(2)}} = \frac{c_k^2}{1 + c_k^2}.$$
(4.41)

- Odpowiedniki odwracalne MA1(k) charakteryzują się znacznie mniejszą podatnością predykcyjną niż procesy EB(k, k).
- Odpowiedniki nieodwracalne MA2(k) mają podatność predykcyjną s_p znacznie większą od procesów EB(k, k), ale ta ich korzystna właściwość jest praktycznie bez znaczenia.







Rys. 4.8: Porównanie podatności predykcyjnej procesów EB(k,k)i ich odpowiedników gaussowskich w funkcji parametrów $\beta^2 \lambda^2$

Fig. 4.8: Comparison of prediction flexibility of EB(k,k) processes and their gaussian equivalents in dependace on the $\beta^2 \lambda^2$ parameters

66

Rozdział 5

Elementarne modele biliniowe

Niniejszy rozdział poświęcony jest elementarnym modelom biliniowym $\mathcal{EB}(k, l)$. które opisane są następującym równaniem:

> $y_i = w_i + b_{kl} w_{i-k} y_{i-l}.$ (5.1)

Przyjęto następujące założenia:

Założenie 5.1. Ciąg w_i w modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ jest niezależnym dyskretnym białym szumem, o symetrycznym rozkładzie, ograniczonej amplitudzie $|w_i| < |w_{max}| < \infty$ i skończonej wariancji.

Założenie 5.2. Struktura (k, l) elementarnego modelu biliniowego $\mathcal{EB}(k, l)$ jest zgodna ze strukturą procesu EB(k, l).

Założenie 5.3. Wyjście modelu jest ograniczone amplitudowo.

5.1. Stabilność

Warunki stabilności zostaną przedyskutowane kolejno dla elementarnych modeli biliniowych subdiagonalnych i diagonalnych.

5.1.1. Elementarne modele biliniowe subdiagonalne

Przy przyjętych założeniach, warunek stabilności BIBO dla elementarnych modeli subdiagonalnych, dla których k < l:

 $y_i = w_i + b_{kl} w_{i-k} y_{i-l},$

5.1. Stabilność

wynika z warunku zbieżności dla szeregu:

$$y_{i} = w_{i} + b_{kl}w_{i-k}y_{i-l} = w_{i} + b_{kl}w_{i-k}w_{i-l} + b_{kl}^{2}w_{i-k}w_{i-k-l}w_{i-2l} +$$
(5.3)

 $+b_{kl}^3w_{i-k}w_{i-k-l}w_{i-k-2l}w_{i-3l} + b_{kl}^4w_{i-k}w_{i-k-l}w_{i-k-2l}w_{i-k-3l}w_{i-4l} + \dots$

 $f_i^0 = w_i$

 $f_{i}^{2} = b_{k}^{2}$

itd.

Szereg (5.3) można zapisać jako szereg funkcyjny

 $y_i = \sum_{j=0}^{\infty} f_i^j,$ (5, 4)

$$f_{i}^{0} = w_{i},$$

$$f_{i}^{1} = b_{kl}w_{i-k}y_{i-l},$$

$$f_{i}^{2} = b_{kl}^{2}w_{i-k}w_{i-l}w_{i-2l},$$

Na podstawie kryterium Weierstrassa, np. [85], szereg funkcyjny jest zbieżny, jeżeli bezwzględne wartości wyrazów tego szeregu są nie większe od wyrazów szeregu liczbowego zbieżnego. Na podstawie założenia (5.1) $|w_i < w_{\max}|,$ stąd dla n-tego wyrazu f^n szeregu (5.3) zachodzi:

$$P\left(|f_i^n| < |b_{kl}^{n-1} w_{\max}^n|\right) = 1.$$
(5.6)

Szereg liczbowy:

$$w_{\max} + |b_{kl}w_{\max}^2| + |b_{kl}^2w_{\max}^3| + \dots + |b_{kl}^nw_{\max}^{n+1}| + \dots$$
(5.7)

jest zbieżny, gdy spełniony jest warunek:

$$|b_{kl}w_{\max}| < 1. \tag{5.8}$$

Spełnienie warunku (5.8) powoduje, że prawdopodobieństwo $P\left(|b_{kl}w_i|<1\right)=1$, a co za tym idzie:

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} b_{kl}^2 w_i^2 < N\right) = 1$$
(5.9)

i również:

 $P\left(b_{kl}^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 < 1\right) = 1.$ (5.10)

(5.5)

(5.2)
70

Rozdział 5. Elementarne modele biliniowe

Ponieważ $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w_{i}^{2}$ jest estymatorem wariancji, więc:

 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w_i^2 = \hat{m}_w^{(2)},\tag{5.11}$

i warunek stabilności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ można zapisać jako:

$$k_{kl}m_{w}^{(2)} < 1.$$
 (5.12)

Gdy $N \rightarrow \infty$, to:

$$P\left(\lim_{N \to -\infty} b_{kl}^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 < 1\right) = 1.$$
 (5.13)

Estymator wariancji (5.11) jest asymptotycznie nieobciążony i warunek stabilności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ można sformułować jako:

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} < 1,$$
 (5.14)

gdzie $m_w^{(2)}$ jest wariancją ciągu w_i , stanowiącego pobudzenie modelu.

Uwaga:

Otrzymany warunek (5.14) stabilności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ jest taki sam jak warunek stabilności dla procesu EB(k, l) podany w [118], aczkolwiek otrzymany jest przy założeniu ograniczeń amplitudy pobudzenia i wyjścia modelu.

5.1.2. Elementarne modele biliniowe diagonalne

Przy założeniach podanych na początku rozdziału warunek stabilności **BIBO** dla elementarnych modeli biliniowych diagonalnych $\mathcal{EB}(k, k)$:

$$_{i} = w_{i} + b_{kk} w_{i-k} y_{i-k} \tag{5.15}$$

można uzyskać, podobnie jak dla modelu subdiagonalnego, z warunku zbieżności dla szeregu:

$$\begin{aligned} y_i &= w_i + b_{kk} w_{i-k} y_{i-k} = w_i + b_{kk} w_{i-k}^2 + b_{kk}^2 w_{i-k} w_{i-2k}^2 + \\ &+ b_{kk}^3 w_{i-k} w_{i-2k} w_{i-3k}^2 + b_{kk}^4 w_{i-k} w_{i-2k} w_{i-3k} w_{i-4k}^2 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j^j. \end{aligned}$$
(5.16)

Jeżeli $|w_i < w_{\text{max}}|$, to dla *n*-tego wyrazu f_i^n szeregu (5.16) zachodzi:

Y

$$P\left(|f_i^n| < |b_{kk}^{n-1} w_{\max}^n|\right) = 1.$$
 (5.17)

5.2. Odwracalność

71

Szereg liczbowy:

$$w_{\max} + |b_{kk}w_{\max}^2| + |b_{kk}^2w_{\max}^3| + \dots + |b_{kk}^nw_{\max}^{n+1}| + \dots$$
(5.18)

jest zbieżny, gdy spełniony jest warunek:

$$|b_{kk}w_{\max}| < 1.$$
 (5.19)

Postępowanie podobne jak dla modelu subdiagonalnego pozwala uzyskać warunek stabilności:

$$b_{kk}^2 \hat{m}_w^{(2)} < 1,$$
 (5.20)

gdzie:

$$n_w^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_i^2.$$

Dla $N \to \infty$ warunek (5.20) sprowadza się do warunku:

$$p_{1,m}^2 = 1.$$
 (5.21)

Uwaga:

Warunki stabilności dla elementarnych modeli biliniowych subdiagonalnych $\mathcal{EB}(k, l)$ i diagonalnych $\mathcal{EB}(k, k)$ są takie same.

5.2. Odwracalność

Odwracalność modelu oznacza możliwość wyznaczenia ciągu w_i pobudzającego model na podstawie ciągu wyjściowego y_i , poprzez odwrócenie modelu. Model liniowy:

$$y_i = F(D)w_i \tag{5.22}$$

jest odwracalny, jeśli ograniczone amplitudowo pobudzenie w_i można wyznaczyć na podstawie ograniczonego amplitudowo ciągu y_i jako:

$$=\frac{y_i}{F(D)},\tag{5.23}$$

czyli wielomian ${\cal F}(D)$ ma pierwiastki na zewnątrz okręgu jednostkowego.

w

5.2.1. Elementarne modele biliniowe subdiagonalne

Warunek odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ oznacza, że na podstawie ograniczonego amplitudowo ciągu y_i można wyliczyć ograniczony amplitudowo ciąg w_i jako:

$$w_i = y_i - b_{kl} w_{i-k} y_{i-l}. (5.24)$$

Warunek odwracalności zostanie wyznaczony podobnie jak warunek stabilności, żądając, by szereg:

$$w_{i} = y_{i} - b_{kl}y_{i-k}y_{i-l} + b_{kl}^{2}y_{i-2k}y_{i-l}y_{i-k-l} - b_{kl}^{3}y_{i-3k}y_{i-l}y_{i-k-l}y_{i-2k-l} + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1}f_{i}^{j}$$
(5.25)

był zbieżny. Przy założeniu że $|y_i| < y_{max}$, n-ty wyraz f_i^n szeregu (5.25) spełnia z prawdopodobieństwem jeden nierówność:

$$P\left(|f_i^n| < |b_{kl}^{n-1}y_{\max}^n|\right) = 1.$$
(5.26)

Na podstawie twierdzenia Weierstrassa szereg (5.25) jest zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg majorant:

$$y_{\max} - |b_{kl}y_{\max}^2| + |b_{kl}^2y_{\max}^3| - \dots + |b_{kl}^ny_{\max}^{n+1}| - \dots$$
 (5.27)

Szereg majorant (5.27) jest zbieżny, gdy spełniony jest warunek:

$$|b_{kl}y_{\max}| < 1.$$
 (5.28)

Spełnienie warunku (5.28) powoduje, że w każdej chwili i zachodzi

$$P(|b_{kl}y_i| < 1) = 1, (5.29)$$

a także:

i rownież:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} b_{kl}^2 y_i^2 < N\right) = 1 \tag{5.30}$$

$$D\left(b_{kl}^{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{i}^{2}<1\right)=1.$$
 (5.31)

Ponieważ $\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{i}^{2}
ight)$ jest estymatorem wariancji ciągu y_{i} , więc:

P

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_{i}^{2} = \hat{m}_{y}^{(2)}, \quad (5.32)$$

5.2. Odwracalność

i równanie (5.31) można zapisać jako:

$$b_{kl}^2 \hat{m}_y^{(2)} < 1,$$
 (5.33)

gdzie $m_y^{(2)}$ oznacza ocenę wariancji ciągu y_i . Równanie (5.33) jest warunkiem odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$. Gdy $N \to \infty$, to (5.32) jest estymatorem asymptotycznie nieobciążonym i zastępując w równaniu (5.33) ocenę $m_y^{(2)}$ przez zależność określającą wariancję ciągu EB(k, l), umieszczoną w tabeli 4.1, warunek odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ można sformułować jako:

$$\frac{b_{kl}^2 m_w^{(2)}}{1 - b_{kl}^2 m_w^{(2)}} < 1, (5.34)$$

skąd po przekształceniu wynika, że aby model $\mathcal{EB}(k, l)$ był odwracalny, musi zachodzić:

$$b_{kl}^2 m_{\rm w}^{(2)} < 0.5. \tag{5.35}$$

Uwaga:

Warunek (5.35) odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$, wyznaczony przy założeniu ograniczeń amplitudowych pobudzenia i wyjścia modelu, jest taki sam jak warunek podany przez Tonga [118] dla procesów EB(k, l) i dla pobudzenia gaussowskiego.

5.2.2. Elementarne modele biliniowe diagonalne

Warunek odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, k)$ oznacza, że na podstawie modelu i ograniczonego amplitudowo ciągu y_i można wyznaczyć ograniczony amplitudowo ciąg pobudzeń w_i w następujący sposób:

$$w_i = y_i - b_{kk} w_{i-k} y_{i-k}.$$
 (5.36)

Warunek odwracalności wymaga, by szereg:

$$w_{i} = y_{i} - b_{kk}y_{i-k}^{2} + b_{kk}^{2}y_{i-k}y_{i-2k}^{2} - b_{kk}^{3}y_{i-k}y_{i-2k}y_{i-3k}^{2} + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} f_{i}^{j}$$
(5.37)

był zbieżny.

Przy założeniu że $|y_i| < y_{max}$, n-ty wyraz f_i^n szeregu (5.37) spełnia z prawdopodobieństwem P = 1 nierówność:

$$P\left(|f_i^n| < |b_{kl}^{n-1}y_{\max}^n|\right) = 1.$$

(5.38)

Szereg (5.37) jest zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg majorant:

$$y_{\max} - |b_{kk}y_{\max}^{2}| + |b_{kk}^{2}y_{\max}^{2}| - \dots + |b_{k}^{n}y_{\max}^{n+1}| - \dots,$$
(5.39)

a więc, gdy spełniony jest warunek:

$$|b_{kk}y_{\max}| < 1,$$
 (5.40)

co podobnie jak dla ciągu subdiagonalnego prowadzi do warunku:

$$b_{kk}^2 m_y^{(2)} < 1,$$
 (5.41)

gdzie:

$$\hat{m}_{y}^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{2}.$$
(5.42)

Gdy $N \to \infty$, to (5.42) jest asymptotycznie nieobciążonym estymatorem wariancji. Zastępując w równaniu (5.41) ocenę $\hat{m}_y^{(2)}$ przez zależność określającą wariancję procesu EB(k, k), umieszczoną w tabeli 4.3, warunek odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, k)$ można sformułować jako:

$$b_{kk}^2 \frac{m_w^{(2)} + b_{kk}^2 (m_w^{(4)} - (m_w^{(2)})^2)}{1 - b_{kk}^2 m_w^{(2)}} < 1,$$
(5.43)

skąd dalej wynika, że aby model $\mathcal{EB}(k, k)$ był odwracalny, musi być stabilny i dodatkowo parametry modelu muszą spełniać warunek:

$$b_{kk}^{2}m_{w}^{(2)}(2-b_{kk}^{2}m_{w}^{(2)})+b_{kk}^{4}m_{w}^{(4)}<1.$$
(5.44)

Uwaga:

- Warunek odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, k)$, uzyskany przy założeniu ograniczeń amplitudowych pobudzenia i wyjścia modelu różni się od warunku odwracalności dla procesu subdiagonalnego, a także od warunku podanego przez Tonga [118] dla elementarnych procesów biliniowych.
- Zakładając, że pobudzenie modelu ma ograniczony rozkład gaussowski, dla którego:
 - $m_w^{(2)} = \lambda^2,$

 $m_w^{(4)} = 3\lambda^4,$

warunek odwracalności (5.44) przyjmuje postać:

 $\beta_{kk}^2 m_w^{(2)} < 0.36.$

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

Zasadniczo, niniejszy rozdział dotyczy identyfikowalności elementarnych modeli biliniowych. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że identyfikowalność modeli może być dyskutowana tylko przy założeniu, że modelowany proces jest identyfikowalny systemowo. Z tego względu w p.5.3.1 opisane zostały warunki identyfikowalności systemowej elementarnych procesów biliniowych, a identyfikowalność strukturalna i parametryczna równoważna identyfikowalności modeli opisana jest w p.5.3.1 i 5.3.3.

Identyfikowalność systemowa, zdefiniowana w p. 2.4 jako możliwość znalezienia takiego modelu, który będzie generował sygnał wyjściowy o takich samych charakterystykach statystycznych jak sygnał wyjściowy z procesu, nie budzi wątpliwości dopóki identyfikujemy procesy gaussowskie. Identyfikowalność systemowa oznacza wówczas, że istnieje model, którego wyjście ma taką samą funkcję autokowariancji (drugi moment centralny) jak ciągi pochodzące z badanego procesu.

W przypadku procesów niegaussowskich oraz procesów nieliniowych pojawia się praktyczne pytanie, ile momentów procesu ma być poprawnie odtworzonych przez model. Zgodnie z definicją, pełna struktura probabilistyczna procesu przekłada się na wszystkie istniejące momenty, których może być nieskończenie wiele. W przypadku modeli nieliniowych zakłada się, że wymagana liczba poprawnie odtwarzanych momentów powinna wynikać z przyjętej struktury modelu. Model biliniowy powinien odtwarzać trzy momenty¹, model trzyliniowy – cztery itd.

Identyfikowalność procesu losowego zależy od:

- przyjętego modelu procesu,
- zastosowanej metody identyfikacji.

W kolejnych podrozdziałach zostanie przedyskutowana identyfikowalność elementarnych procesów biliniowych za pomocą elementarnych modeli biliniowych. W pierwszej kolejności przedyskutowana zostanie możliwość odtworzenia modelem biliniowym struktury probabilistycznej procesu, zdefiniowanej zestawem momentów. Rozdział 5.3.2 udziela odpowiedzi na pytanie, czy i pod jakimi warunkami można znaleźć stabilny model $\mathcal{EB}(k, l)$, który ma takie same wybrane momenty jak proces EB(k, l) i czy model ten jest jednoznaczny. W rozdziałe 5.3.3 przedyskutowane zostaną warunki identyfikowalności parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k, l)$.

¹ Trzeci moment wyjaśnia zależności biliniowe.

5.3.1. Identyfikowalność systemowa

Warunki identyfikowalności systemowej zostaną omówione oddzielnie dla subdiagonalnych i diagonalnych elementarnych procesów biliniowych.

Warunki identyfikowalności systemowej procesów EB(k, l)

W podrozdziale 5.1.1 pokazane zostało, że subdiagonalny proces EB(k, l) ma takie same własności stochastyczne drugiego rzędu (wartość oczekiwaną i autokowariancję) jak biały szum. Dla subdiagonalnego, elementarnego procesu biliniowego EB(k, l) istnieją więc co najmniej dwa typy modeli stochastycznych zdolne odtworzyć własności stochastyczne drugiego rzędu tego procesu. Są to:

- niezależny biały szum w_i ,

- subdiagonalny model $\mathcal{EB}(k, l)$.

Ze względu na właściwości stochastyczne drugiego rzędu proces subdiagonalny EB(k, l) jest więc zawsze identyfikowalny systemowo.

Warunki identyfikowalności systemowej procesów EB(k,k)

W rozdziale 4.3 zostało pokazane, że stochastyczne własności drugiego rzędu procesu EB(k,k) można odtworzyć dwoma modelami:

- modelem MA(k) 4.35 (p. rozdział 4.3),

- diagonalnym elementarnym modelem biliniowym $\mathcal{EB}(k, k)$.

Analiza zależności (4.37) wskazuje, że dla procesu EB(k, k) zawsze można znaleźć gaussowski odpowiednik MA(k), tak więc proces jest identyfikowalny systemowo ze względu na stochastyczne własności drugiego rzędu.

Model MA opisuje jedynie liniowe właściwości procesu, model $\mathcal{EB}(k,k)$ opisuje jego właściwości liniowe i biliniowe. Decyzja o wyborze modelu podejmowana jest na podstawie analizy dostępnego pomiarowo wyjścia procesu.

5.3.2. Identyfikowalność strukturalna

Poniżej zostaną sformułowane warunki, przy których proces losowy może zostać opisany elementarnym modelem biliniowym.

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

Identyfikowalność strukturalna subdiagonalnych elementarnych modeli biliniowych

Właściwości biliniowe procesu losowego scharakteryzowane są przez trzeci moment, który:

- dla niezależnego białego szumu jest zawsze równy zeru,
- dla procesów subdiagonalnych EB(k, l) przyjmuje niezerowe wartości dla $M^{(3)}(k, l)$ i $M^{(3)}(l, k)$.

Tym samym dopiero uwzględnienie trzeciego momentu pozwala, na podstawie ciągu danych pochodzących z badanego procesu, określić strukturę modelu odpowiadającą rzeczywistej strukturze procesu.

Dalej zostaną określone warunki, przy których nieskorclowany proces stochastyczny można opisać subdiagonalnym modelem $\mathcal{EB}(k, l)$. W tym celu zdefiniujmy następujący wskaźnik, będący funkcją drugiego i trzeciego momentu:

$$W_3 = \frac{(M_y^{(3)}(k, l))^2}{(M_y^{(2)}(0))^3},$$
(5.46)

który po uwzględnieniu zależności ujętych w tabeli 4.1 jest równy:

$$W_3 = x(1-x), (5.47)$$

gdzie:

$$x = \beta_{kl}^2 m_e^{(2)} > 0.$$

Parametr x procesu EB(k, l) jest rozwiązaniem równania kwadratowego (5.47). Nieujemne rozwiązanie tego równania istnieje jedynie dla $W_3 \leq 0.25$. Powyższe rozważania podsumowuje następujące twierdzenie, określające warunek konieczny identyfikowalności subdiagonalnego procesu EB(k, l) modelem $\mathcal{EB}(k, l)$.

Twierdzenie 5.1. Jeżeli momenty stochastyczne procesu losowego spełniają następujące warunki:

$$M_y^{(1)} = 0,$$

$$M_y^{(2)}(l) = \begin{cases} M_y^{(2)}(l) = \sigma_y^2 & dla \ l = 0, \\ 0 & dla \ l \neq 0 \end{cases}$$

$$M_{y}^{(3)}(l_{1}, l_{2}) = \begin{cases} 0 & dla \ l_{1} = l_{2} = 0, \\ M_{y}^{(3)}(k, l) \neq 0 & dla \ l_{1} = k, l_{2} = l, \\ M_{y}^{(3)}(l, k) \neq 0 & dla \ l_{1} = l, l_{2} = k, \\ 0 & dla \ l_{1} \neq k, l \ l_{2} \neq l, k. \end{cases}$$
$$\frac{(M_{y}^{(3)}(k, l))^{2}}{(M_{y}^{(2)}(0))^{3}} \leq 0.25, \qquad (5.48)$$

to proces ten może być opisany subdiagonalnym modelem $\mathcal{EB}(k, l)$.

Identyfikowalność strukturalna diagonalnych elementarnych modeli biliniowych

Warunki, jakie muszą być spełnione, aby dany proces losowy mógł zostać opisany modelem $\mathcal{EB}(k,k)$, zależą od liczby momentów, które mają być odtworzone przez model. Dla uproszczenia założono, że parzyste momenty $m_w^{(2r)}$ dla r = 1, 2, 3... pobudzenia procesu związane są zależnością:

$$m_w^{(2r)} = k_{2r} (m_w^{(2)})^r \quad dla \ k_{2r} \neq 1,$$
(5.49)

która zachodzi np. dla dla symetrycznych wokół zera rozkładów gaussowskich lub równomiernych. Poniżej zostaną podane warunki, które powinny być spełnione, by modelem $\mathcal{EB}(k, k)$ można było odtworzyć dwa i trzy momenty procesu losowego. – Modele $\mathcal{EB}(k, k)$ odtwarzające pierwszy i drugi moment procesu:

Układ dwóch równań:

$$M_{y}^{(2)}(0) = \frac{m_{w}^{(2)} \left(1 + (k_{4} - 1)b_{kk}^{2}m_{w}^{(2)}\right)}{1 - b_{kk}^{2}m_{w}^{2}},$$
(5.50)

$$M_{\mu}^{(2)}(k) = 2b_{kk}^2 (m_{\mu}^{(2)})^2, (5.51)$$

pozwala określić dwa różne modele EB(k, k), mające taką samą funkcję autokowariancji. Rozwiązaniem układu równań są wartości b_{kk} i $m_w^{(2)}$, przy czym b_{kk} powinno być rzeczywiste, a $m_w^{(2)}$ rzeczywiste dodatnie. Warunki uzyskania rozwiązania zależą od parametrów rozkładu pobudzenia. Dla założonego rozkładu pobudzenia i wynikającej z niego wartości k_4 rzeczywiste rozwiązania istnieją, gdy:

$$\frac{M_y^{(2)}(k)}{M_y^{(2)}(0)} < \frac{2(k_4+1) - 4\sqrt{k_4}}{(k_4-1)^2}$$
(5.52)

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

lub

$$\frac{M_y^{(2)}(k)}{M_y^{(2)}(0)} > \frac{2(k_4+1)+4\sqrt{k_4}}{(k_4-1)^2}.$$
(5.53)

Ze względu na to, że:

$$M_{y}^{(2)}(k) < M_{y}^{(2)}(0) \tag{5.54}$$

rozwiązanie (5.53) należy odrzucić i można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.2. Jeżeli momenty procesu stochastycznego spełniają następujące warunki:

$$EM_{y}^{(1)} \neq 0,$$

$$M_{y}^{(2)}(l) = \begin{cases} M_{y}^{(2)}(l) = \sigma_{y}^{2} & dla \ l = 0, \\ M_{y}^{(2)}(k) \neq 0 & dla \ l = k, \\ 0 & dla \ l \neq k . \end{cases}$$

$$M_{y}^{(3)}(l_{1}, l_{2}) = \begin{cases} M_{y}^{(3)}(0, 0) \neq 0 & dla \ l_{1} = l_{2} = 0, \\ M_{y}^{(3)}(k, k) \neq 0 & dla \ l_{1} = k, l_{2} = k, \\ 0 & dla \ l_{1} \neq k \ l_{2} \neq k. \end{cases}$$

$$\frac{M_{y}^{(2)}(k)}{M_{y}^{(2)}(0)} < \frac{2(k_{4} + 1) - 4\sqrt{k_{4}}}{(k_{4} - 1)^{2}}, \qquad (5.55)$$

to proces ten może być opisany modelem $\mathcal{EB}(k, k)$, dla którego rozkład pobudzenia w_i spełnia warunek:

$$m_w^{(4)} = k_4 (m_w^{(2)})^2.$$

Model ten odtwarza własności stochastyczne drugiego rzędu procesu losowego.

Modele $\mathcal{EB}(k, k)$ odtwarzające trzy momenty stochastyczne procesu: Dla określenia warunków, jakie powinny zostać spełnione, by można było dla procesu losowego znaleźć model zdolny odtworzyć trzy pierwsze momenty procesu, skorzystamy z własności procesu EB(k, k) zebranych w tabeli 4.4. Zdefiniujmy zagregowany wskaźnik W_4 w następujący sposób:

$$W_4 = \frac{M^{(3)}(k,k)}{M^{(2)}(0)\sqrt{M^{(2)}(k)}}$$
(5.56)

Korzystając z tabeli 4.4 zastąpmy we wskaźniku (5.56) momenty odpowiednimi funkcjami parametrów modelu, uzyskując:

$$W_4(x,k_4) = \frac{k_4(1+2x)}{\sqrt{2}(1+x(k_4-1))},$$
(5.57)

będący liniową funkcją wartości x, gdzie $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$. Dla określonej wartości $M^{(3)}(k,k)$, $M^{(2)}(0)$ i $M^{(2)}(k)$ wskaźnik $W_4(x)$ przybiera konkretną wartość liczbową:

$$W_4(x,k_4) = W_4$$

i równanie (5.57) ma jedno rozwiązanie:

$$r = \frac{k_4 - W_4\sqrt{2}}{W_4\sqrt{2}(k_4 - 1) - 2k}$$

Ponieważ 0 < x < 1, rozwiązanie to ma sens wówczas, gdy jest dodatnie i mniejsze od jedności, co zachodzi, gdy są spełnione poniższe warunki:

$$W_4 < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{dla } k_4 < 3 \tag{5.58}$$

lub

$$\frac{3}{\sqrt{2}} < W_4 \quad \text{dla } k_4 > 3. \tag{5.59}$$

Dla modelu pobudzanego szumem gaussowskim wartość wskaźnika W_4 , jak wynika z (5.57), wynosi:

$$W_4 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

rozwiązanie x jest nieokreślone i taki model jest nadal nieidentyfikowalny. Na rys. 5.1 pokazano zależność wskaźnika $W_4(x, k_4)|_{k_4=const}$ od parametru $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$, która ilustruje, że:

- Dla założonego typu rozkładu, różnego od gaussowskiego, scharakteryzowanego współczynnikiem k_4 , znając trzy momenty stochastyczne procesu wyznaczające wartość W_4 można jednoznacznie określić zarówno strukturę jak i parametry modelu $\mathcal{EB}(k, k)$.
- Dla pobudzenia gaussowskiego na rys. 5.1 wskaźnik W₄(x) reprezentuje linia równoległa do osi x, dla której W₄ = f(x, k₄)|_{k₄=3}, więc rozwiązanie nie istnieje, czyli na podstawie wskaźnika W₄ nie można określić modelu EB(k, k) z pobudzeniem gaussowskim, odtwarzającego trzy momenty procesu losowego.
 Ponieważ zaproponowany wyżej wskaźnik W₄ nie nadaje się do identyfikacji modeli EB(k, k) z pobudzeniem gaussowskim, zdefiniujemy inny, zagregowany wskaźnik W₅ w następujący sposób:

 W_{i}

$$h_{5} = rac{M_{y}^{(2)}(k)M_{y}^{(3)}(k,k)}{M_{y}^{(2)}(0)M_{y}^{(3)}(0,0)}.$$

Rys. 5.1: Zależność zagregowanego wskaźnika $W_4(x, k_4)|_{k_4=const}$ od parametrów modelu $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$ i parametru rozkładu pobudzenia, k_4

Fig. 5.1: Dependance of the aggregated index $W_4(x, k_4)|_{k_4=const}$ upon the model's parameters $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$ and the k_4 that characterizes input noise density

Korzystając z tabeli 4.2, wskaźnik W_5 można zapisać w funkcji $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$ jako:

$$W_5(x) = \frac{6x(1-x)}{3+2x+22x^2}$$
(5.61)

Funkcja $W_5(x)$ pokazana na rys. 5.2 w przedziale $x \in (0,1)$ ma maksimum dla x = 0.25, które wynosi $W_{5max} = 0.23$.

Własności stochastyczne trzeciego rzędu procesu losowego mogą być odtworzone modelem $\mathcal{EB}(k,k)$ z pobudzeniem gaussowskim, jeśli wartość wskaźnika W_5 spełnia ograniczenie:

 $W_5 < 0.23.$ (5.62)

Powyższe rozważania można podsumować następującym twierdzeniem:





Rys. 5.2: Zależność zagregowanego wskaźnika W_5 od parametrów $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$ modelu dla gaussowskiego rozkładu sygnału pobudzającego

Fig. 5.2: Dependance of the aggregated index W_5 upon the model's parameters $x = b_{kk}^2 m_w^{(2)}$ for Gaussian distributed input

Twierdzenie 5.3. Jeżeli momenty stochastyczne procesu losowego spełniają następujące warunki:



 $M_{u}^{(1)} \neq 0,$

$$M_{y}^{\prime(2)}(l) = \begin{cases} M_{y}^{\prime(2)}(k) \neq 0 & dla \ l = k, \\ 0 & dla \ l \neq k, \end{cases}$$

M

$$M_{y}^{(3)}(l_{1}, l_{2}) = \begin{cases} M_{y}^{\prime(3)}(0, 0) \neq 0 & dla \ l_{1} = l_{2} = 0, \\ M_{y}^{\prime(3)}(k, k) \neq 0 & dla \ l_{1} = k, l_{2} = k, \\ 0 & dla \ l_{1} \neq k \ l_{2} \neq k, \end{cases}$$

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

$$\begin{aligned} &\frac{M_y^{(3)}(k,k)}{M_y^{(2)}(0)\sqrt{M_y^{(2)}(k)}} < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad dla \ k_4 < 3, \\ &\frac{M_y^{(3)}(k,k)}{M_y^{(2)}(0)\sqrt{M_y^{(2)}(k)}} > \frac{3}{\sqrt{2}} \quad dla \ k_4 > 3, \\ &\frac{M_y^{(3)}(k,k)M_y^{(2)}(k)}{M_y^{(2)}(0)M_y^{(3)}(0,0)} < 0.23 \quad dla \ k_4 = 3, \end{aligned}$$

to może on być opisany modelem $\mathcal{EB}(k, k)$ z pobudzeniem w_i o rozkładzie prawdopodobieństwa spełniającym warunek:

$$m_w^{(4)} = k_4 (m_w^{(2)})^2.$$

Model ten odtwarza charakterystyki stochastyczne procesu do trzeciego rzędu włącznie.

Znając warunki identyfikowalności systemowej i strukturalnej procesów EB(k, l), można przystąpić do dyskusji warunków identyfikowalności parametrycznej.

5.3.3. Identyfikowalność parametryczna

Warunki identyfikowalności parametrycznej stochastycznego modelu ciągu czasowego zależą od przyjętego modelu i wybranej metody identyfikacji. Poniżej zostaną przedyskutowane warunki identyfikowalności parametrycznej modeli \mathcal{EB} przy zastosowaniu dwóch rodzajów metod identyfikacji, bazujących na:

- analizie momentów stochastycznych,
- minimalizacji błędu predykcji.

Metody analizy momentów

Metody identyfikacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ na podstawie analizy ocen momentów mogą być stosowane wówczas, gdy znane są analityczne zależności wiążące momenty procesu EB(k, l) z jego parametrami $k, l, \beta_{kl}, m_e^{(2r)}$. Parametry $b_{kl}, m_w^{(2r)}$ modelu wyznaczane są z odpowiednich zależności analitycznych, w których momenty procesu zastąpione są ich oszacowaniami z próby. Warunki identyfikowalności parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ są ściśle związane z warunkami identyfikowalnoci parametrycznej odpowiadającego im procesu EB(k, l).

