BIBLIOTHECA UNIVERSITATIS LIBERAE POLONAE
Ser. B. Nr. 1/II (24/II)

BENEDYKT BORNSTEIN

ARCHITEKTONIKA ŚWIATA

(L'ARCHITECTONIQUE DU MONDE)

TOM II.

LOGIKA GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNA

(LA LOGIQUE GÉOMÉTRO-ARCHITECTONIQUE)

WARSZAWA
NAKŁADEM AUTORA
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
1935

BENEDYKT BORNSTEIN

ARCHITEKTONIKA ŚWIATA

TOM II.

LOGIKA GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNA

WARSZAWA
1935

BENEDYKT BORNSTEIN

LOGIKA

GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNA

WARSZAWA
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
1935

Druk B-ci Drapczyńskich, Warszawa, Piusa XI Nr. 15

PRZEDMOWA

Tom I „Architektoniki świata“ miał na celu uzasadnienie gnozeologiczne metafizyki, jako ścisłej nauki o strukturach uniwersalnych, opartej o logikę geometryczną. Stawiając sobie jednak tego rodzaju zadania, „Prolegomena do architektoniki świata“ mogły tylko w sposób bardzo ogólnikowy zająć się samą podstawą tej metafizyki, tą właśnie logiką geometryczną, architektoniczną; obszerniejsze bowiem jej traktowanie rozbiłoby spójność tych „Prolegomenów“, obracających się przedewszystkiem wokół zagadnień teorjopoznawczych. Teraz jednak z kolei rzeczy musimy uzupełnić te braki i postarać się w sposób bardziej systematyczny założyć dla tej metafizyki podstawy rzeczowe. Bliżej więc musimy zająć się teraz tą logiką geometryczno-architektoniczną, tą topologiką, pamiętając jednak, że traktujemy ją tutaj, mimo wszystko, nie jako samodzielną dyscyplinę, nie jako cel sam w sobie, lecz tylko jako człon integralny architektoniki świata, i że wobec tego te jedynie jej strony powinny tu przyjść zasadniczo do głosu, które mieszczą się w ramach tej architektoniki światowej. W myśl tego tylko w dodatkach pozwoliliśmy sobie rozpatrzeć bardzo krótko z punktu widzenia architektonicznego dwie kwestje czysto logiczne, ażeby wykazać obecność pierwiastków architektonicznych nietylko w logice pojęć, lecz również sądów i wniosków. Natomiast wielki nacisk położyliśmy na sprawę odkrytych przez nas logicznych struktur harmonicznych, które posiadają pierwszorzędne znaczenie dla architektoniki świata, spokrewniając logikę architektoniczną nietylko z dziedziną geometrji rzutowej, lecz również z arytmetyką i akustyką. Do jakiego stopnia realna dziedzina akustyczno-muzyczna jest przepojona pierwiastkiem logicznym i, odwrotnie, w jak wysokim stopniu dziedzina logiczna kryje w sobie możliwości akustyczno-harmoniczne, widać to specjalnie z rozdziału XIII, w którym podajemy system logiki tonów harmonicznych.

Tom niniejszy „Architektoniki świata" zawiera tedy w sobie nietylko bardziej systematyczne ugruntowanie logiki geometryczno-architektonicznej, lecz przedstawia również bardziej szczegółowe jej rozwinięcie, specjalnie co do tych kwestyj, które w pierwszym tomie były tylko wzmiankowane, a więc przedewszystkiem właśnie, gdy chodzi o elementy i struktury harmoniczne oraz ich odwzorowania geometryczne i akustyczne. Uzupełniwszy w ten sposób rzeczowe podstawy „Architektoniki świata", zaznajomiwszy się bliżej z architektoniką świata logicznego, uprzytomniwszy sobie przytem dokładnie pozalogiczne znaczenie tych struktur, będziemy już teraz należycie przygotowani do tego, aby otrzymane rezultaty architektoniczne głębiej prześwietlić w tomie III z punktu widzenia kategorjologji i metafizyki.

Warszawa, w czerwcu 1934 r.

CZĘŚĆ I.

ZGEOMETRYZOWANIE I SKATEGORJALIZOWANIE LOGIKI ALGEBRAICZNEJ.

Rozdział I.

ZGEOMETRYZOWANIE SYSTEMU PEWNIKÓW LOGIKI ŚCISŁEJ.

Zanim przejdziemy do spraw właściwych logiki geometrycznej, musimy przedewszystkiem zająć się nieco bliżej logiką algebraiczną którą mamy zamiar poddać geometryzacji. Ta logika algebraiczna (algebra logiki) przedstawia system, oparty o szereg zasad naczelnych (pewników), z których już drogą dedukcji otrzymujemy dalsze twierdzenia[1]). Oprzemy się przy poniższem przedstawieniu algebry logiki na pierwszym systemie

---

[1]) Jeżeli chodzi o bliższe zorjentowanie się w dziedzinie algebry logiki, która leży u podstawy logiki geometrycznej, to czytelnik polski znajduje się tu w nader szczęśliwem położeniu, może bowiem korzystać z całego szeregu prac oryginalnych w języku polskim. A więc, Ajdukiewicz: „Główne zasady metodologji i logiki formalnej", 1928 (autoryzowany skrypt wykładów); Kotarbiński: „Elementy teorji poznania, logiki formalnej i metodologji nauk", 1929; Łukasiewicz: „Elementy logiki matematycznej", 1929 (autoryzowany skrypt wykładów); Stamm: „Zasady algebry logiki", 1913; J. Śleszyński: „Teorja dowodu" (t. I, 1925, t. II — 1929). Do wyżej wymienionych prac dołączyć należy również: Czeżowski: „Klasyczna nauka o sądzie i wniosku w świetle logiki współczesnej", 1927 oraz tłomaczoną z francuskiego książkę Couturat'a: „Algebra logiki", 1918.

Z prac wyżej wymienionych książka Stamma zakłada u swej podstawy ten sam, co i my, system pewników (pierwszy system Huntingtona) i z tego powodu bodaj że najlepiej nadaje się jako książka pomocnicza dla czytelnika, któryby odczuwał potrzebę takiej pomocy, gdy chodzi o stronę algebraiczną poruszonych tu zagadnień.

pewników, podanym przez E. Huntingtona w jego pracy: „Sets of independent postulates for the Algebra of Logic" (Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 5, 1904, str. 292—296).

Huntington bierze pod uwagę ogół elementów, w którym istnieją przynajmniej dwa różne od siebie elementy, przyczem jeżeli do systemu tego należą elementy a i b, to należeć do niego będą również elementy $a + b$ i ab czyli suma i iloczyn logiczny elementów a i b (u Huntingtona i ta konstytucja systemu sformułowana jest w postaci dwóch pewników).

Pewniki, rządzące tym systemem elementów, są następujące:

1^a Istnieje element 0 taki, że dla dowolnego elementu a mamy $a + 0 = a$

1^b Istnieje element 1 taki, że dla dowolnego elementu a mamy $a \times 1 = a$

2^a $a + b = b + a$

2^b $ab = ba$

3^a $a + bc = (a + b)(a + c)$

3^b $a(b + c) = ab + ac$

4^a Istnieje taki element a', odpowiadający elementowi a, że $a + a' = 1$

oraz

4^b Istnieje taki element a', odpowiadający elementowi a, że $aa' = 0$.

Ad. 1. Elementy 0 i 1 są to dwa graniczne elementy systemu algebry logiki, co do których później przekonamy się, że 0 jest najmniejszą treścią logiczną, 1 zaś treścią największą (por. str. 32, tw. 12). Pewnik 1-y stwierdza istnienie tych elementów, jako modułów dodawania i mnożenia, t. j. takich elementów, które — podobnie jak 0 i 1 w arytmetyce — nie zmieniają elementów, z któremi są połączone znakiem + (moduł *0*) lub znakiem × (moduł *1*).

Istotę modułów logicznych zrozumiemy, jeżeli sobie uprzytomnimy to, cośmy przed chwilą powiedzieli, że *0* jest najmniejszą, zaś *1* największą treścią logiczną. Otóż najmniejsza, najuboższa, najmniej zdeterminowana treść logiczna — to pojęcie: „przedmiot" („byt" = „coś"). Jeżeli tak, to jest rzeczą zrozumiałą, że powiedzieć o jakimś elemencie, że jest a, jest równoważne z powiedzeniem, że jest on $a + 0$, albowiem $a + 0$ znaczy właśnie „przedmiot a". Co zaś do wzoru $a \times 1 = a$, to głosi on w myśl znaczenia mnożenia logicznego, że, szukając największej części wspólnej dla treści logicznych a i 1, znajdujemy ją $= a$. Wobec tego że *1* jest to treść największa, najbogatsza, taka, która obejmuje (zawiera w sobie) wszystkie inne treści, więc i treść a zawarta jest cała w *1;* jeżeli zaś tak, to, oczywiście, częścią wspólną a i 1 jest a.

Ad 2. Wzory $a + b = b + a$ oraz $ab = ba$ wyrażają t. zw. prawo przemienności dodawania i mnożenia logicznego, w myśl którego suma i iloczyn logiczny nie zależą od porządku działań: ten sam rezultat otrzymamy, dodając pojęcie b do pojęcia a, co i dodając pojęcie a do pojęcia b; podobnie w mnożeniu. Prawo to obowiązuje i w zwykłej algebrze.

Ad 3. Wzory 3^a i 3^b wyrażają t. zw. prawo rozdzielności (dystrybucji). Wzór 3^b: $a(b + c) = ab + ac$ znany jest z algebry zwykłej. W algebrze logiki ma on następujące znaczenie: element wspólny[1]) pojęciu a i pojęciu $b + c$ składa się z dwóch części: elementu wspólnego pojęciu a i pojęciu b oraz elementu wspólnego pojęciu a i pojęciu c (i vice versa). Ten moment

[1]) Właściwie: maksymalnie wspólny.

wspólny między a i $b + c$ został więc tu rozdzielony, rozłożony na dwie części, stąd nazwa prawa rozdzielności (tutaj rozdzielności mnożenia logicznego). Wobec zaś dodawania logicznego obowiązuje wzór 3^a: $a + bc = (a + b)(a + c)$. Znaczy to: ażeby dodać do a iloczyn logiczny $b \cdot c$, trzeba dodać do a raz b, drugi raz c i sumy te pomnożyć przez siebie (i vice versa).

Ad 4. Wzory 4^a i 4^b podają określenie elementu negatywnego (przeczącego) a' (czyli otrzymanego z elementu a przez działanie negacji) przy pomocy odpowiadającego mu elementu pozytywnego (twierdzącego) a oraz elementów 0 i 1. W myśl tych wzorów element a' jest to taki element, który 1) dopełnia element a do 1 $(a + a' = 1)$ i 2) ma minimum wspólności z elementem a $(a \times a' = 0)$.

Do tych wstępnych wyjaśnień, dotyczących powyżej podanego systemu pewników algebry logiki, musimy dołączyć jeszcze szereg dalszych. Otóż przedewszystkiem musimy zwrócić uwagę na to, że elementy a, b, c nie są to w naszem rozumieniu klasy (mnogości) przedmiotów, podpadających pod jakieś pojęcie, lecz że są to właśnie przedewszystkiem same pojęcia a, b, c — treści myślowe, sensy, a więc np. pojęcie „człowiek" znaczy tu nie „klasa ludzi", lecz „ogół cech, właściwych każdemu człowiekowi". Słowem, powyższy system pewników jest u nas przedewszystkiem systemem pewników logiki treści, nie zaś logiki zakresu (klas).

Następnie zwracamy uwagę na pewien charakterystyczny rys powyższego systemu pewników. Otóż wszystkie pewniki występują w nim w dwóch postaciach, rozdwajają się, wyrażają się podwójnie: pierwszy wzór dotyczy dodawania, drugi mnożenia. Mamy tu do czynienia z t. zw. dwoistością (dualnością) logicznego dodawania i mnożenia. Ta dwoistość jest wyrazem nie-zwykłej harmonji, panującej w świecie logicznym, a wyrażającej się w tej właśnie odpowiedniości wzcrów dla dodawania i mnożenia logicznego. Prawo dwoistości (dualności) dotyczy, jak widzimy, wszystkich powyższych pewników algebry logiki. Pozwala nam ona w wyrażeniach typu naszych pewników przechodzić od jednego wzoru do dwoistego z nim przez zamianę znaku $+$ na $\times$ i vice versa oraz *1* na *0* i vice versa, jak to widzimy we wzorach 1 — 4.

W pewnikach powyższych, założonych u podstawy wszystkich twierdzeń algebry logiki, nie widzimy znaku $<$, oznaczającego ważny w logice stosunek zawierania się. Otóż ten stosunek zawierania się daje się sprowadzić do stosunku „=" i działań logicznych, uwzględnionych w powyższych pewnikach, tak że

$$a < b = (b = a + b) \quad (\mathrm{I^a})$$

Ta definicja stosunku zawierania się stanie się oczywistą, gdy weźmiemy pod uwagę, że istotnie, jeżeli treśc a zawiera się w treści b, to dołączając do treści b treść już zawartą w niej a, treści b nie zmieniamy, czyli $a + b = b$, jeżeli $a < b$, i odwrotnie: jeżeli przez dodanie treści a do treści b ta ostatnia zmianie nie ulega, to znaczy to właśnie, że ta dodawana treść a zawarta już jest w treści b.

Powyżej ustanowiona równoważność, jak wszelka zresztą równoważność logiczna, oznacza wzajemne zawieranie się (wynikanie) członów tej równoważności, a więc że z $(a < b)$ wynika $(b = a + b)$ i vice versa. Tę istotę wszelkiej równoważności, to, że polega ona na wzajemnem zawieraniu się członów, wyraża następująca jej definicja:

$$(a = b) = (a < b) + (b < a) \quad (\mathrm{II})$$

W związku z rozpatrywanym obecnie przez nas stosunkiem $<$ chcemy zwrócić uwagę, że prawo dualności (dwoistości) dotyczące wzorów, wyrażających równoważność między elementami, związanemi działaniem $+$ i $\times$, dotyczy również i wzorów, wyrażających nierówności ($<$) między takiemiż elementami. A więc np. wzorowi $a < a + b$ odpowiada wzór: $ab < a$, wyrażający tę niewątpliwą prawdę, że część wspólna (maksymalna) elementów a i b mieści się w elemencie a. Jak widzimy, ażeby przejść od wzoru dla nierówności do dwoistego wzoru, trzeba nietylko znak $+$ zamienić na $\times$ i vice versa (wzgl. jeszcze 0 na 1 i vice versa), lecz poza tem przestawić człony stosunku wynikania. W ten sposób przechodzimy np. od wzoru $0 < a$ do dwoistego dlań wzoru: $a < 1$[1]).

* *
*

Przechodzimy obecnie, po przedstawieniu i wyjaśnieniu pewników algebry logiki i kwestyj z tem najbliżej związanych, do naczelnej sprawy naszej pracy, mianowicie do ustanowienia systemu współrzędnych logiczno-geometrycznych i do zgeometryzowania w ten sposób algebry logiki.

Fakt, że stosunki logiczne, przedewszystkiem stosunki logiki zakresu, dopuszczają schematyzację przestrzenną, jest znany

---

[1]) Należy tu zwrócić baczną uwagę na to, że zakres stosowalności zasady dwoistości, pozwalającej nam przechodzić od wzorów dla dodawania do wzorów dla mnożenia i odwrotnie, jest ograniczony następującemi warunkami: wzory te muszą przedstawiać prawdziwe zawsze równości lub nierówności między wyrazami (stronami), w których występują znaki działań logicznych, natomiast nie mogą występować w stronach tych znaki równości i nierówności, t. j. znaki stosunków równoważności ($=$) i zawierania się ($<$). A więc np. nie możemy stosować zasady dwoistości do zawsze prawdziwego wzoru: $(x < a) + (x < b) = x < (a \times b)$, ponieważ w stronach tej równości (równoważności) oprócz znaków „$+$" i „$\times$" występuje jeszcze znak „$<$".

każdemu, kto uczył się logiki i posiłkował się t. zw. kołami Eulera. Otóż już w możliwości tych diagramatów eulerowskich, czy podobnych schematów, tkwi jądro naszego zagadnienia. Zamiast jednak mówić o tych diagramatach kolistych, które spopularyzowały się od czasu, gdy zaczął używać ich Euler (chociaż znane były już dawniej), weźmiemy pod uwagę diagramaty prostsze, prostolinijne, któremi z predylekcją posługiwał się Leibniz. Jeżeli chcemy unaocznić to, że dwie klasy *a* i *b* mają część wspólną *ab*, wtedy bierzemy zwykle dwa odcinki (*a* i *b*) tej samej linji prostej w ten sposób, że częściowo zachodzą one na siebie. Część wspólna tych dwóch odcinków unaocznia wtedy klasę (*ab*), wspólną danym dwóm klasom, ich iloczyn logiczny.

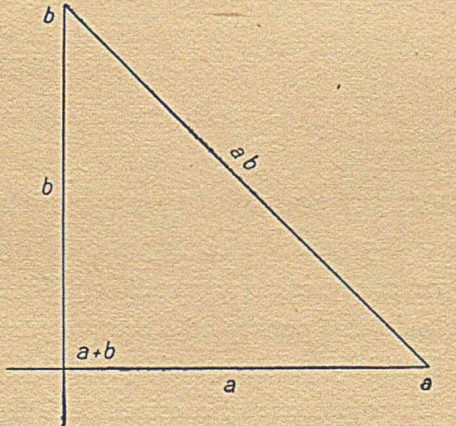
Otóż tego rodzaju schematyzacja, jak powyższa, w której zarówno *a* i *b*, jak też i *ab* są przedstawione zapomocą odcinków prostolinijnych, ma tę wadę zasadniczą, że nie wyraża tego faktu, iż *ab* jest wytworem, tworem pochodnym w stosunku do *a* i *b*, a więc należy, jakgdyby do innego pokolenia, do innego wymiaru. W powyższym jednak schemacie wytwór *ab* przedstawiony jest tak samo zapomocą odcinka prostolinijnego, jak i elementy *a* i *b*, które go tworzą. Gdybyśmy tę niewątpliwą różnowymiarowość gatunku z jednej strony, rodzaju zaś i różnicy gatunkowej — z drugiej chcieli odwzorować w schemacie przestrzennym, wtedy należałoby klasy *a* i *b* przedstawić w postaci dwóch przecinających się prostych *a* i *b*: punkt ich przecięcia symbolizowałby wtedy klasę *ab*, zawartą zarówno w *a*, jak i w *b*, przyczem właśnie ta klasa-wytwór byłaby tworem o innym wymiarze, aniżeli klasy tworzące.

Nam jednak w pracy niniejszej chodzi w pierwszym rzędzie o logikę treści, nie zakresu. Zachodzi przeto pytanie, czy dwie przecinające się (np. pod prostym kątem) linje proste mogą symbolizować również działanie, dotyczące treści logicznych. Odpowiedź na to pytanie wypadnie, oczywiście, twierdząca, tylko że punkt przecięcia tych prostych nie będzie już przy treściowym punkcie widzenia oznaczał tworu wspólnego klasom *a* i *b*, lecz nową treść, powstałą z kumulacji treści pojęciowych *a* i *b*, klasom tym odpowiadających. Będzie to punkt $a + b$. Wytwór ten nie zawiera się teraz w *a* i *b* (jak to było w dziedzinie mnożenia zakresowego), pojęcie np. „prostokąt równoboczny" nie zawiera się w pojęciu „prostokąt", czy w pojęciu „równoboczny", lecz, przeciwnie, pojęcia konstytuujące: „prostokąt" (*a*) i „równoboczny" (*b*) zawierają się w tem pojęciu-wytworze: „prostokąt równoboczny" $(a+b)$. Innemi słowy: $a < a+b$, $b < a+b$. Pojęcia *a* i *b*, jako treści logiczne, wzięte przytem oddzielnie, są tylko możliwością wytworu $a + b$, czemś mniej określonem, mniej zdeterminowanem, aniżeli ten wytwór $a + b$. W niniejszej więc schematyzacji treści logicznych punkt $a + b$ będzie unaoczniał pojęcie zasadniczo pod względem treści bogatsze, pojęcie bardziej zróżniczkowane i wyspecyfikowane (gatunek), aniżeli linje proste *a* i *b* (rodzaj i różnica gatunkowa); punkt $a + b$ nie będzie tu elementem prostej *a* czy *b*, lecz ich determinacją, którą właśnie proste *a* i *b* konstytuują, w której, jako takie, tkwią, zawierają się. Nie będzie to, oczywiście, zawieranie się ekstensywne, lecz zawieranie się jakościowych czynników wytworu w ich syntetycznym wytworze, „tkwienie" w nim tych czynników. W tem znaczeniu właśnie trzeba rozumieć tu przestrzenny stosunek prostych *a* i *b* do punktu $a + b$: proste te przezeń przechodzą, „tkwią" w nim, jako w swym syntetycznym wytworze — i w tym sensie zawierają się w nim [1]).