– Identyfikowalność parametryczna procesu EB(k, l)

Dla procesu subdiagonalnego EB(k, l) zależność $W_3(x)$ przedstawioną równaniem

(5.47) pokazano w górnej części rys. 5.3. Rozwiązanie graficzne pokazane na rys. 5.3-a dotyczy możliwości identyfikacji procesu EB(k, l) o parametrach $\beta_{kl} = 0.5, \lambda^2 = 1$, dla którego wskaźnik $W_3 = 0.188$. Rozwiązaniem równania 5.47 jest $x_1 = 0.25$ i $x_2 = 0.75$, co wskazuje, że proces EB(k, l) nie jest parametrycznie identyfikowalny na podstawie trzech momentów. Pojedynczy pierwiastek x = 0.5 istnieje jedynie dla $W_3 = 0.25$, dla wartości wskaźnika $W_3 < 0.25$ istnieją dwa równoważne rozwiązania w przedziale $x \in (0, 1)$.

- Identyfikowalność parametryczna modelu $\mathcal{EB}(k,l)$
- Dwa różne modele $\mathcal{EB}(k,l)$ o parametrach:
- $b_{kl} = 0.5$ i $m_w^{(2)} = 1$,
- $b_{kl} = 1.5 \text{ i } m_w^{(2)} = 0.33,$

mają takie same trzy pierwsze momenty więc, ze względu na podwójne rozwiązanie, znajomość trzech momentów nie pozwala jednoznacznie określić parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$, czyli na mocy definicji model ten nie jest identyfikowalny parametrycznie.

Znając x, wartości liczbowe współczynników b_{kl} i $m_w^{(2)}$ mogą być wyznaczone na podstawie wariancji w następujący sposób:

$$n_w^{(2)} = \hat{M}_y^{(2)}(0)(1-x), \qquad (5.63)$$
$$b_{kl}^2 = \frac{x}{m_w^{(2)}}. \qquad (5.64)$$

Znak współczynnika b_{kl} jest taki sam jak znak trzeciego momentu badanego sygnału, $\hat{M}_{u}^{(3)}(k, l)$.

Poniżej graficznego rozwiązania na rysunku 5.3-a pokazano przykładowe przebiegi ciągów wygenerowanych przez badany proces rys. 5.3-b i dwa zidentyfikowane modele, odpowiadające znalezionym rozwiązaniom x_1 rys. 5.3-c i x_2 rys. 5.3-d. Należy zauważyć, że przebieg odpowiadający rozwiązaniu x_2 charakteryzuje się znacznie większymi odchyłkami od wartości średniej niż przebieg oryginalny, a oceny drugiego momentu dla pokazanych trzech realizacji procesu losowego są takie same.

Szczególnym przypadkiem modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ jest model pobudzany szumem gaussowskim, który jest identyfikowalny parametrycznie metodą momentów przy uwzględnieniu czwartego momentu procesu. Określenie warunków identyfikowalności parametrycznej modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ poprzedzone zostanie dyskusją warunków identyfikowalności parametrycznej procesu EB(k, l).







– Identyfikowalność parametryczna procesu EB(k, l) z pobudzeniem gaussowskim Zdefiniujmy zagregowany wskaźnik W_6 jako następującą funkcję drugiego i czwartego momentu procesu:

$$W_{6} = \frac{(M_{y}^{(2)}(0))^{2}}{M_{y}^{(4)}(0,0,0)} = \frac{(m_{e}^{(2)})^{2}(1-\beta_{kl}^{4}m_{e}^{(4)})}{(1-x^{2})(m_{e}^{(4)}+6\beta_{kl}^{2}(m_{e}^{(2)})^{2}M_{y}^{(2)}(0))}.$$
(5.65)

Dla gaussowskiego pobudzenia e_i , dla którego

$$m^{(4)} = 3(m^{(2)})^2,$$
 (5.66)

wskaźnik W_6 sprowadza się do $W_6(x)$ wyrażonego jako:

$$W_6(x) = \frac{1 - 3x^2}{3(1 - x^2)},\tag{5.67}$$

gdzie $x^2 = \beta_{kl}^4 (m_e^{(2)})^2$.

Dla określonej wartości wskaźnika W_6 na podstawie zależności (5.67) można określić jednoznacznie parametr x^2 procesu EB(k, l), jako:

$$x^2 = \frac{3W_6 - 1}{3(W_6 - 1)}.$$
(5.68)

Znając x^2 i drugi moment $M_y^{(2)}$, można na podstawie (5.64) i (5.63) wyznaczyć wartości liczbowe współczynników β_{kl} i $m_e^{(2)}$. Znak współczynnika β_{kl} można wyznaczyć na podstawie trzeciego momentu. Tym samym, jeśli dla procesu EB(k, l)istnieją cztery pierwsze momenty, spełniony jest warunek (5.48) i pobudzenie modelu ma rozkład gaussowski, to proces EB(k, l) jest identyfikowalny parametrycznie. Warunki istnienia czterech pierwszych momentów dla procesów EB(k, l) sprowadzają się do warunków ograniczających parametr β_{kl} i wariancję pobudzenia e_i procesu:

 $- \quad 0 < \beta_{kl}^2 m_e^{(2)} < 1,$

 $- 0 < \beta_{kl}^4 m_e^{(4)} < 1.$

Stąd, dla procesu EB(k, l) z pobudzeniem gaussowskim, dla którego zachodzi (5.66) warunki istnienia czterech pierwszych momentów można określić jako:

$$0 < \beta_{kl}^2 m_e^{(2)} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
 (5.69)

Uwzględniając (5.69) i (5.68) otrzymamy warunek

$$0 < W_6 < 1, \tag{5.70}$$

określający relację między drugim i czwartym momentem centralnym procesu EB(k, l).

Identyfikowalność parametryczna modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ z pobudzeniem gaussowskim Dla modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ wskaźnik W_6 jest równy:

$$W_{6} = \frac{(M_{y}^{(2)}(0))^{2}}{M_{y}^{(4)}(0,0,0)} = \frac{(m_{w}^{(2)})^{2}(1 - b_{kl}^{4}m_{w}^{(4)})}{(1 - x^{2})(m_{w}^{(4)} + 6b_{kl}^{2}(m_{w}^{(2)})^{2}M_{y}^{(2)}(0))}.$$
(5.71)

Dla gaussowskiego rozkładu pobudzenia w_i , dla którego

$$m_w^{(4)} = 3(m_w^{(2)})^2$$

wskaźnik W_6 można wyrazić w funkcji x jako:

$$V_6(x) = \frac{1 - 3x^2}{3(1 - x^2)}.$$
(5.72)

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

Dla modelu $\mathcal{EB}(k, l)$:

 $x = b_{kl} m_w^{(2)},$

zależność (5.72) pozwala określić jednoznacznie parametr x^2 modelu $\mathcal{EB}(k, l)$,

$$x^2 = \frac{3W_6 - 1}{3(W_6 - 1)}.$$
(5.73)

Znając x^2 , można na podstawie oceny drugiego momentu $\hat{M}_y^{(2)}$ procesu losowego wyznaczyć wartości liczbowe współczynników b_{kl} i $m_w^{(2)}$. Znak współczynnika b_{kl} można wyznaczyć wykorzystując ocenę trzeciego momentu procesu losowego. Tym samym, jeśli dla procesu losowego:

- istnieją cztery pierwsze momenty,

- spełniony jast warunek (5.48),
- pobudzenie modelu ma rozkład gaussowski,

to model $\mathcal{EB}(k, l)$ jest identyfikowalny parametrycznie.

Model $\mathcal{EB}(k, l)$ pobudzany białym szumem gaussowskim generuje przebiegi losowe o ograniczonych pierwszych czterech momentach, jeśli spełniony jest warunek

$$0 < b_{kl}^2 m_w^{(2)} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
(5.74)

Uwzględniając (5.73) i (5.74) otrzymamy warunek, jaki powinien zostać spełniony przez wskaźnik W_6 , aby momenty drugi i czwarty sygnałów losowych generowanych modelem $\mathcal{EB}(k, l)$ były ograniczone. Dla innych rozkładów pobudzenia istnieją dwa rozwiązania równania (5.71) i model $\mathcal{EB}(k, l)$ nie jest identyfikowalny parametrycznie.

Powyższe rozważania można podsumować następującymi twierdzeniami:

Twierdzenie 5.4. Proces EB(k, l) z pobudzeniem gaussowskim jest identyfikowalny parametrycznie na podstawie czterech pierwszych momentów, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$0 < \frac{(M_y^{(2)}(0))^2}{M_y^{(4)}(0,0,0)} < 1,$$

$$\frac{(M_y^{(3)}(k,l))^2}{(M_y^{(2)}(0))^3} \le \frac{1}{4}$$

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

Rozdział 5. Elementarne modele biliniowe

Twierdzenie 5.5. Dla procesu losowego o zerowej wartości oczekiwanej i skończonych momentach do czwartego włącznie istnieje parametrycznie identyfikowalny model $\mathcal{EB}(k, l)$, jeśli spełnione są warunki:

$$\frac{(M_y^{(3)}(k,l))^2}{(M_y^{(2)}(0))^3} \le \frac{1}{4},$$

$$< \frac{(M_y^{(2)}(0))^2}{M_*^{(4)}(0,0,0)} < 1$$

Analiza warunków identyfikowalności strukturalnej procesów EB(k, k), przedstawionej na rys. 5.1, 5.2 pozwala sformułować następujące twierdzenia:

Twierdzenie 5.6. Dla procesów EB(k, k) z pobudzeniem niegaussowskim, dla którego

$$m_e^{(2r)} = k_{2r} (m_e^{(2)})^r \quad dla \ k_{2r} \neq 1$$

warunki identyfikowalności strukturalnej, ze względu na własności trzeciego rzędu, są równocześnie warunkami identyfikowalności parametrycznej.

Twierdzenie 5.7. Procesy EB(k, k) z pobudzeniem gaussowskim identyfikowalne strukturalnie, z uwzględnieniem własności stochastycznych trzeciego rzędu, nie są identyfikowalne parametrycznie.

Dokonując identyfikacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ metodą momentów, wartości momentów $M_y^{(2)}(0), M_y^{(4)}(0, 0, 0), M_y^{(3)}(k, l)$ zastąpione są ocenami momentów wyznaczonymi z próby $M_y^{(2)}(0), M_y^{(4)}(0, 0, 0), M_y^{(3)}(k, l)$. Dokładność identyfikacji zależy więc od dokładności oszacowania momentów stochastycznych procesu. W kolejnym podrozdziale zostaną przedyskutowane własności estymatorów momentów procesów EB(k, l).

Własności estymatorów momentów

W rozdziale 2.1.2 omówione zostały podstawowe estymatory momentów oraz ich własności. Własności estymatorów momentów dla prostej próby losowej, w której kolejne zmienne są od siebie niezależne, są znane. Dla procesów stochastycznych własności estymatorów momentów są znacznie mniej rozpoznane [67]. Stanowi to istotny problem, gdyż nie mając pewności, że estymator jest zgodny i nieobciążony, nie mamy podstaw, by traktować uzyskane na jego podstawie oceny parametrów jako wiarygodne. Ze względu na to, że brak jest metod analitycznych, pozwalających

określić własności estymatorów momentów dla biliniowych procesów stochastycznych, praktyczne własności estymatorów momentów określono na postawie wyników badań symulacyjnych. W kolejnych tabelach 5.1–5.4 zebrano wartości momentów teoretycz-Tabela 5.1: Momenty teoretyczne i estymowane dla subdiagonalnego procesu EB(k, l) z pobudzeniem gaussowskim

x	$M_{V}^{(2)}(0)$	$\bar{M}_{y}^{(2)}(0)$	$M_y^{(3)}(k,l)$	$M_y^{(3)}k,l$	$M_{\mu}^{(4)}(0,0,0)$	$M_y^{(4)}(0,0,0)$
0.1	1.11	1.110 (0.004)	0.35	0.34 (0.004)	3.78	3.70 (0.25)
0.2	1.25	1.260 (0.006)	0.56	0.56 (0.009)	5.11	5.11 (0.73)
0.3	1.43	1.380 (0.008)	0.78	0.70 (0.020)	7.63	6.65 (2.03)
0.4	1.67	1.650 (0.040)	1.05	1.02 (0.070)	13.46	12.76 (67)
0.5	2.00	2.020 (0.110)	1.41	1.40 (0.210)	36.00	29.00 (599)

Tabela 5.2: Momenty teoretyczne i estymowane dla subdiagonalnego procesu EB(k, l) i pobudzenia o rozkładzie równomiernym

x	$M_{y}^{(2)}(0)$	$M^{(2)}(0)$	$M_y^{(3)}(k,l)$	$M_y^{(3)}k,l$	$M_{y}^{(4)}(0,0,0)$	$\hat{M}_{y}^{(4)}(0,0,0)$	
0.1	1.11	1.12 (0.002)	0.35	0.36 (0.003)	2.51	2.54 (0.03)	
0.2	1.25	1.26 (0.004)	0.56	0.57 (0.007)	3.56	3.61 (0.15)	
0.3	1.43	1.41 (0.007)	0.78	0.77 (0.010)	5.21	5.05 (0.51)	
0.4	1.67	1.64 (0.020)	1.05	1.02 (0.030)	8.14	7.73 (2.42)	
0.5	2.00	2.02 (0.040)	1.41	1.44 (0.100)	14.18	14.43 (46.00)	

nych i estymowanych na podstawie próby liczącej 500 elementów, dla 50 realizacji.W nawiasach podano wariancję estymowanych momentów. Wyliczenia przeprowadzono dla ciągów subdiagonalnych i diagonalnych, o różnych wartościach parametrów, przedstawionych w tabelach jako $x = \beta m_{\epsilon}^{(2)}$. Każdorazowo pobudzeniem ciągu był biały szum o wariancji $m_{\epsilon}^{(2)} = 1$ i o rozkładzie normalnym lub równomiernym.

Tabela 5.3: Momenty teoretyczne i estymowane dla proces
uEB(k,k)i pobudzenia o rozkładzie normalnym

	1							
x	M ⁽²⁾ (0)	$M_{y}^{(2)}(0)$	$M_y^{(2)}(k)$	$\hat{M}_{y}^{(2)}(k)$	$M^{(3)}_{(0,0)}$	$\hat{M}_{y}^{(3)}(0,0)$	$M^{(3)}_{k,k)}$	$M^{(3)}(k,k)$
0.05	1.16	1.13 (0.01)	0.10	0.10 (0.01)	0.74	0.80 (0.05)	0.78	0.73 (0.03)
0.1	1.33	1.32 (0.02)	0.20	0.18 (0.01	1.20	1.48 (0.18)	1.26	1.22 (0.10)
0.2	1.75	1.76 (0.04)	0.40	0.41 (0.03)	2.39	3.39 (1.14)	2.35	2.38 (0.42)
0.25	2.00	2.00 (0.10)	0.50	0.50 (0.04)	3.25	4.68 (7.72)	3.00	2.96 (1.60)
0.3	2.29	2.21 (0.12)	0.60	0.53 (0.05)	4.37	5.44 (4.02)	3.76	3.38 (1.57)
0.4	3.00	3.03 (0.47)	0.80	0.89 (0.11)	7.72	10.00 (28)	5.69	5.82 (6.75)
0.5	4.00	3.90 (1.33)	1.00	1.12 (0.47)	13.43	15.98(496)	8.48	9.37 (204)

Tabela 5.4: Momenty teoretyczne i estymowane dla proces
uEB(k,k)i pobudzenia o rozkładzie równomiernym

x	M ⁽²⁾ (0)	M ⁽²⁾ (0)	$M_y^{(2)}(k)$	$M^{(2)}(k)$	$M_{y}^{(3)}(0,0)$	$\bar{M}_{y}^{(3)}(0,0)$	$M_y^{(3)}(k,k)$	$\hat{M}_{y}^{(3)}(k,k)$
0.05	1.09	1.10 (0.003)	0.10	0.10 (0.003)	0.72	0.71 (0.01)	0.46	0.46 (0.01)
0.2	1.45	1.46 (0.010)	0.40	0.38 (0.010)	1.90	1.91 (0.10)	1.41	1.41 (0.07)
0.3	1.77	1.78 (0.040)	0.60	0.61 (0.020)	2.96	2.99 (0.46)	2.25	2.26 (0.30)
0.5	2.80	2.67 (0.180)	1.00	0.92 (0.100)	6.92	6.14 (4.02)	5.09	4.54 (2.41)

Analizując wyniki obliczeń umieszczone w tabelach, można zauważyć, że:

- 1. Oceny niższych momentów są bliższe wartościom prawdziwym niż oceny wyższych momentów.
- 2. Ze wzrostem wartości x wzrasta wariancja oceny momentów. Dla wyższych momentów wzrost jest silniejszy niż dla momentów niższych.
- 3. Dla modeli pobudzanych białym szumem o rozkładzie równomiernym wariancja oceny momentów jest znacznie niższa niż dla modeli pobudzanych szumem o rozkładzie normalnym.

Warunki identyfikowalności parametrycznej elementarnych procesów i modeli biliniowych, przy identyfikacji dokonywanej metodą momentów, określone twierdzeniami 5.4-5.7 należy uzupełnić warunkami wynikającymi z własności ocen momentów dla próbek o skończonej liczebności. Wyniki badań symulacyjnych zawarte w tabelach 5.1–5.4 pozwalają sformułować następujące wnioski:

1. Jeśli do identyfikacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ wykorzystuje się oceny drugiego momentu, to ze względu na wariancję oceny, wzrastającą ze wzrostem $x = \beta_{kl}^2 m_e^{(2)}$ można poprawnie zidentyfikować parametry procesów EB(k, l), spełniające warunek:

$$\beta_{kl}^2 m_e^{(2)} < 0.4.$$

2. Jeśli do identyfikacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ wykorzystuje się oceny trzeciego momentu, to można zidentyfikować poprawnie parametry procesów EB(k, l), spełniające warunek:

$$\beta_{kl}^2 m^{(2)} < 0.3.$$

3. Jeśli do identyfikacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ z pobudzeniem gaussowskim wykorzystuje się oceny czwartego momentu, to można zidentyfikować poprawnie parametry procesów EB(k, l), spełniające warunek:

$\beta_{kl}^2 m^{(2)} < 0.2.$

- 4. Jeśli do identyfikacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, k)$ z pobudzeniem gaussowskim wykorzystuje się oceny trzeciego momentu, to można zidentyfikować poprawnie parametry procesów EB(k, l), spełniające warunek:
 - $\beta_{kk}^2 m_e^{(2)} < 0.2.$

Przykładowe wyniki identyfikacji metodą momentów elementarnych procesów biliniowych pokazano w Dodatku B.

Metody minimalizacji błędu predykcji

Estymacja parametrów modelu metodami minimalizacji błędu predykcji polega na tym, że parametry modelu wyznaczane są w wyniku minimalizacji założonej funkcji błędu predykcji. Funkcję przyporządkowującą ciągowi błędów predykcji wielkość skalarną można wybrać na wiele sposobów. Södreström i Stoica w [108] pokazują, że wiele metod identyfikacji, w tym metoda najmniejszej sumy kwadratów, rozszerzona metoda najmniejszej sumy kwadratów i metoda największej wiarygodności jest szczególnymi przypadkami metody minimalizacji błędu predykcji. Do tej grupy metod należy również stosowana przez Priestleya [104] metoda rozszerzonego residuum.

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

Rozdział 5. Elementarne modele biliniowe

Warunek identyfikowalności parametrycznej ciągu czasowego podawany w literaturze, np. [75], [116], jest identyczny z warunkiem odwracalności. Dla elementarnych ciągów biliniowych określony jest on jako:

$$\beta_{kl}^2 m_e^{(2)} < 0.5.$$
 (5.75)

Z drugiej strony, przykłady poprawnej identyfikacji parametrów modeli biliniowych zamieszczone np. w [53], [93], [125] dotyczą procesów o parametrach znacznie bardziej ograniczonych niż pozwala na to warunek odwracalności.

Na problemy z identyfikacją biliniowych ciągów czasowych zwracają uwagę Brunner i Hess w [53], przytaczając wyniki identyfikacji, które odbiegają od parametrów identyfikowanego procesu oraz pokazując wykresy funkcji wiarygodności, która dla pewnych parametrów modelu biliniowego ma dwa minima. Wyniki opublikowanych prac autorki, dotyczących identyfikacji modeli biliniowych, [41], [42], [43], również wskazują na to, że poprawna identyfikacja parametryczna elementarnych modeli biliniowych możliwa jest w węższym zakresie, niż wynika to z warunku odwracalności (5.75). Przyczyny obserwowanych efektów można upatrywać w znacznie silniejszej nieliniowości operacji identyfikacji niż operacji odwracania modelu $\mathcal{EB}(k, l)$.

Dla elementarnych modeli biliniowych warunek odwracalności określa, kiedy ciąg pobudzający w_i może zostać odtworzony na podstawie ciągu wyjściowego y_i i znanej wartości parametru b_{kl} modelu. Schematycznie odwracanie modelu pokazano na rys. 5.4.



Rys. 5.4: Schemat odwracania modelu

Fig. 5.4: Scheme of model invertion





Fig. 5.5: Scheme of model identification

Operacja wyliczania wi:

 $w_i = f(w_{i-k}, y_i, b_{kl})$

musi być stabilna w sensie BIBO. Warunek odwracalności sformułowany jest jako funkcja stałego parametru b_{kl} : (5.76)

$$b_{kl}^2 m_{ull}^{(2)} < 0.5$$
 (5.70)

Identyfikacja parametryczna ma na celu wyznaczenie parametru b_{kl} modelu poprzez minimalizację sumy kwadratów odchyłek

$$w_i = y_i - b_{kl,i-1} w_{i-k} y_{i-l}, \tag{3.11}$$

przy czym w_i odpowiada ocenie pobudzenia modelu w chwili *i*, wyznaczonej przy wykorzystaniu oceny parametru $b_{kl,i-1}$, wyliczonej w chwili poprzedniej:

$$w_i = f(w_{i-k}, y_i, b_{kl,i-1})$$

Jak schematycznie pokazano na rys. 5.5, etapem identyfikacji jest odwracanie modelu. Różnica między odwracaniem pokazanym na rys. 5.4 i na rys. 5.5 polega na tym, że na rys. 5.5 parametr $b_{kl} = b_{kl,i}$ jest zmienny. W kolejnych chwilach *i* jest on funkcją pobudzenia, wyliczonego na podstawie $b_{kl,i-1}$, określonego w chwili poprzedniej:

 $b_{kl,i} = f_1(w_i, b_{kl,i-1}, y_i)$

Zależność między wyznaczanym ciągiem pobudzeń w_i , sygnałem wyjściowym y_i i identyfikowanym parametrem $b_{kl,i}$ można przedstawić następującym szeregiem:

$$w_{i} = y_{i} - b_{kl,i-1}y_{i-l}y_{i-k} + b_{kl,i-1}b_{kl,i-k-1}y_{i-l}y_{i-k-l}y_{i-2k} - (5.79)$$

$$b_{kl,i-1}b_{kl,i-k-1}b_{kl,i-2k}y_{i-l}y_{i-k-l}y_{i-2k}y_{i-3k} + \dots,$$

w którym $b_{kl,i}$ wyrażone są przez (5.78). Zależność (5.25) jest więc bardziej złożona i silniej nieliniowa niż zależności (5.25) i (5.37), z których wynikają warunki odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k,l)$. Dlatego zakres identyfikowalności parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k,l)$ obserwowany w praktyce różni się od literaturowego zakresu identyfikowalności równoważnego warunkowi odwracalności modelu.

Określenie warunku identyfikowalności parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ metodą minimalizacji błędu predykcji, ze względu na silne i nieokreślone nieliniowości wprowadzane przez $b_{kl,i}$, jest znacznie trudniejsze, niż dla stałej wartości współczynnika b_{kl} . Przybliżonego oszacowania tego warunku dokonano w następnym podrozdziale.

Dyskusja warunku identyfikowalności i odwracalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$

Na podstawie ogólnego warunku zbieżności dla procesów nieliniowych, [72] można stwierdzić, że operacja (5.77) wyznaczania pobudzenia na podstawie modelu $\mathcal{EB}(k, l)$, w trakcie jego identyfikacji, będzie stabilna w sensie BIBO, gdy spełniony zostanie warunek [56]:

$$\frac{b_{kl,i}w_iy_i}{w_i}| < 1, \tag{5.80}$$

czyli

$$|y_i| < |\frac{1}{b_{kl,i}}|, (5.81)$$

przy czym y_i i $b_{kl,i}$ są zmiennymi losowymi. Odwracalność modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ zachodzi przy spełnieniu warunku:

$$|y_{l}| < |\frac{1}{b}|_{kl}. \tag{5.82}$$

Dla zmiennej losowej y_i o skończonym r-tym momencie zachodzi nierówność Czebyszewa [75]:

$$P(|y_i| \ge a) \le \frac{E|y_i|^r}{a^r}; \quad dla \ a > 0$$
 (5.83)

Zakładając skończoną wariancję zmiennej losowej, r = 2. Ograniczenie a wynika z (5.82) i (5.81) i wynosi:

- 5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych
- dla warunku odwracalności:

$$a=\frac{1}{|b_{kl}|},$$

- dla warunku identyfikowalności:

$$=\frac{1}{|b_{kl,i}|}$$

a

Przy powyższych założeniach nierówność Czebyszewa można zapisać:

- dla warunku odwracalności:

$$P\left(|y_i| \ge \frac{1}{|b_{kl}|}\right) \le \frac{b_{kl}^2 m_w^{(2)}}{1 - b_{kl}^2 m_w^{(2)}} \le p_1 \le 1,$$
(5.84)

- dla warunku identyfikowalności:

$$P\left(|y_i| \ge \frac{1}{|b_{kl,i}|}\right) \le \frac{b_{kl,i}^2 m_w^{(2)}}{1 - b_{kl}^2 m_w^{(2)}} \le p_2 \ll 1,$$
(5.85)

gdzie p_1 i p_2 oznaczają graniczne prawdopodobieństwa wystąpienia wartości $|y_i|$ większej od odpowiednio $\frac{1}{|b_{kl}|}$ i $\frac{1}{|b_{kl,i}|}$. Liczne badania własne, potwierdzone spostrzeżeniami opublikownymi np. w [53], [74], [90], [118], wskazują, że na podstawie ciągu y_i parametry modelu mogą zostać poprawnie zidentyfikowane, gdy w danych nie występują silne wahania amplitudy. Niejednokrotnie, pojawiające się pojedyncze duże wartości y_i destabilizują algorytmy identyfikacji modeli metodą minimalizacji błędu predykcji lub powodują zbieżność algorytmów do parametrów różnych od rzeczywistych. Dlatego, dla warunku identyfikowalności (5.85) należy przyjąć prawdopodobieństwo $p_2 \ll 1$.

Z (5.84) wynika warunek odwracalności wyrażony jako funkcja prawdopodobieństwa wystąpienia wartości $|y_i| > \frac{1}{|b_{kl}|}$ dany zależnością:

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} \le \frac{p_1}{1+p_1} \tag{5.86}$$

Przyrównując prawą stronę (5.86) do wartości 0.5 wynikającej z literaturowego warunku odwracalności, uzyskuje się $p_1 = 1$, co oznacza wysokie prawdopodobieństwo występowania w ciągu y_i wartości o dużych amplitudach.

Z (5.85) wynika warunek identyfikowalności wyrażony jako funkcja prawdopodobieństwa wystąpienia wartości $|y_i| > \frac{1}{|b_{kl,i}|}$ dany zależnością:

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} \le p_2 (1 - b_{kl}^2 m_w^{(2)}).$$
 (5.87)

Podstawienie do (5.87) wyrażenia $(1 - b_{kl}^2 m_w^{(2)})$ wyznaczonego z (5.84) prowadzi do warunku:

$$p_{kl,i}^2 \le \frac{p_2}{p_1} b_{kl}^2.$$
 (5.88)

Ze względu na to, że $p_2 < p_1$, warunek (5.89) sprowadza się do warunku:

$$b_{kl,i}^2 < b_{kl}^2, \tag{5.89}$$

oznaczającego, że dla modeli odwracalnych o parametrach $b_{kl}^2 m_w^{(2)}$ bliskich 0.5 zidentyfikowane wartości $b_{kl,i}$ są mniejsze od wartości rzeczywistych, a zidentyfikowana wariancja pobudzenia $m_w^{(2)}$ jest większa od wariancji pobudzenia modelu.

Równość parametrów modelu zidentyfikowanych i rzeczywistych może zachodzić jedynie, gdy $p_1 = p_2 \ll 1$, co oznacza, że prawa strona równania (5.86) jest istotnie mniejsza od wartości 0.5

$$\frac{p_1}{1+p_1} < 0.5 \tag{5.90}$$

i warunek identyfikowalności modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ przyjmowany dotąd jako identyczny z warunkiem odwracalności należy zmodyfikować. Powyższe rozważania pozwalają formułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.8. Warunek identyfikowalności parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ metodą minimalizacji blędu predykcji jest ostrzejszy od warunku odwracalności tych modeli.

Ponieważ brak jest przesłanek pozwalających określić wartość prawdopodobieństwa p_2 , zostanie ono wyznaczone eksperymentalnie.

Przykładowo przyjmując, że $p_1 = p_2 = 0.2$, warunek identyfikowalności parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ metodą błedu predykcji, na podstawie (5.86) ma postać:

$$\beta^2 m_e^{(2)} < \frac{0.2}{1.2} = 0.16.$$
 (5.91)

Warunek identyfikowalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ można alternatywnie oszacować, zakładając, że wyjście i pobudzenie modelu są ograniczone amplitudowo w następujący sposób:

$$|y_i| < |y_{max}|,\tag{5.92}$$

$$|w_i| < |w_{max}|. \tag{5.93}$$

Dla amplitudowo ograniczonego w_i i y_i spełniona jest nierówność:

$$|y_{max}| \le |w_{max}| + |b_{kl}||w_{max}||y_{max}|$$
(5.94)

5.3. Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych

lub równoważnie:

$$|y_{max}| \le \frac{|w_{max}|}{1 - |b||w_{max}|}.$$
 (5.95)

Uwzględnienie warunku (5.81) prowadzi do:

$$\frac{|b_{kl}||w_{max}|}{-|b_{kl}||w_{max}|} \le 1 \tag{5.96}$$

i w rezultacie

$$b_{kl}||w_{max}| \le 0.5. \tag{5.97}$$

Zakładając, dla ograniczonego gaussowskiego rozkładu pobudzenia, że w_{max} jest proporcjonalne do pierwiastka wariancji pobudzenia

$$|w_{max}| = k\sqrt{m_w^{(2)}},$$

otrzymamy warunek identyfikowalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ o postaci:

1

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} \le \frac{1}{4k^2},$$
 (5.98)

który jest warunkiem bardzo restrykcyjnym, niedopuszczającym w żadnej chwili i naruszenia warunku $|b_{kl}||y_i| < 1$.

Dla równomiernego rozkładu pobudzenia w przedziale (-1, 1) warunek identyfikowalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ ma postać:

$$b_{kl}^2 m_{\rm w}^{(2)} \le 0.09 \tag{5.99}$$

Reasumując:

– Literaturowy warunek identyfikowalności utożsamiony z warunkiem odwracalności (5.76) równoważny jest prawdopodobieństwu $p_1 = 1$ wystąpienia wartości

 $|y_i| > \frac{1}{|b_{kl}|}.$

W takim przypadku silnie nieliniowy szereg (5.79), wyznaczający pobudzenie w_i może być rozbieżny.

Wykorzystanie nierówności Czebyszewa do określenia warunku identyfikowalności modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ prowadzi jedynie do wniosku jakościowego, że warunek identyfikowalności jest ostrzejszy niż warunek odwracalności modelu. Uzyskanie wyniku ilościowego wymaga założenia wartości prawdopodobieństwa $p_1 = p_2$. Przy założonym a priori $p_1 = p_2 = 0.2$ identyfikowalne parametrycznie metodami minimalizacji błędu predykcji są modele spełniające warunek:

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} < 0.16.$$

dla

 Warunek identyfikowalności wynikający z restrykcyjnego ograniczenia amplitudy pobudzenia i wyjścia:

 $|b_{kl}w_{max}| \leq 0.5$

$$w_{max} = k \sqrt{m_{m}^{(2)}}$$

sprowadza się do warunku:

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} \le \frac{1}{4k^2}$$

Przy założonym a priori k = 2 identyfikowalne parametrycznie metodami minimalizacji błędu predykcji są modele spełniające warunek:

$$b_{kl}^2 m_w^{(2)} < 0.06$$

co odpowiada prawdopodobieństwu $p_1=0.07$ wystąpienia wartości $|y_i|>\frac{1}{|b_{kl}|}$ Wynika stąd, że:

- warunek literaturowy jest zbyt szeroki,

– oszacowanie na podstawie wartości maksymalnych – zbyt restrykcyjne,

– oszacowanie na podstawie nierówności Czebyszewa zależy od prawdopodobieństwa $p_1 = p_2$, odnośnie do wyboru którego brak jest teoretycznych przesłanek.