Pozostaje teraz kwestja, jak w takim razie schematyzować

[1]) Proste pęku tkwią, zawierają się w punkcie-wierzchołku pęku.

mamy treść *ab*, treść bardziej ogólną, mniej zdeterminowaną od treści tworzących *a* i *b*. Otóż na zasadzie powyższego rozumiemy, że temu procesowi abstrakcji odpowiadać będzie w dziedzinie przestrzennej przejście od elementów bardziej wyspecyfikowanych (punktów) do zasadniczo mniej wyspecyfikowanych (prostych), innemi słowy, jeżeli *a* i *b* będą unaocznione przez punkty, to schematem iloczynu *ab* będzie prosta, łącząca te punkty. Prosta ta będzie unaoczniała to, co mają te punkty wspólnego, najbliższy jakościowo element, którego są specyfikacjami. Odpowiednio do tego, że treść *ab*, jako mniej zdeterminowana, zawiera się zarówno w treści *a*, jak i *b*, również i prosta *ab*, jako utwór mniej zdeterminowany, zawierać się będzie w bardziej od niej zdeterminowanych punktach *a* oraz *b*. Zarówno więc w schematach mnożenia, jak i dodawania treści, prosta zawiera się, tkwi w punktach, które wyznacza. Jeżeli teraz na przecinających się pod prostym kątem linjach prostych *a* i *b* weźmiemy punkty *a* i *b* i połączymy je prostą, to schemat



Rys. 1.

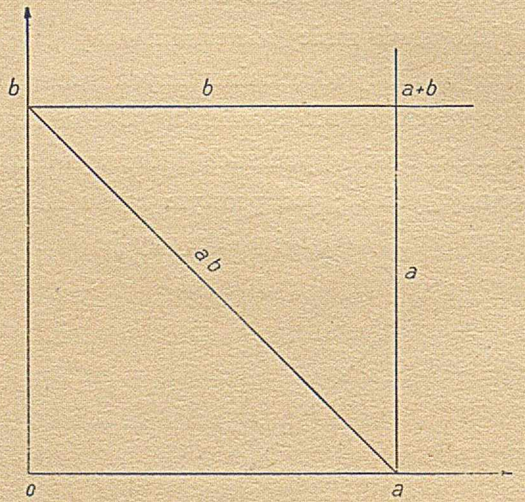
w ten sposób otrzymany będzie przedstawiał przestrzennie zarówno mnożenie, jak i dodawanie pojęć (por. rys. 1).

Mamy tu, jak już wiemy, uprzestrzenione stosunki:

$$a < a + b, \quad b < a + b$$

oraz $\quad ab < a, \quad ab < b$

Zarysowuje się tutaj wyraźnie dwoistość podstawowa formuł logistycznych, i widać już jej związek z podstawową dwoistością geometryczną (planimetryczną), wyrażającą się w tem, że dwie proste *(a* i *b)* wyznaczają punkt *(a + b)*, gdy równocześnie dwa punkty *(a* i *b)* wyznaczają prostą *(ab)*. Widzimy tu tem samem odpowiedniość zupełną między dwoma działaniami logiki, dodawaniem i mnożeniem, a dwoma podstawowemi działaniami geometrji rzutowej, cięciem i łączeniem (rzutowaniem).



Rys. 2.

Otóż diagramat 1-y nasuwa sam przez się myśl, że punkt $a + b$ jest to punkt, wyznaczony przez współrzędne a i b, że więc odpowiednio do tego punkty a i b będą to punkty na osiach współrzędnych. Kreślimy przeto system prostokątny współrzędnych z początkiem w punkcie 0, o osiach $0a$ i $0b$, wybiegających z tego punktu 0. Trójkąt nasz z rys. 1 umieszczamy w ramach tego układu współrzędnych (rys. 2).

W ten sposób kategorja gatunku $a + b$, której konstytucyjnemi elementami, czyli współrzędnemi, będą kategorje rodzaju a i różnicy gatunkowej b, znajduje tu wraz ze swemi współrzędnemi logicznemi wyraz geometryczny. Elementy a i b będą już teraz współrzędnemi logiczno - geometrycznemi. Oczywiście, współrzędne te, proste a i b, nie oznaczają tu wielkości, lecz posiadają tu znaczenie czysto jakościowe, rzutowe, kierunkowe.

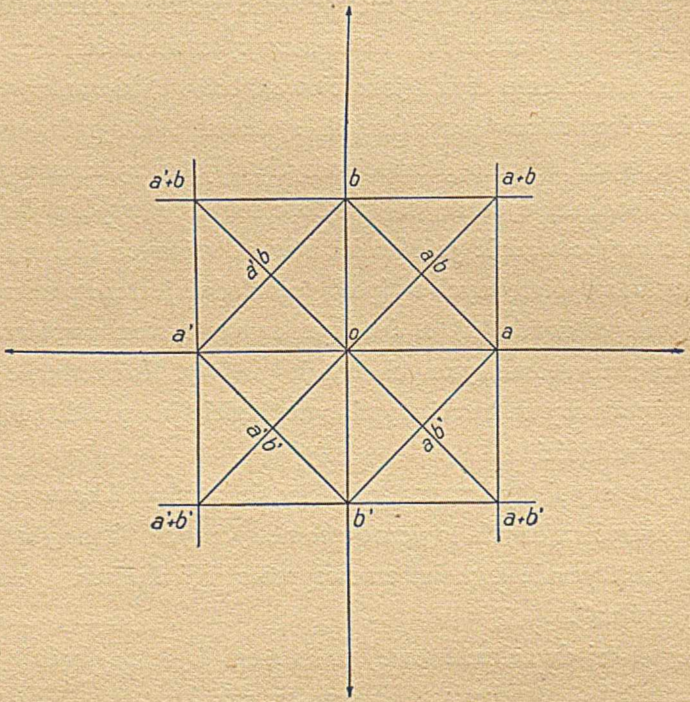
Tak więc mamy tu zaczątek systemu dwuwymiarowego współrzędnych logiczno-geometrycznych. Wystarczy teraz wprowadzić kierunki ujemne, t. zn. dopełnić osie współrzędnych z rys. 2, wyprowadzić je również i w odwrotnych kierunkach z początku współrzędnych 0 (poza tem dodać jeszcze przekątne zewnętrznego kwadratu), a dwuwymiarowy system współrzędnych logiczno-geometrycznych będzie gotowy. Rozszerzenie go w miarę potrzeby na trzeci wymiar nie będzie już przedstawiało żadnych trudności.

Zatrzymamy się tymczasem na układzie płaskim (dwuwymiarowym) współrzędnych logiczno-geometrycznych, konstytuujących geometrycznie dwuelementową przestrzeń logiczną, „przestrzeń myślną".

Schemat tej dwuelementowej przestrzeni logicznej będzie się przedstawiał, jak na rys. 3 (patrz str. nast.).

Otóż przechodzimy teraz do rozpatrzenia geometrycznych odpowiedników podstawowych zasad (pewników) algebry logiki, a więc do właściwego ukonstytuowania logiki geometrycznej.

Pewnik 1^a głosi istnienie elementu 0 takiego, że $a + 0 = a$. Czem jest w naszym systemie (tymczasem dwuelementowym) logiki geometrycznej ten element 0, element o treści najuboższej? Jeżeli $a + 0 = a$, to — w myśl określenia I^a (str. 13) — jest to równoważne twierdzeniu: $0 < a$, określającemu 0 jako treść mniejszą od wszelkiej treści *a*, czyli jako treść minimum. Będzie ten element tutaj płaszczyzną, przechodzącą przez osie współrzędnych, będzie on właśnie samą dwuwymiarową przestrzenią (ściślej: przestrzennością) logiczną, a więc czemś



Rys. 3.

właśnie zupełnie niezróżniczkowanem, treścią również i geometrycznie najuboższą, umożliwiającą jednak istnienie wszelkiej bogatszej treści geometrycznej i przejawiającą się (zawierającą się) w tej treści, podobnie właśnie jak treść logiczna „przedmiot" *(0)*, zawiera się we wszelkiej już zróżniczkowanej treści logicznej i ją umożliwia. Każdy więc element geometryczny, jako przestrzenny właśnie, ma już w sobie ten przestrzenny pierwiastek, i powiedzenie $a+0$ (element geometryczny a, posiadający cechę przestrzenności 0) będzie, oczywiście, tem samem, co powiedzenie wprost a. Przestrzenność, jako taka, nic nie dodaje do treści elementu geometryczno-przestrzennego (gdyż w tej treści już jest zawarta) — takie jest geometryczne znaczenie pewnika 1^a: $a + 0 = a$. Jak widzimy, mamy tu najściślejsze analogon czysto logicznego znaczenia tego pewnika, z tą tylko różnicą, że teraz mówimy o przestrzenności, jako takiej, o przestrzenności wogóle, gdy wtedy mowa była o przedmiocie jako takim, o przedmiocie wogóle. Jeżeli chodzi zaś o 0 już wyspecyfikowane w postaci osi zerowej $0_{aa'}$ lub $0_{bb'}$, to pewnik 1^a ($a+0=a$) będzie geometrycznie oznaczał, że przecięcie prostej a z osią $0_{aa'}$ daje punkt a, jak to stwierdzamy na diagramacie. Podobnie dla osi $0_{bb'}$ i wzoru $b+0=b$. Te osie zerowe $0_{aa'}$ i $0_{bb'}$ łączą się w początku współrzędnych, w punkcie 0.

Pewnik 1^b, dualny do poprzedniego, głosi, że istnieje element 1[1]) taki, iż $a \times 1 = a$.

Przechodząc odrazu do jedności (1), dualnych względem $0_{aa'}$ i $0_{bb'}$, a więc do $1_{a+a'}$ i $1_{b+b'}$, zobrazujemy je łatwo w postaci punktów w nieskończoności na osiach $0_{bb'}$ i $0_{aa'}$; będą to punkty przecięcia prostych a i a' ($a+a'=1_{a+a'}$) oraz b i b' ($b+b'=1_{b+b'}$). Rzut oka na diagramat 3-ci wystarczy, by sprawdzić, że prostą, łączącą punkt a z punktem $1_{a+a'}$, jest istotnie prosta a, zgodnie z pewnikiem 1^b : $a \times 1 = a$. Podobnie i dla elementu b.

Najściślej z pojęciami granicznemi 1 i 0 związany jest poza 1-ym pewnikiem jeszcze pewnik 4, dlatego też teraz bezpośred-

[1]) Jest to, oczywiście, element maximum; jeżeli bowiem z wszelkim elementem a posiada on część wspólną a, znaczy to, że wszelki element a zawiera się w nim ($a<1$), czyli innemi słowy, że 1 jest to maximum logiczne (por. niżej na str. 32 tw. 12^b).

nio przejdziemy do rozpatrzenia jego znaczenia geometrycznego, odkładając na później rozpatrzenie pod tym względem pewników 2 i 3.

Pewnik 4 głosi istnienie elementu negatywnego (a') względem elementu a i określa ten element negatywny, jako taki, który dodany do a daje w sumie element 1 ($a + a' = 1$), pomnożony zaś przez a, daje element 0 ($a \, . \, a' = 0$). Zobrazowują się te określenia elementu negatywnego bardzo łatwo; wiemy mianowicie, że proste a i a' istotnie przecinają się w punkcie $1_{a+a'}$ (punkt w nieskończoności na osi $0_{bb'}$), z drugiej zaś strony widzimy na diagramacie, że oś $0_{aa'}$ istotnie jest podłożem wspólnem elementu a i a' (łączy mnożnie te elementy). Głębsze geometryczne a zarazem i logiczne znaczenie tego określenia elementu negatywnego przy pomocy a, 0 i 1 odsłoni się nam później, gdy ujrzymy w dziedzinie logiki geometrycznej elementy harmoniczne.

Przechodzimy zkolei do odwzorowania geometrycznego pewnika 2-go, wyrażającego t. zw. prawo przemienności (komutacji) dla składników i iloczynów: $a + b = b + a$ (2^a) oraz $ab = ba$ (2^b).

Geometrycznie sprawdzamy pewnik 2^a natychmiast, gdyż oczywistą jest rzeczą, że otrzymamy ten sam punkt, niezależnie od tego, czy linję a przetniemy linją b (punkt $a + b$), czy też linję b przetniemy linją a (punkt $b + a$). Podobnie i dla komutacji czynników.

Wreszcie pewniki rozdzielności (dystrybucji): $a + bc = (a + b)(a + c)$ — pewnik 3^a oraz $a(b + c) = ab + ac$ — pewnik 3^b. W pewnikach tych występują już trzy elementy: a, b, c i dlatego też w tej pełnej postaci pewniki te wychodzą poza obrąb logiki geometrycznej dwuwymiarowej (dwuelementowej), do której teraz tymczasowo ograniczyliśmy się. Każdy element (*a, b, c*) jest dla nas przedstawicielem odmiennego wymiaru, odmiennej kategorji, i z tego też powodu wzory, w których występują elementy *a* i *b* (pozytywne lub negatywne), odwzorowują się na płaszczyźnie, natomiast wzory trójelementowe — w przestrzeni trójwymiarowej. Dlatego też obraz geometryczny pewników 3 w ich pełnej, trójelementowej postaci damy nieco później, gdy przejdziemy do ukonstytuowania trójwymiarowej przestrzeni logiczno-geometrycznej (por. str. 35 i 36). Postaramy się jednak już teraz podać odwzorowanie geometryczne dla pewników 3, zredukowanych do płaszczyzny przez podstawienie elementu b' na miejsce elementu *c*. Jednakże przy takiem podstawieniu opuszczamy już dziedzinę właściwych pewników i przechodzimy do twierdzeń pochodnych. Dlatego też te najbliższe wnioski z pewników 3 rozpatrzymy już w następnym rozdziale, poświęconym geometryzacji twierdzeń pochodnych.

Antycypując geometryzację trójelementowego pewnika 3 i opierając się na wykazanej poniżej schematyzacji przestrzennej pewników 1, 2, 4, możemy wyrazić pewność, że i wszystkie pochodne zasady algebry logiki, jako że są oparte o pewniki 1 — 4, znajdą również swe odwzorowanie przestrzenne.

Rozdział II.

ZGEOMETRYZOWANIE TWIERDZEŃ LOGIKI ŚCISŁEJ.

Przedewszystkiem — jak zapowiedzieliśmy przy końcu poprzedniego rozdziału — wyprowadzimy wnioski najbliższe z pewników 3. Podstawimy mianowicie na miejsce elementu c we wzorach 3^a i 3^b element b'. Da nam to bardzo ważne prawo logiki, t. zw. prawo dwudzielności (dichotomji). Otrzymamy wtedy:

$$a+bb' = (a+b)\ (a+b')$$
$$a\ (b+b') = ab+ab'$$

Wobec tego że $bb' = 0$ (pewnik 4^b), zaś $a + 0 = a$ (pewnik 1^a) — i odpowiednio dwoiście dla 1 — otrzymamy dwa dwoiste wzory zasady dichotomji:

$$a=(a+b)\ (a+b') \qquad (5^a)$$
$$a=ab+ab' \qquad (5^b)$$

Np. 5^a: „człowiek“ (a) jest tem, co mają maximum wspólnego „człowiek dobry“ $(a+b)$ i „człowiek niedobry“ $(a+b')$.

Jako zasada logiki geometrycznej zasada ta jest niezwykle przejrzysta (por. rys. 3). Wzór 5^a przedstawia prostą a, jako iloczyn logiczno-geometryczny jej punktów $a+b$ i $a+b'$. Prosta a jest tem, co mają wspólnego punkty $a+b$ i $a+b'$, jest rodzajem (a) wspólnym dwóm gatunkom tego rodzaju $a+b$ i $a+b'$.

Na te dwa gatunki właśnie podzielił się rodzaj *a* — stąd nazwa zasady dichotomji. Podobnie przedstawia się rzecz z formułą dwoistą 5^b. Tylko zamiast podziału prostej na dwa elementy punktowe, mamy tu dwoiście podział punktu *a* na dwa elementy linjowe *ab* i *ab'*. Widzimy, jak te proste *ab* i *ab'* są właśnie zjednoczone w punkcie *a*, z którego się rozwidlają. Dwoistość wzorów dichotomicznych występuje tu w przestrzeni niezwykle przejrzyście; widzimy przytem, że element *a* również zmienia swą postać przy przejściu od formuły 5^a do formuły 5^b: w pierwszej z nich jest prostą, w drugiej — punktem.

Wyprowadzimy teraz t. zw. zasadę tautologji, wyrażającą najdobitniej nieilościowy charakter logiki; głosi ona:

$$a+a=a \qquad (6^a)$$

$$a \cdot a=a \qquad (6^b)$$

Wyprowadzimy wzory te, opierając się na pewnikach: 1, 3 i 4, przyczem twierdzenie 6^a opiera się na pewnikach 1, 3^a i 4, twierdzenie zaś 6^b na pewnikach 1, 3^b i 4.

$$a+a \overset{1)}{=} (a+a) \times 1 \overset{2)}{=} (a+a)(a+a') \overset{3)}{=} a+aa' \overset{4)}{=} a+0 \overset{5)}{=} a$$

$$aa=aa+0=aa+aa'=a(a+a')=a \times 1=a$$

Przestrzenne znaczenie twierdzenia tautologji jest oczywiste: prosta *a*, przecięta przez samą siebie, nie zmienia się. Podobnie punkt *a*, połączony z samym sobą.

Przejdziemy teraz do t. zw. prawa absorpcji, wyrażonego przez wzory:

$$a+ab=a \qquad (7^a)$$

$$a\,.\,(a+b)=a \qquad (7^b)$$

Oto dowód tych wzorów dwoistych, oparty o pewniki 1, 3, 4, 2 oraz twierdzenie 6.

---

[1]) pewnik 1^b. [2]) p. 4^a. [3]) p. 3^a. [4]) p. 4^b. [5]) p. 1^a.

$a+ab=a.1+ab=a(1+b)=a(b+b'+b)=a(b+b+b')=$
$=a(b+b')=a\,.\,1=a$

$a(a+b)=(a+0)(a+b)=a+0\,.\,b=a+bb'\,.\,b=a+bbb'=$
$=a+bb'=a+0=a$

Rzut oka na rys. 3 pozwala nam znaleźć odwzorowanie przestrzenne tych wzorów. Stwierdzamy, mianowicie, z jednej strony, że prosta a i prosta ab przecinają się istotnie w punkcie a (czyli że $a+ab=a$), z drugiej zaś strony, że dwoiście: punkt a i punkt $a+b$ są połączone prostą a (czyli że $a(a+b)=a$).

Zkolei przechodzimy do t. zw. rozwinięcia 1 i 0 względem a i b. Wyprowadzimy odnośne wzory przez oparcie się o pewniki 4 i o zasadę dichotomji.

Pewnik 4^a głosi: $1=a+a'$. Podstawiając teraz zamiast a — zgodnie z 5^b — $ab+ab'$ i odpowiednio zamiast a' — $a'b+a'b'$ otrzymamy:

$$1=ab+ab'+a'b+a'b' \qquad (8^a)$$

Podobnie, dwoiście:

$$0=(a+b)(a+b')(a'+b)(a'+b') \qquad (8^b)$$

otrzymamy, podstawiając we wzór 4^b $(0=a\,a')$ a i a' według wzoru dichotomicznego 5^a.

Na naszym podstawowym diagramacie płaskim widzimy przestrzenne schematy tych rozwinięć: 4 wierzchołki zewnętrznego kwadratu (o bokach a, a', b, b') są elementami rozwinięcia 0 (zera), jego czynnikami; 4 boki wewnętrznego kwadratu (o wierzchołkach a, a', b, b') są elementami rozwinięcia 1 (jedności), jej składnikami. Elementy dwoiste powyższych dwoistych względem siebie kwadratów dają nam niezwykle prosty i piękny obraz przestrzenny dwoistych względem siebie rozwinięć 0 i 1.