W takim przypadku konieczne staje się wykonanie badań symulacyjnych. W dodatku B umieszczono wyniki badań, które pozwalają stwierdzić, że elementarne modele biliniowe są identyfikowalne, gdy:

$b_{kl}^2 m_w^{(2)} < 0.16,$

co pozwala potwierdzić założone dopuszczalne prawdopodobieństwo wystąpienia wartości $|y_i| > \frac{1}{|b_{kl}|}$ jako:

 $p_1 = p_2 = 0.20.$

Rozdział 6

Metody estymacji parametrów elementarnych modeli biliniowych

Przy założeniu że model jest identyfikowalny i jego struktura jest znana, metody stosowane do estymacji parametrów biliniowych modeli ciągów czasowych, w tym elementarnych modeli biliniowych, są takie same jak do estymacji parametrów liniowych modeli ciągów czasowych. Stosowanie takich samych metod jest możliwe ponieważ struktura modelu biliniowego, choć nieliniowa względem e_i i y_i , jest liniowa względem parametru b_{kl} .

Wiele metod estymacji parametrów wywodzi się z zasady minimalizacji błędu predykcji. W rozdziale 6.1 zostaną opisane trzy, najczęściej stosowane w identyfikacji modeli biliniowych, metody estymacji parametrów, wykorzystujące minimalizację błędu predykcji.

Alternatywna grupa metod polega na wyznaczaniu parametrów modelu na podstawie ocen momentów procesu losowego [114]. Tego typu identyfikacja jest znacznie rzadziej stosowana niż minimalizacja błędu predykcji, przede wszystkim dlatego, że rzadko znane są zależności wiążące momenty i parametry procesu losowego. Znajomość analitycznych zależności wiążących momenty i parametry elementarnych procesów biliniowych, opisanych w rozdziale 4 i dodatku A, pozwoliła zaproponować zwykłą i uogólnioną metodę momentów do estymacji parametrów elementarnych modeli biliniowych, co zostało opisane w rozdziale 6.2.

6.1. Metody wywodzące się z zasady minimalizacji błędu predykcji

W metodach wywodzących się z zasady minimalizacji błędu predykcji parametry modelu wynikają z optymalizacji kryterium, będącego funkcją błędu predykcji. Poniżej pokazane zostaną trzy najczęściej stosowane metody estymacji:

- metoda minimalizacji sumy kwadratów błędów predykcji,
- metoda największej wiarygodności,
- metoda powtarzanego residuum.

6.1.1. Metoda minimalizacji sumy kwadratów błędów

Metoda minimalizacji sumy kwadratów błędów predykcji (*LS*) jest jedną z najprostszych i najczęściej stosowanych metod estymacji parametrów modeli ciągów czasowych. Niestety, algorytm numeryczny realizujący tę metodę jest czuły na anomalie występujące w ciągach danych, służących do identyfikacji [58]. Gdy w ciągu danych sporadycznie pojawiają się duże wartości, znacznie odbiegające od średniej, algorytm może nie być zbieżny lub dawać wyniki obarczone błędem. Dlatego przed przystąpieniem do identyfikacji modelu dokonuje się odfiltrowania anomalii (tzw. outlierów).

Tego typu postępowanie nie jest wskazane dla procesów biliniowych, charakteryzujących się możliwością pojawiania się nagłych wzrostów wartości sygnału y_i (wybuchów), które nie powinny być traktowane jako anomalie i usunięte ze zbioru danych. Dlatego podstawowy algorytm LS nie może być zastosowany do estymacji parametrów modelu biliniowego i proponowane są rozliczne wersje odpornych algorytmów LS.

Dai i Sinha w [58] proponują odporną rekurencyjną wersję algorytmu (*RLS*), według której parametr b_{kl} modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ wyznacza się następująco:

$$b_{kl,i} = b_{kl,i-1} + k_i \left(y_i - \Phi_i b_{kl,i-1} \right), k_i = \frac{P_{i-1} \Phi_i}{\alpha_i + \Phi_i^2 P_{i-1}}, P_i = \frac{1}{\alpha_i} \left(P_{i-1} - \frac{P_{i-1}^2 \Phi_i^2}{\alpha_i + \Phi_i^2 P_{i-1}} \right),$$
(6.1)

gdzie:

- \$\Phi_i = \hlow_{i-k}y_{i-l}\$ - odpowiednik (jednoelementowego) wektora pomiarów,
- \$\hlow_i = y_i - \Phi_i b_{kl,i-1}\$ - błąd jednokrokowej predykcji,

- 6.1. Metody wywodzące się z zasady minimalizacji błędu predykcji
- α_i współczynnik zapominania, który zmienia się w zależności od wartości błędu predykcji w następujący sposób:

$$= \begin{cases} \frac{sign(\hat{w}_i)y_{prog}}{\hat{w}_i} & dla \ |\hat{w}_i| > y_{prog}, \\ sign(\hat{w}_i)y_{prog} & dla \ |\hat{w}_i| < x, \end{cases}$$
(6.2)

– y_{prog} – wartość progowa dobierana eksperymentalnie [34].

6.1.2. Metoda największej wiarygodności

 α_i

Metodę największej wiarygodności do estymacji parametrów modeli biliniowych stosowali najpierw Subba i Rao [111], następnie Priestley, [104] i inni, np. [53]. Idea metody polega na tym, że w procesie estymacji na podstawie ciągu danych x_i wyznaczone zostają parametry określające założony rozkład prawdopodobieństwa $f(x_i; \lambda)$, scharakteryzowany wektorem parametrów λ . Następnie zmieniamy interpretację funkcji $f(x_i; \lambda)$, traktując ją zamiast funkcji obserwacji x przy ustalonych parametrach λ , jako funkcję $f(\lambda; x_i)$ nieznanych parametrów λ przy ustalonych wartościach obserwacji x. Funkcją wiarygodności nazywamy iloczyn gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(\lambda; x_i)$ dla N dostępnych prób:

$$L = \prod_{i=1}^{N} (f(\lambda; x_i)).$$
(6.3)

Logarytmiczną funkcją wiarygodności l nazywamy logarytm:

$$l = \ln(L) = \sum_{i=1}^{N} \ln f(\lambda; x_i).$$
(6.4)

Maksymalizujemy wartość funkcji wiarygodności względem jej argumentów, odpowiadających nieznanym parametrom szukanego modelu. Położenia maksimum dla Li dla l są identyczne.

Poszukując modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ na podstawie *N*-elementowego ciągu obserwacji y_i , zakłada się, że :

$$y_{model} = y_{model}(b_{kl}, y_{i-k}) = b_{kl}y_{i-k}w_{i-l},$$

gdzie w_i jest ciągiem innowacji, równoważnym ciągowi błędów modelu:

$$w_i = y_i - y_{model}(b_{kl}, y_{i-k}). (6.5)$$

Funkcję wiarygodności zdefiniujemy jako:

$$L = L(b_{kl}, m_w^{(2)}) = \prod_{i=1}^{N} f(b_{kl}, m_w^{(2)}; w_i).$$
(6.6)

Maksymalizacja funkcji L odpowiada minimalizacji ujemnej logarytmicznej funkcji wiarygodności $-l = -\ln(L)$:

$$-l(b_{kl}, m_w^{(2)}) = -\sum_{i=1}^N \ln(f(b_{kl}, m_w^{(2)}; w_i)).$$
(6.7)

Zakładając, że w_i ma rozkład gaussowski o zerowej wartości średniej i wariancji $m_w^{(2)}$ ujemna logarytmiczna funkcja wiarygodności $-\ln(L)$ jest równa:

$$-\ln(L) = \frac{N}{2}\ln(2\pi m_w^{(2)}) + \sum_{i=1}^N \frac{w_i^2}{2m_w^{(2)}}.$$
(6.8)

Oceny największej wiarygodności parametrów b_{kl} , $m_w^{(2)}$ uzyskiwane są poprzez minimalizację funkcji (6.8). Zazwyczaj zakłada się początkowe wartości parametrów $b_{kl,0}$ i $m_{w0}^{(2)}$ i iteracyjną metodą Newtona-Raphsona poszukuje się wartości, które minimalizują (6.8). Istotna trudność polega na tym, że w_i nie jest mierzalne i dla każdej iteracji musi być obliczane jako:

$$w_i = y_i - b_{kl,i-1} w_{i-k} y_{i-l}.$$

Uzyskane oceny parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ są asymptotycznie nieobciążone, jeśli w_i ma rozkład gaussowski [87]. Dla innych rozkładów aproksymacja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f(y_i - y_{model}(b_{kl}, y_{i-k}))$ funkcją gaussowską powoduje, że oceny parametrów modelu są obciążone.

6.1.3. Metoda powtarzanego residuum

W [104] proponowana jest alternatywna metoda estymacji parametrów o nazwie metoda powtarzanego residuum, którą po zaadaptowaniu dla elementarnych modeli biliniowych można przedstawić następująco:

1. Równanie modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ można zapisać jako:

$$y_i = w_i (1 + b_{kl} y_{i-l} D^k) \tag{6.9}$$

lub równoważnie:

$$w_i = \frac{y_i}{(1 + b_{kl}y_{i-l}D^k)}.$$
(6.10)

2. Zakładając, że b_{kl} jest małe, można w przybliżeniu przyjąć, że

$$\psi_i = (1 - b_{kl} y_{i-l} D^k) y_i = y_i - \beta_{kl} y_{i-l} y_{i-k}.$$
(6.11)

6.2. Metody momentów

Traktując w_i jako błąd identyfikacji, z równania (6.11) zwykłą metodą najmniejszych kwadratów można wyliczyć początkową ocenę b_{kl_0} współczynnika b_{kl} .

3. Następnie, znając b_{kl_0} i przyjmując $w_0 = 0$, można wyliczyć rekurencyjnie w_i z równania modelu:

$$w_i = y_i - b_{kl_0} w_{i-k} y_{i-l} \quad \text{dla} \quad i = k, k+1, \dots, N.$$
(6.12)

 Znając y_i, w_i dla i = k,...N, można znaleźć poprawioną ocenę b_{kl} minimalizującą sumę kwadratów błędów:

$$V(b_{kl}) = \sum_{i=k}^{N} (y_i - b_{kl} w_{i-k} y_{i-l})^2.$$
(6.13)

5. Kroki 3 i 4 powtarzane są do uzyskania zbieżności oceny, tzn. dopóki:

$$|b_{kl,j} - b_{kl,j-1}| < \varepsilon;$$

gdzie: j – jest numerem iteracji, a ε – założoną dokładnością rozwiązania.

6.2. Metody momentów

O ile dla metod wywodzących się z minimalizacji błędu predykcji możliwe jest sformułowanie ogólnie obowiązujących algorytmów estymacji parametrów, o tyle dla metody momentów możliwe jest jedynie sformułowanie ogólnej idei postępowania, natomiast szczegóły metody zawsze są związane z określonym typem i strukturą modelu. Metoda momentów składa się zasadniczo z dwóch etapów:

Etap 1. Zakłada się, że struktura modelu jest taka jak struktura procesu. Momenty zwykłe, centralne lub łączne $M_y^{(r)}$ przedstawiane są w funkcji parametrów procesu Θ :

$$M_{\mu}^{(r)} = f(\Theta). \tag{6.14}$$

Jeśli jest to możliwe, momenty wybierane są w taki sposób, aby powstały układ równań miał jednoznaczne rozwiązanie.

Etap 2. Powstały układ równań (6.14) zostaje rozwiązany względem parametrów Θ , przy czym w miejsce momentów $M_y^{(r)}$ zostają wstawione ich oceny $\hat{M}_y^{(r)}$ uzyskane na podstawie dostępnych danych.

Dla elementarnych modeli biliniowych, korzystając z wyników przedstawionych w rozdziale 5.3, zaproponowano szczegółowy algorytm postępowania przy estymacji parametrów zwykłą i uogólnioną metodą momentów.

6.2.1. Zwykła metoda momentów

Zwykła metoda momentów (ZMM) jest analityczną metodą estymacji parametrów modelu. Jej implementacja wymaga znajomości:

- analitycznej zależności momentów od parametrów modelu,
- ocen momentów procesu.

Analityczne zależności wiążące momenty i parametry elementarnych procesów biliniowych przedstawiono w rozdziałach 4.2, 4.3. Zakładając zgodność struktury procesu EB(k, l) i modelu $\mathcal{EB}(k, l)$, estymacja parametrów modelu sprowadza się do rozwiązania układu równań, w którym w miejsce momentów podstawione zostaną ich oceny, a w przypadku istnienia więcej niż jednego rozwiązania, do wyboru rozwiązania właściwego.

Identyfikacja procesu EB(k, l) obejmuje zarówno estymację struktury k, l modelu $\mathcal{EB}(k, l)$, jak i estymację parametrów $b_{kl}, m_u^{(2)}$ modelu dla założonej struktury i założonego rozkładu pobudzenia w_i modelu.

Zakłada się, że rozkład pobudzenia jest symetryczny wokół zerowej wartości średniej, a parzyste momenty rozkładu spełniają zależność:

$$m_{w}^{(2r)} = k_{2r} (m_{w}^{(2)})^{r}, \quad dla \ r = 1, 2, 3....$$
 (6.15)

Poniżej przedstawiono propozycję algorytmu:

I. Analiza danych

1. Na podstawie posiadanego zbioru danych y_i wyznaczyć oceny momentów:

$$\begin{split} \hat{M}_{y}^{(1)}(0), \\ \hat{M}_{y}^{(2)}(m) & dla \ m = 0, 1, 2, \dots \\ \hat{M}_{y}^{(3)}(l_{1}, l_{2}) & dla \ l_{1}, l_{2} = 0, 1, 2, \dots \\ \hat{M}_{y}^{(4)}(0). \end{split}$$

2. Wyznaczyć wartości $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, dla których istnieje maksimum modułu trzeciego momentu: $|\hat{M}_y^{(3)}(l_1, l_2)|$, oznaczając $l_1 \leq l_2$.

II. Identyfikacja struktury

- 1. Jeśli $l_1 = k$, $l_2 = l$, wybrać model subdiagonalny $\mathcal{EB}(k, l)$.
- 2. Jeśli $l_1 = k$, $l_2 = k$, wybrać model diagonalny $\mathcal{EB}(k, k)$.

6.2. Metody momentów

III. Sprawdzanie warunków identyfikowalności systemowej

- 1. Jeśli wybrano model $\mathcal{EB}(k, l), to:$
- Wyliczyć wskaźnik $W_3 = \frac{(\hat{M}_y^{(3)}(k,l))^2}{(\hat{M}_y^{(2)}(0))^3}.$
 - Jeśli $W_3 < 0.25$, to nie można znaleźć modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ o takich samych charakterystykach jak badany proces i należy zakończyć obliczenia. Przyjąć model

liniowy.

2. Jeśli wybrano model $\mathcal{EB}(k,k), to:$

– Wyliczyć wskaźnik
$$W_4 = \frac{M_y^{(1)}(\kappa,\kappa)}{\hat{M}_y^{(2)}(0)\sqrt{\hat{M}_y^{(2)}(k)}}$$

– Jeśli

 $\left|W_4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| < \varepsilon,$

gdzie ε jest założoną dokładnością,

to w modelu należy założyć pobudzenie o rozkładzie gaussowskim.
a) Wyliczyć wskaźnik W₅ = ^{M_y⁽³⁾(k,k)M_y⁽²⁾(k)}/_{M_y⁽²⁾(0)M_y⁽³⁾(0,0)}.
b) Jeśli W₅ < 0.23, to proces jest identyfikowalny systemowo modelem EB(k,k) z pobudzeniem o rozkładzie gaussowskim. Jeśli nie, to zakończyć obliczenia. Przyjąć model liniowy MA(k).

Jeśli

 $\left|W_4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| \ge \varepsilon,$

to należy przyjąć pobudzenie modelu o rozkładzie różnym od gaussowskiego.

IV. Identyfikacja parametrów dla stwierdzonej identyfikowalności systemowej

- 1. Dla modelu $\mathcal{EB}(k, l)$:
 - Wyznaczyć rozwiązania x_1, x_2 równania kwadratowego względem x:
 - $W_3 = x(1-x),$

w którym $x = b_{kl}^2 m_w^{(2)}$.

– Wyznaczyć parametry modeli dla $x=x_1$ i $x=x_2,$ korzystając z zależności:

$$m_w^{(2)} = \hat{M}_y^{(2)}(0)(1-z)$$
$$b_{kl}^2 = \frac{x}{m_w^{(2)}}.$$

6.2. Metody momentów

106 Rozdział 6. Metody estymacji parametrów elementarnych modeli biliniowych

- Ponieważ, jak to pokazano w rozdziale 5.3.3, model $\mathcal{EB}(k, l)$ nie jest identyfikowalny parametrycznie, należy wybrać jeden z modeli, kierując się praktycznymi przesłankami, np. model o mniejszej wariancji $m_{w}^{(2)}$.
- 2. Dla modelu $\mathcal{EB}(k, k)$:
 - Jeśli $W_4 \neq \frac{3}{\sqrt{2}}$, to

$$x = \frac{k_4 - W_4 \sqrt{2}}{W_4 \sqrt{2}(k_4 - 1) - 2k_4},$$

przy czym:
a) dla
$$W_4 < \frac{3}{\sqrt{2}}$$
 należy przyjąć $k_4 < 3$,
b) dla $W_4 > \frac{3}{\sqrt{2}}$ należy przyjąć $k_4 > 3$.
Jeśli $W_4 \approx \frac{3}{\sqrt{2}}$, to należy rozwiązać równanie:

$$W_5 = \frac{6x(1-x)}{3+2x+22x^2}.$$

– Jak pokazano w rozdziale 5.3.3, model EB(k, k) pobudzany szumem gaussowskim nie jest identyfikowalny parametrycznie, tzn. istnieje więcej niż jedno rozwiązanie powyższego równania. Należy wybrać jeden z możliwych modeli na podstawie znanych przesłanek. Na potrzeby predykcji i sterowania wybierany jest model odwracalny, dla symulacji zakłóceni ccasem może być stosowany model nieodwracalny, zwłaszcza gdy zakłócenie charakteryzuje się silnymi losowymi anomaliami.

V. Określenie znaku współczynników b_{kl} i b_{kk}

Przedstawiona procedura identyfikacji modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ i $\mathcal{EB}(k, k)$ pozwala oszacować wartości b_{kl}^2 lub b_{kk}^2 , i $m_w^{(2)}$. Znak współczynnika b_{kl} lub b_{kk} można określić wykorzystując własności trzeciego momentu. Jak wynika z zależności przedstawionych w rozdziale 4, znaki współczynników modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ i $\mathcal{EB}(k, k)$ można przyjąć takie same jak znaki ocen momentów $\hat{M}_y^{(3)}(k, l)$ lub odpowiednio $\hat{M}_y^{(3)}(k, k)$ uzyskanych dla badanego zbioru danych.

6.2.2. Uogólniona metoda momentów

Uogólniona metoda momentów (GMM) [50], [64], [69] jest metodą numeryczną, pozwalającą na podstawie ciągu danych y_i uzyskać oceny parametrów modeli w wy-

niku minimalizacji wskaźnika jakości:

$$I = \sum_{j=1}^{J} f_k(y_i, \Theta)^2,$$
(6.16)

gdzie:

– Θ – wektor parametrów podlegajacych estymacji,

– $f_j(y_i, \Theta)$ – funkcja obserwacji y_i i wektora parametrów Θ taka, że:

$$E\{f_j(y_i,\Theta_0)\} = 0 \quad gdy \quad \Theta = \Theta_0, \tag{6.17}$$

 Θ_0 – wektor parametrów, dla których wskaźnik I osiąga minimum.

Funkcje $f_j(y_i, \Theta)$ dla j = 1, 2, ..., J definiowane są jako różnice analitycznej postaci wybranego momentu $M(\Theta)$, zależnej od parametrów Θ i jego oceny \hat{M} wyznaczonej na podstawie y_i dla i = 1, 2, ..., N. Liczba J uwzględnionych momentów zależy od rodzaju identyfikowanego modelu.

Dla subdiagonalnego clementarnego modelu $\mathcal{EB}(k, l)$, którego identyfikacja parametryczna wymaga, jak pokazane zostało w rozdziale 5.3.3, znajomości czterech momentów, proponuje się zdefiniować funkcje f_j , dla j = 1, ..., 4 w następujący sposób:

$$f_1(y_i,\Theta) = M_y^{(2)}(0) - M_y^{(2)}(0),$$

$$f_2(y_i,\Theta) = M_y^{(3)}(k,l) - M_y^{(3)}(k,l)$$

$$f_3(y_i,\Theta) = M_y^{(4)}(0,0,0) - M_y^{(4)}(0,0,0)$$

 $f_4(y_i, \Theta) = m_w^{(2)}(0) - \hat{m}_w^{(2)}(0).$

Za wartości momentów $M_y^{(r)}(\cdot)$ podstawione zostają zależności analityczne zamieszczone w rozdziale 4.2, za wartości ocen $\hat{M}_y^{(r)}(\cdot)$ podstawione zostają oceny momentów, wyznaczone na podstawie zbioru obserwacji y_i dla i = 1, 2, ..., N, dlatego argumentami funkcji $f_j(\cdot)$ są y_i i Θ .

Dla diagonalnego modelu $\mathcal{EB}(k, k)$, którego identyfikacja wymaga znajomości trzech momentów, proponuje się przyjąć funkcje f_j , dla j = 1, ..., 6 równe:

$$f_1(y_i, \Theta) = M_y^{(1)} - \hat{M}_y^{(2)},$$

108 Rozdział 6. Metody estymacji parametrów elementarnych modeli biliniowych

- $f_{2}(y_{i},\Theta) = M_{y}^{(2)}(0) \tilde{M}_{y}^{(2)}(0),$ $f_{3}(y_{i},\Theta) = M_{y}^{(2)}(k) \tilde{M}_{y}^{(2)}(k),$ $f_{4}(y_{i},\Theta) = M_{y}^{(3)}(0,0) \tilde{M}_{y}^{(3)}(0,0)$ $f_{5}(y_{i},\Theta) = M_{y}^{(3)}(k,k) \tilde{M}_{y}^{(3)}(k,k),$
- $f_6(y_i, \Theta) = m_w^{(2)}(0) m_w^{(2)}(0).$

Za wartości momentów $M_y^{(r)}(\dot{)}$ podstawione zostają zależności analityczne zamieszczone w rozdziale 4.3, za wartości ocen $\hat{M}_y^{(r)}(\dot{)}$ podstawione zostają odpowiednie oceny momentów, wyliczone na podstawie zbioru obserwacji y_i dla i = 1, ..., N.

Dla elementarnych modeli biliniowych wektor parametrów Θ składa się z dwóch elementów: $m_w^{(2)}$, b_{kl} . Parametry modelu wyznaczane są numerycznie poprzez minimalizację wskaźnika jakości (6.16), w pracy wykorzystano w tym celu nieliniową metodę najmniejszych kwadratów NLS. Zainicjowanie algorytmu wymaga podania warunku początkowego $\Theta_0 = b_{kl,0}, m_{w,0}^{(2)}$.

W pracy za Θ_0 przyjęto wynik identyfikacji uzyskany zwykłą metodą momentów. Proces optymalizacji prowadzący do uzyskania ostatecznego modelu wykonywano kilkakrotnie na tym samym zbiorze danych, przyjmując w kolejnym cyklu, jako warunki początkowe, wyniki uzyskane w cyklu poprzednim.

Można poszukiwać minimum wskaźnika jakości metodą NLS przy ograniczeniach nałożonych na szukane parametry $b_{kl}, m_w^{(2)}$. Logicznie, ograniczenia wynikają z faktu, że wariancja pobudzenia modelu musi być dodatnia i nie większa od wariancji wyjścia:

$$0 < m_w^{(2)} < m_y^{(2)}, (6.18)$$

a model musi być co najmniej stabilny:

$$b_{kl}m_w^{(2)} < 1. (6.19)$$

Uogólnioną metodę momentów można także zrealizować jako algorytm rekurencyjny, wyznaczający parametry modelu na bieżąco, w miarę pojawiania się nowych danych y_i . Na zbiorze uczącym y_i dla $i = 1, 2, ..., N_{ucz}$ wyznaczane są oceny momentów $\hat{M}(\cdot)$ i na ich podstawie zwykłą metodą momentów wyznaczany jest warunek początkowy Θ_0 . W miarę pojawiania się kolejnych pomiarów y_i dla $i \ge N_{ucz}$ oceny momentów zostają uaktualniane według zależności:

$$\hat{M}_{y|i}^{(r)} = \frac{i-1}{i} \hat{M}_{y|(i-1)}^{(r)} + \frac{1}{i} y_i^r.$$
(6.20)

W każdej iteracji minimalizowany jest wskaźnik jakości (6.16), przy czym za wartości początkowe przyjmuje się wyniki uzyskane w poprzedniej iteracji.

W dodatku B umieszczono przykłady ilustrujące wyniki identyfikacji z zastosowaniem opisanych wyżej metod, wykonanych w następujących warunkach:

- Identyfikowane były elementarne procesy biliniowe diagonalne i subdiagonalne pobudzane białym szumem o rozkładzie:
 - gaussowskim,
 - równomiernym
 - i jednakowej wariancji $m_e^{(2)} = 1$.
- 2. Parametr β_{kl} procesów należał do przedziału (0.1, 0.7), a więc wszystkie badane procesy spełniały warunek odwracalności $\beta_{kl}^2 m_e^{(2)} < 0.5$.
- Identyfikacja modelu parametrycznego przeprowadzana była na podstawie 200 odrębnych realizacji każdego z procesów, reprezentowanego przez ciąg złożony z 1000 próbek.
- 4. Dla uogólnionej metody momentów:
 - minimalizacja wskaźnika jakości przeprowadzana była przy ograniczeniach:

$$\frac{-0.5}{m_y^{(2)}} < \hat{b}_{kl} < \frac{0.5}{m_y^{(2)}}$$
$$0 < m_y^{(2)} < m_y^{(2)}.$$

- Pierwsze przybliżenie rozwiązania (warunki początkowe) przyjęto jako wynik estymacji wykonanej zwykłą metodą momentów.
- Jako wynik końcowy przyjęto parametry wyznaczone po 10 cyklach minimalizacji.

W wyniku badań, których tylko część zamieszczono w dodatku B można sformułować następujące wnioski, dotyczące praktycznej identyfikacji elementarnych procesów biliniowych:

1. Nie wszystkie procesy odwracalne są identyfikowalne.

- 110 Rozdział 6. Metody estymacji parametrów elementarnych modeli biliniowych
- Zakres identyfikowalności pokrywa się z warunkami dyskutowanymi w rozdziale 5.3.3.

Poprawne wyniki identyfikacji uzyskiwano dla parametrów

$\beta < 0.4,$

co odpowiada warunkowi

$\beta^2 m_e^{(2)} \le 0.16.$

3. Dla metody momentów zaobserwowano, że dla procesów, dla których

$\beta^2 m_e^{(2)} > 0.16$

liczba realizacji, dla których nie można było znaleźć modelu biliniowego, gdyż nie był spełniony warunek identyfikowalności systemowej, rosła ze wzrostem $\beta^2 m_e^{(2)}$.

- 4. W przeprowadzonych badaniach, w zakresie procesów identyfikowalnych, wszystkie metody identyfikacji dają poprawne oczekiwane wartości parametrów.
- 5. Nieznacznie lepsza od pozostałych jest uogólniona metoda momentów, ze względu na mniejszą wariancję wyznaczanych parametrów.
- 6. Dla procesów pobudzanych białym szumem o rozkładzie równomiernym uzyskuje się mniejszy rozrzut estymowanych parametrów wokół ich wartości średnich niż dla procesów pobudzanych gaussowskim białym szumem.

Rozdział 7

Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

Najważniejszym kryterium oceny modelu jest jego przydatność do rozwiązywania określonego typu zadań, dlatego niniejszy rozdział poświęcony jest zastosowaniom elementarnych modeli biliniowych.

Elementarne modele biliniowe mogą znaleźć zastosowanie:

- w modelowaniu i badaniach symulacyjnych,
- w prognozowaniu sygnałów,
- w regulacji nieliniowych procesów technologicznych, jako składnik algorytmu regulacji minimalizującego wariancję błędu regulacji przy uwzględnieniu zakłóceń.

7.1. Elementarne modele biliniowe w modelowaniu

i badaniach symulacyjnych

Wiele procesów technologicznych można opisać w skali makro równaniami bilansu masy i/lub energii [65]. Opis taki często jest zestawem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),\tag{7.1}$$

gdzie:

 $-\mathbf{x} - n -$ wymiarowy wektor stanu,

u – m–wymiarowy wektor wejść.

Dla szerokiej gamy procesów, np. biologicznych, ekonomicznych czy chemicznych, naturalnymi modelami dynamicznymi są jednak modele biliniowe. Człony biliniowe występują w równaniach bilansujących udział danego składnika w procesie, najczęściej w formie iloczynu odpowiedników przepływu i stężenia, jak to ma miejsce dla procesów chemicznych czy biologicznych, opisanych dokładniej w dodatku C.

112

Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

Proces technologiczny o charakterze biliniowym, z jawnymi wejściami u_1 można opisać ciągłym lub dyskretnym równaniem stanu:

- Ciągłe równanie stanu:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \sum_{k=1}^{m} u_k(t)\mathbf{N}_k\mathbf{x}(t),$$
(7.2)

gdzie:

 $\mathbf{A} - [n \times n]$ - wymiarowa macierz stanu,

 $\mathbf{B} - [n \times m]$ - wymiarowa macierz wejść,

 $N_k - [n \times n]$ - wymiarowe macierze współczynników biliniowych.

Dyskretne równania stanu:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_i + \mathbf{D}\mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^m u_{i,k}\mathbf{G}_k\mathbf{x}_i,$$
(7.3)

gdzie:

 $\mathbf{C} - [n \times n]$ -wymiarowa macierz stanu,

 $D - [n \times m]$ -wymiarowa macierz wejść,

 $G_k - [n \times n]$ -wymiarowe macierze współczynników biliniowych.

Oczywiście, model liniowy można potraktować jako szczególny przypadek modelu biliniowego (7.2), dla którego współczynniki przy członie biliniowym są zerami. Najprostszym modelem biliniowym jest model:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t)x(t). \tag{7.4}$$

(7.5)

Charakterystykę statyczną procesu opisanego modelem biliniowym (7.2) można uzyskać, przyjmując dla stanu ustalonego dla procesu ciągłego:

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

natomiast dla procesu dyskretnego w stanie ustalonym:

 $x_{i+1} = x_i.$

Rysunek 7.1 pokazuje charakterystykę statyczną procesu opisanego równaniem biliniowym:

$$x_{i+1} = 0.5x_i + 0.4u_i - 0.2u_ix_i.$$

7.1. Elementarne modele biliniowe w modelowaniu i badaniach symulacyjnych 113

Nieliniowość charakterystyki statycznej procesu wyraźnie zniekształca (desymetryzuje) odpowiedź procesu na pobudzenie (sinusoidalne – w przykładzie na rysunku). Stopień zniekształcenia, jak to ma zawsze miejsce dla układów nieliniowych, zależy od położenia punktu pracy na charakterystyce statycznej (x_0, u_0) i od odchyłek pobudzenia obiektu od punktu pracy u_0 .





Rys. 7.1: Odpowiedź procesu biliniowego na pobudzenie sygnałem sinusoidalnym w punkcie pracy – rysunek górny; Charakterystyka statyczna procesu z zaznaczonym punktem pracy – rysunek dolny

Fig. 7.1: Bilinear process response to a sinuous input in a set point – upper figure; Process static characteristics with a set point pointed – lower figure

7.1.1. Modelowanie zakłóceń

W systemach dynamicznych, w zależności od rodzaju procesu, zakłócenia widoczne na wyjściu mogą być spowodowane różnorakimi przyczynami. Często przedostają się one do procesu jako zakłócenia $e_{i,u}$ sygnałów wejściowych, niejednokrotnie dodają się do nich dodatkowe zakłócenia wyjścia systemu. 114

Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

Rozważmy proces technologiczny z jawnym wejściem u_i opisany dyskretnym równaniem biliniowym:

$$x_{i+1} = ax_i + bu_i + cx_i u_i. (7.6)$$

Założymy, że na sygnał wejściowy u_i działają addytywne zakłócenia losowe, $e_{i,u}$, a proces utrzymywany jest w punkcie pracy (u_o, x_o) . Zakłócenia wprowadzane wraz z sygnałem wejściowym procesu przenoszą się na wyjście w następujący sposób:

$$x_o + z_{x,i+1} = a(x_o + z_{x,i}) + b(u_o + e_{u,i}) + c(x_o + z_{x,i})(u_o + e_{u,i}),$$
(7.7)

stad:

 $z_{x,i+1} = z_{x,i}(a + cu_o) + (b + cx_o)e_{u,i} + cz_{x,i}e_{u,i}.$ (7.8)

Wprowadzając do (7.8) oznaczenia:

$$k_1 = a + cu_o,$$

$$k_2 = \frac{c}{b + cx_o},$$

 $e_i^* = (b + cx_o)e_{u,i},$

otrzymamy zależność wskazującą na biliniowy charakter zakłócenia widocznego na wyjściu procesu, spowodowanego losowym zakłóceniem wejścia:

$$z_{x,i+1} = k_1 z_{x,i} + e_i + k_2 e_i z_{x,i}.$$
(7.9)

W rzeczywistości zależność biliniowa opisująca zakłócenie obserwowane na wyjściu może różnić się od zależności (7.9). Przyczynami są:

- dodatkowe opóźnienie sygnału u_i , spowodowane istniejącym czasem martwym w procesie,
- dodatkowe człony biliniowe pochodzące od innych sygnałów wejściowych,
- dodatkowe, losowe zakłócenie samego wyjścia.