Znając teraz wzory i schematy rozwinięć 0 i 1 możemy przejść do bardzo ważnych formuł de Morgana, panujących nad zagadnieniem negacji pojęć. Formuły te głoszą:

$$(a+b)' = a'b' \quad (9^a)$$

$$(ab)' = a'+b' \quad (9^b)$$

Czyli: zaprzeczenie sumy dwóch pojęć jest identyczne z iloczynem ich negacyj (9^a) oraz zaprzeczenie iloczynu dwóch pojęć jest identyczne z sumą ich negacyj (9^b). [Np. zaprzeczyć pojęciu „dobry i rozumny", to znaczy stwierdzić: „albo niedobry, albo nierozumny," przyczem pamiętać należy, że słówko „albo" nie ma w algebrze logiki wyłączającego znaczenia, a więc że „albo niedobrym, albo nierozumnym" może być również ten, kto jest równocześnie „niedobry i nierozumny"].

Wzory powyższe łatwo wyprowadzimy z formuł rozwinięcia dla *1* i *0*, pamiętając o pewnikach 4. Zaczniemy od dowodu wzoru 9^b.

Pewnik 4^a ustanawia: $1 = a+a'$. Znaczy to, że składnik jakiś i jego negacja dają w sumie *1*. Jeżeli tak, to we wzorze 8^a, biorąc ab, jako jeden składnik, otrzymujemy, że jego negacją jest: $ab'+a'b+a'b'$, czyli:

$$(ab)' = ab'+a'b+a'b'$$

Lecz $ab'+a'b+a'b' = a'+b'$. Możemy to stwierdzić, rozwijając $a'+b'$ według wzorów dichotomji 5^b. Mianowicie: $a'=a'b+a'b'$, $b'=b'a+b'a'$, a więc $a'+b'=a'b+a'b'+$ $+ab'+a'b'=ab'+a'b+a'b'$. A więc

$$(ab)'=a'+b'$$

W ten sam sposób postępując dwoiście, dowiedziemy wzoru $(a+b)' = a'b'$ (9^a).

Przestrzennie ten ostatni wzór znaczy: zaprzeczeniem wierzchołka zewnętrznego kwadratu jest bok wewnętrzny kwadratu, znajdujący się w ćwiartce przeciwległej (na krzyż). Wzór zaś

9^b tłomaczy się przestrzennie: zaprzeczeniem boku wewnętrznego kwadratu jest wierzchołek zewnętrznego, położony w ćwiartce przeciwległej (na krzyż). W ten sposób odrazu z diagramatu 3 odczytać możemy cztery formuły de Morgana, dotyczące zaprzeczenia sumy oraz wzory dwoiste, dotyczące zaprzeczenia iloczynu:

$$\left.\begin{aligned} (a+b)' &= a'b' \\ (a'+b)' &= ab' \\ (a'+b')' &= ab \\ (a+b')' &= a'b \end{aligned}\right\} 9^{A}) \qquad \left.\begin{aligned} (ab)' &= a'+b' \\ (a'b)' &= a+b' \\ (a'b')' &= a+b \\ (ab')' &= a'+b \end{aligned}\right\} 9^{B})$$

Dowód każdej z tych formuł daje się również łatwo prześledzić geometrycznie krok za krokiem. Np. dowód wyżej podany: $(ab)' = a'+b'$. Wychodzimy z przestrzennego obrazu rozwinięcia *1* w postaci sumy czterech boków wewnętrznego kwadratu. Negacja jednego z tych boków $(ab)'$ będzie się geometrycznie przedstawiała, jako suma pozostałych trzech boków: $a'b + a'b' + ab'$. Lecz widzimy na diagramacie, że $a'b +$ $+ a'b'$ dają w zjednoczeniu a', zaś $a'b' + ab'$ dają b' — tak że suma trzech prostych $a'b + a'b' + ab'$, czyli $(ab)'$ zwija się do punktu $a'+b'$. I tak we wszystkich innych przypadkach. Trudno o bardziej wymowne spełnienie się marzenia Leibniza, aby każdy krok rozumowania abstrakcyjnego mógł znaleźć swe analogon przestrzenne; istotnie widzimy tu, że „scriptura philosophica posset etiam exhiberi per linearum ductum, seu geometriam“ (Gerh. Phil., VII, 41).

Wreszcie rozpatrzymy parę najważniejszych twierdzeń, w których występuje stosunek zawierania się.

Określiliśmy ten stosunek (str. 13) w ten sposób:

$$(a < b) = (b = a+b) \qquad (\mathrm{I^a})$$

Otóż łatwo wykazać, że jeżeli $b = a+b$, to $ab = a$.

Mianowicie, podstawiając w ab zamiast b równoważne mu według założenia $a+b$, otrzymujemy:

$$ab = a\,(a+b) = a$$

I odwrotnie, jeżeli $ab = a$, to $a+b = b$.

Mianowicie, podstawiając w $a+b$ zamiast a równoważne mu według założenia ab, otrzymujemy:

$$a+b = ab+b = b$$

Widzimy tedy, że równość $b = a+b$ jest równoważna równości $a = ab$. Wobec powyższego i określenia I^a stosunek $a < b$ możemy zastąpić przez równość $a = ab$, czyli

$$a<b = (a=ab) \qquad (\mathrm{I}^b)$$

Możemy jeszcze inną równoważną równością zastąpić stosunek $a < b$. Jeżeli, mianowicie, $a = ab$, to

$$ab' = ab\,.\,b' = a\,.\,0 = a\,.\,a\,.\,a' = a\,.\,a' = 0.$$

I odwrotnie: jeżeli $ab' = 0$, to $a = ab$.

Według bowiem zasady dichotomji: a $= ab+ab'$ (5^b). Jeżeli zaś $ab' = 0$, to otrzymujemy:

$$a = ab+0 = ab.$$

Wobec powyższego i twierdzenia I^b stosunek $a < b$ możemy zastąpić przez równość $ab' = 0$, czyli:

$$a < b = (ab' = 0) \qquad (\mathrm{I}^c)$$

Podobnie, wychodząc z równoważności $a < b = (b = a+b)$, otrzymujemy równoważność:

$$a < b = (a'+b = 1) \qquad (\mathrm{I}^d)$$

Mamy tedy szereg równoważnych określeń stosunku zawierania się:

$$(a<b) = (b=a+b) = (a=ab) = (ab' = 0) = (a'+b = 1) \qquad (\mathrm{I})$$

Rozpatrzmy teraz geometryczne odwzorowania tych równoważnych określeń stosunku $a < b$.

Sens geometryczny znaku zawierania się polega — jak wiemy — na tem, że linja prosta, element mniej zdeterminowany, przechodzi przez punkt, jako element bardziej zdeterminowany (zawiera się w tym punkcie, tkwi w nim). Tak więc wzór I^a: $a < b = (b = a+b)$ mówi nam, że tylko wtedy prosta a przejdzie przez punkt b, gdy punkt $a+b$ utożsami się przestrzennie z punktem b — i zależność tę istotnie stwierdzamy na diagramacie 3, prosta bowiem a przechodzi przez punkt $a+b$, i trzeba dopiero przesunięcia się tego punktu do punktu b (względnie punktu b do punktu $a+b$), by równocześnie i prostą a przeprowadzić przez punkt b. Wtedy jednak równocześnie prosta a zajmie położenie prostej ab (względnie prosta ab położenie prostej a), sprawdzając w ten sposób równoważność I^b : $a < b = (a = ab)$. Równoważność zaś I^c: $a < b = (ab' = 0)$, sprowadzoną do równoważności $(a = ab) = (ab' = 0)$, możemy otrzymać geometrycznie, tłomacząc przestrzennie wszystkie posunięcia, które nas do niej doprowadziły. A więc przedewszystkiem: wynikanie $ab' = 0$ z wyrażenia $a = ab$ (równoważnego $a < b$). Otóż prostą ab' otrzymujemy, mnożąc punkt a przez punkt b'; mnożenie zaś prostej ab przez b' rozbijamy na dwa etapy: mnożymy nasamprzód punkt b przez punkt b', a następnie w ten sposób otrzymany iloczyn przez punkt a. Mnożenie punktu b przez punkt b' daje nam oś $0_{bb'}$, którą zastępujemy przez równoważny jej punkt 0; następnie mnożymy punkt ten przez punkt a, otrzymując w rezultacie łączącą te punkty oś $0_{aa'}$. W ten sposób z równoważności $a = ab$ otrzymujemy równoważność $ab' = 0$, jako równoważność prostej ab' i osi $0_{aa'}$. Krócej możnaby to przedstawić ad oculos, zwracając uwagę na to, że gdy prostą ab doprowadzamy przez obrót około punktu a do koincydencji z prostą a, to tem samem prosta ab' (prostopadła do *ab)* zajmie położenie osi $0_{aa'}$. I odwrotnie, gdy prosta *ab'* zajmie położenie $0_{aa'}$, to prosta *ab* zajmie położenie prostej *a*. Podobnie odwzorowujemy przestrzennie wyrażenie $\mathrm{I^d}$: $a < b = (a' + b = 1)$.

Przechodzimy teraz do t. zw. zasady symplifikacji (uproszczenia), wyrażającej się w znanych już nam wzorach:

$$a < a + b \qquad (10^a)$$

$$ab < a \qquad (10^b)$$

Twierdzenie to możemy natychmiast wyprowadzić, opierając się na określeniu stosunku zawierania się ($\mathrm{I^b}$) i zasadzie absorpcji (7).

$$a < b = (a = ab) \ (\mathrm{I^b}),$$

podstawiając zamiast *b* element $a+b$, otrzymamy:

$$a < a + b = [a = a \cdot (a + b)].$$

Wobec tego że $a = a\,(a+b)$ jest zawsze prawdą (7^b), więc i zawsze prawdziwą jest zasada:

$$a < a + b.$$

Podobnie przeprowadzamy dowód (10^b).

Widzimy to właśnie na diagramacie: prosta *a* przechodzi przez punkt $a+b$, prosta *ab* zaś przez punkt *a*. W geometrji ten stosunek przechodzenia prostej przez punkt, czy też leżenia punktu na prostej, nosi nazwę stosunku incydencji.