Zazwyczaj przy modelowaniu technologicznych procesów wejściowo-wyjściowych zakłócenia losowe, pochodzące z różnych źródeł, przedstawiane są jako jedno zbiorcze, losowe zakłócenie widoczne na wyjściu procesu. Zakłócenie zbiorcze można opisać elementarnym modelem biliniowym $\mathcal{EB}(k, l)$ lub $\mathcal{EB}(k, k)$, zwłaszcza wówczas, gdy charakteryzuje się ono losowymi anomaliami, obserwowanymi jako ostre piki ampli-

7.1. Elementarne modele biliniowe w modelowaniu i badaniach symulacyjnych 115

tudy. Tego typu zakłócenia obserwowane są dla wielu procesów, np. zachodzących w oczyszczalniach ścieków [110].

Modele zakłóceń stosowane w badaniach symulacyjnych muszą być stabilne, a więc w przypadku elementarnych modeli biliniowych spełniać warunek (5.10). Im bliższy jedności jest iloczyn $b_{kl}m_w^{(2)}$, tym częstsze i silniejsze są gwałtowne piki amplitudy modelowanego zakłócenia. Zależności wyprowadzone w rozdziałach 4, 5 pozwalają dobrać parametry modelu zakłóceń tak, aby uzyskać żądane charakterystyki stochastyczne modelowanego zakłócenia.

7.1.2. Elementarny model liniowo-biliniowy

Do modelowania niegaussowskich procesów stochastycznych zastosowany zostanie następujący model, zwany dalej modelem Liniowo-Elementarno-Biliniowym, L-EB pokazany na rys.(7.2).



Rys. 7.2: Model L-EB

Fig. 7.2: L-EB model

Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

- Model L EB składa się z dwóch części:
- liniowej, zbudowanej na oryginalnym sygnale y_i:

$$y_i^L = -\sum_{j=1}^{dA} a_j y_{i-j}$$

- nieliniowej określonej dla residuum z_i :

$$x_i = y_i - y_i^L.$$
 (7.10)

Dla residuum zakłada się, że

$$E\{z_i\} = 0, (7.11)$$

co zachodzi zawsze, gdy współczynniki części liniowej modelu są estymowane metodą najmniejszych kwadratów. Residuum z_i przedstawione jest elementarnym modelem biliniowym $\mathcal{EB}(k, l)$ lub $\mathcal{EB}(k, k)$. W związku z tym, w ogólnym przypadku z_i można określić jako:

gdzie:

$$z_i = \eta_i - \bar{\eta},\tag{7.12}$$

$$\bar{\eta} = \begin{cases} b_{kk} m_w^{(2)} & gdy \ k = l, \\ 0 & gdy \ k \neq l, \end{cases}$$
(7.13)

$$y_{i} = \begin{cases} w_{i} + b_{kk} w_{i-k} \eta_{i-k} & gdy \ k = l, \\ w_{i} + b_{kl} w_{i-k} \eta_{i-l} & gdy \ k \neq l. \end{cases}$$
(7.14)

Ze względu na zastosowanie modelu (7.13) do prognozowania, model (7.14) dla η_i powinien być odwracalny. Wyjście modelu L - EB jest równe:

$$y_i^{L-EB} = y_i^L + \eta_i. {(7.15)}$$

Identyfikacja modelu L - EB jest dwuetapowa. Najpierw, dla badanego sygnału identyfikuje się model liniowy autoregresywny, stosując znane procedury identyfikacji modeli liniowych, np. [51], [108]. Następnie, dla residuum identyfikuje się elementarny model biliniowy jedną z metod opisanych w rozdziale 6.

W dodatku C pokazano różniczkowe modele biliniowe dla wybranych procesów jednostkowych technologii chemicznej:

7.2. Elementarne modele biliniowe w prognozowaniu i układach regulacji 117

- dekantacji,
- destylacji,
- ekstrakcji

oraz procesów biologicznych:

- układu oddechowego,
- układu sercowo-naczyniowego.

Dla wybranych sygnałów wyjściowych, pochodzących z tych procesów zidentyfikowano, stosując metodykę zaproponowaną w niniejszej pracy, model L - EB. Pokazano, że dopasowane w ten sposób modele sygnałowe mają potencjalnie lepsze własności predykcyjne, niż wynikające z analizy funkcji autokorelacji, modele liniowe.

7.2. Elementarne modele biliniowe w prognozowaniu

i układach regulacji

Prognozy sygnałów zawsze wyliczane są na podstawie modelu. Algorytmy predykcji, nazywane również predyktorami, pozwalające wyznaczyć prognozę sygnału na podstawie modelu i posiadanych danych pomiarowych y_i mogą być projektowane w wersji bezpośredniej lub adaptacyjnej. Dla określenia algorytmu predykcji w wersji bezpośredniej wymagana jest znajomość struktury i parametrów modelu. Dla określenia algorytmu w wersji adaptacyjnej wymagana jest znajomość struktury modelu, a parametry predyktora określane są na bieżąco, w trakcie działania algorytmu.

W niniejszej pracy zakłada się, że jedyną dostępną informacją o procesie jest zbiór pomiarów sygnału y_i stanowiącego wyjście badanego procesu. Nie ma więc dostępu pomiarowego do wielkości wejściowych u_i czy zakłóceń, a wszelkie zmiany wymienionych wielkości są obserwowane pośrednio, poprzez skutki, jakie wywołują w sygnale wyjściowym.

Do prognozowania sygnałów najczęściej stosowane są predyktory liniowe [1]-[12], [84], [123]. Budowane są one na podstawie liniowego, stochastycznego modelu ciągu czasowego, o postaci:

$$y_i = F(D)w_i, \tag{7.16}$$

w którym w_i jest gaussowskim białym szumem. Wyjście modelu y_i jest również ciągiem gaussowskim.

7.2. Elementarne modele biliniowe w prognozowaniu i układach regulacji

$$D^k(y_i x_i) = y_{i-k} x_{i-k}$$

 $D^k(y_i)x_i = y_{i-k}x_i$

– w_i jest niezależnym białym szumem o wariancji $m_w^{(2)}$,

to predyktor o postaci:

$$\dot{y}_{i+h|i} = G(D)y_i + b_{kl}F(D)\left(\varepsilon_{i+h-k}^{\eta}\eta_{i+h-l}\right),$$
(7.19)

dokonuje predykcji $\hat{y}_{i+h|i}$ sygnału y_i z horyzontem $h \leq k$ z błędem:

$$\varepsilon_i^y = F(D)w_i \tag{7.20}$$

o minimalnej wariancji, równej:

$$E\{\varepsilon_i^y\}^2 = m_w^{(2)} \left(1 + \sum_{i=1}^{h-1} f_i^2\right).$$
(7.21)

W równaniu predyktora (7.19) poszczególne zmienne oznaczają:

 $-\varepsilon_{i}^{\eta} = \eta_{i} - \hat{\eta}_{i|i-h},$ $-\hat{\eta}_{i+h|i} = b_{kl}\varepsilon_{i+h-k}^{\eta}\eta_{i+h-l},$ $-F(D) = (1 + f_{1}D + f_{2}D^{2} + ... + f_{h-1}D^{h-1}),$ $-G(D) = (1 + g_{1}D + g_{2}D^{2} + ... + g_{dA-1}D^{dA-1}).$ Wielomiany A(D), G(D), F(D) związane są zależnością: (7.22)

$$1 = A(D)F(D) + D^{h}G(D).$$
(1.22)

Dowód. Zastępując w równaniu (7.17) dla chwili i + h:

(= - 1)

119

 η_{i+h} przez równanie definiujące subdiagonalny model $\mathcal{EB}(k,l)$ (7.18), otrzymamy:

 $A(D)y_{i+h} = \eta_{i+h}$

$$A(D)u_{i+h} = w_{i+h} + b_{kl}w_{i+h-k}\eta_{i+h-l}.$$
(1.24)

Mnożąc obie strony równania (7.24) przez F(D) i stosując tożsamość (7.22), otrzymamy:

$$y_{i+h} = G(D)y_i + F(D)w_{i+h} + b_{kl}F(D)(w_{i+h-k}\eta_{i+h-l}).$$
(1.25)

Błąd predykcji $\varepsilon_{i+h}^y = y_{i+h} - \hat{y}_{i+h|i}$ jest równy:

$$\varepsilon_{i+h}^{y} = F(D)w_{i+h} + G(D)y_i + b_{kl}F(D)(w_{i+h-k}\eta_{i+h-l}) - \hat{y}_{i+h|i}.$$
(7.26)

Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

Chociaż nie wszystkie procesy, z którymi mamy do czynienia, są gaussowskie, to powszechne stosowanie liniowych modeli stochastycznych o postaci (7.16) jest uzasadnione, gdyż dla procesów niegaussowskich, o skończonych drugich momentach, a takie jedynie mogą podlegać prognozowaniu, istnieją odpowiadające im modele gaussowskie o takich samych drugich momentach. Jak zostało pokazane w rozdziale 5, przyjęty dla procesu niegaussowskiego równoważny mu model gaussowski, determinuje możliwą do osiągnięcia dokładność predykcji czy regulacji, która z reguły jest niższa od potencjalnie możliwej do osiągnięcia, za pomocą innego modelu. Dlatego, kierując się potrzebą zwiększenia osiąganej dokładności predykcji czy regulacji, do modelowania procesów stochastycznych zastosowano zaproponowany w rozdziale 7.1.2 model L - EB, na podstawie którego zaprojektowano elementarny predyktor biliniowy, przedstawiony w kolejnym podrozdziale.

7.2.1. Elementarny predyktor biliniowy

Elementarne procesy biliniowe subdiagonalne i diagonalne, jak to zostało pokazane w poprzednich rozdziałach, różnią się istotnie między sobą i dlatego dla obu przypadków należy projektować odrębne algorytmy predykcji. Algorytmy predykcji minimalnowariancyjnej zbudowane na podstawie modelu L - EB zostaną przedstawione w postaci twierdzeń.

Twierdzenie 7.1. Jeżeli y_i jest niegaussowskim stochastycznym procesem opisanym modelem L - EB:

 $A(D)y_i = \eta_i,$

gdzie:

- residuum η_i jest przedstawione subdiagonalnym modelem $\mathcal{EB}(k, l)$,

$$\eta_i = w_i + b_{kl} w_{i-k} \eta_{i-l} \quad k < l, \tag{7.18}$$

(7.17)

- wielomian A(D) ma postać:

$$A(D) = (1 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{dA} D^{dA}),$$

- D symbolizuje działanie opóźniające, rozumiane w następujący sposób:

$$D^k y_i = y_{i-k}$$

Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

Prawa strona równania (7.26) zawiera składniki zupełnie nieznane w chwili *i*, w której dokonywana jest predykcja oraz składniki zależne od przeszłości. Wariancja błędu predykcji jest więc sumą wariancji niezależnych składników prawej strony równania (7.26):

$$E\{\varepsilon_{i+h}^y\}^2 = E\{F(D)w_{i+h}\}^2 + E\{G(D)y_i + b_{kl}F(D)(w_{i+h-k}\eta_{i+h-l}) - y_{i+h|i}\}^2.$$
(7.27)

Wariancja błędu predykcji jest minimalna, gdy prognozę z horyzontem h wyznacza się według równania:

$$y_{i+h|i} = G(D)y_i + b_{kl}F(D)(w_{i+h-k}\eta_{i+h-l})$$
(7.28)

i ze względu na brak wzajemnego skorelowania w_i równa jest:

$$E\{(\varepsilon_i^y)^2\} = m_w^{(2)} \left(1 + \sum_{i=1}^{h-1} f_i^2\right).$$
(7.29)

c.b.d.o. •

Uwaga 1:

Dla modeli liniowych współczynnik $b_{kl} = 0$ i i algorytm (7.28) sprowadza się do klasycznego algorytmu predykcji minimalnowariancyjnej,

$$\hat{y}_{i+h|i} = G(D)y_i.$$
(7.30)

Uwaga 2:

Wartość w_{i+h-k} potrzebną w równaniu (7.28) wyznacza się z zależności:

$$w_{i+h-k} = \varepsilon_{i+h-k}^{\eta} = \eta_{i+h-k} - \eta_{i+h-k}.$$

W analogiczny sposób można udowodnić, że dla modelu L - EB, w którym dla residuum przyjęto model $\mathcal{EB}(k, k)$, słuszne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2. Jeśli y_i jest niegaussowskim procesem stochastycznym, który można opisać modelem L - EB:

$$A(D)y_i = z_i, \tag{7.31}$$

gdzie:

-A(D) – wielomian o postaci:

 $A(D) = (1 + a_1D + a_2D^2 + \dots + a_{dA}D^{dA})$

- w_i - niezależny biały szum o wariancji $m_w^{(2)}$,

- z_i - residuum, które można przedstawić jako:

$$z_i = \eta_i - \bar{\eta}$$

- η_i jest przedstawione diagonalnym modelem $\mathcal{EB}(k,k)$:

$$\eta_i = w_i + b_{kk} w_{i-k} \eta_{i-k}, \tag{7.32}$$

o wartości średniej

$$\overline{\eta} = b_{kk} m_w^{(2)},$$

to predyktor o postaci:

$$\hat{y}_{i+h|i} = G(D)y_i + b_{kk}F(D)\varepsilon^{\eta}_{i+h-k}z_i + z_{i+h-k} + \bar{\eta} + b_{kk}F(D)\varepsilon^{\eta}_{i+h-k}\bar{\eta} + F(D)\bar{\eta}$$
(7.33)

dokonuje predykcji $\bar{y}_{i+h|i}$ sygnału y_i z horyzontem $h \leq k$ z błędem:

$$\varepsilon_i^y = F(D)w_i \tag{7.34}$$

o minimalnej wariancji, równej:

 $E\{(\varepsilon_i^y)^2\} = m_w^{(2)} \left(1 + \sum_{i=1}^{h-1} f_i^2\right).$

W równaniach predyktora przyjęto oznaczenia:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon_{i}^{\eta} = \eta_{i} - \eta_{i|i-h}, \\ &-F(D) = (1 + f_{1}D + f_{2}D^{2} + ... + f_{h-1}D^{h-1}), \\ &-G(D) = (1 + g_{1}D + g_{2}D^{2} + ... + g_{dA-1}D^{dA-1}). \\ &\text{Wielomiany } A(D), \ G(D), \ F(D) \ zwiqzane \ sq \ zależnościq: \end{aligned}$$

$$1 = A(D)F(D) + D^{h}G(D).$$
(7.35)

7.2.2. Postępowanie prognostyczne

Postępowanie prognostyczne, prowadzące do uzyskania prognozy $\hat{y}_{i+h|i}$ ciągu y_i , z wykorzystaniem modelu L - EB i jednego z predyktorów zaproponowanych w rozdziale 7.2.1 realizowane jest w następujących krokach:

- Krok 1:

Zbiór danych y_i dla i = 1, 2, ..., N dzielony zostaje na dwa zbiory:

122

- Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych
- uczący, dla $i=1,2,...,N_{ucz},$ na którym dokonywana będzie identyfikacja modelu,
- weryfikujący, dla $i = N_{ucz} + 1, 2, ..., N$, na którym będzie testowana predykcja. Krok 2:

Na zbiorze uczącym zostaje zidentyfikowany liniowy model procesu

$y_i = -a_1 y_{i-1} - a_2 y_{i-2} - \dots - a_{dA} y_{i-dA}.$

Z doświadczenia autorki zdobytego w trakcie licznych badań wynika, że należy identyfikować modele autoregresywne spełniające warunek koincydencji [40], [70].

Definicja 7.1. Liniowy model autoregresywny:

$$y_i = -\sum_{j=1}^{dA} a_j y_{i-j} +$$

ma własność koincydencji, gdy dla każdego j = 1, ..., dA spełniony jest warunek:

$$M_y'^{(2)}(j)a_j \ge 0. (7.36)$$

 w_i

Z przeprowadzonych badań wynika, że modele spełniające warunek koincydencji są nie tylko modelami oszczędnymi (o mniejszej liczbie parametrów niż pełne modele autoregresywne tego samego rzędu), ale charakteryzują się lepszymi własnościami predykcyjnymi niż modele pełnego rzędu.

Krok 3:

Na zbiorze uczącym zostaje wyliczony ciąg residuum $\eta_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (y_i^L - \bar{\eta})$ według równania:

$$y_i = y_i + a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} - \dots + a_{dA} y_{i-dA}$$

Krok 4:

Na zbiorze uczącym zostają wyliczone oceny momentów: $M_{\eta}^{(1)}, M_{\eta}^{(2)}(p), M_{\eta}^{(3)}(p,q),$ $M_{\eta}^{(4)}(0)$ dla p, q = 1, 2, ..., P, gdzie wartość P zależy od charakteru ciągu danych y_i . Zazwyczaj $P \leq 8$.

- Krok 5:

Wykorzystując kryteria podane w rozdziale 5.3, zostaje sprawdzone, czy spełnione są warunki identyfikowalności systemowej dla ciągu residuum η_i . Jeżeli tak, to należy przejść do Kroku 6, jeżeli nie, to należy realizować Krok 11.

7.2. Elementarne modele biliniowe w prognozowaniu i układach regulacji 123

- Krok 6:

Wyznaczona zostaje struktura k, l modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ jako wartości presunięć l_1 i l_2 , dla których trzeci moment, $\hat{M}_{\eta}^{(3)}(l_1, l_2)$ jest wyraźnie różny od zera.

- Krok 7:

Wyznaczone zostają wartości parametów modelu: $\hat{m}_{w}^{(2)}$ i b_{kl} przy wykorzystaniu jednej z metod identyfikacji opisanych w rozdziale 6.

- Krok 8:

Dla określonego horyzontu h predykcji zostają wyznaczone wielomiany F(D) i G(D) na podstawie rozwiązania równania diofantycznego (7.22). Uwzględniając wyniki Kroku 6., należy zaprojektować algorytm predykcji korzystając z wyników twierdzeń 7.1 i 7.2, przy czym:

- jeśli $h \le k < l$, to należy zastosować biliniowy algorytm predykcji 7.19,
- jeśli $h \leq k = l$, to należy zastosować biliniowy algorytm predykcji 7.33.
- Krok 9:

Skonstruowany algorytm predykcji zostaje uruchomiony na zbiorze weryfikującym. Koniec.

- Krok 10:

Jeśli wymagana jest prognoza z horyzontem h > k, to należy przejść do Kroku 11 i próbować wyznaczyć predyktor liniowy, jeśli nie, to należy zakończyć postępowanie.

- Krok 11:

Dla tego ciągu danych nie można znaleźć elementarnego modelu biliniowego $\mathcal{EB}(k,l)$. Należy wyznaczyć wielomiany F(D) i G(D) i zastosować liniowy algorytm predykcji:

$$y_{i+h|i} = G(D)y_i.$$

Uruchomić algorytm na zbiorze weryfikującym. Zweryfikować wyniki. Zakończyć. Wyniki ilustrujące zastosowanie modeli L - EB do prognozowania ciągów czasowych z zastosowaniem podanego wyżej postępowania prognostycznego zawarto w dodatku D. Zamieszczono tam cztery przykłady zastosowania algorytmów predykcji biliniowej, zaprojektowanych z wykorzystaniem wyników twierdzeń 7.1 i 7.2. Trzy przykłady mają charakter symulacyjny. Ich celem jest pokazanie działania predyktora 124

Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych

zbudowanego na podstawie modelu L - EB dla pewnej klasy obiektów nieliniowych o strukturze zarówno zgodnej, jak i odbiegającej od struktury L - EB.

W przykładzie pierwszym prognozowane jest wyjście procesu o strukturze identycznej ze strukturą modelu L - EB:

$A(D)y_i = \eta_i.$

W przykładach drugim i trzecim prognozowaniu podlega wyjście procesu nieliniowego o strukturze odbiegającej od struktury modelu L - EB. Horyzont predykcji hprzyjmowany jest jako $h \le k$. Efekty minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej są porównywane z efektami minimalnowariancyjnej predykcji liniowej i predykcji naiwnej.

Szczegóły badań opisane są w dodatku D. Podsumowując je, można stwierdzić, że w rozpatrywanych przykładach minimalnowariancyjny predyktor biliniowy zbudowany na podstawie modelu L - EB wyznaczał prognozy z błędem o mniejszej wariancji niż pozostałe predyktory.

Czwarty z przykładów zamieszczonych w dodatku D ilustruje zastosowanie zaproponowanego postępowania prognostycznego dla danych rzeczywistych. Wykorzystano w nim benchmark, podany przez Tonga¹ [118], dotyczący prognozowania aktywności cyklu słonecznego. Na podstawie danych z lat 1700–1979 ilustrujących aktywność cyklu słonecznego, Tong zidentyfikował nieliniowy model progowy SETAR, na podstawie którego wyznaczył prognozy na lata 1980–87. W przykładzie czwartym, na podstawie tego samego zbioru danych, zidentyfikowano model liniowo-biliniowy L - EB, który był podstawą do wyznaczenia predyktora, opisanego w rozdziale 7.2.1. Następnie porównano prognozy wyznaczone na lata 1980–2005 na podstawie modelu Tonga i modelu L - EB, obserwując większą dokładność predykcji na podstawie modelu L - EB.

Tong przywiązuje dużą uwagę do odróżnienia predykcji od predykcji rzeczywistej (tzw. *genuine prediction*), dokonywanej w warunkach, gdy wartości przewidywane są rzeczywiście nieznane prognostykowi w momencie sporządzania prognozy. Wszystkie prognozy pokazane w dodatku D są w tym znaczeniu prognozami rzeczywistymi. W przykładzie czwartym, obok ciągu prognoz z horyzontem h = 1 wyznaczanych dla bieżących chwil czasu *i*, wyliczono także prognozy rzeczywiste² w roku 1979 na lata 1980-1984 i w roku 2005 na 2006-2009. Ponieważ dysponujemy obecnie danymi z lat 1980-1984, można było również stwierdzić dla takiej wielokrokowej predykcji lepsze własności prognostyczne modelu L - EB niż wzorcowego nieliniowego modelu SETAR Tonga. Reasumując:

- Model L EB ma lepsze własności predykcyjne niż model SETAR.
- Ponieważ zostały wyprowadzone analityczne zależności łączące momenty procesu i parametry modeli $\mathcal{EB}(k, l)$, identyfikacja modelu L - EB jest znacznie prostsza niż identyfikacja modelu SETAR, która wymaga określenia progów, struktur modeli wewnątrz progów i parametrów modeli.

7.2.3. Modele biliniowe w układach regulacji

Wiedza na temat liniowych układów regulacji jest znacznie bogatsza i lepiej usystematyzowana niż wiedza na temat układów regulacji nieliniowej. W konsekwencji, liczba zastosowań regulacji liniowej jest znacznie większa niż liczba zastosowań regulacji nieliniowej. Mogą jednak zachodzić przypadki, dla których przyjęcie hipotezy liniowości regulowanego procesu sprawia, że uzyskane efekty regulacji dalekie są od przewidywanych i żądanych, a czasem przyjęcie takiej hipotezy jest wręcz błędne. Wybór modelu regulowanego obiektu zależy od tego, czy rozwiązywane jest zadanie stabilizacji czy śledzenia za wartością zadaną, ponieważ:

- W przypadku stabilizacji wyjścia procesu y_i na wartości zadanej y_0 , interesujące sa własności procesu wokół punktu pracy (u_0, y_0) . Jeżeli:
- punkt pracy (u_0, y_0) nie znajduje się w punkcie przegięcia nieliniowej charakterystyki statycznej modelu procesu,

– nie są przewidywane duże odchyłki Δu , Δy sygnałów u_i , y_i od punktu pracy, to można dokonać linearyzacji lokalnej wokół przyjętego punktu pracy (u_0, y_0) i do projektowania regulatora wykorzystać liniowy model obiektu.

Niespełnienie wyżej wymienionych wymagań może objawić się tym, że wszelkie wskaźniki regulacji osiągną wartości gorsze od możliwych do osiągnięcia wartości ekstremalnych.

² We wcześniejszych publikacjach autorki, np.[28], taka predykcja nazywana była predykcją wielokrokową.

- Rozdział 7. Zastosowania elementarnych modeli biliniowych
- W przypadku śledzenia za wartością zadaną, nazywanego:
 - regulacją programową, gdy wartość zadana zmienia się w zawsze znany, z góry ustalony sposób;
- regulacją nadążną, gdy zmiana wartości zadanej ma charakter przypadkowy, założenie liniowości modelu wobec nieliniowości procesu może być błędne zwłaszcza wówczas, gdy nachylenie charakterystyki statycznej procesu zmienia się istotnie wraz ze zmianą punktu pracy. W takim przypadku należy wybrać jedno z alternatywnych rozwiązań:
- Dla różnych punktów pracy wyznaczyć zastępcze modele liniowe i wykorzystać je do projektowania regulatora. Takie postępowanie wskazane jest przy regulacji programowej.
- Zastosowć model nieliniowy dla pełnego zakresu zmian wartości zadanej i wykorzystać taki model do projektowania regulatora i do regulacji. Takie postępowanie wskazane jest przy regulacji nadążnej.

Ponieważ wiele procesów technologicznych można opisać dyskretnym lub ciągłym biliniowym równaniem stanu, Martineau i Burngham [91] zaproponowali modyfikację najczęściej stosowanego algorytmu regulacji PID, uzyskując biliniowy algorytm regulacji PID. Idea przez nich stosowana polega na kompensacji części biliniowej toru sterowania. Kompensator nieliniowości stanowi część biliniowego regulatora PID. Algorytm sterowania nie uwzględnia toru zakłócenia.

Badania prowadzone przez autorkę nad wykorzystaniem modeli biliniowych w regulacji nakierowane były na poszukiwanie algorytmów sterowania uwzględniających nieliniowość zarówno toru sterowania, jak i toru zakłócenia. Wyniki zostały opublikowane w [35], [36], [37], [38], [39], [40]. W niniejszym podrozdziale zostało umieszczone jedynie krótkie podsumowanie opublikowanych wcześniej badań i ich wyników.

- Algorytmy regulacji projektowane były na podstawie stochastycznego modelu obiektu sterowania, składającego się z modelu toru sterowania i modelu toru zakłócenia.
- 2. Tor sterowania opisany był nieliniowym modelem parametrycznym, liniowym względem parametrów.
- 3. Zakłócenia działające na obiekt w różnych jego punktach przedstawione zostały jednym zakłóceniem zbiorczym z_i , sprowadzonym na wyjście obiektu.

- 7.2. Elementarne modele biliniowe w prognozowaniu i układach regulacji 127
- 4. Zakłócenie zbiorcze opisane było stochastycznym modelem ciągu czasowego, stanowiacym model toru zakłócenia.
- 5. Zaproponowany został ogólny, stochastyczny model nieliniowego obiektu sterowania [39] i [40], dla którego szczególnymi przypadkami modelu toru sterowania są modele Volterry, Hammersteina, wielomianowy - nieliniowy po stronie wyjścia y_i , a liniowy po stronie wejścia u_{i-d} , oraz biliniowy model wejściowo-wyjściowy.
- 6. Zbiorcze zakłócenie z_i obserwowane na wyjściu procesu przedstawione zostało elementarnym biliniowym modelem ciągu czasowego $\mathcal{EB}(k, l)$.
- 7. Dla zaproponowanego, ogólnego modelu obiektu sterowania wyprowadzone zostały w [39], [40] algorytmy regulacji minimalnowariancyjnej w wersji prostej, ważonej i uogólnionej, które wyznaczają sterowanie u_i z uwzględnieniem predykcji zakłóceń z_i tak by uzyskać minimalną wariancję błędu regulacji.
- W [39] pokazano, że w wielu przypadkach nieliniowy algorytm regulacji pozwala uzyskać mniejszą wariancję błędu regulacji niż klasyczny regulator minimalnowariancyjny [13].

Podsumowanie i wnioski

- wartości średnie ocen momentów do czwartego włącznie, wyznaczane za pomocą estymatorów momentów, są równe analitycznym wartościom odpowiednich momentów, wyznaczonym na podstawie zależności wyprowadzonych w pracy,
- dla wyższych momentów wariancja estymatora jest większa niż dla momentów niższych,
- wariancja estymatorów rośnie ze wzrostem iloczynu $eta^2 m_e^{(2)},$
- wariancja estymatorów dla procesów pobudzanych białym szumem o rozkładzie normalnym jest większa niż dla pobudzeń o rozkładzie równomiernym.
- 4. W pracy zaproponowano sposób estymacji parametrów modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ zwykłą metodą momentów i uogólnioną metodą momentów, wykorzystując wyprowadzone zależności $M_y^{(r)}(\cdot) = f(\beta_{kl}, m_e^{(2)}).$
- 5. Przeprowadzono badania symulacyjne, w których porównano skuteczność metody momentów, uogólnionej metody momentów i metody RLS w estymacji parametrów modeli $\mathcal{EB}(k, l)$. Stwierdzono, że w zakresie procesów identyfikowalnych, średnie wartości ocen parametrów estymowanych wymienionymi metodami są zbliżone do prawdziwych wartości parametrów. Nieznacznie lepsza od pozostałych jest uogólniona metoda momentów, ze względu na mniejszą wariancję wyznaczanych parametrów.
- 6. W pracy zdefiniowano pojęcie odwracalności i identyfikowalności modeli $\mathcal{EB}(k, l)$. Podano warunki identyfikowalności systemowej procesów EB(k, l) i przedyskutowano warunki identyfikowalności strukturalnej i parametrycznej modeli $\mathcal{EB}(k, l)$. Pokazano, że dla modeli $\mathcal{EB}(k, l)$ warunek identyfikowalności nie jest równoznaczny z warunkiem odwracalności i, w przeciwieństwie do modeli liniowych, nie każdy odwracalny model $\mathcal{EB}(k, l)$ jest identyfikowalny. Uzyskane wyniki zostały zweryfikowane w badaniach symulacyjnych.
- 7. W pracy zaproponowano sposób wykorzystania elementarnych modeli biliniowych w analizie sygnałów. Do modelowania sygnałów pochodzących z procesów nieliniowych zaproponowano model L EB składający się z:
 - części liniowej, utworzonej jako liniowy model autoregresyjny spełniający warunek koincydencji,

 części nieliniowej, będącej elementarnym modelem biliniowym dla residuum.
 Wyjście modelu L – EB jest sumą wyjść modelu liniowego i biliniowego. Zaproponowany sposób postępowania został sprawdzony dla danych wyjściowych z

Rozdział 8

Podsumowanie i wnioski

Celem pracy było określenie własności elementarnych modeli biliniowych, technik ich identyfikacji oraz możliwości i sposobu ich wykorzystania w analizie sygnałów.

- 1. Elementarne modele biliniowe stanowią wąski podzbiór biliniowych modeli ciągów czasowych, ale zasługują na uwagę przede wszystkim dlatego, że ze względu na swoją prostą formę poddają się analizie i umożliwiają formalne określenie ich właściwości statystycznych. Tak jak w dziedzinie modeli liniowych modele ARMA stanowią oszczędną (parsimonious) wersję modeli AR czy MA [51], w dziedzinie modeli nieliniowych elementarne modele biliniowe stanowią oszczędną wersję modeli NAR czy NMA.
- 2. W pracy wyznaczono analityczne zależności łączące momenty zwykłe, centralne i łączne z parametrami elementarnych procesów biliniowych. Wyprowadzone zależności obowiązują dla innowacji będących białym szumem o dowolnym rozkładzie i o skończonych momentach. W głównej części pracy przyjęto założenie, że innowacje są białym szumem o rozkładzie symetrycznym, co pozwoliło na znaczne uproszczenie tych zależności.
- 3. Analityczne wyniki zostały potwierdzone wynikami badań symulacyjnych, w których oceny momentów, wyliczone na podstawie ciągów danych o skończonej długości dla wielu realizacji symulowanego procesu losowego, zostały porównane z momentami wyliczonymi analitycznie dla założonych wartości parametrów tych procesów.

Ponieważ własności statystyczne estymatorów momentów wyższych rzędów dla procesów stochastycznych nie są formalnie określone, badania symulacyjne w połączeniu z wynikami analitycznymi pozwalają stwierdzić, że dla elementarnych procesów biliniowych:

Podsumowanie i wnioski

Podsumowanie i wnioski

procesów chemicznych i biologicznych potwierdzając, że sygnały, które wykazują brak skorelowania, i w dziedzinie modeli liniowych mogą być przedstawione jedynie białym szumem, przy zastosowaniu modeli $\mathcal{EB}(k,l)$ mogą być opisane z większą dokładnością.

8. Dla procesów opisanych modelami L - EB określono algorytm predykcji minimalizującej średniokwadratowy błąd predykcji. Pokazano, że także dla procesów o strukturze różnej od struktury modelu L - EB, algorytm pozwala uzyskać większą dokładność predykcji, w porównaniu z dokładnością liniowej predykcji minimalnowariancyjnej.

Zaproponowane algorytmy sprawdzono wykorzystując jeden z najczęściej stosowanych w analizie ciągów czasowych benchmarków. Prognozy wyliczone zaproponowanym w pracy algorytmem predykcji, na podstawie danych ilustrujących cykl aktywności słonecznej, porównano z prognozami wyliczonymi na podstawie modelu *SETAR* wyznaczonym przez Tonga dla tego samego zbioru danych (podanym w [118] jako kolejny benchmark), uzyskując w tych samych warunkach dokładniejsze wyniki predykcji.

9. Wykorzystując wcześniej opublikowane wyniki badań [39] i [40] stwierdzono, że stosowanie modeli biliniowych do modelowania zakłóceń i uwzględnienie uzyskanego modelu w projektowanym algorytmie regulacji minimalnowariancyjnej pozwala zwiększyć dokładność regulacji w stosunku uzyskanej na podstawie modeli liniowych.

Reasumując:

Elementarne modele biliniowe mogą być stosowane w analizie sygnałów i w wielu przypadkach pozwalają zwiększyć dokładność modelowania, prognozowania czy regulacji. Należy jednak pamiętać, że rodzajów nieliniowości, które mogą wystąpić w rzeczywistych procesach jest tak dużo, że w wielu przypadkach modele biliniowe zastosowane do analizy takich procesów mogą się okazać niewystarczające.

Załączone wyniki badań wskazują, że elementarne modele biliniowe nadają się do modelowania sygnałów pochodzących z procesów o naturze biliniowej, a tego typu procesów w naszym otoczeniu jest dosyć dużo. Ze względu na ograniczenia wynikające z identyfikowalności modelu, możliwe zwiększenie dokładności modelowania, predykcji czy regulacji jest mniejsze, niż wynikałoby z analizy ogólnej postaci modeli $\mathcal{EB}(k, l)$, ale znając warunek identyfikowalności można świadomie zdecydować, czy warto podejmować trud związany z zastosowaniem modelu L - EB, czy poprzestać na zastosowaniu modelu liniowego.

Liffing work

apaz animital according to a second manager and

And the second second

And the second s

and a subject of the second state of the

the second second

and the design of the local data and the second data and the secon

- There a

A Real Property lies

A.1. Subdiagonalny elementarny proces biliniowy EB(k,l)

Ze względu na zerową wartość oczekiwaną procesu EB(k, l), jego wszystkie momenty zwykłe są jednocześnie momentami centralnymi.

133

A.1.2. Obliczenia pomocnicze

Poniżej zamieszczono pomocnicze obliczenia, potrzebne do określenia wartości wyższych momentów procesu EB(k, l).

$$y_{i} = e_{i} + \beta_{kl}e_{i-k}y_{i-l}$$

$$y_{i}^{2} = e_{i}^{2} + 2\beta_{kl}e_{i}e_{i-k}y_{i-l} + \beta_{kl}^{2}e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2}$$

$$(A.6)$$

$$y_{i}^{3} = e_{i}^{3} + 3\beta_{kl}e_{i}^{2}e_{i-k}y_{i-l} + 3\beta_{kl}^{2}e_{i}e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2} + \beta_{kl}^{3}e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3}$$

$$y_{i}^{4} = e_{i}^{4} + 4\beta_{kl}e_{i}^{3}e_{i-k}y_{i-l} + 6\beta_{kl}^{2}e_{i}^{2}e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2} + 4\beta_{kl}^{3}e_{i}e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3} + \beta_{kl}^{4}e_{i-k}^{4}y_{i-l}^{4}$$

$$E \{e_{i}y_{i}\} = E \{e_{i}^{2} + \beta_{kl}e_{i}e(i-k)y(i-l)\} = m_{e}^{(2)}$$

$$E \{e_{i}, y_{i-l}\} = 0$$

$$E\left\{e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2}\right\} = m_{e}^{(2)}M_{y}^{(2)}$$
(A.7)

$$E\left\{e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3}\right\} = m_{e}^{(3)}M_{y}^{(3)}$$

 $E\left\{e_{i-k}^{4}y_{i-l}^{4}\right\} = m_{*}^{(4)}M_{*}^{(4)}$

Powyższe zależności wynikają z braku korelacji między e_{i-k} i $y_{i-l}.$

Zakładając, że c. ma rozkład symetryczny i zerową wartość oczekiwaną, otrzymujemy:

$$E \{e_{i}y_{i}\} = m_{e}^{(2)},$$

$$E \{e_{i-k}y_{i-l}\} = 0,$$

$$E \{e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2}\} = m_{e}^{(2)}M_{y}^{(2)},$$

$$E \{e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3}\} = 0,$$

$$E \{e_{i-k}^{4}y_{i-l}^{4}\} = m_{e}^{(4)}M_{y}^{(4)}.$$
(A.8)

Dodatek A

Momenty elementarnych procesów biliniowych

W niniejszym rozdziale zamieszczono wyprowadzenia zależności wiążących momenty $M_y^{(r)}(\cdot)$ elementarnych procesów biliniowych EB(k, l) z ich parametrami β_{kl} , $m_e^{(r)}$. Ponieważ elementarne procesy biliniowe subdiagonalne i diagonalne różnią się od siebie istotnie, wyprowadzenia przedstawiono oddzielnie dla procesów subdiagonalnych i diagonalnych.

A.1. Subdiagonalny elementarny proces biliniowy EB(k,l)

Przypomnijmy równanie definiujące subdiagonalny elementarny proces biliniowy:

$$y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l}, \tag{A.1}$$

w którym k < l,a e_i jest dyskretnym białym szumem scharakteryzowanym momentami $m_e^{(r)},$ dlar=1,2,...,R.

A.1.1. Pierwszy moment

Zgodnie z definicją 2.4 pierwszy moment zwykły procesu EB(k, l) określony jest jako:

$$M_{y}^{(1)} = E\{y_i\},\tag{A.2}$$

$$E\{y_i\} = E\{e_i\} + \beta_{kl} E\{e_{i-k}y_{i-l}\}.$$
(A.3)

Ponieważ z założenia k < l, to e_{i-k} wyprzedza y_{i-l} , więc:

$$E\{e_{i-k}y_{i-l}\} = 0, (A.4)$$

co daje:

$$M_y^{(1)} = E\{y_i\} = 0. \tag{A.5}$$

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych

Zakładając, że e_i ma rozkład gaussowski i zerową wartość oczekiwaną, otrzymujemy:

$$E \{e_{i}y_{i}\} = \lambda_{e}^{2},$$

$$E \{e_{i-k}y_{i-l}\} = 0,$$

$$E \{e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2}\} = \lambda_{e}^{2}M_{y}^{(2)},$$

$$E \{e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3}\} = 0,$$

$$E \{e_{i-k}^{4}y_{i-l}^{4}\} = 3\lambda_{e}^{4}M_{y}^{(4)}.$$
(A.9)

A.1.3. Momenty zwykłe

Momenty zwykłe obliczamy zgodnie z definicją 2.4 jako wartości oczekiwane dla A.6:

$$E\left\{ y_{i}
ight\} =0,$$

$$E\{y_i^2\} = E\{e_i^2\} + 2\beta_{kl}E\{e_ie_{i-k}y_{i-l}\} + \beta_{kl}^2E\{e_{i-k}^2y_{i-l}^2\},\$$

$$E\left\{y_{i}^{3}\right\} = E\left\{e_{i}^{3}\right\} + 3\beta_{kl}E\left\{e_{i-k}^{2}y_{i-l}\right\} + 3\beta_{kl}^{2}E\left\{e_{i}e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2}\right\} + \beta_{kl}^{3}E\left\{e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3}\right\},$$

$$\begin{split} E\left\{y_{i}^{4}\right\} = & E\left\{e_{i}^{4}\right\} + 4\beta_{kl}E\left\{e_{i}^{3}e_{i-k}y_{i-l}\right\} + 6\beta_{kl}^{2}E\left\{e_{i}^{2}e_{i-k}^{2}y_{i-l}^{2}\right\} + \\ & + 4\beta_{kl}^{3}E\left\{e_{i}e_{i-k}^{3}y_{i-l}^{3}\right\} + \beta_{kl}^{4}E\left\{e_{i-k}^{4}y_{i-l}^{4}\right\}. \end{split}$$

Uwzględniając w (A.11) zależności (A.7), uzyskamy:

$$\begin{split} M_{y}^{(1)} &= 0, \\ M_{y}^{(2)}(0) &= \frac{m_{e}^{(2)}}{1 - \beta_{kl}^{2} m_{e}^{(2)}}, \\ M_{y}^{(3)}(0,0) &= \frac{m_{e}^{(3)}}{1 - \beta_{kl}^{3} m_{e}^{(3)}}, \\ M_{y}^{(4)}(0,0,0) &= \frac{m_{e}^{(4)} + 6\beta_{kl}^{2} (m_{e}^{(2)})^{2} M_{y}^{(2)}(0)}{1 - \beta_{kl}^{4} m_{e}^{(4)}} \end{split}$$
(A.11)

(A.10)

Zakładając, że e_i ma rozkład symetryczny i zerową wartość oczekiwaną, otrzymujemy:

$$\begin{split} M_{y}^{(1)} &= 0\\ M_{y}^{(2)}(0) &= \frac{m_{e}^{(2)}}{1 - \beta_{kl}^{2} m_{e}^{(2)}}\\ M_{y}^{(3)}(0,0) &= 0\\ M_{y}^{(4)}(0,0,0) &= \frac{m_{e}^{(4)} + 6\beta_{kl}^{2} (m_{e}^{(2)})^{2} M_{y}^{(2)}(0)}{1 - \beta_{kl}^{4} m_{e}^{(4)}}. \end{split}$$
(A.12)

A.1. Subdiagonalny elementarny proces biliniowy EB(k,l)

Zakładając, że e, ma rozkład gaussowski i zerową wartość oczekiwaną, mamy:

$$M_{y}^{(1)} = 0,$$

$$M_{y}^{(2)}(0) = \frac{\lambda_{e}^{2}}{1 - \beta_{kl}^{2} m_{e}^{(2)}},$$

$$M_{y}^{(3)}(0,0) = 0,$$

$$M_{y}^{(4)}(0,0,0) = \frac{3\lambda_{e}^{4} + 6\beta_{kl}^{2}\lambda_{e}^{4}M_{y}^{(2)}(0)}{1 - 3\beta_{kl}^{4}\lambda_{e}^{4}}.$$
(A.13)

A.1.4. Drugi moment łączny

Drugi moment łączny proces
uEB(k,l)jest jego funkcją autokowariancji. Wariancja proces
uEB(k,l)wynosi:

$$M_y^{(2)}(0) = \frac{m_e}{1 - \beta_{kl}^2 m_e^{(2)}}.$$
(A.14)

Pozostałe wartości $M_y^{(2)}(m)$ są równe zeru, gdyż:

$$M_{y}^{(2)}(m) = E\{y_{i}y_{i-m}\} = E\{e_{i}y_{i-m} + \beta_{kl}e_{i-k}y_{i-l}y_{i-m}\}$$
(A.15)

Dla
$$m > 0$$
: $E\{e_i y_{i-m}\} = 0$, więc:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kl} E\{e_{i-k} y_{i-l} y_{i-m}\} = \beta_{kl} E\{e_{i} y_{i+k-l} y_{i+k-m}\}$$
(A.16)

Jeżeli m > k, to (A.16) jest równe zero.

Jeżeli m = k, to:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kl} E\{e_{i} y_{i-(l-k)} y_{i}\}$$
(A.17)

Uwzględniając równanie definicyjne procesu EB(k, l), mamy dalej:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kl} m_{e}^{(2)} E\{y_{i-l+k}\} + \beta_{kl}^{2} E\{e_{i}e_{i-k}y_{i-l}y_{i-(l-k)}\} = 0.$$
(A.18)

Jeżeli m < k, to:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kl} E\{e_{i-(k-m)}y_{i-(l-m)}y_{i}\}$$
(A.19)

Uwzględniając równanie definicyjne procesu EB(k, l), otrzymamy:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kl}^{2} E\{e_{i-k}y_{i-l}e_{i-(k-m)}y_{i-(l-m)}\} = \beta_{kl}^{2} E\{e_{i+m}e_{i}y_{i-(l-k)}y_{i+(m+k-l)}\}$$
(A.20)

Ponieważ m > m + k - l, więc

$$M_y^{(2)}(m) = 0.$$

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych

A.1.5. Trzeci moment łączny

Trzeci moment $M_y^{(3)}(p,q)$ wyznaczamy, korzystając z definicji 2.9. Dla $p=0,\,q=0$ otrzymamy:

$$M_y^{(3)}(0,0) = \frac{m_e^{(3)}}{1 - \beta_{kl}^3 m_e^{(3)}}.$$
 (A.21)

Jeśli rozkład pobudzenia e_i jest symetryczny, to $m_e^{(3)}=0$, więc:

$$M_y^{(3)}(0,0) = 0.$$
 (A.22)

Dla p = k, q = l na podstawie definicji 2.9, trzeci moment jest równy:

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = E\{y_{i}y_{i-k}y_{i-l}\} = \beta_{kl}m_{e}^{(2)}M_{y}^{(2)}(0) = \frac{\beta_{kl}(m_{e}^{(2)})^{2}}{1 - \beta_{e}^{2}m_{e}^{(2)}}.$$
 (A.23)

Ze względu na to, że:

 $E\{y_{i}y_{i-p}y_{i-q}\} = E\{y_{i}y_{i-q}y_{i-p}\},$ (A.24)

trzeci moment jest symetryczny, tzn.

$$M_y^{(3)}(p,q) = M_v^{(3)}(q,p)$$

Dla $p \neq k$ i $q \neq l$:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = E\{y_{i}y_{i-p}y_{i-q}\} = E\{e_{i}y_{i-p}y_{i-q}\} + \beta_{kl}E\{e_{i-k}y_{i-l}y_{i-n}y_{i-q}\},$$
(A.25)

Ze względu na zerowanie się pierwszego składnika sumy (A.25) trzeci moment $M_{\psi}^{(3)}(p,q)$ opisany jest zależnością:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl} E\{e_{i} y_{i-(l-k)} y_{i-(p-k)} y_{i-(q-k)}\}$$
(A.26)

Analiza równania (A.26) pozwala stwierdzić, że wartości $M_y^{(3)}(p,q)$ zerują się dla $p \neq k$ i $q \neq l$, ponieważ:

Dla k = min(k, l, p, q):

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = 0. (A.27)$$

Dla p < k i q > k:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}y_{i+(k-p)}y_{i-(q-k)}\} =$$

$$= \beta_{kl} E\{e_{i+(k-p)}e_{i}y_{i-(l-k)}y_{i-(q-k)}\} +$$

$$+ \beta_{kl}^{2} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}y_{i-(q-k)}e_{i-p}y_{i-(p+l-k)}\} = 0.$$
(A.28)

A.2. Elementary diagonalny proces biliniowy EB(k, k)

Dla p < k i q < k:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl} E\{e_{i} y_{i-(l-k)} y_{i+(k-p)} y_{i+(k-q)}\}.$$
(A.29)

Dla p < q:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl} E\{e_{i}e_{i+(k-p)}y_{i-(l-k)}y_{i+(k-q)}\} + \beta_{i}^{2} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}y_{i+(k-q)}e_{i-q}y_{i-(l-k)}y_{i+(k-q)}\},$$
(A.30)

Pierwszy element (A.30) się zeruje, więc:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl}^{2} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}y_{i+(k-q)}e_{i-p}y_{i-(l+p-k)}\}.$$
(A.31)

Rozwijając dalej (A.31), otrzymamy:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl}^{3} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}e_{i+(k-q)}e_{i-p}y_{i-(l+p-k)}\} + \beta_{kl}^{4} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}e_{i-q}y_{i+k-q-l}e_{i-p}y_{i-(l+p-k)}\}.$$
(A.32)

Pierwszy element sumy (A.32) się zeruje, więc dalej:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = \beta_{kl}^{*} E\{e_{i}e_{i-p}e_{i-q}y_{i-(l-k)}y_{i-(l+q-k)}y_{i-(l+p-k)}\} = 0.$$
(A.33)

A.2. Elementary diagonalny proces biliniowy EB(k,k)

Przypomnijmy równanie definiujące diagonalny elementarny proces biliniowy:

$$y_i = e_i + \beta_{kk} e_{i-k} y_{i-k}, \tag{A.34}$$

gdzie e_i jest dyskretnym białym szumem, scharakteryzowanym momentami $m_e^{(r)}$, dla r = 1, 2, ..., R.

A.2.1. Pierwszy moment

Zgodnie z definicją 2.4 pierwszy moment wyliczymy jako:

$$M_{y}^{(1)} = E\{y_{i}\} = E\{e_{i}\} + \beta_{kk}E\{e_{i-k}y_{i-k}\} = \beta_{kk}m_{e}^{(2)}.$$
(A.35)

Pierwszy moment, czyli wartość oczekiwana procesu EB(k, k), jest różny od zera, co oznacza, że wszystkie wyższe momenty różnią się od momentów centralnych.

¹³⁶

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych

A.2.2. Obliczenia pomocnicze

Poniżej zamieszczono obliczenia pomocnicze potrzebne do wyznaczenia momentów procesu EB(k,k).

$$y(i) = e(i) + \beta_{kk}e(i-k)y(i-k)$$

$$y_i^2 = e_i^2 + 2\beta_{kk}e_ie_{i-k}y_{i-k} + \beta_{kk}^2e_{i-k}^2y_{i-k}^2$$

$$y_i^3 = e_i^3 + 3\beta_{kk}e_i^2e_{i-k}y_{i-k} + 3\beta_{kk}e_ie_{i-k}^2y_{i-k}^2 + \beta_{kk}^3e_{i-k}^3y_{i-k}^3$$

$$y_i^4 = e_i^4 + 4\beta_{kk}e_i^3e_{i-k}y_{i-k} + 6\beta_{kk}^2e_i^2e_{i-k}^2y_{i-k}^2 + 4\beta_{kk}^3e_ie_{i-k}^3y_{i-k}^3 + \beta_{kk}^4e_{i-k}^4y_{i-k}^4$$
(A.36)

Wartości oczekiwane iloczynów zmiennych losowych:

$$E\{e_i y_i\} = m_e^{(2)},$$

$$E\{e_i y_i^2\} = 2\beta_{kk} (m_e^{(2)})^2.$$

$$E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\} = \frac{m_{e}^{(4)} + 2\beta_{kk}m_{e}^{(3)}m_{e}^{(2)}}{1 - \beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)}},$$
(A.37)

$$E\left\{e_{i}^{3}y_{i}^{3}\right\} = \frac{m_{e}^{(0)} + 3\beta_{kk}m_{e}^{(5)}m_{e}^{(2)} + 3\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(4)}E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\}}{1 - \beta_{kk}^{3}m_{e}^{(3)}},$$

$$E\left\{e_{i}^{4}y_{i}^{4}\right\} = \frac{m_{e}^{(8)} + 4\beta_{kk}m_{e}^{(7)}m_{e}^{(2)} + 6\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(6)}E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\} + 4\beta_{kk}^{3}m_{e}^{(5)}E\left\{e_{i}^{3}y_{i}^{3}\right\}}{1 - \beta_{kk}^{4}m_{e}^{(4)}}.$$

Zakładając, ż
e e_i ma rozkład symetryczny i zerową wartość oczekiwaną, otrzymamy:

 $E\left\{e_i y_i\right\} = m_e^{(2)},$

$$E\{e_i y_i^2\} = 2\beta_{kk} (m_e^{(2)})^2$$

$$E\left\{e_i^2 y_i^2\right\} = \frac{m_e^{(4)}}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}},\tag{A.38}$$

$$E\left\{e_{i}^{3}y_{i}^{3}\right\} = m^{(6)} + 3\beta_{kk}^{2}m^{(4)}E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\},\$$

$$E\left\{e_{i}^{4}y_{i}^{4}\right\} = \frac{m_{e}^{(8)} + 6\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(6)}E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\}}{1 - \beta_{kk}^{4}m_{e}^{(4)}}$$

A.2. Elementary diagonalny proces biliniowy EB(k, k)

Zakładając, że e_i ma rozkład gaussowski i zerową wartość oczekiwaną, otrzymamy:

$$E \{e_{i}y_{i}\} = \lambda_{e}^{2},$$

$$E \{e_{i}y_{i}^{2}\} = 2\beta_{kk}\lambda^{4},$$

$$E \{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\} = \frac{3\lambda^{4}}{1 - \beta_{kk}^{2}\lambda^{2}},$$

$$E \{e_{i}^{3}y_{i}^{2}\} = 5\lambda^{6} + 9\beta^{2} - \lambda^{4}E \{e^{2}y_{i}^{2}\}$$
(A.39)

$$E\{e_ig_i\} = 5 \wedge + 5p_{kk} \wedge E\{e_ig_i\},$$

$$E\left\{e_{i}^{4}y_{i}^{4}\right\} = \frac{7\lambda^{8} + 30\beta_{kk}^{2}\lambda^{6}E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\}}{1 - 3\beta_{kk}\lambda^{4}}$$

A.2.3. Momenty zwykłe

Momenty zwykłe obliczamy zgodnie z definicją 2.4 jako wartości oczekiwane dla (A.36). Uwzględniając (A.37), (A.38), otrzymamy:

$$\begin{split} M_{y}^{(1)} &= \beta_{kk} m_{e}^{(2)}, \\ M_{y}^{(2)}(0) &= m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{2} E\left\{e_{i}^{2} y_{i}^{2}\right\}, \\ M_{y}^{(3)}(0,0) &= m_{e}^{(3)} + 3\beta_{kk} (m_{e}^{(2)})^{2} + \beta_{kk}^{3} E\left\{e_{i}^{3} y_{i}^{3}\right\}, \\ M_{y}^{(4)}(0,0,0) &= m_{e}^{(4)} + 4\beta_{kk} m_{e}^{(3)} m_{e}^{(2)} + 6\beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)} E\left\{e_{i}^{2} y_{i}^{2}\right\} + \beta_{kk}^{4} E\left\{e_{i}^{4} y_{i}^{4}\right\}. \end{split}$$
(A 40)

Zakładając, że e_i ma rozkład symetryczny i zerową wartość oczekiwaną, otrzymamy:

$$M_{y}^{(1)} = \beta_{kk} m_{e}^{(2)},$$

$$M_{y}^{(2)}(0) = m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{2} E \{e_{i}^{2} y_{i}^{2}\},$$

$$M_{y}^{(3)}(0,0) = 3\beta_{kk} (m_{e}^{(2)})^{2} + \beta_{kk}^{3} E \{e_{i}^{3} y_{i}^{3}\},$$

$$M_{y}^{(4)}(0,0,0) = m_{e}^{(4)} + 6\beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)} E \{e_{i}^{2} y_{i}^{2}\} + \beta_{kk}^{4} E \{e_{i}^{4} y_{i}^{4}\}.$$
(A.41)

Zakładając, że e, ma rozkład gaussowski i zerową wartość oczekiwaną, otrzymamy:

$$\begin{split} M_{y}^{(1)} &= \beta_{kk}\lambda^{2}, \\ M_{y}^{(2)}(0) &= \lambda^{2} + \beta_{kk}^{2}E\left\{e_{i}^{2}y_{i}^{2}\right\}, \\ M_{y}^{(3)}(0,0) &= 3\beta_{kk}\lambda^{4} + \beta_{kk}^{3}E\left\{e_{i}^{3}y_{i}^{3}\right\}, \\ M_{y}^{(4)}(0,0,0) &= 3\lambda^{4} + 6\beta_{kk}^{2}\lambda^{2}Ee_{i}^{2}y_{i}^{2} + \beta_{kk}^{4}E\left\{e_{i}^{4}y_{i}^{4}\right\}. \end{split}$$
(A.42)

A.2.4. Drugi moment łączny

Drugi moment łączny wyrażony jest zależnością:

$$M_{n}^{(2)}(m) = E\{y_{i}y_{i-m}\}$$

(A.43)

140

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych

Dla m = 0 drugi moment $M_y^{(2)}(0)$, na podstawie (A.36) i (A.40), jest równy:

$$\mathcal{M}_{y}^{(2)}(0) = E\{y_{i}^{2}\} = m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{2} \frac{m_{e}^{(4)} + 2\beta_{kk}m_{e}^{(3)}m_{e}^{(2)}}{1 - \beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)}}.$$
 (A.44)

Zakładając, że e_i ma rozkład symetryczny, mamy:

$$M_{y}^{(2)}(0) = m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{z} \frac{m_{e}^{(4)}}{1 - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)}} = \frac{m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{2} (m_{e}^{(4)} - (m_{e}^{(2)})^{2})}{1 - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)}}.$$
 (A.45)

Dla pobudzeń, dla których zachodzi związek:

$$n_e^{(2r)} = k_r (m_e^{(2)})^r, \tag{A.46}$$

gdzie k_r jest dodatnią liczbą rzeczywistą, a r = 1, 2, ...R, zależność (A.45) ma postać:

$$M_y^{(2)}(0) = \frac{m_e^{(2)}(1 + \beta_{kk}^2 m_e^{(2)} (k_4 - 1))}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}}.$$
 (A.47)

Dla e, o rozkładzie normalnym:

$$M_{y}^{(2)}(0) = \frac{\lambda^{2}(1+2\beta_{kk}^{2}\lambda^{2})}{1-\beta_{kk}^{2}\lambda^{2}}.$$
 (A.48)

Dla przesunięcia $m \neq 0$:

$$M_{y}^{(2)}(m) = E\{y_{i}y_{i-m}\} = \beta_{kk}E\{e_{i}y_{i}y_{i-(m-k)}\}.$$
(A.49)

Wartość drugiego momentu $M_y^{(2)}(m)$ zależy od wartości przesunięcia w następujący sposób:

- Dla przesunięcia m = k:

$$M_y^{(2)}(k) = \beta_{kk} E\{e_i y_i^2\} = \beta_{kk} m_e^{(3)} + 2\beta_{kk}^2 (m_e^{(2)})^2,$$
(A.50)

przy czym dla e_i o rozkładzie normalnym:

$$M_y^{(2)}(k) = 2\beta_{kk}^2 \lambda^4.$$
 (A.51)

– Dla przesunięć m > k:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kk} E\{e_{i}(e_{i} + \beta_{kk}e_{i-k}y_{i-k})y_{i-(m-k)}\} = \beta_{kk}^{2}(m_{e}^{(2)})^{2},$$
(A.52)

przy czym dla e_i o rozkładzie normalnym:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kk}^2 \lambda^4.$$
 (A.53)

A.2. Elementarny diagonalny proces biliniowy EB(k,k)

– Dla przesunięć m < k:

$$M_{y}^{(2)}(m) = \beta_{kk} E\{e_{i}(e_{i+k-m} + \beta_{kk}e_{i-m}y_{i-m})y_{i}\} = \beta_{kk}^{2}(m_{e}^{(2)})^{2}, \qquad (A.54)$$

przy czym dla e_i o rozkładzie normalnym:

$$M_{\nu}^{(2)}(m) = \beta_{kk}^2 \lambda^4.$$
 (A.55)

Drugi moment centralny jest funkcją autokowariancji procesu. Odejmując od wszystkich wartości ciągu y_i wartość oczekiwaną, uzyskamy ciąg z_i o zerowej wartości oczekiwanej:

$$z_i = y_i - E\{y_i\} = y_i - \beta_{kk} m_*^{(2)}.$$
(A.56)

Momenty procesu (A.56) są jednocześnie momentami centralnymi procesu (A.34). Wariancja procesu z_i jest równa:

$$M_{z}^{(2)}(0) = M_{y}^{(2)}(0) - (M_{y}^{(1)})^{2}.$$
(A.57)

Dla pobudzeń, dla których zachodzi (A.71), zależność (A.57) ma postać:

$$\mathcal{M}_{z}^{(2)}(0) = \frac{m_{e}^{(2)} \left(1 + (k_{4} - 2)\beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{4} (m_{e}^{(2)})^{2}\right)}{1 - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)}}.$$
 (A.58)

Dla e_i o rozkładzie normalnym:

$$M_z^{(2)}(0) = \frac{\lambda^2 (1 + \beta_{kk}^2 \lambda^2 + \beta_{kk}^4 \lambda^4)}{1 - \beta_{kk}^2 \lambda^2}$$
(A.59)

i jednocześnie jest drugim momentem centralnym, czyli wariancją procesu EB(k,k):

$$M_z^{(2)}(0) = M_y^{\prime(2)}(0) = \sigma_y^2.$$
(A.60)

Z zależności (A.59) wynika, że proces EB(k, k) ma określoną wariancję, o ile spełniony jest warunek (taki sam jak dla ciągu subdiagonalnego):

$$\beta_{kk}^2 m^{(2)} < 1. \tag{A.61}$$

Dla przesunięcia m, funkcja autokowariancji procesu EB(k, k), (czyli jego drugi moment centralny):

$$M_{y}^{\prime(2)}(m) = M_{z}^{(2)}(m) = E\{(y_{i} - E\{y_{i}\})(y_{i-m} - E\{y_{i}\})\},$$
(A.62)

związany jest z momentem $M_y^{(2)}(m)$ zależnością:

$$M_{z}^{(2)}(m) = M_{y}^{(2)}(m) = M_{y}^{(2)}(m) - (M_{y}^{(1)})^{2}.$$
 (A.63)

W zależności od przesunięci
a \boldsymbol{m} wartości funkcji autokowariancji są równe:
A.2. Elementarny diagonalny proces biliniowy EB(k,k)

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych

– Dla przesunięć m = k:

 $M_z^{(2)}(k) = M_y^{('2)}(k) = \beta_{kk}^2 (m_e^{(2)})^2.$ (A.64)

- Dla przesunięć m > k:

 $M_z^{(2)}(m) = M_y^{\prime(2)}(m) = 0.$ (A.65)

– Dla przesunięć m < k:

$$M_s^{(2)}(m) = M_v^{\prime(2)}(m) = 0.$$
 (A.66)

Autokowariancja procesu EB(k, k) przyjmuje wartości zerowe, z wyjątkiem wartości dla przesunięcia zero i przesunięcia k. Wykazuje tym samym podobieństwo do kowariancji procesu MA(k) o współczynnikach zerowych, z wyjątkiem k- tego współczynnika.

Proces EB(k,k) jest więc procesem o niezerowej wartości oczekiwanej i, przy spełnieniu warunku (A.61), procesem o skończonej wariancji.

A.2.5. Trzeci moment łączny

Trzeci moment łączny $M_y^{(3)}(l_1, l_2)$ wyznacza się na podstawie równania definicyjnego:

$$M_{y}^{(3)}(p,q) = E\{y_{i}y_{i-p}y_{i-q}\}.$$
(A.67)

Wartość trzeciego momentu zależy od wartości przesunięć p i q w następujący sposób:

– Dla p = q = 0 wartość $M_y^{(3)}(0,0)$ można, na podstawie zależności (A.36), (A.37) i (A.42) wyrazić następująco:

$$M_{y}^{(3)}(0,0) = 3\beta_{kk}(m_{e}^{(2)})^{2} + \beta_{kk}^{3} \frac{m_{e}^{(6)} - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)} m_{e}^{(6)} + 3\beta_{kk}^{2} (m_{e}^{(4)})^{2}}{1 - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)}}.$$
 (A.68)

Wartości momentów $m_e^{(2r)}$ dla e_i o rozkładzie normalnym, i r = 1, 2, 3 są równe:

$$m_e^{(2)} = \lambda^2,$$

 $m_e^{(4)} = 3\lambda^4,$ (A.69)
 $m_e^{(6)} = 5\lambda^6.$

Dla e_i o rozkładzie równomiernym w przedziale [-a, a] wartości momentów $m_e^{(2r)}$ dla r = 1, 2, 3 wynoszą odpowiednio:

$$m_e^{(2)} = \frac{a^2}{3},$$

$$m_e^{(4)} = \frac{a^4}{5},$$

$$m_e^{(6)} = \frac{a^6}{7}.$$
(A.70)

Dla pobudzeń o symetrycznych rozkładach prawdopodobieństwa, których momenty spełniają zależność:

$$m_e^{(2r)} = k_{2r} (m_e^{(2)})^{(r)}, \tag{A.71}$$

równanie (A.68) sprowadza się do postaci:

$$M_{y}^{(3)}(0,0) = \beta_{kk} (m_{e}^{(2)})^{2} \frac{3 + (k_{6} - 3)\beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)} + \beta_{kk}^{4} (m_{e}^{(2)})^{2} (3k_{4}^{2} - k_{6})}{1 - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)}}.$$
 (A.72)

Dla pobudzenia gaussowskiego, po uwzględnieniu zależności (A.69) trzeci moment $M_y^{(3)}(0,0)$ można wyrazić w funkcji parametrów modelu EB(k,k) jako:

$$M_{y}^{(3)}(0,0) = \beta_{kk}\lambda^{4} \frac{3 + 2\beta_{kk}^{2}\lambda^{2} + 22\beta_{kk}^{4}\lambda^{4}}{1 - \beta_{kk}^{2}\lambda^{2}}.$$
 (A.73)

– Dla przesunięć
$$p = q = k$$
 trzeci moment $M_y^{(3)}(k,k)$ jest równy

$$M_{y}^{(3)}(k,k) = E\{y_{i}y_{-k}^{2}\} = E\{e_{i}y_{i}^{3}\}.$$
(A.74)

Na podstawie (A.36) mamy dalej:

$$M_{y}^{(3)}(k,k) = \beta_{kk}m_{e}^{(4)} + 3\beta_{kk}m_{e}^{(3)}m_{e}^{(2)} + 3\beta_{kk}^{3}m_{e}^{(2)}\frac{m_{e}^{(4)} + 2\beta_{kk}m_{e}^{(2)}m_{e}^{(3)}}{1 - \beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)}} +$$
(A.75)

$$+\beta_{kk}^{3}m_{e}^{(1)}\frac{(m_{e}^{(6)}+3\beta_{kk}m_{e}^{(2)}m_{e}^{(5)})(1-\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)})+3\beta_{kk}^{4}m_{e}^{(4)}}{(1-\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)})(1-\beta_{kk}^{3}m_{e}^{(3)})}$$

Dla $e_{\rm i}$ o rozkładzie symetrycznym i zerowej wartości oczekiwanej zależność (A.75)

-2 (2) (4)

sprowadza się do:

$$M_{y}^{(3)}(k,k) = \beta_{kk} m_{e}^{(4)} + \frac{3\beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2')} m_{e}^{(3')}}{1 - \beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)}}$$
(A.76)

Jeśli jest spełniony warunek (A.71), to

$$M_{*}^{(3)}(k,k) = \frac{k_4 \beta_{kk} (m_e^{(2)})^2 (1 + 2\beta_{kk}^2 m_e^{(2)})}{1 - \beta_{kk}^2 m_e^{(2)}}.$$
 (A.77)

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych

Dla pobudzenia gaussowskiego, uwzględniając (A.69), otrzymamy:

$$M_y^{(3)}(k,k) = 3\beta_{kk}\lambda^4 M_y^{(2)}(0).$$
(A.78)

– Dla przesunięć $k, l \neq k$ trzeci moment wyrażony jako:

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = E\{y_{i}y_{i-k}y_{i-l}\} = \beta_{kk}E\{e_{i}y_{i}^{2}y_{i-l+k},\}$$
(A.79)

zależy od relacji między przesunięciami k i l.