W analogiczny do poprzedniego sposób dowiedziemy jeszcze zasady tożsamości, która w algebrze logiki występuje przeważnie w postaci:

$$a < a \qquad (11)$$

Twierdzenia te wyprowadzamy, opierając się na określeniu stosunku zawierania się $\mathrm{I^a}$ i na zasadzie tautologji 6^a:

$$a < b = (b = a + b) \ (\mathrm{I^a}),$$

podstawiając *a* zamiast *b*, otrzymujemy:

$$a < a = (a = a + a).$$

Wobec tego że $a = a + a$ jest zawsze prawdą (6^a), więc zawsze prawdziwą jest zasada:

$$a < a.$$

Twierdzenie 11 można również, opierając się na określeniu równoważności II (str. 13), pisać w postaci:

$$a = a \qquad (11')$$

Przestrzenny odpowiednik twierdzenia 11 ($a < a$) widzimy na diagramacie: prosta a przechodzi przez punkt a.

W podobny sposób, jak tw. 10 dowieść również można, opierając się na określeniu stosunku zawierania się i pewnikach 1, znanych nam już twierdzeń, charakteryzujących 0 i 1, jako minimum i maximum logiczne:

$$0 < a \qquad (12^a)$$

$$a < 1 \qquad (12^b)$$

Geometrycznie: oś $0_{aa'}$ przechodzi przez punkt a; i dualnie: prosta a przechodzi przez punkt w nieskończoności $1_{a+a'}$.

* *

*

Podaliśmy i przestrzennie przedstawiliśmy szereg najważniejszych twierdzeń logiki dwuelementowej. Gdy okaże się potrzeba innych jeszcze twierdzeń z dziedziny logiki płaskiej, podamy je już oddzielnie w odpowiedniem miejscu, teraz zaś przechodzimy do ukonstytuowania przestrzeni logicznej trójelementowej, trójwymiarowej.

Jako punkt wyjścia bierzemy pozytywną ćwiartkę ($a + b$) płaszczyzny zerowej topologiki (logiki geometrycznej) dwuelementowej z jej półosiami 0_a i 0_b przecinającemi się w początku współrzędnych 0. Prostopadle do tej płaszczyzny w punkcie 0 przeprowadzamy trzecią oś (właściwie półoś) współrzędnych logiczno-geometrycznych 0_c i na niej wyznaczamy punkt c, obraz kategorji „różnica indywidualna" (podobnie jak na osi *a* mieliśmy punkt *a*, obraz kategorji „rodzaj", i na osi *b* — punkt *b*, obraz kategorji „różnica gatunkowa"). Na płaszczyźnie znaleźliśmy obraz geometryczny sumy $(a+b)$ i iloczynu (ab) współrzędnych płaskich *a* i *b*. Obecnie chcemy dać obraz sumy i iloczynu współrzędnych *a*, *b*, *c*, a więc przejść musimy od obrazu przestrzennego $a + b$ i ab do odwzorowania przestrzennego $a+b+c$ i abc. Ażeby uprzestrzenić sumę logiczną $a+b+c$ (kategorja „indywiduum", „jednostka"), prowadzimy w punkcie $a+b$ (por. rys. 4) prostą prostopadłą do płaszczyzny osi *a* i *b*. Będzie to prosta również $a+b$, podobnie jak w logice geometrycznej płaskiej prostą prostopadłą do osi w punkcie *a* była również prosta *a*. Następnie przez punkt *c* półosi *c* prowadzimy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny osi *a* i *b* (podobnie jak na płaszczyźnie prowadziliśmy przez punkt *b* prostą *b*, równoległą do osi *a*) i bierzemy punkt przecięcia tej płaszczyzny z prostą $a+b$. Będzie to właśnie punkt $a+b+c$, którego współrzędnemi będą proste *a*, *b*, *c*. Dla uprzestrzenienia iloczynu logicznego abc prowadzimy przez prostą ab i punkt *c* płaszczyznę, która przetnie płaszczyzny współrzędnych według prostych ab, bc i ac, tworząc trójkąt abc o współrzędnych punktowych *a*, *b*, *c*. Ta właśnie płaszczyzna (wzgl. trójkąt) abc będzie przestrzennem odwzorowaniem trójelementowego iloczynu logicznego (por. rys. 4 na str. nast.).

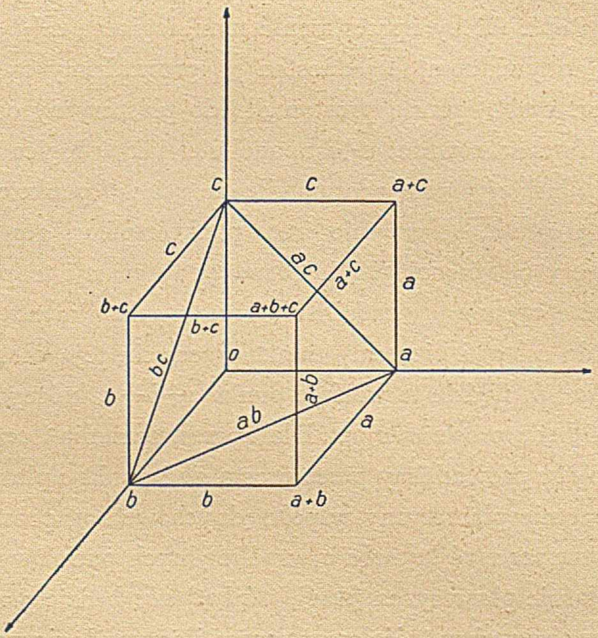
Musimy pamiętać, że płaszczyzna jest tu tworem uboższym treściowo od prostej, podobnie jak prosta jest tworem uboższym od punktu, i że przeto płaszczyzna przechodzi przez swe proste i punkty (zawiera się w nich). Pamiętając o tem, możemy wprost z diagramatu 4 odczytać następujące związki:

$a+b<a+b+c$, podobnie: $a+c<a+b+c$ i $bc<a+b+c$ (13[a])

$abc < ab$, podobnie: $abc<ac$ i $abc<bc$ (13[b])

Są to, oczywiście, wzory, wyrażające w przestrzeni zasadę symplifikacji, analogiczną do zasady, wyrażonej dla płaszczyzny we wzorach 10.

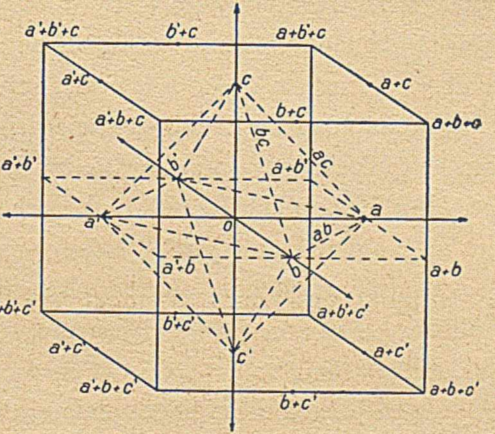
Wzory 13 są również, jak widzimy, wzorami dwoistemi, albowiem od wzoru 13[a] do wzoru 13[b] przechodzimy przez zmianę $+$ na $\times$ oraz przeniesienie członów stosunku zawiera-



Rys. 4.

nia się. W dwoistych wzorach 13 znajdujemy wyraz podstawowej dwoistości geometrycznej, panującej w przestrzeni. Mianowicie: prostej $a+b$ odpowiada tu dwoiście prosta ab, punktowi zaś $a+b+c$ odpowiada dwoiście płaszczyzna abc. Jest to właśnie dwoistość ustanowiona dla przestrzeni przez geometrję rzutową: w przestrzeni odpowiada dwoiście punktowi płaszczyzna i vice versa, prostej zaś dwoiście — prosta.

Wystarczy teraz wprowadzić kierunki ujemne, t. zn. dopełnić osie współrzędnych z rys. 4, wyprowadzając je z początku współrzędnych w przeciwnych kierunkach, a otrzymamy trójwymiarowy system współrzędnych logiczno-geometrycznych, konstytuujący geometryczną trójelementową przestrzeń logiczną, przestrzeń już nie gatunków, lecz jednostek (por. rys. 5).



Rys. 5.

Otóż przedewszystkiem — zanim przejdziemy do geometryzacji twierdzeń trójelementowej logiki — musimy wywiązać się z zobowiązania, któregośmy dotychczas jeszcze nie spełnili, mianowicie podać odpowiednik geometryczny pewnika rozdzielności (dystrybucji), który w pełnej swej postaci wybiega poza dziedzinę płaską (por. str. 23). Dwoista formuła zasady dystrybucji tak się przedstawia:

$$a+bc = (a+b)(a+c) \qquad (3^a)$$

$$a(b+c) = ab+ac \qquad (3^b)$$

Zwróćmy się do rys. 4. Lewa strona równości 3^a przedstawia przecięcie dwóch płaszczyzn: płaszczyzny *a* i płaszczyzny *bc*, przechodzącej przez prostą *bc*, równolegle do osi *0a*. Ta płaszczyzna *bc* (przechodząca przez proste *b* i *c)* przetnie płaszczyznę *a* — jak to widać na obrazie przestrzeni logicznej — wzdłuż prostej, przechodzącej przez punkty $a+b$ i $a+c$, a więc wzdłuż prostej $(a+b) \,.\, (a+c)$, jak to właśnie stwierdza prawa strona równości 3^a. Przecięcie (zespolenie) więc płaszczyzn *a* i *bc* nie jest niczem innem, jak prostą $(a+b)\,(a+c)$ — i to właśnie głosi zasada topologiczna 3^a.

Zasada dwoista 3^b mówi geometrycznie, że przecięciem płaszczyzn *ab* i *ac* jest prosta $a\,(b+c)$. Istotnie, jeżeli zwrócimy się do schematu przestrzeni logicznej, to stwierdzimy naocznie, że płaszczyzna *ab* (przechodząca przez proste *a* i *b*, a więc przez punkty $a+c$ i $b+c$) oraz płaszczyzna *ac* (przechodząca przez proste *a* i *c*, a więc i przez punkty $a+b$ i $b+c$) mają wspólne: 1) punkt $b+c$, a następnie jeszcze punkt *a*. Znaczy to więc, że przecięciem płaszczyzn *ab* i *ac* $(ab+ac)$ jest prosta $a\,(b+c)$, co właśnie głosi zasada 3^b.

Przyjrzyjmy się tu jeszcze nieco bliżej pięknej dwoistości geometrycznej powyższych zasad, idącej krok za krokiem wślad ich dwoistości logicznej. We wzorze 3^a mieliśmy po stronie prawej znaku równości dwa punkty $a+b$ i $a+c$ złączone prostą $(a+b)\,(a+c)$. Temu odpowiadają dwoiście we wzorze 3^b dwie płaszczyzny *ab* i *ac*, przecinające się wzdłuż prostej $ab+ac$. Dalej, lewa strona równości 3^a wskazuje, że prosta $(a+b) \,.\, (a+c)$ jest identyczna z prostą, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny *bc* i *a*. Odpowiednio do tego lewa strona wzoru 3^b wskazuje dwoiście, że prosta $ab+ac$ jest identyczna z prostą, która łączy punkty $b+c$ i *a*.

Wywiązaliśmy się teraz całkowicie z naszego przyrzeczenia, danego na str. 23, i możemy przejść do wykazania przestrzennych odpowiedników twierdzeń logiki trójelementowej. Ograniczymy się tu do paru tylko najbardziej ważnych przykładów.

Przedewszystkiem znana z algebry zwykłej zasada łączności (asocjacji):

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (14^a)$$

$$ab\times c=a\times bc \qquad (14^b)$$

Nie podajemy tu — nie chcąc nużyć czytelnika — nieco skomplikowanego dowodu tego twierdzenia i zadowalamy się bezpośredniem sprawdzeniem go w intuicji przestrzennej. Rzut oka na rys. 4 pozwala stwierdzić: 1) że ten sam punkt $(a+b+c)$ otrzymujemy niezależnie od tego, czy przecinamy prostą $a+b$ płaszczyzną c, czy też prostą $b+c$ tniemy płaszczyzną a (14^a); 2) że tę samą płaszczyznę (abc) otrzymujemy przez połączenie prostej ab z punktem c, jak i przez połączenie prostej bc z punktem a. Wszędzie widzimy tu przytem całkowite odwzorowanie dwoistości logicznej dodawania i mnożenia w postaci dwoistości geometrycznej cięcia i łączenia (rzutowania).

Na zakończenie podamy jeszcze wyjątkowo przejrzyste pod względem geometrycznym odwzorowanie zasad rozwinięcia *1* i *0*, rozszerzonych na trzy elementy, oraz uogólnionych w tenże sposób zasad de Morgana.

Uogólnione zasady rozwinięć *1* i *0* otrzymamy, rozwijając dichotomicznie względem c i c' każdy element ich rozwinięć płaskich (por. str. 26, wzory 8). Otrzymamy w ten sposób:

$$1 = abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + \\ + a'b'c + a'b'c' \qquad (15^a)$$

$$0=(a+b+c)(a+b+c')(a+b'+c)(a+b'+c') \\ (a'+b+c)(a'+b+c')(a'+b'+c)(a'+b'+c') \qquad (15^b)$$

Wzory te posiadają niezwykle prostą i piękną interpretację geometryczną (por. rys. 5). Elementami rozwinięcia *0* jest 8 punktów-wierzchołków sześcianu o ścianach: a, a', b, b', c, *c'*; elementami rozwinięcia *1* jest 8 trójkątów, tworzących ściany ośmiościanu, posiadającego wierzchołki *a, a', b, b', c, c'* w środku ścian powyższego sześcianu. Dwa powyższe wielościany Platona są — jak wiadomo — względem siebie dwoiste, t. j. mają tę samą liczbę krawędzi, a każdej ścianie m-krawędziowej (m-kątnej) w jednym odpowiada wierzchołek kąta m-ściennego w drugim. Mianowicie, sześcian posiada: 6 ścian czworokątnych, 8 wierzchołków kątów trójściennych, 12 krawędzi [1]); ośmiościan zaś: 6 wierzchołków kątów czworościennych, 8 ścian trójkątnych, 12 krawędzi. Ta dwoistość geometryczna wielościanów Platona okazuje się tylko odbiciem dwoistości logicznej rozwinięć trójkowych *0* i *1*. Na płaszczyźnie, jak pamiętamy, dwoistość logiczna dwójkowych rozwinięć *0* i *1* wyrażała się w dwoistości dwóch kwadratów (o bokach, wzgl. wierzchołkach *a, a', b, b')*, które się okazują przecięciami w mowie będących wielościanów foremnych przez poziomą płaszczyznę współrzędnych (por. rys. 5). Trudno o piękniejsze uwidocznienie równoległości myśli i rozciągłości.

Od wzorów, dających trójkowe rozwinięcie *0* i *1*, krok już tylko do uogólnionych formuł de Morgana:

$$(a + b + c)' = a'b'c' \qquad (16^a)$$

$$(abc)' = a' + b' + c' \qquad (16^b)$$

Znaczy to geometrycznie (por. rys. 5): zaprzeczenie (dopełnienie) ściany trójkątnej *abc* jest to punkt $a'+b'+c'$ (form. 16^b), zaprzeczeniem zaś (dopełnieniem) punktu $a+b+c$ jest ściana trójkątna $a'b'c'$ (form. 16^a). Czyli: zaprzeczeniem (dopeł-

---

[1]) Te trzy liczby: 6, 8, 12 stanowią szereg, odpowiadający członom proporcji harmonicznej, w jakiej znajdują się tony akordu, składającego się z primy, kwarty i oktawy (1, $^4/_3$, 2). Z tego powodu pitagorejczycy nazywali sześcian „harmonją geometryczną".

nieniem) ściany ośmiościanu Platona jest wierzchołek dwoistego z nim, obejmującego go sześcianu, wierzchołek, położony w przeciwległej ósemce przestrzennej; i odwrotnie: zaprzeczeniem (dopełnieniem) wierzchołka sześcianu jest przeciwległa ściana zawartego w nim ośmiościanu. W ten sposób odrazu z rysunku odczytać możemy 8 uogólnionych wzorów de Morgana dla zaprzeczenia sumy i tyleż wzorów dwoistych, dotyczących zaprzeczenia iloczynu.

Dowód każdej z tych formuł również da się łatwo geometrycznie prześledzić krok za krokiem. Ażeby np. zaprzeczyć abc (16^b), rozwijamy człony tego iloczynu przy pomocy wzorów dichotomicznych. Wobec tego że

$a = (a + b)(a + b') = (a + b + c)(a + b + c')(a + b' + c)$
$(a + b' + c')$ — iloczyn czterech wierzchołków ściany a,

$b = (b + a)(b + a') = (b + a + c)(b + a + c')(b + a' + c)$
$(b + a' + c')$ — iloczyn czterech wierzchołków ściany b,

$c = (c + a)(c + a') = (c + a + b)(c + a + b')(c + a' + b)$
$(c + a' + b')$ — iloczyn czterech wierzchołków ściany c,

otrzymujemy $abc = (a + b + c)(a + b + c')(a + b' + c)$
$(a + b' + c')(a' + b + c)(a' + b + c')(a' + b' + c)$.
Człony powyższego iloczynu przedstawiają 7 wierzchołków sześcianu. Jeżeli więc iloczyn powyższy $\overline{abc}$ (ścianę trójkątną ośmiościanu) zaprzeczamy, otrzymamy oczywiście brakujący do 1 ósmy wierzchołek sześcianu, punkt: $a' + b' + c'$.

Przykłady powyższe wystarczą do wykazania, w jaki sposób przedstawiają się przestrzennie zasady trójelementowe logiki ścisłej. Fundamenty pod ścisłą logikę geometryczną w ten sposób zostały założone.

Rozdział III.

PŁASZCZYZNA KATEGORJALNA I JEJ ELEMENTY.

Logika geometryczna powyżej ugruntowana posiada charakter wybitnie kategorjalny, nie-mnogościowy. Płaszczyzna logiczno-geometryczna, takaż przestrzeń trójwymiarowa zostały zredukowane — jak widzieliśmy wyżej — do niewielkiej tylko liczby elementów, które już przez to samo otrzymują znaczenie elementów typowych, kategorjalnych. Ażeby się z tym kategorjalnym charakterem przestrzeni logiczno-geometrycznej bliżej zaznajomić, wprowadzamy do naszego diagramatu płaskiego następujące uzupełnienia, ograniczając przytem nasze badania do płaszczyzny.

Przedłużamy proste b i b' oraz proste ab i ab' z diagramatu trzeciego (por. rys. 6). Prosta b przetnie ab' w punkcie $b+ab'$, prosta b' przetnie ab w punkcie $b'+ab$. Lecz

$$b'+ab = a+b' \qquad (17)$$

Przekonamy się o tem łatwo, podstawiając we wzorze rozdzielności (por. 3^a):

$$ab + c = (a + c)\ (b + c),$$

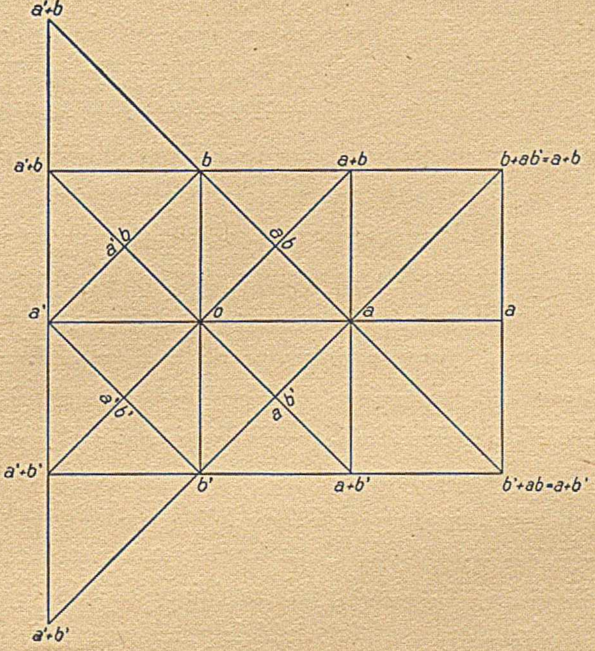
zamiast c — b', otrzymamy wtedy:

$$ab + b' = (a + b')\ (b + b') = a + b'$$

Podobnie: $\quad ab' + b = a + b$

W ten sposób prosta, łącząca te punkty przecięć, będzie

$(a+b)\cdot(a+b') = a$, i punkt jej przecięcia z osią poziomą również będzie a. Widzimy z tego, że wszystkie proste równoległe do a w prawej połowie płaszczyzny będą zawsze prostemi a, wszystkie punkty prawej półosi również zawsze będą punktami a, wszystkie punkty prostej b w prawej połowie płaszczyzny będą punktami $a+b$ i t. p. A więc nasza przestrzeń logiczno-



Rys. 6.