– Jeśli
$$k < l$$
, to:

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = \beta_{kk} E\{e_{i}y_{i-(l-k)}(e_{i}^{2} + 2\beta_{kk}e_{i}e_{i-k}y_{i-k} + \beta_{kk}^{2}e_{i-k}^{2}y_{i-k}^{2})\} =$$

(A.80)

$$= 2\beta_{kk}^2 E\{e_i^2 y_{i-k} e_{i-k} y_{i-(l-k)}\} = 2\beta_{kk}^2 m_e^{(2)} E\{e_i y_i y_{i-(l-2k)}\}.$$

- Jeżeli
$$l = 2k$$
, to

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = 2\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)}E\{e_{i}y_{i}^{2}\} = 4\beta_{kk}^{3}(m_{e}^{(2)})^{3}.$$
 (A.81)

- Jeżeli l > 2k, to:

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = 2\beta_{kk}^{2} m_{e}^{(2)} E\{e_{i}y_{i}y_{i-(l-2k)}\} =$$

 $=2\beta_{kk}^{2}m_{e}^{(2)}E\{e_{i}y_{i-(l-2k)}(e_{i}+\beta_{kk}e_{i-k}y_{i-k})\}=$ (A.82)

$=2\beta_{kk}^3(m_e^{(2)})^3.$

– Jeśli k > l, to:

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = \beta_{kk} E\{e_{i}y_{i}^{2}(e_{i+k-l}^{2} + 2\beta_{kk}e_{i}e_{i-l}y_{i-l})\} =$$

 $=\beta_{kk}^{2}E\{e_{i}y_{i}^{2}e_{i-l}y_{i-l}\}=2\beta_{kk}^{2}E\{e_{i}^{2}y_{i-k}e_{i-k}e_{i-l}y_{i-l}\}=$ (A.83)

$$=2\beta_{kk}^3 m^{(2)} E\{e_i y_i e_{i+k-l} y_{i+k-l}\} = 2\beta_{kk}^3 (m^{(2)})^3$$

Trzeci moment centralny:

$$M_{y}^{'(3)}(p,q) = M_{z}^{(3)}(p,q), \qquad (A.84)$$

A.2. Elementarny diagonalny proces biliniowy EB(k, k)

gdzie:

$$z_i = y_i - E\{y_i\},\tag{A.85}$$

związany jest z trzecim momentem procesu $M_y^{(3)}$ następującymi zależnościami:

$$M_{z}^{(3)}(p,q) = M_{y}^{(3)}(p,q) - M_{y}^{(1)}(M_{y}^{(2)}(p-q) - M_{y}^{(1)}M_{y}^{(2)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{(1)}M_{y}^{(2)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{(1)}(p) - M_{y}^{($$

$$- M_y^{(1)} M_y^{(2)}(q) + 2 \left(M_y^{(1)} \right)^3$$

Wprowadzając oznaczenie:

 $M_y^{(1)} = \overline{y},$

otrzymamy zależności:

– Dla przesunięć zerowych p = 0, q = 0:

$$M_z^{(3)}(0,0) = M_y^{(3)}(0,0) - 3\overline{y}M_y^{(2)}(0) + 2\overline{y}^3.$$
(A.87)

- Dla przesunięć p = k, q = k:

$$M_{x}^{(3)}(k,k) = M_{y}^{(3)}(k,k) - \overline{y}M_{y}^{(2)}(0) - 2\overline{y}M_{y}^{(2)}(k) + 2\overline{y}^{3}.$$
 (A.88)

Dla procesu EB(k,k) z pobudzeniem gaussowskim zależność (A.87) w funkcji parametrów β_{kk} i λ procesu EB(k,k) można przedstawić następująco:

$$M_z^{(3)}(0,0) = \frac{2\beta_{kk}^3 \lambda^6 (10\beta_{kk}^2 \lambda^2 - 1)}{1 - \beta_{kk}^2 \lambda^2}.$$
 (A.89)

Zależność (A.88) można przedstawić w funkcji parametrów β_{kk} i λ procesu EB(k, k) z pobudzeniem gaussowskim jako:

$$M_{z}^{(3)}(k,k) = \beta_{kk}\lambda^{2} \frac{2 - 7\beta_{kk}^{2}\lambda^{2} + 9\beta\lambda^{2} + 2\beta_{kk}^{4}\lambda^{4}}{1 - \beta_{kk}^{2}\lambda^{2}}.$$
 (A.90)

A.2.6. Czwarty moment zwykły

Czwarty moment zwykły może zostać wyznaczony na podstawie definicji 2.4 i zależności (A.42).

Dla procesu EB(k,k) z pobudzeniem gaussowskim wyrażony jest jako funkcja parametrów λ^2 i $x = \beta_{kk}\lambda^2$ następującą zależnością:

$$M_y^{(4)}(0,0,0) = \lambda^4 \left[\frac{x^2 + 3(1+5x)(1+3x^2)}{(1-x)(1-3x^2)} \right]$$
(A.91)

A. Momenty elementarnych procesów biliniowych Czwarty moment centralny $M_z^{(4)}(0,0,0)$ można wyrazić poprzez niższe momenty na-

 $M_{x}^{(4)}(0,0,0) = M_{y}^{(4)}(0,0,0) + 6(M_{y}^{(1)})^{2}M_{y}^{(2)}(0,0) - 4M_{y}^{(1)}M_{y}^{(3)}(0,0) - 3(M_{y}^{(1)})^{4}.$ (A.92)

 $\beta_{kk}^4 \lambda^4 < \frac{1}{3}$

Z równania (A.91) wynika, że warunkiem istnienia czwartego momentu jest

(A.93)

stępująco:

Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych

Zamieszczone w tym rozdziale przykłady mają na celu ilustrację wyników estymacji parametrów elementarnych procesów biliniowych EB(k, l) metodą momentów, uogólnioną metodą momentów oraz metodą RLS, opisanymi w rozdziale 6. W metodzie momentów i uogólnionej metodzie momentów wykorzystano analityczne zależności między momentami i parametrami procesów, wyprowadzone w dodatku A. Uzyskane wyniki pozwalają

porównać skuteczność i dokładność metod estymacji,

Dodatek B

- zweryfikować zaproponowany w rozdziale 5.3 warunek identyfikowalności procesów EB,
- zaobserwować wpływ stochastycznego rozkładu pobudzenia procesu na wyniki estymacji.

Doświadczenia były prowadzone w następujących warunkach:

- 1. Zbiory danych, służących do estymacji parametrów pochodziły z elementarnych procesów biliniowych EB(k, l), diagonalnych i subdiagonalnych, pobudzanych białym szumem e_i o rozkładzie normalnym i równomiernym, o wariancji $m_e^{(2)} = 1$.
- 2. Parametr β_{kl} należał do przedziału (0.1,0.7), tak więc każdorazowo spełniony był warunek odwracalności procesów, przyjmowany dotychczas w literaturze za równoważny warunkowi identyfikowalności:

 $\beta_{kl}^2 \left(m_e^{(2)} \right)^2 < 0.5.$

- 3. Struktura identyfikowanego modelu $\mathcal{EB}(k, l)$ była zgodna ze strukturą procesu EB(k, l).
- 4. Estymacja paramrtrów przeprowadzana była na podstawie zbiorów danych liczących 1000 próbek dla 200 odrębnych realizacji każdego z procesów.

B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych

- 5. Metoda momentów i metoda RLS realizowane były odpowiednio według schematów podanych w rozdziałach 6.1 i 6.2.1.
- 6. Dla uogólnionej metody momentów:
 - minimalizacja wskaźnika jakości 6.16 przeprowadzana była przy ograniczeniach:

$$\frac{-0.5}{\hat{M}_y^{(2)}} < b_{kl} < \frac{0.5}{\hat{M}_y^{(2)}}, \\ 0 < m_w^{(2)} < \hat{M}_y^{(2)}.$$

- Za pierwsze przybliżenie rozwiązania (warunki początkowe) dla uogólnionej metody momentów przyjęto wynik estymacji uzyskany zwykłą metodą momentów.
- Jako wynik końcowy przyjęto parametry wyznaczone po 10 cyklach optymalizacji.

Przykład 1

Przyład ilustruje wyniki estymacji parametrów procesów diagonalnych EB(k,k) pobudzanych białym szumem gaussowskim.

$$y_i = e_i + \beta_{44} e_{i-4} y_{i-4}$$

Oceny parametrów uzyskane uogólnioną metodą momentów (GMM), zwykłą metodą momentów (ZMM) i rekurencyjną metodą najmniejszych kwadratów (RLS) zebrano w tabeli B.1. W tabeli podano wartość średnią oceny, a obok, w nawiasach, jej wariancję, u zyskane dla 200 realizacji.

Przykład 2

W tabeli B.2 zamieszczono wyniki estymacji parametrów elementarnych diagonalnych procesów biliniowych opisanych równaniem identycznym jak w przykładzie 1, lecz pobudzanych białym szumem o rozkładzie równomiernym.

B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych

Tabela B.1: Porównanie metod estymacji parametrów procesu EB(k,k) z pobudzeniem o rozkładzie normalnym

	GMM	GMM	ZMM	ZMM	RLS	RLS
Bkk	b _{kk}	$m_{w}^{(2)}$	bkk	$m_{w}^{(2)}$	b _{kk}	$m_{w}^{(2)}$
0.1	0.110 (0.002)	1.000 (0.001)	0.090 (0.005)	0.990 (0.009)	0.110 (0.003)	1.000 (0.001)
0.2	0.200 (0.004)	1.000 (0.006)	0.200 (0.005)	0.990 (0.010)	0.180 (0.002)	1.090 (0.003)
0.3	0.340 (0.040)	0.970 (0.040)	0.300 (0.008)	1.000 (0.010)	0.290 (0.001)	1.200 (0.006)
0.4	0.390 (0.001)	1.090 (0.030)	0.400 (0.050)	1.030 (0.060)	0.380 (0.001)	1.420 (0.008)
0.5	0.350 (0.002)	1.440 (0.003)	0.340 (0.110)	1.460 (0.560)	0.290 (0.003)	1.700 (0.010)
0.6	0.310 (0.004)	2.010 (0.130)	0.130 (0.060)	2.350 (0.062)	0.130 (0.004)	2.410 (0.230)
0.7	0.260 (0.020)	3.450 (1.220)	0.220 (0.090)	3.220 (4.030)	0.080 (0.004)	3.550 (0.560)

Tabela B.2: Porównanie metod estymacji parametrów procesu EB(k,k) z pobudzeniem o rozkładzie równomiernym

	GMM	GMM	ZMM	ZMM	RLS	RLS
Bkk	b _{kk}	m _w ⁽²⁾	b _{kk}	m _w ⁽²⁾	b _{kk}	$m_w^{(2)}$
0.1	0.100 (0.000)	1.000 (0.000)	0.090 (0.006)	1.000 (0.007)	0.090 (0.001)	1.010 (0.000)
0.2	0.200 (0.001)	1.000 (0.001)	0.200 (0.006)	1.000 (0.007)	0.170 (0.003)	1.040 (0.001)
0.3	0.300 (0.001)	1.000 (0.001)	0.330 (0.006)	0.970 (0.004)	0.250 (0.006)	1.100 (0.001
0.4	0.390 (0.001)	1.000 (0.002)	0.380 (0.007)	1.010 (0.060)	0.320 (0.009)	1.200 (0.003
0.5	0.400 (0.000)	1.200 (0.009)	0.060 (0.040)	1.530 (0.060)	0.390 (0.016)	1.410 (0.100
0.6	0.350 (0.000)	1.600 (0.030)	0.010 (0.010)	1.990 (0.050)	0.360 (0.011)	1.730 (0.016
0.7	0.310 (0.003)	2.200 (0.008)	0.030 (0.002)	2.620 (0.180)	0.230 (0.009)	2.270 (0.057

Przykład 3

Wyniki umieszczone w tabeli B.3 dotyczą estymacji parametrów procesu subdiagonalnego EB(k, l), opisanego równaniem:

B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych

pobudzanego białym szumem o rozkładzie normalnym. Przyjęte oznaczenia są takie same jak we wcześniejszych przykładach.

Tabela B.3: Porównanie metod estymacji parametrów procesu EB(k, l) z pobudzeniem o rozkładzie normalnym

	GMM	GMM	ZMM	ZMM	RLS	RLS
Bkl	b _{kl}	m _w ⁽²⁾	b _{kl}	$m_{w}^{(2)}$	- b _{kl}	(2)
0.1	0.100 (0.001)	1.010 (0.002)	0.110 (0.001)	1.000 (0.002)	0.090(0.023)	0.980 (0.004)
0.2	0.200 (0.020)	1.000 (0.002)	0.200 (0.002)	1.010 (0.002)	0.180(0.017)	0.990 (0.007)
0.3	0.290 (0.003)	1.000 (0.030)	0.300 (0.030)	1.000 (0.003)	0.260(0.013)	1.010 (0.009)
0.4	0.390 (0.003)	1.010 (0.003)	0.400 (0.010)	1.030 (0.008)	0.360(0.013)	1.020 (0.011)
0.5	0.420 (0.001)	1.110 (0.009)	0.440 (0.030)	1.040 (0.025)	0.430(0.015)	1.071 (0.023)
0.6	0.390 (0.001)	1.310 (0.020)	0.340 (0.061)	1.270 (0.082)	0.460(0.029)	1,160 (0.067)
0.7	0.350 (0.002)	1.630 (0.010)	0.290 (0.053)	1.610 (0.165)	0.350(0.043)	1.540 (0.210)

Przykład 4

Wyniki umieszczone w tabeli B.4 dotyczą estymacji parametrów procesów subdiagonalnych o parametrach takich jak w przykładzie 3, pobudzanych białym szumem o rozkładzie równomiernym. Wyniki przedstawione w tabelach B.1 – B.4 pozwalają sformułować następujące wnioski:

1. Wszystkie przykłady dotyczą estymacji parametrów procesów EB(k, l), spełniających warunek odwracalności:

$\beta_{kl} m_e^{(2)} < 0.5.$

Można jednak zaobserwować, że nie wszystkie tak zdefiniowane procesy odwracalne są identyfikowalne parametrycznie. Praktycznie, zakres identyfikowalności parametrycznej pokrywa się z warunkiem uzyskanym w rozdziale 5.3.3. Poprawne wyniki identyfikacji uzyskiwano dla parametrów

 $\beta_{kl} < 0.4,$

co odpowiada warunkowi

 $\beta_{kl}^2 m_e^{(2)} \le 0.16$

B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych

Tabela B.4: Porównanie metod estymacji parametrów procesu EB(k, l) z pobudzeniem o rozkładzie równomiernym

	GMM	GMM	ZMM	ZMM	RLS	RLS
β _{kl}	b _{kl}	$m_{w}^{(2)}$	b _{kl}	$m_w^{(2)}$	b _{kl}	m _w ⁽²⁾
0.1	0.100 (0.001)	1.000 (0.001)	0.090 (0.005)	1.000 (0.001)	0.090 (0.001)	1.010 (0.000)
0.2	0.200 (0.001)	1.000 (0.001)	0.200 (0.006)	1.000 (0.001)	0.170 (0.003)	1.040 (0.001)
0.3	0.300 (0.001)	1.000 (0.001)	0.330 (0.006)	0.970 (0.004)	0.250 (0.006)	1.100 (0.001)
0.4	0.400 (0.000)	1.000 (0.002)	0.380 (0.007)	1.010 (0.006)	0.320 (0.009)	1.200 (0.003)
0.5	0.420 (0.001)	1.200 (0.009)	0.060 (0.040)	1.530 (0.060)	0.390 (0.010)	1.410 (0.100)
0.6	0.350 (0.001)	1.600 (0.030)	0.010 (0.010)	1.990 (0.050)	0.360 (0.011)	1.730 (0.016)
0.7	0.310 (0.001)	2.220 (0.080)	0.030 (0.020)	2.620(0.180)	0.230 (0.009)	2.270 (0.057)

2. Dla zwykłej metody momentów zaobserwowano, że dla procesów, dla których

$\beta^2 m_e^{(2)} > 0.16$

liczba realizacji, dla których nie można było znaleźć modelu biliniowego, rosła ze wzrostem $\beta^2 m_{\epsilon}^{(2)}$. W przypadku braku rozwiązania dla danej realizacji przyjmowano wynik $b_{kl} = 0$, co istotnie obniżało średnią wartość \bar{b}_{kl} .

- 3. W przeprowadzonych badaniach, w zakresie procesów identyfikowalnych parametrycznie, wszystkie metody estymacji dają poprawne wyniki. Nieznacznie lepsza od pozostałych jest uogólniona metoda momentów, ze względu na mniejszą wariancję ocen parametrów.
- Dla procesów pobudzanych białym szumem o rozkładzie równomiernym uzyskuje się mniejszą wariancję ocen niż dla procesów pobudzanych gaussowskim białym szumem.

Kolejny przykład umieszczono, by zilustrować jedną z przyczyn praktycznej nieidentyfikowalności parametrycznej niektórych odwracalnych elementarnych procesów biliniowych.

B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych

(B.1)

Przykład 5

Dla procesu

$$= e_i + 0.37 e_{i-4} y_{i-4},$$

dla którego $m_e^{(2)}=0.8$ i tym samym wartość iloczynu parametrów

 y_i

$$\beta_{kk}^2 m_e^{(2)} = 0.11$$

czyli mieszczą się one w granicach przyjętych dla procesów parametrycznie identyfikowalnych, wyznaczono oceny momentów $\hat{M}_{y}^{r(r)}(\cdot)$ dla poszczególnych realizacji procesu i porównano je z wartościami wyznaczonymi dla procesu na podstawie zależności zamieszczonych w dodatku A. Na rys. B.1 pokazano wartości ocen momentów centralnych $\hat{M}_{y}^{r(2)}(0)$, $\hat{M}_{y}^{r(2)}(k)$, $\hat{M}_{y}^{r(3)}(k,k)$ wyznaczone dla stu realizacji elementarnego procesu biliniowego. Linią ciągłą zaznaczono wartości momentów centralnych wyznaczone teoretycznie na podstawie zależności wyprowadzonych w dodatku A. Oceny momentów wahają się wokół wartości teoretycznych z pewną wariancją.





B. Przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych



Rys. B.2: Porównanie momentów centralnych i ich ocen dla 100 realizacji procesu B.2 Fig. B.2: Comparison of the central moments with the ones estimated from 100 realizations of the process B.2

Kolejny rysunek B.2 przedstawia momenty i ich oceny dla również odwracalnego procesu EB(k, k):

$$y_i = e_i + 0.76e_{i-4}y_{i-4},\tag{B.2}$$

dla którego $m_e^{(2)}=0.8.$ Tym razem iloczyn parametrów

$$\beta_{kk}^2 m_e^{(2)} = 0.46$$

mieści się blisko granicy odwracalności. Oceny momentów wahają się wokół wartości teoretycznych ze znacznie większą wariancją niż poprzednio i dla wielu realizacji istotnie odbiegają od wartości teoretycznych. Takie zachowanie się ocen momentów niewątpliwie wpływa na pogarszanie się wyników identyfikacji zarówno zwykłą, jak i uogólnioną metodą momentów.

Pogorszenie wyników identyfikacji zaobserwować można w przykładach 1–4 dla $\beta m_e^{(2)} > 0.4$. Duże wartości ocen momentów, wyznaczanych zawsze na podstawie realizacji o skończonej liczbie próbek, są spowodowane losowym (ale nie częstym) pojawianiem się dużych wartości liczbowych w ciągu danych. Metody estymacji wykorzystujące minimalizację błędu predykcji nie są odporne na takie wahania danych,

co jest powodem rozbieżności metody lub uzyskania błednych wyników identyfikacji. W [58], [34] zaproponowano sposób modyfikacji metody RLS dla takiego typu danych. Idea polega na sztucznym ograniczeniu błedu predykcji, wyznaczanego w algorytmie. Tego typu modyfikacja zastosowana była dla metody RLS w przykładach 1-4. Modyfikacja powoduje, że metoda RLS nie rozbiega się, ale wyniki estymacji odbiegaja od poprawnych (sa niedoszacowane). Zalecana w takich przypadkach normalizacja amplitudy sygnału, mająca na celu zmniejszenie wartości sygnału w procesie ich przetwarzania, jak wynika z doświadczeń autorki, nie wpływa na poprawę identyfikowalności procesów biliniowych, co można uzasadnić nastepujaco. Załóżmy, że maksymalna wartość ciągu dzie uzyskano przez podzieleni clagu y, przez ymar. Znormalizowani proces jest teraz opisany równaniem:

$$\frac{y_i}{y_{max}} = \frac{e_i}{y_{max}} + \beta_{kk} y_{max} \frac{e_i}{y_{max}} \frac{y_i}{y_{max}}$$
(B.3)

lub odpowiednio:

$$v_i = \varepsilon_i + \beta_{kk} \varepsilon_{i-k} v_{i-k},$$

przy czym:

$$\lambda_{\varepsilon} = m_e^{(2)} / y_{max}$$

 $\widetilde{eta}_{kk} = eta_{kk} y_{max}$

i relacje między parametrami modelu, wpływające na stabilność, odwracalność, identyfikowalność pozostają niezmienione, gdyż:

$$\widetilde{\beta}_{kk}^2 \lambda_{\epsilon}^2 = m_e^{(2)} \beta_{kk}^2.$$

$$\{y_i\}$$
 jest równa y_{max} , a ciąg o znormalizowanej amplitu-
ie każdej wartości ciągu y_i przez y_i – Znormalizowany

$$-\frac{e_i}{2} + \beta_{i,i} = \frac{e_i}{2} + \frac{y_i}{2}$$

Przykłady procesów opisanych modelami biliniowymi

W rozdziale pokazano przykłady procesów technologii chemicznej i procesów biomedycznych, dla których naturalnym opisem jest model biliniowy (7.2), omówiony w rozdziale 7.1.2. Aby zilustrować sposób stosowania modelu L - EB (który jest modelem ciągu czasowego), wykonano następujące doświadczenia:

- 1. Dla każdego z omawianych procesów na podstawie ciągłego modelu, bedacego układem biliniowych równań różniczkowych opisujących proces, wygenerowano sygnały odpowiadające fizycznym wyjściom procesu technologicznego.
- 2. Wybrane, ciągłe sygnały wyjściowe próbkowano z okresem próbkowania ${\cal T}_i,$ uzyskujac dyskretne ciągi czasowe.
- 3. Dla dyskretnych sygnałów wyjściowych dopasowano model L EB, opisany w rozdziale 7.1.2.
- 4. Parametry części biliniowej model
uL-EBestymowano zwykłą metodą mometów, stosując algorytm zaproponowany w rozdziale 6.2.1.
- 5. Na podstawie parametru $m_w^{(2)}$ modelu L-EB szacowano efektywność predykcyjną modelu, wyrażoną współczynnikiem efektywności predykcji (2.34), zaproponowanym w rozdziale 2.

C.1. Dekantacja

Procesy dekantacji zachodzą w aparatach zwanych osadnikami (dekanterami, odstojnikami) [61]. Przykład pokazany na rys. (C.1) przedstawia aparat, w którym powoli zachodzi dekantacja. Zawiesina ${\cal F}_{we}$ dopływająca do osadnika ulega rozwarstwieniu na warstwę klarownej cieczy F_p odpływającej przez przelew oraz warstwę szlamu $F_w y$ opadającego na dno osadnika. W niektórych technologiach do osadnika, oprócz stru-

C.1. Dekantacja

C. Przykłady procesów opisanych modelami biliniowymi



Rys. C.1: Schemat osadnika z flokulantem



mienia zawiesiny, dozowany jest flokulant F_f , substancja powodująca kłaczkowanie w procesie koagulacji osadów i przyspieszająca klarowanie cieczy.

Model ciągły osadnika

Bilans przepływów (równanie zachowania masy) dla osadnika opisany jest przez równanie:

$$F_{we} + F_f - F_p - F_{wy} = \frac{dV}{dt},\tag{C.1}$$

gdzie V oznacza całkowitą objętość zawiesiny w dekanterze. Ze względu na to, że osadniki pracujące w sposób ciągły są aparatami przelewowymi, przyjmuje się, że:

$$' = const$$

i równanie bilansowe dla przepływów C.1 sprowadza się do

$$F_{we} + F_f - F_p - F_{wy} = 0. (C.2)$$

Wzdłuż osadnika ustala się pewien profil gęstości zawiesiny. Najmniejszą gęstość ma zawiesina w górze osadnika, a ku dołowi aparatu gęstość zawiesiny się zwiększa. Ponieważ w osadniku następuje sedymentacja osadu i klarowanie ścieków, wyróżnia się w nim dwie zasadnicze strefy: strefę klarowania i strefę sedymentacji. Strumień wpływający do osadnika rozdziela się umownie na dwa strumienie: strumień płynący w górę i opuszczający osadnik w postaci ścieków oczyszczonych oraz strumień płynący w dół i opuszczający osadnik w postaci zawiesiny zagęszczonej. W modelu osadnika [110] zakłada się istnienie umownych n warstw o objętości V_i pokazanych na rys. C.2, z których każda ma określone stężenie s_i strefy klarowania i stężenie c_i strefy sedymentacji.



Rys. C.2: Model warstwowy osadnika z flokulantem

Fig. C.2: Layer model of the decanter with flocculant

Zakładając, że reakcja dekantacji zachodzi wg wzoru [65]

$$A \to B : r = kA^n, \tag{C.3}$$

gdzie współczynnikkokreślający szybkość reakcji zależy od flokulanta następująco:

$$k = k_0 + k_1 F_f$$

dla warstwowego modelu osadnika, pokazanego na rys. C.2 równania bilansu ciała stałego dla frakcji klarownej i zagęszczonej są następujące:

$$F(s_{wi} - s_i) - (k_0 + k_1 F_f) s_i^2 = V_i \frac{ds_i}{dt}$$

$$F(c_{wi} - c_i) + (k_0 + k_1 F_f) c_i^2 = V_i \frac{dc_i}{dt}$$
(C.4)

gdzie:

 F jest natężeniem przepływu ścieków w osadniku, różnym dla różnych warstw osadnika. Przyjmuje się, że:

$$F = \begin{cases} F_{we} & \text{dla warstwy 0,} \\ F_p & \text{dla warstw -1,...,-H,} \\ F_{wy} & \text{dla warstw 1,...,D,.} \end{cases}$$
(C.5)

- s_{wi} i c_{wi} oznaczają stężenia odpowiednich frakcji w strumieniu wpływającym do danej warstwy.

Typowymi zakłóceniami procesu dekantacji są zmiany przepływu zawiesiny niezagęszczonej F_{we} i jej stężenia c_{we} . Losowe zakłócenia stężenia zawiesiny niezagęszczonej c_{we} przenoszą się na stężenia we wszystkich warstwach osadnika. Przykładowe przebiegi stężeń przy losowo zakłócanym stężeniu wejściowym pokazano na rys. C.3.





Fig. C.3: Concentrations of suspension in succeeding layers in the decanter

Model L – EB dla stężenia zanieczyszczeń cieczy sklarowanej

Poszukiwania liniowego modelu

$$A(D)z_i = w_i \tag{C.6}$$

dla odchyłki stężeni
a c_p zanieczyszczeń cieczy sklarowanej, opuszczającej dekanter od jej wartości średniej

$$z_i = c_p(i) - \bar{c}_p$$

wskazują, że

$$A(D) = 1.$$

Oznacza to, że nie można znaleźć liniowego modelu innego niż biały szum w_i o wariancji $m_w^{(2)} = m_z^{(2)} = 0.99$, zatem sygnał $c_p - \bar{c}_p$ jest nieprognozowalny metodami liniowymi. Przyjmując do opisu stężenia c_p model elementarny biliniowy, zidentyfikowano:

$$c_{p,i} - \bar{c}_p = w^* + 0.44w^*_{-5}(c_{p,i-7} - \bar{c}_p)$$

C.2. Destylacja

gdzie $m_w^{*(2)} = 0.83.$

Współczynnik efektywności predykcji (2.34) dla dekantera jest równy:

$$s_m = 1 - \frac{0.83}{0.99} = 0.16.$$
 (C.7)

Uzyskany wynik wskazuje, że możliwa jest efektywna predykcja nieliniowa stężenia $c_{p,i} - \overline{c}_p$, aczkolwiek efektywność tej predykcji nie jest duża.

C.2. Destylacja

Destylacja jest metodą rozdzielania ciekłych układów wieloskładnikowych, wykorzystującą różną lotność poszczególnych składników [61]. Destylacja polega na odparowaniu najbardziej lotnego, w danych warunkach ciśnienia i temperatury, składnika, a następnie jego skropleniu i zebraniu kondensatu w odpowiednim odbieralniku. Kolumna destylacyjna [65] pokazana na rys. C.4 jest przykładem aparatu, w którym



Rys. C.4: Uproszczony schemat kolumny destylacyjnej

Fig. C.4: Simplified scheme of distillation column

zachodzi wymiana masy w wyniku kontaktowania się dwóch przeciwnie skierowanych strumieni cieczy i pary.

C.2. Destylacja

C. Przykłady procesów opisanych modelami biliniowymi

Model kolumny destylacyjnej

Rozpatrywana kolumna destylacyjna jest aparatem półkowym. Schemat pojedyn-





Fig. C.5: Simplified scheme of a single layer of distillation column

czej półki pokazano na rys. C.5. Na rysunku przyjęto następujące oznaczenia:

- x_i stężenie pożądanego składnika w strumieniu cieczy przepływającej w dół kolumny,
- $y_i stężenie pożądanego składnika w strumieniu pary przepływającej w górę kolumny,$
- L przepływ cieczy przez półkę kolumny,
- V przepływ pary przez półkę kolumny,
- y'_i stężenie równowagowe para-ciecz.

Przy założeniu idealnego mieszania, stężenia wyjściowe strumieni dla poszczególnych półek kolumny będą równe stężeniom w mieszanej cieczy. Dla pojedynczej j - tej półki kolumny destylacyjnej pokazanej na rys.(C.5) można równania bilansu masowego zapisać następująco:

$$L(x_{j+1} - x_j) + V(y_{j-1} - y'_j) = H_j \frac{dx_j}{dt}$$
(C.8)
$$V(y'_j - y_j) = h_j \frac{dy_j}{dt},$$
(C.9)

gdzie H_j i h_j oznaczają odpowiednio:

- H_j objętość przestrzeni wypełnionej cieczą,
- h_j objętość przestrzeni wypełnionej parą.

Dla równowagi para-ciecz na podstawie [54] przyjęto dla modelu półki zależność $y'_j = m(x_j)$ w następującej postaci:

$$y'_{j} = m(x_{j}) = \frac{ax_{j}}{1 + (a-1)x_{j}}.$$
(C.10)

Na podstawie tego samego źródła,
[54] przyjęto efektywność E_p półki jako:

$$E_p = \frac{y_j - y_{j-1}}{y'_j - y_{j-1}}.$$
 (C.11)

W modelu kolumny należy dodatkowo uwzględnić półkę górną, tzw.zasilającą, do której doprowadzony jest recykl destylatu i dolną – z recyklem pary. W modelu kolumny przyjęto, że:

- objętość cieczy na półce górnej jest równa $H = V_T$,
- dla pozostałych półek kolumny $H_j = V_p$,
- R_g oznacza wielkość strumienia recyklu górnego,
- x_{R_q} oznacza stężenie recyklu górnego,
- F_z oznacza dopływ cieczy zasilającej,
- $-x_z$ oznacza stężenie cieczy zasilającej,
- x_{R_d} oznacza stężenie recyklu dolnego.

W modelu kolumny należy jeszcze uwzględnić modele dynamiczne kotła i skraplacza. Przyjęto, że dynamikę obu aparatów można potraktować jako prostą inercję i opisać transmitancją Laplace'a:

$$K(s) = \frac{x_{wy}(s)}{x_{we}(s)} = \frac{k}{1+sT}.$$
(C.12)

Układ równań (C.13) opisujących kolumnę dla frakcji płynnej ma charakter biliniowy ze względu na występujące w nim iloczyny stężeń i przepływów.

Głównym zakłóceniem dla kolumny destylacyjnej są zmiany stężenia cieczy zasilającej, które przenoszą się na wszystkie półki kolumny destylacyjnej. Na rys.(C.6) pokazano wpływ losowego zakłócenia na stężenie cieczy w dole kolumny, uzyskany za pomocą modelu przedstawionego następującym układem równań:



- Rys. C.6: Czasowy wykres stężenia cieczy w dole kolumny
- Fig. C.6: Run of the concentration in the bottom od distillation column

Model L – EB dla stężenia cieczy w dole kolumny

Zastosowanie modelu liniowo-biliniowego zaproponowanego w rozdziale 7.2 prowadzi do następujących rezultatów:

– Odchyłkę stężenia x_1 w dole kolumny od jego wartości średniej

C.2. Destylacja

można przedstawić modelem liniowym:

$$y(i) - 0.72y_{i-1} = \eta_i, \tag{C.14}$$

gdzie $m_{\eta}^{(2)} = 0.5$.

– Analiza momentów pozostałości η_i pokazanych na rys. C.7 pozwala zidentyfikować dla nich model elementarny biliniowy:



gdzie $m_w^{(2)} = 0.43.$



Rys. C.7: Trzeci moment dla η_i

Fig. C.7: The third moment for η_i

Współczynnik efektywności predykcji dla modelu (C.14) wynosi:

Sm

$$s_m = 1 - \frac{m_\eta^{(2)}}{M_\eta^{(2)}} = 0.52$$

Zastąpienie modelu liniowego modelem mieszanym, L - EB pozwala uzyskać kilku-procentową poprawę efektywności predykcji x_1 , gdyż dla modelu L - EB współczynnik efektywności predykcji wynosi:

$$= 1 - \frac{m_w^{(2)}}{M_y^{(2)}} = 0.59$$

C.3. Ekstrakcja

Ekstrakcja jest operacją stosowaną do rozdzielania mieszanin ciekłych lub stałych. Składnik bądź składniki z fazy ekstrahowanej przechodzą do rozpuszczalnika. Ekstrakcja jest procesem dyfuzyjnym, gdyż ruch składnika z surowca do rozpuszczalnika odbywa się pod wpływem różnicy stężeń. Ruch ten ustaje po osiągnięciu stanu równowagi fizycznej [61]. Przykładowo, ekstrakcja kwasu fosforowego kwasem siarkowym w procesie produkcji nawozów fosforowych przebiega w reaktorze, zwanym ekstraktorem pokazanym schematycznie na rys.(C.8). W początkowym etapie na rude



- Rys. C.8: Model ekstraktora
- Fig. C.8: Model of extractor

fosforytową działa rozcieńczony kwas fosforowy. W efekcie reakcji rudy $(Ca_3(PO_4)_2)$ i kwasu fosforowego (H_3PO_4) krystalizuje związek $Ca(H_2PO_4)_2$. Związek ten następnie reaguje z rozcieńczonym kwasem siarkowym (H_2SO_4) , w wyniku czego uwalnia się kwas fosforowy i krystalizuje gips $Ca_2SO_4.2H_2O$. Szybkość rozkładu rudy zależy od:

- koncentracji jonów siarkowych i fosforowych w pulpie ekstrakcyjnej,
- od temperatury ekstrakcji.

Reakcje w ekstraktorze zachodzą z wydzielaniem się ciepła. Gorący strumień pulpy ekstrakcyjnej, zawracany częściowo do ekstraktora, zostaje wcześniej schłodzony w wyparce adiabatycznej. Pozostała część strumienia kierowana jest na oddział filtracji [16], [17].

Model ekstraktora

- Zakładamy, że:
- ekstraktor składa się z n komór,
- do pierwszej komory ekstraktora podawane są:
 - rozcieńczony kwas fosforowy F_{Ph},

- ruda F_{τ} ,

- strumień recyklu F_{Re},
- do drugiej komory ekstraktora podawany jest kwas siarkowy F_S .
- Przyjmując następujące oznaczenia:
- x_i stężenia jonów fosforowych w pulpie reakcyjnej,
- ci stężenia jonów siarkowych w pulpie reakcyjnej,
- x_{Re} stężenia jonów fosforowych w strumieniu recyklu,
- c_{Re} stężenia jonów siarkowych strumieniu recyklu,
- c_S stężenie kwasu siarkowego,
- x_{Ph} stężenie kwasu fosforowego,
- V_k objętość komory ekstraktora,
- $\ F_{12}$ strumień przepływający z 1 do 2 komory ekstraktora,
- F strumień przepływający z 1 do 2 komory ekstraktora,
- A, B stałe współczynniki,

ekstraktor można opisać następującym układem równań:

- Równania bilansu dla jonów fosforowych:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{V_k} [F_{Re} x_{Re} + F_r x_r + F_{Ph} x_{Ph} - F_{12} x_1 + k(c_1) x_1^2]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{V_k} \{F_{12} x_1 - F x_2 + k(c_2) x_2^2\}$$

 $\frac{dx_{Re}}{dt} = \frac{1}{V_k} \{Fx_{n-1} - Fx_{Re} + k(c_{re}x_{Re}^2)\}$ k(c) = Aexp(-Bx)

(C.15)

- Równania bilansu dla jonów siarkowych:

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{1}{V_k} [F_{Re}c_{Re} - F_{12}c_1 - k_1(x_1)c_1^2]$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{V_k} \{F_{12}c_1 + F_{5}c_5 - Fc_2 + k_1(x_2)c_2^2\}$$

$$\frac{dc_3}{dt} = \frac{1}{V_k} \{F_{12}c_2 - Fc_3 + k_1(x_3)c_3^2\}$$
(C.16)

$$\frac{c_{Re}}{dt} = \frac{1}{V_k} \{ Fc_{n-1} - Fc_{Re} + k1(x_{re})c_{Re}^2 \}$$

$$a_1(x) = A_1(1 - \exp(-B_1c))$$

Równania stanu ustalonego dla przepływów:

$$F_{Ph} + F_r + F_S = F_{wy}$$

$$F_{Re} + F_{wy} = F$$

$$F_{Re} = \frac{1-p}{p} F_{wy}$$

$$F_{12} = F_{Ph} + F_r + F_{Re}$$

$$F = F_S + F_{12}$$
(C.17)

Tak jak w poprzednich przykładach, występujące w układach równań (C.15) i (C.16) iloczyny przepływów i stężeń powodują biliniowy charakter modelu ekstraktora.

Model L – EB dla odchyłek stężenia jonów fosforowych od wartości średniej

W procesie produkcji kwasu fosforowego stężenie $x_{3,i}$ w pulpie reakcyjnej mierzone jest co pół godziny. Analiza odchyłek aktualnej wartości stężenia od jego wartości średniej \hat{x}_3 wskazuje na brak autoskorelowania sygnału odchyłek z_i :

$$z_i = x_{3,i} - \hat{x}_3$$

Analiza trzeciego momentu, pokazanego na rys. C.9 wskazuje na możliwość dopasowania do z_i diagonalnego elementarnego modelu biliniowego $\mathcal{EB}(4, 4)$. W wyniku estymacji parametrów modelu zwykłą metodą momentów otrzymano model:

$$z_i = w_i + 0.18w_{i-4}z_{i-4},$$

(C.18)

dla którego $m_w^{(2)} = 0.53$.

C.4. Układ oddechowy



Rys. C.9: Trzeci moment dla odchyłek stężenia P_2O_5 w pulpie reakcyjnej od wartości średniej

Fig. C.9: The third moment for the deviations of P_2O_5 concentration in pulp, from their mean value

C.4. Układ oddechowy

Układ oddechowy można potraktować jako chemiczny wymiennik tlen – dwutlenek węgla [98]. Powietrze wydychane z płuc jest przetwarzane, żeby dostarczyć tlenu dla całego organizmu. Krew tętnicza, transportująca tlen do tkanek ciała, pozostaje w chemicznej równowadze z gazem w płucach. W tkankach metabolizm komórkowy przetwarza tlen na dwutlenek węgla, który przez krew żylną jest dalej transportowany do płuc. Płuca z kolei są ciągle wentylowane poprzez oddychanie. Cały układ jest układem samoregulującym się. Jeżeli w tkankach z jakiegoś powodu wystąpi deficyt tlenu czy nadmiar dwutlenku węgla, zakres wentylacji płuc wzrasta, powodując wzrost stosunku tlenu do dwutlenku węgla w płucach i tętnicach.

Model układu oddechowego

Uproszczony schemat układu oddechowego pokazano na rys. C.10. W modelu przedstawionym w [98] płuca i tkanki tworzą dwa podsystemy, pokazane na rys. C.10 opisane następującym układem równań:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{V_1} (ux_c + q_3 - q_2 - x_1 u)
\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{V_2} (MR + q_2 - q_3)
q_2 = Q (\alpha B x_1 + \beta)
q_3 = Q x_2$$
(C.19)

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:



Rys. C.10: Uproszczony schemat układu oddechowego

Fig. C.10: Simplified scheme of a respiratory system

- x_1 stężenie dwutlenku węgla w płucach,
- $-x_2$ stężenie dwutlenku węgla w tkankach,

u – strumień wdychanego powietrza,

- x_c stężenie dwutlenku węgla we wdychanym powietrzu,
- q₂ –ilość dwutlenku węgla transportowanego z krwią tętniczą,
- q₃- ilość dwutlenku węgla transportowanego z krwią żylną,
- Q przepływ sercowy,
- B ciśnienie barometryczne,

– α i β – współczynniki nachylenia i przesunięcia linii aproksymującej krzywą absorpcji dwutlenku węgla dla krwi tętniczej.

Eliminacja q_2 i q_3 z układu równań (C.19) prowadzi do układu równań biliniowych (C.20).

$$\frac{x_1}{dt} = \frac{1}{V_1} \left(u(x_c - x_1) + Q(x_2 - \alpha B x_1 - \beta) \right)$$

$$\frac{x_2}{dt} = \frac{1}{V_2} \left(MR - Q(x_2 - \alpha B x_1 - \beta) \right)$$
 (C.20)

Dla celów diagnostycznych mierzone są stężeni
a CO_2 oznaczone przez x_1 i x_2 z okresem prób
kowania $T_s.$

Model L – EB dla odchyłek stężenia dwutlenku węgla w płucach od wartości średniej

Zakładając, że x_c jest zakłócane losowo, zidentyfikowano dla stężenia x_1 model mathcalEB(k, l), uzyskując następujące wyniki:

$$c_{1,i} = w_i + 0.13w_{i-4}x_{1,i-4}, \tag{C.21}$$

pzy czym w_i jest gaussowskim białym szumem o wariancji $m_w^{(2)} = 1.05$.

2

C.5. Układ sercowo-naczyniowy

C.5. Układ sercowo-naczyniowy

Układ sercowo-naczyniowy można rozpatrywać jako złożenie części mechanicznej, czyli serca i sieci naczyń oraz reaktora chemicznego tworzonego przez tkanki [98]. Schemat układu sercowo-naczyniowego pokazano na rys.(C.11). Serce generuje sygnały wyjściowe v_1 z prawej komory i v_2 z lewej komory, nazywane przepływami sercowymi, które są sygnałami wejściowymi odpowiednio obiegu tętniczego i żylnego, rys.(C.11).



Rys. C.11: Uproszczony model układu serce-płuca-naczynia

Fig. C.11: Simplified model of heart-vessel system

Przyjęto następujące oznaczenia:

- x_1 ciśnienie w lewej komorze,
- $-x_2$ ciśnienie w prawym przedsionku,
- x_3 ciśnienie w prawej komorze,
- x_4 ciśnienie w lewym przedsionku,
- $-v_1, v_2$ przepływy sercowe,
- c_1 pojemność lewej komory,
- $-c_2$ pojemność prawego przedsionka,
- c_1 pojemność prawej komory,
- c_1 pojemność lewego przedsionka,
- u₁ odwrotność oporu przepływu obwodu tętniczego,
- u2 odwrotność oporu przepływu obwodu żylnego,
- k_1, k_2, k_3, k_4 stałe współczynniki, o wartościach dobieranych eksperymentalnie.

Przepływy sercowe zależą od odpowiednich ciśnień w następujący, nieliniowy sposób:

$$\nu_1 = \frac{k_4 x_4}{k_1 x_1 + k_5},$$
(C.22)
$$k_2 x_2$$

$$=\frac{1}{k_2x_2+k_5}$$
. (C.23)

Układ równań różniczkowych, stanowiący model układu sercowo-naczyniowego podany w [98], jest następujący:



Rys. C.12: Trzeci model centralny dla ciśnienia w lewej komorze serca

Fig. C.12: The third moment for a pressure in the left heart

Model L – EB dla odchyłek ciśnienia w lewej komorze serca od wartości średniej

Dla odchyłek ciśnienia w lewej komorze, mierzonego z okresem próbkowania T = 2 od wartości średniej, wyznaczono trzeci moment, który pokazany został na rys. C.12.

Wykres trzeciego momentu sugeruje możliwość opisu sygnału $x_{1,i}$ diagonalnym modelem $\mathcal{EB}(3,3)$. Zidentyfikowany model ma postać:

 $x_{1,i} = w_i + 0.34w_{i-3}x_{1,i-3},$

(C.25)

gdzie
$$w_i$$
 – gaussowski biały szum o wariancji $m_w^{(2)} = 0.84$

Dodatek D

Przykłady predykcji

Algorytmy minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej, opisane w rozdziale 7.2.1, zostaną obecnie zastosowane do wyznaczania prognoz danych pochodzących z procesów symulowanych, których struktura i parametry są znane, oraz z procesu rzeczywistego, o którym informacja dostępna jest jedynie w mierzonym sygnale wyjściowym z procesu.

D.1. Przykłady działania predyktora dla danych symulowanych

Badania symulacyjne zilustrowane zostaną trzema przykładami, których celem jest pokazanie działania minimalnowariancyjnego predyktora biliniowego dla obiektów nieliniowych o strukturze zarówno zgodnej, jak i odbiegającej od struktury modelu L - EB, na podstawie którego wyprowadzone zostały algorytmy predykcji sformułowane w twierdzeniach 7.1, 7.2.

W przykładzie 1 prognozowane jest wyjście procesu o strukturze takiej samej jak struktura modelu L - EB:

 $A(D)y_i = \eta_i,$

$$\eta_i = w_i + b_{kl} w_{i-k} \eta_{i-l}.$$

W przykładzie 2 prognozowaniu podlega wyjście procesu o strukturze odbiegającej od struktury modelu L - EB:

$$A(D)y_i = w_i + b_{kl}w_{i-k}y_{i-l}$$

W przykładzie 3 prognozowane jest wyjście innego procesu nielinioweg
o y_i o strukturze odbiegającej od struktury model
uL-EB

$$A(D)y_i = w_i + b_{kl}y_{i-k}y_{i-l}.$$

We wszystkich przykładach przyjmuje się, że:

- horyzont $h \leq k$,

- prognozy wyliczane są według algorytmu podanego w rozdziale 7.2.1,
- identyfikowany model liniowy spełnia warunek koincydencji.

Wyniki predykcji są porównywane z wynikami minimalnowariancyjnej predykcji liniowej i predykcji naiwnej

 $\hat{y}_{nw,i+h|i} = y_i$

dla dwóch horyzontów predykcji: h < kih = k. Porównywane są następujące wskaźniki:

Błąd średniokwadratowy predykcji naiwnej:

$$S_{nw} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \hat{y}_{nw,i|i-h} \right)^2.$$

Błąd średniokwadratowy minimalnowariancyjnej predykcji liniowej:

$$S_{lin} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_{lin,i|i-h})^2.$$

Błąd średniokwadratowy minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej:

$$S_{bl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_{bl,i|i-h})^2$$

- Procentowy błąd względny PBL:

$$PBL = \frac{S_{lin} - S_{bl}}{S_{lin}} 100\%$$

Procentowy błąd względny PBB:

$$PBL = \frac{S_{lin} - S_{bl}}{S_{bl}} 100\%$$

Dwa dalsze wskaźniki obliczane są w stosunku do predykcji naiwnej. Pokazują one, jakie efekty można osiągnąć zastępując prognozę naiwną prognozą minimalnowariancyjną liniową i biliniową.



Rys. D.1: Przebiegi predykcji procesu stochastycznego z Przykładu 1 dla h = 1Fig. D.1: Prediction with the horizon h = 1 of the process from Example 1

- Procentowy błąd względny PLN:

$$PLN = \frac{S_{nw} - S_{lin}}{S_{nw}} 100\%$$

- Procentowy błąd względny PBN:

$$PBN = \frac{S_{nw} - S_{bl}}{S_{nw}} 100\%.$$

Przykład 1. Proces biliniowy

 y_i

Prognozowaniu podlega ciąg $\{y_i\}$ wygenerowany przez proces opisany równaniem:

$$= 0.3y_{i-1} + 0.01y_{i-2} + w_i \tag{D.1}$$

$$w_i = e_i + 0.7e_{i-3}w_{i-4}.$$

Na rys.(D.1) i D.2 pokazano przykładowe przebiegi sygnału i jego predykcji naiwnej, minimalnowariancyjnej liniowej i minimalnowariancyjnej biliniowej oraz odpowiadające im przebiegi błędów predykcji dla horyzontów predykcji h = 1 i h = 3.

Przykładowe wskaźniki jakości predykcji uzyskane dla pojedynczej realizacji procesu pokazano w tabeli D.1. Zdecydowanie najgorsze wyniki daje, zgodnie z oczeki-





Tabela D.1: Wskaźniki jakości predykcji dla procesu z Przykładu 1

	hor	S_{nw}	$S_{ m lin}$	Sbl	PBL[%]	PBB [%]	PLN[%]	PBN[%]
h	=1	1.61	0.97	0.66	31	47	40	59
h	=3	2.00	1.01	0.70	29.5	41.8	49.5	65

waniami, predykcja naiwna. Również, zgodnie z oczekiwaniem, wydłużenie horyzontu predykcji prowadzi do zwiększenia błędu predykcji. Zastosowanie minimalnowariancyjnego predyktora biliniowego poprawiło dokładność predykcji dla tej realizacji o około 30% w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji liniowej (wskaźnik PBL), minimalnowariancyjna predykcja liniowa jest około 40% gorsza w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej (wskaźnik PBB).

Ponieważ proces (D.1) jest stochastyczny, średniokwadratowe błedy predykcji i względne błędy procentowe dla różnych realizacji różnią się między sobą, co jest zilustrowane na rys. D.3 i D.4. Można zaobserwować, że średniokwadratowy błąd predykcji naiwnej waha się wokół wartości 2, błąd minimalnowariancyjnej predykcji





Rys. D.3: Średniokwadratowe błędy predykcji dla różnych realizacji procesu stochastycznego z przykładu 1

Fig. D.3: Mean squared prediction errors for different realizations of stochastic process from Example 1



Rys. D.4: Procentowe błędy predykcji dla różnych realizacji procesu stochastycznego z przykładu 1

Fig. D.4: Percentage prediction errors for different realizations of stochastic process from Example 1

Rozdział D. Przykłady predykcji

liniowej – wokół wartości 1, a błąd dla minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej – wokół wartości 0.6. Jednocześnie możemy zauważyć, że wahania błędu średniokwadratowego dla predykcji liniowej są mniejsze niż dla predykcji biliniowej.

Analiza wskaźników względnych pokazuje, że w przypadku jednej realizacji minimalnowariancyjna predykcja biliniowa przyniosła gorsze rezultaty od minimalnowariancyjnej predykcji liniowej. Dla pozostałych realizacji zastosowanie minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej zamiast liniowej daje poprawę w granicach od kilkunastu do czterdziestu kilku procent w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji liniowej i dwudziestu do siedemdziesięciu procent w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej.

Przykład 2. Proces nieliniowy 1

 $y_i =$

Prognozowaniu podlega ciąg $\{y_i\}$ wygenerowany przez proces opisany równaniem:

$$0.3y_{i-1} + 0.01y_{i-2} + e_i + 0.7e_{i-3}y_{i-4}.$$
 (D.2)

Proces zawiera składnik biliniowy, jednak jego struktura odbiega od struktury modelu L - EB, dla której wyprowadzany był algorytm predykcji minimalnowariancyjnej biliniowej. Zastosowanie sposobu postępowania opisanego w rozdziale 7.2.2 pozwoliło uzyskać dla pojedynczej realizacji procesu wskaźniki jakości predykcji zawarte w tabeli D.2.

Tabela D.2: Wskaźniki jakości predykcji dla procesu z przykładu 2

hor	$S_{ m nw}$	$S_{ m lin}$	$S_{ m bl}$	PBL[%]	PBB[%]	PLN [%]	PBN[%]
h=1	1.41	0.93	0.72	22.4	28.8	34.0	49.4
h=3	2.18	1.01	0.83	16.5	19.7	53.7	61.9

Błędy średniokwadratowe i względne błędy procentowe dla różnych realizacji procesu pokazano na rys. D.5) i D.6.

Podobnie jak poprzednio, średniokwadratowy błąd predykcji naiwnej waha się wokół wartości 2, błąd minimalnowariancyjnej predykcji liniowej wykazuje bardzo niewielkie wahania wokół wartości 1, a błąd dla mnimalnowariancyjnej predykcji biliniowej – wokół wartości 0.7.



Rys. D.5: Średniokwadratowe błędy predykcji dla różnych realizacji procesu stochastycznego z przykładu 2

Fig. D.5: Mean squared prediction errors for different realizations of stochastic process from Example 2

Podobnie jak poprzednio, możemy zauważyć, że wahania błędu średniokwadratowego dla minimalnowariancyjnej predykcji liniowej są mniejsze niż dla minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej.

Analiza wskaźników względnych pokazuje, że tym razem minimalnowariancyjna predykcja biliniowa dawała dla każdej z realizacji lepsze rezultaty od minimalnowariancyjnej predykcji liniowej. Zastosowanie minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej zamiast liniowej daje tym razem poprawę w granicach od kilku do trzydziestu procent w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji liniowej i kilku do czterdziestu kilku procent w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej. W stosunku do procesu z przykładu 1 zastąpienie minimalnowariancyjnej predykcji liniowej predykcją biliniową daje więc nieco mniejszą poprawę dokładności.

Przykład 3. Proces nieliniowy 2

Prognozowaniu podlega cią
g $\{y_i\}$ wygenerowany przez proces opisany równaniem:

$$y_i = 0.3y_{i-1} + 0.01y_{i-2} + e_i + 0.4y_{i-3}y_{i-4}.$$
 (D.3)

Przykładowe wartości wskaźników jakości predykcji uzyskanych dla pojedynczej realizacji procesu nieliniowego zawarto w tabeli (D.3).

Błędy średniokwadratowe i względne błędy procentowe dla dwudziestu różnych realizacji procesu pokazano na rys. D.7 i D.8. Dla rozważanego procesu średniokwadra-



Rys. D.6: Procentowe błędy predykcji dla różnych realizacji procesu stochastycznego z Przykładu 2

Fig. D.6: Percentage prediction errors for different realizations of stochastic process from Example 2

Tabela D.3: Wskaźniki jakości predykcji dla procesu z przykładu 3

hor	$S_{ m nw}$	$S_{ m lin}$	$S_{ m bl}$	PBL[%]	PBB[%]	PLN[%]	PBN[%]
h=1	1.33	0.88	0.84	31	46.0	33.8	36.8
h=3	2.00	1.01	0.70	29.5	41.8	49.5	65.0

towy błąd predykcji naiwnej waha się wokół wartości 1.6, błąd minimalnowariancyjnej predykcji liniowej wykazuje nieco większe niż poprzednio wahania wokół wartości 1, a błąd dla minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej ze znacznie mniejszą wariancją niż w poprzednich przykładach waha się wokół wartości 0.9.

Analiza wskaźników względnych pokazuje, że minimalnowariancyjna predykcja biliniowa przyniosła, w dwóch na dwadzieścia realizacji, rezultaty gorsze od minimalnowariancyjnej predykcji liniowej. W pozostałych przypadkach zastosowanie minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej zamiast liniowej pozwoliło uzyskać poprawę w granicach od kilku do około dwudziestu procent w stosunku do predykcji liniowej (PBL) i podobnie w stosunku do minimalnowariancyjnej predykcji biliniowej (PBB). Nadal uzyskiwano poprawę dokładności predykcji, choć nie tak znaczną jak dla obiektu z przykładu 1. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że tym razem dla wielu reali-



Rys. D.7: Średniokwadratowe błędy predykcji dla różnych realizacji procesu stochastycznego z przykładu 3

Fig. D.7: Mean squared prediction errors for different realizations of stochastic process from Example 3



Rys. D.8: Procentowe błędy predykcji dla różnych realizacji procesu stochastycznego z przykładu 3

Fig. D.8: Percentage prediction errors for different realizations of stochastic process from Example 3



D.2. Przykład predykcji dla rzeczywistych danych

Rozdział D. Przykłady predykcji

zacji nie można było znaleźć modelu biliniowego dla błędu. Przypadki te nie zostały uwzględnione na rys. D.7 i D.8 ani w wartościach wskaźników ujętych w tabeli D.3. Przedstawione w przykładzie wyniki dotyczą tylko tych realizacji, dla których można było zidentyfikować model L - EB.

D.2. Przykład predykcji dla rzeczywistych danych

Cykl słoneczny, charakteryzujący się zarówno okresowością, jak i losowością, stanowi wciąż swoistą tajemnicę, ponieważ mimo odwiecznych zainteresowań, większość podstawowych pytań dotyczących natury cyklu słonecznego pozostaje bez odpowiedzi. Wiadomo, że cykl słoneczny związany jest z liczbą plam na Słońcu, które mogą być obserwowane z Ziemi. Pierwsze zapisane dane dotyczące liczby obserwowanych



Rys. D.9: Ciąg Wolfa

Fig. D.9: Wolf's time series

plam (sunspot number) pochodzą z roku 28 przed naszą erą, za panowania cesarza Liu Ao z dynastii Han w Chinach [118]. W 1843 niemiecki chemik i astronom Samuel Heinrich Schwabe (1789–1875) po 17 latach obserwacji zauważył i opisał cykl słoneczny, jednak swą nazwę Wolf's sunspot number zbiór obserwacji zawdzięcza Johanowi Rudolfowi Wolfowi (1816–1893). Ciąg Wolfa, uaktualniany na bieżąco, przedstawiony na rys. D.9 jest przedmiotem badań od początku 20 wieku, kiedy to zaczęły rozwijać się podstawy analizy ciągów czasowych. Ciąg ten stał się wzorcem, na którym trenowane i porównywane są metody i algorytmy predykcji.

W [118] pokazany jest jako benchmark nieliniowy model progowy SETAR zidentyfikowany na podstawie ciągu Wolfa dla zbioru danych z lat 1700–1979:

$$Y_{i} = \begin{cases} 1.92 + 0.84Y_{i-1} + 0.07Y_{i-2} - 0.32Y_{i-3} + 0.15Y_{i-4} - 0.20Y_{i-5} \\ -0.00Y_{i-6} + 0.19Y_{i-7} - 0.27Y_{i-8} + 0.21Y_{i-9} + 0.01Y_{i-10} + e_{1}(i) & \text{dla } Y_{i-8} \le 11.93, \\ 4.27 + 1.44Y_{i-1} - 0.84Y_{i-2} - 0.06Y_{i-3} + e_{2}(i) & \text{dla } Y_{i-8} > 11.93, \\ & (D.4) \end{cases}$$

gdzie:

– Y_i jest transformowaną zmienną y_i , wg następującej zależności:

$$Y_i = 2(\sqrt{1+y_i} - 1), \tag{D.5}$$

– y_i jest liczbą plam na Słońcu w roku (1699+i).

Powyższy benchmark został wykorzystany dla porównania modelu SETAR z modelem L - EB zaproponowanym w pracy. Do analizy aktywności cyklu słonecznego zastosowano metody opisane w rozdziałach 6 i 7. Oryginalne zmienne poddano transformacji:

T1 – takiej samej jak dla modelu Tonga (D.5), aby zachować podobne warunki obliczeniowe dla obu modeli,

- T2 - sprawdzonej dla wielu innych ciągów w badaniach symulacyjnych:

$$f_i = \frac{y_i - \bar{y}}{var(y)}.$$
 (D.6)

Na zbiorze uczącym, obejmującym lata 1700–1979, zidentyfikowano model liniowo-biliniowy L - EB.

Założono, że model liniowy ma spełniać warunek koincydencji. Model dla residuum poszukiwany był na zbiorze uczącym uogólnioną metodą momentów, opisaną w rozdziale 6.2.2, z wykorzystaniem analitycznych zależności podanych w rozdziale 4 i dodatku A. Uzyskano następujące wyniki:

dla transformacji T1 zmiennych:

$$M_{T1}:\begin{cases} (1-0.81D-0.21D^8)Y_i = \eta_i \\ \eta_i = e_i - 0.02\eta_{i-7}e_{i-7} & \text{oraz } var(\eta) = 8.13. \end{cases}$$
(D.7)



Rozdział D. Przykłady predykcji



Rys. D.10: Schemat wyznaczania prognoz

Fig. D.10: Scheme of prediction computation



Rys. D.11: Schemat wyznaczania prognoz

Fig. D.11: Scheme of prediction computation

- dla transformacji T2 zmiennych:

$$M_{T2}:\begin{cases} (1 - 0.80D + 0.29D^7 - 0.52D^8)Y_i = \eta_i, \\ \eta_i = e_i + 0.08\eta_{i-3}e_{i-3} & \text{oraz } var(\eta) = 0.24. \end{cases}$$
(D.8)

Własności predykcyjne zaproponowanego przez Tonga modelu SETAR (D.4) i zidentyfikowanych modeli liniowo-biliniowych (D.7), (D.8) zostały porównane na zbiorze sprawdzającym obejmującym lata 1980–2005. Przedstawione dalej wyniki uzyskano dla horyzontu predykcji h = 1. Prognozy wyznaczane były w danym roku na rok następny, wg schematu pokazanego na rys.(D.10). W czasie wyliczania prognozy korzystano jedynie z danych dostępnych w roku wyznaczania prognozy i w latach poprzednich. Dla predyktora biliniowego zastosowano algorytm opisany w rozdziale 7.2.1.

Na rys. D.12 pokazano prognozy wyliczone na zbiorze sprawdzającym obejmują-

cym lata 1980–2005 na podstawie modelu SETAR podanego przez Tonga i prognozy na podstawie modelu liniowo-biliniowego, przy zastosowaniu transformacji zmiennych T1.Na rys.D.13 pokazano wyniki dla prognozy biliniowej dla zmiennych poddanych transformacji T2.



Rys. D.12: Porównanie prognozy nieliniowej Tonga i prognozy biliniowej, dla danych po transformacji T1

Fig. D.12: Tong's nonlinear prediction compared with bilinear prediction, for T1 data transformed

Tabela D.4: Sumy kwadratów błędów predykcji ciągu Wolfa na lata 1980–2005

	T1/T1	T1/T2	
Model Tonga	1.07×10^{4}	1.07×10^{4}	
Model biliniowy	1.70×10^{3}	30.21	



Rys. D.13: Porównanie prognozy nieliniowej Tonga i prognozy biliniowej, dla danych po transformacji T2

Fig. D.13: Tong's nonlinear prediction compared with bilinear prediction, for T2 data transformed

Sumy kwadratów błędów predykcji zebrano w tabeli D.4. Zarówno na podstawie wykresów na rys.D.13, D.12 jak i wartości sumy kwadratów błędów umieszczonych w tabeli, widoczna jest wyraźna przewaga własności predykcyjnych modelu liniowo-biliniowego L-EBnad modelem SETAR, niezależnie od rodzaju transformacji zmiennych. Jednocześnie widoczne jest, że dla modelu biliniowego korzystniejsza jest wstępna transformacja zmiennych, T2 od transformacji T1 zaproponowanej dla modelu SETAR przez Tonga.

Pojęcie rzeczywistego prognozowania (genuine prediction) w odróżnieniu od prognozowania wprowadził Tong [118], powołując się na dyskusje z jednym z najznamienitszych statystyków XX wieku - Sir Davidem Coxem, który zasugerował, by rzeczywistym prognozowaniem nazywać prognozowanie danych, które są rzeczywiście nieznane prognostykom (np.jeszcze nie istnieją) na etapie opracowywania prognoz. Każde inne postępowanie może, według Tonga, prowadzić do nadużyć i ma mierne

D.2. Przykład predykcji dla rzeczywistych danych

znaczenie naukowe. Zdaniem autorki przedstawione wyniki są przykładem prognozowania rzeczywistego.

Dla rozwiania ewentualnych watpliwości porównane dalej zostana własności prognostyczne obu typów modeli wg schematu pokazanego na rys. D.11. Kolejne prognozy wyznaczane są jedynie na podstawie historycznych danych i dostępnych prognoz. W [28], [40] tego typu predykcja nazwana jest predykcją wielokrokową, gdyż w chwili i, na podstawie dostępnych danych wyznaczane są prognozy z wzrastającym horyzontem h = 1, 2, 3....

Na rys. D.14 przedstawiono prognozy wyliczone w roku 1979 na lata 1980-84 na podstawie danvch dostepnych do roku 1979 włacznie. Ponieważ faktycznie dane rze-



Rys. D.14: Prognoza rzeczywista na lata 1980 -84

Fig. D.14: Genuine prediction for the period 1980 -84

czywiste są już dostępne, pokazano je na rysunku dla porównania wyników. Średnia suma kwadratów błędów predykcji biliniowej równa jest 342, podczas gdy dla predykcji wg wzorcowego modelu Tonga średnia suma kwadratów błędów predykcji równa jest 347. Zatem również w przypadku predykcji wielokrokowej predyktor biliniowy jest dokładniejszy.

Na kolejnych dwóch rysunkach pokazano prognozy wyliczone w 2005 roku na lata 2006-2009. Predyktor biliniowy przewiduje mniejszą aktywność słoneczną niż predyktor wg Tonga. Na weryfikację wyników trzeba jednak w tym przypadku cierpliwie poczekać.

184

Rozdział D. Przykłady predykcji



Rys. D.15: Prognoza na lata 2006–2009, transformacja T2





Rys. D.16: Prognoza na lata 2006–2009, transformacja T1

Fig. D.16: Prediction for the period 2006-2009, transformation T1



- Abu-El-Magd M. A., Sinha N. K.: Modelling and forecasting short term load demand: a multivariate approach. Automatica, Vol.18, Nr 3, 1982.
- [2] Anderson T. W.: The statistical analysis of time series. J.Willey & Sons, London 1971.
- [3] Anderson O. D. ed.: Time series. North Holland Publishing Company, 1980.
- [4] Anderson O. D. ed.: Analysing time series. North Holland Publishing Company, 1980.
- [5] Anderson O. D. (ed.): Time series analysis. North Holland Publishing Company, 1981.
- [6] Anderson O. D. ed.: Time series analysis: theory and practice 1. North Holland Publishing Company, 1981.
- [7] Anderson O. D. ed.: Applied time series analysis. North Holland Publishing Company, 1981.
- [8] Anderson O. D. ed.: Time series analysis: theory and practice 2. North Holland Publishing Company, 1983.
- [9] Anderson O. D. ed.: Time series analysis: theory and practice 3. North Holland Publishing Company, 1983.
- [10] Anderson O. D. ed.: Time series analysis: theory and practice 4. Elsevier Science Publishers, Berliner-Verlag, 1983.
- [11] Anderson O. D. ed.: Time series analysis: theory and practice 5. North Holland Publishing Company, 1984.
- [12] Anderson B. D., Moore J. B.: Filtracja optymalna. WNT, Warszawa 1984.
- [13] Åström K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New York 1970.

Bibliografia

- [14] Bendat J., Piersol A. G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
- [15] Benveniste A., Goursat M., Ruget G.: Robust identification of a nonminimum phase system. Blind adjustment of linear equalizer in data communications. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, 1980.
- [16] Bielińska E.: Próba określenia rozkładu stężeń jonów SO4 w reaktorze ekstrakcji na ilość nierozłożonej rudy apatytowej. Materiały IX Seminarium Naukowo-Technicznego "Prace rozwojowe dla potrzeb przemysłu ekstrakcyjnego kwasu fosforowego", Karpacz 1976.
- [17] Bielińska E.: Wykorzystanie bilansowania węzła ekstrakcji w stanach nieustalonych dla celów operatywnego sterowania WKF. Materiały X Seminarium Naukowo-Technicznego "Prace rozwojowe dla potrzeb przemysłu ekstrakcyjnego kwasu fosforowego", Szklarska Poręba 1977.
- [18] Bielińska E.: Zależność efektywności predykcji minimalnowariancyjnej od dokładności pomiaru zmiennej prognozowanej. PAK, nr 5-6, Warszawa 1982.
- [19] Bielińska E. An investigation of optimal self-tuning predictor for process variables prediction in chemical technological processes. Scientific Papers of the Institute of Inorganic Technology and Mineral Fertilizers, No. 24, Wrocław 1982.
- [20] Bielińska E.: Designing of predictive algorithms for operative control systems. Proceedings of 4-th IFAC Symposium on MMM, Helsinki 1983.
- [21] Bielińska E.: Application of multistep predictors in complex chemical process. 8th International Congress of Chemical Engineering, Chemical Equipment Design and Automation, CHISA'84, Praha 1984.
- [22] Bielińska E.: Metoda bieżącej predykcji metanu w wyrobiskach kopalnianych. Materiały konferencyjne: Technika mikroprocesorowa w systemach kontroli i sterowania procesami technologicznymi zakładów górniczych, Katowice 1985.
- [23] Bielińska E.: Flexible analysis of time series in research, development and control of phosphoric acid plant by wet method. IX International Congress of Chemical Engineering, Chemical Equipment Design and Automation, CHISA'87, Praha 1987.
- [24] Bielińska E.: Adaptive prediction of nonstationary signals with trend a useful tool for chemical process analysis. IX International Congress of Chemical Engineering, Chemical Equipment Design and Automation, CHISA'87, Praha 1987.
- [25] Bielińska E.: Przegląd metod prognozowania zjawisk opisywanych modelami stochastycznych ciągów czasowych. Prace Naukoznawcze i Prognostyczne. Prognozowanie, nr 4, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1989.

- [26] Bielińska E.: Minimumvariance bilinear prediction. Proceedings of 11-th IFAC World Congress, Vol. 3, Tallinn 1990.
- [27] Bielińska E., Metoda określania horyzontu efektywnej predykcji. Prace Naukoznawcze i Prognostyczne. Prognozowanie, nr 3, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1990.
- [28] Bielińska E.: Wielokrokowa predykcja ciągów czasowych. Badania Operacyjne i Decyzje, nr 1, Wrocław 1991.
- [29] Bielińska E., Figwer J.: Analiza identyfikacja i predykcja ciągów czasowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1991.
- [30] Bielińska E., Nabagło I.: Can we improve human safety using bilinear models for technological process? Proceedings of IFAC Smposium "On-line fault detection and supervision in the chemical process industries", Newark, Delaware 1992.
- [31] Bielińska E., Minimum variance prediction of bilinear time series direct and adaptive version. Journal of Forecasting, Vol.12, 1992.
- [32] Bielińska E.: Adaptive prediction of bilinear time series problems of identification and numerical realisation. Proceedings of the 10-th IFAC symposium on system identification, Vol.2, Copenhagen 1994.
- [33] Bielińska E., Nabagło I.: Comparison of different methods of bilinear time series prediction. Proc. of the third IEEE conference on control applications, Vol.3, Glasgow 1994.
- [34] Bielińska E., Nabagło I.: Modyfikacja metody ELS dla identyfikacji biliniowych modeli ciagów czasowych. ZN Politechniki Śląskiej, seria: Automatyka, Z. 108, Gliwice 1994
- [35] Bielińska E.: Nonlinear MV Control. Proceedings of IFAC-IFIP-IMACS Conference, Vol. 2, Belfort 1997.
- [36] Bielińska E.: Application of Bilinear Models in MV Control. Preprints of Dycomans Workshop IV – Control and Management in Computer Integrated Systems, Zakopane 1997.
- [37] Bielińska E.: Adaptive non-linear control. Proceedings of the Fifth International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, Vol. 2, Międzyzdroje 1998.
- [38] Bielińska E.: Minimalno-variancyjna regulacja obiektów nieliniowych. Materiały Konferencyjne XIII KKA, Vol. 1, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole 1999.
- [39] Bielińska E., Zieliński B.: Bilinear models in adaptive control. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol.14, 2000.

Bibliografia

- [40] Bielinska E.: Metody prognozowania. Wydawnictwo Naukowe "Śląsk", Katowice 2002.
- [41] Bielinska E.: Identyfikowalność elementarnych modeli biliniowych. Materiały XV Krajowej Konferencji Automatyki, Warszawa 2005.
- [42] Bielińska E.: Identification of a mixed linear-bilinear diagonal time series model. Systems Science, No. 3, Vol.31, Wrocław 2005.
- [43] Bielinska E.: Elementary bilinear time series in signal analysis. 12th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje 2006.
- [44] Bielinska E.: Prognozowanie ciągów czasowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
- [45] Billings S.A., Chen S.: Extended model set, global data and threshold model identification of severely non-linear systems. International Journal of Control, Vol. 50, No.5, 1989.
- [46] Bohlin T.: Interactive System Identification: Prospects and Pitfalls. Springer-Verlag, Berlin 1991.
- [47] Bollerslev T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics. Vol. 31, 1986.
- [48] Bollerslev T., Ghysels E.: Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 14, 1996.
- [49] Bollerslev T., Wooldridge J.M.: Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances. Econometric Reviews, Vol. 11 1992.
- [50] Bond S., Bowsher C., Windmeijer F.: Criterion-based inference for GMM in aytoregressive panel data models. Economic Letters, Vol.73, 2001.
- [51] Box G. E. P, Jenkins G. M.: Analiza szeregów czasowych. PWN, Warszawa 1983.
- [52] Brooks C.: Linear and nonlinear (non-) forecastability of high frequency exchange rates. Journal of forecasting, Vol.16, 1997.
- [53] A.Brunner, G. D.Hess: Potential problems in estimating bilinear time-series models. Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 19, 1995.
- [54] Buckley P. S.: Techniques of process control. John Wiley & Sons, 1975.
- [55] Chen S., Billings S. A.: Representations of nonlinear systems: the NARMAX model. International Journal of Control, Vol.49, 1989.
- [56] S.Chen, S.A.Billings: Modeling and analysis of nonlinear time series. International Journal of Control, Vol.49, 1989.

Bibliografia

- [57] Çinar A.: Nonlinear time series models for multivariable dynamic processes. http://www.emsl.pnl.gov/docs/incinc/dynam_sys/ACdoc.html
- [58] Dai H., Sinha N. K.: Robust recursive least squares method with modified weights for bilinear system identification. IEE Proceedings, Vol.136, No. 3, 1989.
- [59] Denis-Vidal L., Joly-Blanchard G., Noiret C.: Some effektive approaches to check the identifiability of uncontrolled nonlinear systems. Mathematics and computer simulation, Vol.57, 2001.
- [60] Denis-Vidal L., Joly-Blanchard G.: Equivalence and identifiability analysis of uncontrolled nonlinear dynamical systems. Automatica, Vol. 40, 2004.
- [61] Encyklopedia Techniki. Chemia. WNT, Warszawa 1966.
- [62] Engle R.F.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica, Vol. 50, 1982.
- [63] Eykhoff P.: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1980.
- [64] Faff R., Gray P.: On the estimation and comparison of short-rate models using the generalised method of moments. Journal of Banking & Finance, Vol.30, 2006.
- [65] Friedly J. C.: Analiza dynamiki procesów. WNT, Warszawa 1975.
- [66] Gichman I. I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1968.
- [67] Goldberger A. S.: Teoria ekonometrii. PWE, Warszawa 1972.
- [68] de Gooijer J. G., Heuts R. M.: Higher order moments of bilinear time series processes with simetrically distributed errors. Proceedings of Second International Tampere Conference in Statistics, Finland, 1987.
- [69] Gourieroux C., Monfort A., Renault E.: Two-stage generalized moment method with applications to regressions with heteroscedasticity of unknown form. Journal of Statistical Planning and Interference, Vol.50, 1996.
- [70] Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A.: Metody doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych. PWN, Warszawa 1982.
- [71] Granger C. W., Newbold P.: Forecasting economic time series. Academic Press, 1977.
- [72] Granger C. W., Andersen A.: Non-linear time series modelling. [in:] Applied Time Series Analysis, Academic Press, 1978.
- [73] Granger C.W., Terasvirta T.: Modelling nonlinear Economic Relationships. Oxford University Press, 1993.
- [74] Granger C.W.: Overview of nonlinear time series specification in economics. Raport: Department of Economics University of California, San Diego La Jolla, CA 92093-0508, USA, 1998.

- [75] Graupe D.: Identification and adaptive filtering. Robert E.Krieger Publishing Company, Florida 1984.
- [76] Greblicki W.: Non-parametric orthogonal series identification of Hammerstein systems. International Journal of System Sciences, Vol. 20, 1989.
- [77] Greblicki W.: Nonparametric identification of Wiener systems by orthogonal series. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol 39, 1994.
- [78] Grigoriu M.: Applied non-gaussian processes. Prentice Hall, 1995.
- [79] Haber R., Unbehauen H.: Structure identification of nonlinear dynamic systems a survey on input/output approaches. Automatica, Vol.24, No.4, 1990.
- [80] Hasiewicz Z.: Hammerstein system identification by the Haar multiresolution approximation. Int.J. of Adaptive Control and Signal Processing, Vol.13, 1999.
- [81] Isermann E., Lachmann K. and Matko D.: Adaptive control systems. Prentice Hall, 1992.
- [82] Janczak A.: Identification of Wiener and Hammerstein systems with neural network and polynomial models. University of Zielona Gora Press, Zielona Gora 2003.
- [83] Joly-Blanchard G., Denis-Vidal L.: Some remarks about an identifiability result of nonlinear systems. Automatica, Vol. 34, 1998.
- [84] De Keyser R. M., Van Cauvernberge A. R.: A self tuning multistep predictor application. Automatica, Vol.17, No. 1, 1981.
- [85] Korn G., Korn T.: Sprawocznik po matematikie. Wydawnictwo Nauka, Moskwa 1973.
- [86] Kormylo J. J., Mendel J. M: Identifiability of nonminimum phase linear stochastic systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-28, No. 12, 1983.
- [87] Kramer M., Rosenblatt M.: The Gaussian log likehood and stationary sequences. [in:] Developments in time sries analysis, Suba Rao T. – (ed), Chapman & Hall, 1993.
- [88] Ljung L.: System Identification. Theory for the users. Prentice Hall, 1987.
- [89] Mathews J., Lee J.: Techniques for bilinear time series analysis. Proceedings of Twenty Seventh Annual Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, California, November 1993.
- [90] Mathews J., Moon T.K.: Parameter estimation for bilinear time series model. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustic, Speech, Signal Proceesing, Toronto, May 1991.
- [91] Martineau K. J., Burnham K. J.: Four term bilinear PID controller applied to an industrial furnance. Control Engineering Practice, Vol.12, 2004.
- [92] Martins C. M.: A note on the third order moment structure of a bilinear model with non independent shocks. Portugaliae Mathematica, Vol.56, 1999.

- [93] Martins C. M.: A note on the autocorrelations related to a bilinear model with non-independent shocks. Statistics & Probability Letters, Vol.36, 1997.
- [94] Melsa J. M., Sage A. P.: An introduction to probability and stochastic processes. Prentice Hall, 1973.
- [95] Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych. WNT, Warszawa 1975.
- [96] Miller S. L., Cilders D. G.: Probability and random processes. Elsevier Academic Press, 2004.
- [97] Mitra S. K.: Digital signal processing. McGraw-Hill I.E., 2001.
- [98] R. R.Mohler: Nonlinear systems. Vol.II. Applications to bilinear Control. Prentice Hall, 1991.
- [99] Niederliński A., Mościński J., Ogonowski Z.: Regulacja adaptacyjna PWN, Warszawa 1995.
- [100] Nikias C.L., Petropulu A.C.: Higher order spectra analysis. A nonlinear signal processing framework. Prentice Hall, 1993.
- [101] Nise N.S.: Control systems engineering. John Wiley & Sons, New York 2000.
- [102] Oderfeld J.: Badania statystyczne. [w:] Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów (red.) Steinhaus H. PWN, Warszawa 1971.
- [103] Osowski S.: Sieci neuronowe do przetwarzania informacji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [104] Priestley M.B.: Spectral analysis and time series. Academic Press, 1980.
- [105] Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [106] Saccomani M.P., Audoly S., D'Angio L.: Parameter identifiability of nonlinear systems: the role of initial conditions. Automatica, Vol.39, 2003.
- [107] Socha L.: Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1993.
- [108] Söderström T., Stoica P.: Identyfikacja systemów. PWN, Warszawa 1997.
- [109] Schweppe F.: Układy dynamiczne w warunkach losowych. WNT, Warszawa 1978.
- [110] Studziński J.: Identyfikacja, symulacja i sterowanie oczyszczalniami ścieków. Badania Systemowe, Vol.35, Warszawa 2004.
- [111] Subba Rao T.: On the theory of bilinear models. Journal of Royal Statistics Socciety, Vol.B, No.43, 1981.
- [112] Svoronos S., Stephanopoulos S. and Aris R.: On bilinear estimation and control. International Journal of Control, 1981.

- [113] Tadeusiewicz R.: Sieci neuronowe. Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1993.
- [114] Tang Z., Mohler R. R.: Bilinear time series: Theory and application.[in:] Lecture notes in control and information sciences, Vol.106, 1988.
- [115] Terui Nobuhiko, van Dijk H. K.: Combined forecast from linear and nonlinear time series models. International journal of forecasting, No. 18, 2002.
- [116] Therrien C. W.: Discrete random signals and statistical signal processing. Prentice Hall International Editions, 1992.
- [117] Thiel H.: Zasady ekonometrii. PWN, Warszawa 1979.
- [118] Tong H.: Non-linear time series. Clarendon Press, Oxford 1993.
- [119] Tuzlukov V.P.: Signal processing noise. CRC Press LLC, 2002.
- [120] Valenzuela H.M., Bose N.K.: Bilinear time series in non-gaussian signal modelling. Fifth ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modelling, 1990.
- [121] Walter E., Pronzato L.: On the identifiability and distinguishability of nonlinear parametric models. Mathematics and computers in simulation, Vol.42, 1996.
- [122] Wellstead P.E., Zarrop M. B.: Self-tuning Systems. Control and Signal Processing. J.Willey & Sons, London 1991.
- [123] Wittenmark B.: A self-tuning predictor. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-19, No. 6, 1974.
- [124] Wu Berlin: Model-free forecasting for nonlinear time series (with application to exchange rates) Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 19, North-Holland 1995.
- [125] Wu Berlin, Shu-Lin Hung: A fuzzy identification procedure for nonlinear time series: with example on ARCH and bilinear models. Fuzzy sets and systems, Vol. 108, Elsevier Science 1999.
- [126] Xia X., Moog C. H.: Identifiability of nonlinear systems with application to HIV/AIDS models. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.48, No.2, 2003.
- [127] Yaffee R.: Introduction to time series analysis and forecasting. Academic Press, 2000.

BILINIOWE MODELE CIĄGÓW CZASOWYCH W ANALIZIE SYGNAŁÓW

Streszczenie

Stochastyczne modele ciągów czasowych są stosowane w analizie sygnałów od końca lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Niniejsza praca dotyczy wykorzystania elementarnych modeli biliniowych do analizy sygnałów. Modele ciągów czasowych (nazwane również modelami wyjściowymi lub sygnałowymi) zbudowane są na podstawie dostępnych obserwacji sygnałów wyjściowych, które według przyjętego założenia są jedynym źródłem informacji o procesie. Znajdują one przede wszystkim zastosowanie w modelowaniu i prognozowaniu sygnałów. Przedstawione w niniejszej rozprawie badania koncentrowały się wokół analizy właściwości elementarnych modeli biliniowych, możliwości i sposobu ich identyfikacji, a także zastosowania w prognozowaniu i regulacji procesów.

Praca złożona jest z ośmiu rozdziałów i czterech dodatków, które zawierają szczegółowe wyprowadzenia i przykłady ilustrujące wybrane zagadnienia.

W rozdziale drugim zdefiniowano s model i proces oraz ich podstawowe własności, w tym identyfikowalność, podatność predykcyjną i własności prognostyczne. Oba pojęcia, model i proces, używane w naukach technicznych wydają się intuicyjnie oczywiste, o ile dotyczą badań stosowanych. W badaniach teoretycznych i badaniach symulacyjnych często zaciera się granica między procesem, który sam stanowi swoisty model, a jego modelem. W związku z tym, czasem nie wiadomo, czy dyskutowane warunki np. stabilności, odwracalności, identyfikowalności, dotyczą procesu czy modelu procesu. W rozdziale zawarte są także definicje innych pojęć stosowanych w pracy (np. ciąg czasowy, biały szum, ciąg niezależny, momenty, estymatory momentów).

Rozdział trzeci zawiera opis najczęściej stosowanych modeli stochastycznych ciągów czasowych. Ponieważ najpowszechniej stosowane są liniowe modele stochastyczne ciągów czasowych, część rozdziału poświęcona jest tym właśnie modelom, ich właści-

Streszczenie

Streszczenie

wościom i ograniczeniom. Druga część rozdziału poświęcona jest wybranym stochastycznym modelom nieliniowym.

Rozdział czwarty poświęcony jest elementarnym procesom biliniowym. Dla subdiagonalnych i diagonalnych elementarnych procesów biliniowych zostały podane analityczne zależności wiążące momenty i parametry procesów. Ogólne zależności obowiązują, przy założeniu że wejściem procesu biliniowego jest niedostępny pomiarowo, nieskorelowany ciąg czasowy, o zerowej wartości oczekiwanej i symetrycznym rozkładzie. Podano również szczególne zależności przy założeniu, że ciąg wejściowy ma rozkład normalny lub równomierny. Zależności te zostały wykorzystane przy identyfikacji modelu procesów w rozdziale siódmym. Ponieważ własności estymatorów momentów nieliniowego ciągu czasowego są bardzo trudne do oszacowania, pokazano własności estymatorów wynikające z badań symulacyjnych.

Dla elementarnych procesów biliniowych znaleziono ich liniowe, gaussowskie odpowiedniki i porównano podatność predykcyjną procesów biliniowych i ich gaussowskich odpowiedników.

Rozdział piąty dotyczy elementarnych modeli biliniowych. Przedyskutowano tu warunki stabilności i odwracalności modeli. Podano warunki identyfikowalności systemowej, które dla modeli subdiagonalnych nie zależą, a dla modeli diagonalnych zależą od rozkładu pobudzenia. W rozdziale dyskutowane są również warunki identyfikowalności parametrycznej modeli.

W rozdziale szóstym opisano metody pozwalające dokonać estymacji parametrów elementarnych modeli biliniowych. Najwięcej uwagi poświęcono metodom momentów – zwykłej i uogólnionej, podając algorytm, według którego można prowadzić identyfikację elementarnych modeli biliniowych.

Rozdział siódmy poświęcony jest zastosowaniom elementarnych modeli biliniowych w symulacji, prognozowaniu i regulacji. W tym rozdziale wprowadzony jest model L - EB i na jego podstawie określony algorytm predykcji minimalizującej wariancję błędu predykcji, dla residuum przedstawionego modelem diagonalnym i subdiagonalnym.

Rozdział ósmy zawiera podsumowanie i wnioski.

W dodatku A umieszczono wyprowadzenie zależności między momentami i parametrami elementarnych procesów biliniowych. Zależności mają charakter ogólny, z których, po przyjęciu założeń o rodzaju rozkładu pobudzenia, wynikają zależności podane w rozdziale piatym.

W dodatku B podano przykłady identyfikacji elementarnych procesów biliniowych zwykłą metodą momentów, uogólnioną metodą momentów oraz metodą ELMS. Na podstawie umieszczonych wyników można porównać skuteczność metod identyfikacji z rozdziału siódmego, zweryfikować słuszność warunku identyfikowalności przedstawionego w rozdziale szóstym, a także zaobserwować własności estymatorów momentów, w zależności od parametrów procesu.

W dodatku C zilustrowano możliwość wykorzystania modelu L - EB z rozdziału ósmego do modelowania sygnałów pochodzących z wybranych procesów technologii chemicznej oraz procesów biomedycznych. Doświadczenia prowadzone były w ten sposób, że na podstawie modelu matematycznego, danego dla każdego z procesów w postaci zbioru równań różniczkowych, generowano ciągły sygnał wyjściowy, uzyskany w wyniku pobudzenia modelu fenomenologicznego sygnałami wejściowymi z addytywnym zakłóceniem losowym. Sygnał wyjściowy, próbkowany z okresem próbkowania T_s stanowił ciąg obserwacji, dla którego starano się zidentyfikować model L - EB. Zamieszczone wyniki, obok przydatności modelu L_EB , testują działanie metod identyfikacji elementarnych modeli biliniowych.

Dodatek D zawiera przykłady zastosowania algorytmu predykcji biliniowej podanego w rozdziale ósmym. Przykłady działania algorytmu dla danych symulowanych mają na celu zilustrowanie poprawności działania algorytmu, w sytuacji gdy struktura procesu, z którego pochodzą dane, jest taka sama jak struktura predyktora, a także wtedy, gdy struktura procesu jest inna niż struktura zidentyfikowanego modelu, na podstawie którego został skonstruowany predyktor. Oprócz tych przykładów w dodatku D sprawdzono działanie zaproponowanej w pracy metodyki postępowania na wzorcowych danych (benchmark), dotyczących mierzonej aktywności słonecznej. Dane te są od lat testowane, a ich zbiór z każdym rokiem się powiększa. Mimo pozornej regularności wykazują silnie nieliniowe zachowanie i uważane są za trudne do prognozowania. Na zbiorze danych z lat 1700-1979 zidentyfikowano model L - EB i na jego podstawie zbudowano prognozy na lata 1980–2005. Wyniki porównano z prognozami uzyskanymi na podstawie nieliniowego modelu SETAR uzyskanego na tym samym zbiorze danych przez Tonga [118]. Ponadto porównano prognozy wielokrokowe na lata 1980–1984 i wyznaczono prognozy na lata 2006–2009.

Summary

BILINEAR TIME SERIES IN SIGNAL ANALYSIS

Summary

Stochastic time series models have been used in signal analysis since the sixties of the XX century. The monograph concerns elementary bilinear time series and their application in signal analysis. The time series models (named also output or signal models) are functions of accessible process outputs, observed as a set of uniformly sampled data, which are the one and only information on the process itself. They are mainly applied in signals' modelling and prediction. The research, presented in this monograph, was concentrated on elementary bilinear models analysis, methods of their identification and application in process control and prediction.

In Chapter 2 model and process were defined and their main attributes were discussed, including identifiability, prediction flexibility and prediction efficiency. In technical researches the process and the model are intuitively distinguishable in the real world. However, in simulation studies they use to be mislead because the process itself is given as a model. That is why it is important to precise wether the stability, invertibility, identifiability and predictability concern the process or the model. In this chapter definitions of time series, white noise, independent time series, moments, moments' estimators are reminded.

Chapter 3 concerns stochastic time series models. Linear stochastic time series models are the most commonly used, therefore linear models, their attributes and limitations are discussed in the first part of the chapter. In the second part some of nonlinear stochastic time series models are presented.

Chapter 4 is dedicated to elementary bilinear processes. Analytical relations between process moments and process parameters are derived for diagonal and sub-diagonal elementary bilinear processes. In general, they are valid under assumption that unaccessible process input is uncorrelated and symmetrically distributed. The specific relations for Gaussian and uniform distributed process input are also presented in the chapter. The derived relations have been applied to process models identification, described in Chapter 7. Theoretical analysis of the moments attributes for non-linear processes is very difficult. Therefore the features of the moments' estimators were tested by simulations. In this chapter linear Gaussian equivalents of elementary bilinear processes are also defined. Prediction flexibility of bilinear processes and their Gaussian equivalents are compared.

Chapter 5 concerns elementary bilinear models. Models' stability and invertibility conditions are discussed. System identifiability conditions (that for sub-diagonal processes are independent and for diagonal processes – dependent upon the process input distribution) are given. In the chapter parametric identifiability of the models is also discussed.

In Chapter 6 methods of parameters' estimation for elementary bilinear models are presented. Identification algorithms for simple and generalized methods of moments for elementary bilinear models are formulated.

Chapter 7 is dedicated to applications of elementary bilinear models in simulation, prediction and control. An L - EB model is introduced and, on its basis, a bilinear minimum-variance prediction algorithm is derived, for model's residuum presented as diagonal and sub-diagonal model.

In Chapter 8 the most important results were summarised.

Determining of the analytical formulae that connect moments and elementary bilinear process parameters are given in Appendix A. The formulae are given in a general form. Specific assumptions make possible reduction formulae into a simplier form.

Examples of identification of elementary bilinear processes with the use of the simple and the generalized method of moments as well as with the use of ELMS method are presented in Appendix B. Included simulation results allow to compare the identification methods efficiency, to verify identifiability conditions (presented in Chapter 6) and to observe the features of the moments' estimators in dependence on the process parameters.

In Appendix C time series coming from chemical and biomedical processes were modelled using the proposed in chapter 7 L-EB model. The time series were obtained after sampling a continuous signal that was the output of a phenomenological model Summary

of the process. The examples let to test not only usability of the L - EB, model but also practical aspects of elementary bilinear models identification.

Examples of applications of bilinear prediction algorithm are given in Appendix D. Simulation studies have to illustrate the features of the prediction algorithm when the model structure is equal to, or differs from the predicted process structure. Besides, the methodology proposed in the monograph was checked using benchmark – sunspot number time series. Using set of data from the period 1700-1979, model L - EB was identified and applied to prediction for the years 1980-2005. The results were compared with the ones published by Tong, obtained on the basis of non-linear SETAR model [118]. Besides, multi-step predictions for the period 1980-1984 were compared and prediction for 2006-2009 were calculated.

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice; tel./faks (0-32) 237-13-81 www.wydawnictwopolitechniki.pl

Sprzedaż i Marketing tel. (0-32) 237-18-48 wydawnictwo_mark@polsl.pl

Nakł. 100 + 50 Ark. wyd. 17 Oddano do druku 07.05.2007 r. P

 7
 Ark. druk. 12,625
 Papier offset. 70x100, 80g

 Podpisano do druku 07.05.2007 r.
 Druk ukończ. w maju 2007 r.

Wydrukowano z makiet w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1 zam. 184/07

Książki Wydawnictwa można nabyć w księgarniach

GLIWICE

- Punkt Sprzedaży Wydawnictwa na Wydziale Górnictwa i Geologii ul. Akademicka 2 (237-17-87)
- "FORMAT" Akademicka 5 na Wydziale Budownictwa
- "LAMBDA" ul. Akademicka 2 (237-21-40)
- "MERCURIUS" ul. Prymasa S.Wyszyńskiego 14 b (032) 230-47-22
- "ŻAK" ul. Kaszubska (budynek Biblioteki)

BIALYSTOK

- Dom Książki (Księgarnia 84) ul. Wiejska 45 c
- EKOPRESS Księgarnia Wysyłkowa ul. Brukowa 28 (085) 746-04-95

GDAŃSK

• EKO-BIS – ul. Dyrekcyjna 6 (058) 305-28-53

KATOWICE

- Punkt Sprzedaży na Wydziale Transportu ul. Krasińskiego 8
- ♦ Hurtownia "DIK" ul. Dulęby 7 (032) 204-82-30
- Hurtownia "JERZY" ul. Słoneczna 24 (032) 258-99-58

KRAKÓW

- Techniczna ul. Podwale 4 (012) 422-48-09
- Punkt Sprzedaży WND AGH, Al. Mickiewicza 30 (012) 634-46-40

ŁÓDŹ

- "POLITECHNIKA 100" ul. Żeromskiego 116 PŁ.
- Hurtownia "BIBLIOFIL" ul. Jędrowizna 9a (042) 679-26-77

OPOLE

BK - "POLITECHNIKA" - Wydz. Budownictwa, ul. Katowicka 48 (077) 456-50-58 wew.333

POZNAŃ

- Księgarnia "POLITECHNIK" ul. Piotrowo 3 (061) 665-23-24
- Księgamia Techniczna ul. Półwiejska 28 (061) 659-00-38

RYBNIK

- "ORBITA" ul. Rynek 12
- "NEMEZIS" ul. Hallera 26

TYCHY

• "I JA TOURS" - ul. Piłsudskiego 10 (217-00-91 w.130)

WARSZAWA

- Studencka Pl. Politechniki 1 (022) 628-77-58
- Techniczna ul. Kaliskiego 15 (022) 666-98-02
- Techniczna ul. Świętokrzyska 14
- MDM ul. Piękna 31

WROCŁAW

• "TECH" - ul Wybrzeże Wyspiańskiego 27

ZABRZE

Punkt Sprzedaży na Wydziale Organizacji i Zarządzania- ul. Roosevelta 26

BIBLIOTEKA GŁÓWNA Politechniki Śląskiej

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 50

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5 tel./faks (0-32) 237-13-81 www.wydawnictwopolitechniki.pl Dział Sprzedaży i Reklamy tel. (0-32) 237-18-48 e-mail: wydawnictwo_mark@polsl.pl