geometryczna nie jest przestrzenią zwykłą, mnogościową, gdzie np. każda prosta, równoległa do a, jest inną prostą, a więc prostą a_1, a_2, a_3 i t. d., a każdy punkt na osi poziomej różni się od innego jej punktu a_1, a_2, a_3 i t. d., lecz jest przestrzenią, gdzie prosta a i punkt a (analogicznie i w innych przypadkach) reprezentują wszystkie „podobne" proste i punkty, są typami, formami, kategorjami tych przedmiotów. Stąd też ta zastanawiająca własność przestrzeni logiczno-geometrycznej, że daje się ona przedstawić w postaci tak prostej niezwykle, tak wielościowo nieskomplikowanej, tak zwięzłej, tak „ekonomicznej“. Tłomaczy się to właśnie tem, że mamy tu do czynienia z przestrzenią nie wielościową, lecz kategorjalną. Znika w niej odległość od początku współrzędnych rozmaitych punktów i prostych, ta odległość, która czyni różnicę między a_1 i a_2, która je zdwaja i powiela, a pozostaje tylko typ, kategorja jakościowa, np. linja prosta pionowa w prawej połowie płaszczyzny. Uwielokrotnienie takich elementów kategorjalnych będzie w przestrzeni kategorjalnej tylko odbiciem pierwowzoru; te odbicia nie mogą w swej pseudo-odrębnej postaci pretendować do miana odrębnych kategoryj (np. drugi punkt czy prosta a, lub drugi punkt $a+b$ na prostej poziomej b). Ten zasadniczy rys kategorjalności przenosi się, oczywiście, z przestrzeni logiczno-geometrycznej i na naukę, która przestrzeń tę bada, innemi słowy, na logikę geometryczną, którą też cechuje w całej rozciągłości.

Kategorjalna przestrzeń logiczna posiada charakter wybitnie strukturalny, architektoniczny, który się nam narzuca natychmiast i nieodparcie, skoro tylko zwrócimy się do jej obrazu; płynie ten charakter z dwóch źródeł: przedewszystkiem z dwoistości (dualności), panującej niepodzielnie w przestrzeni logiczno-geometrycznej, a następnie z sytuacji jej elementów pozytywnych i negatywnych. Ten charakter architektoniczny świata logicznego został wydobyty na jaw i uwidoczniony dzięki powyżej uskutecznionemu uprzestrzenieniu logiki algebraicznej, i bliższe zbadanie tej przedziwnej architektoniki logiczno-przestrzennej będzie zadaniem II części niniejszego tomu.

Nasamprzód jednak postaramy się drogą rozważań czysto geometrycznych wyprowadzić podstawowe typy, podstawowe kategorje, które widzimy w naszej przestrzeni logiczno-geometrycznej. I tutaj, u podstaw logiki geometrycznej, przekonamy się raz jeszcze o zasadniczej a tak zadziwiającej odpowiedniości, łączącej nieprzestrzenny świat logiki i przestrzenny świat geometrji.

Dla uproszczenia kwestji ograniczymy się obecnie do topologiki płaskiej, dwuelementowej, odkładając sprawę analogiczną, dotyczącą logiki geometrycznej trójwymiarowej, do następnego rozdziału.

A więc mamy płaszczyznę kategorjalno-geometryczną z dwoma jej podstawowemi elementami, punktem i prostą. Zachodzi pytanie: jakie mogą być w tej płaszczyźnie rozmaite rodzaje, rozmaite jakości tych punktów i prostych? Rozumiemy, że pytanie to jest równoznaczne z pytaniem o rozmaite kategorje tych elementów geometrycznych (będących obrazami odpowiednich kategoryj logicznych). Cóż jednak znaczy „jakość" w przestrzeni geometrycznej, na czem polegać tu może odrębność jakościowa punktów, wzgl. prostych? Odpowiedź nasuwa się sama przez się: odrębność ta polega na rozmaitych położeniach tych utworów w stosunku do osi współrzędnych i wyznaczonych przez nie ćwiartek (kwadrantów) płaszczyzny, przyczem pewne utwory znajdują się tylko w jednej z tych ćwiartek (np. punkt $a+b$), inne zaś w dwóch (np. prosta a) lub nawet w trzech czy wszystkich czterech ćwiartkach. Otóż otrzymamy wszystkie możliwe kategorje, wszystkie możliwe jakości logiczno-geometryczne na płaszczyźnie, gdy odpowiemy na pytanie, jakie to utwory (punkty, proste) znajdują się:

I. tylko w jednej z ćwiartek płaszczyzny,

II. w dwóch,

III. w trzech,

IV. we wszystkich czterech ćwiartkach płaszczyzny,

V. pozewnątrz ćwiartek płaszczyzny [1]).

Przechodzimy do systematycznego rozpatrzenia każdego z tych pytań, zaczynając od pierwszego.

I^a. Jeżeli chodzi o punkt geometryczny, to najbardziej pospolitym, nasamprzód przychodzącym na myśl będzie ten rodzaj punktów, które właśnie znajdują się tylko w jednej z ćwiartek, i nawet możliwość innych rodzajów punktów w pierwszej chwili wydaje nam się problematyczną. Te pospolite jedno-ćwiartkowe punkty—to punkty typu: $\alpha + \beta$ gdzie α jest albo współrzędną logiczno-geometryczną a, albo też a', β zaś współrzędną b lub b'. W zależności od ćwiartki płaszczyzny, w jakiej taki punkt kategorjalny się znajduje, otrzymamy cztery kategorje punktów, należących do grupy I^a:

$$a+b,\ a+b',\ a'+b,\ a'+b' \text{ (por. rys. 3, wzgl. 6).}$$

Te punkty logiki geometrycznej odpowiadają, oczywiście, czterem rodzajom punktów geometrji analitycznej, wyznaczonym przez proste $(x = a, y = b)$, $(x = a, y = -b)$, $(x = -a, y = b)$ i $(x = -a, y = -b)$.

I^b. Jeżeli teraz od punktów przejdziemy do prostych i zapytamy o takie proste, któreby znajdowały się tylko w jednej z ćwiartek płaszczyzny, to prostych takich nie znajdziemy; każ-

[1]) Dla przestrzeni jednowymiarowej, dla linji prostej, pytania te redukują się do 3-ch: jakie utwory znajdują się w jednej z połówek tej linji, jakie w obydwóch i jakie pozewnątrz tych połówek. Utworów tych — jak łatwo się przekonać — będzie cztery: dwa z nich, każdy w jednej z połówek linji, to elementy a i a'; trzeci element w obydwóch połówkach (właściwie na ich wspólnej granicy położony) to początek współrzędnych 0; wreszcie czwarty element — to element 1, punkt w nieskończoności na danej linji prostej.

da nieograniczona prosta (nie odcinek prostej!) wybiega poza obręb jednej z ćwiartek płaszczyzny, nie mieści się w jej obrębie.

II[a]. Przechodzimy tedy z kolei rzeczy do punktów, które znajdować się mają w dwóch ćwiartkach płaszczyzny. Oczywiście, jest to możliwe wtedy, gdy będą to punkty graniczne, t. j. znajdujące się na wspólnej granicy dwóch ćwiartek. Te punkty graniczne to przedewszystkiem punkty typu: α, wzgl. β, czyli punkty - współrzędne logiczno - geometryczne. Mamy cztery takie punkty graniczne:

$$a, \quad b, \quad a', \quad b'.$$

Punkt a — graniczny dla ćwiartki I i II (prawa połowa) na półosi $0a$

Punkt b — „ „ „ I i III (górna połowa) na półosi $0b$.

Punkt a' — „ „ „ III i IV (lewa połowa) na półosi $0a'$

Punkt b' — „ „ „ IV i II (dolna połowa) na półosi $0b'$

Te punkty graniczne przedstawiają kategorję punktów elementarnych, które to punkty dopiero w połączeniu wyznaczają utwory bardziej złożone.

Kategorjom punktów granicznych logiki geometrycznej odpowiadają punkty-współrzędne geometrji analitycznej:

$$(x, 0), (0, y), (-x, 0), (0, -y).$$

Lecz na tem nie koniec. Mamy jeszcze dwa punkty graniczne „dwućwiartkowe“, mianowicie dla ćwiartek przeciwległych I i IV oraz II i III. Będą to punkty w nieskończoności na przekątnych zewnętrznego kwadratu, przechodzących przez wspomniane ćwiartki, punkty:

$$a'b + ab' \text{ oraz}$$
$$ab + a'b'$$

Więcej o nich niżej, w drugiej części ustępu II^b (str. 48, 49).

II^b. Jeżeli teraz od punktów przejdziemy do prostych i zapytamy o takie proste, które znajdują się w dwóch ćwiartkach (przechodzą przez dwie ćwiartki), to pytanie nasze z natury rzeczy rozdwoi się na pytania: czy istnieją proste, przechodzące przez ćwiartki obokległe (np. I i II, I i III), oraz: czy istnieją proste, przechodzące przez ćwiartki przeciwległe (np. I i IV).

Jeżeli chodzi o pierwszy rodzaj prostych „dwućwiartkowych", to odpowiednio do 4 kategoryj punktów „dwućwiartkowych" znajdujemy cztery tego rodzaju proste współrzędne:

$$a, \quad b, \quad a', \quad b'.$$

Prosta a — znajduje się w ćwiartce I i II (prawa połowa) i jest || do osi $O_{bb'}$

Prosta b — „ „ I i III (górna połowa) i jest || do osi $O_{aa'}$

Prosta a' — „ „ III i IV (lewa połowa) i jest || do osi $O_{bb'}$

Prosta b' — „ „ IV i II (dolna połowa) i jest || do osi $O_{aa'}$

Tę okoliczność geometryczną, że każda z prostych a, b, a', b' przechodzi przez 2 ćwiartki płaszczyzny, możemy wyrazić algebraicznie, przedstawiając te proste sposobem dichotomicznym:

$$a = (a + b)(a + b')$$
$$b = (a + b)(a' + b)$$
$$a' = (a' + b)(a' + b')$$
$$b' = (a + b')(a' + b')$$

Jako proste współrzędne, linje wyznaczające łącznie utwory wyższego typu, są to utwory proste (mniej złożone, aniżeli np.

proste typu *ab*). Odpowiadają one prostym-współrzędnym geometrji analitycznej Descartesa, których równania są:

$$x = a,\ y = b,\ x = -a,\ y = -b.$$

Lecz to nie wszystkie jeszcze proste „dwućwiartkowe". Mogą być takie proste, które przechodzą nie przez 2 ćwiartki obokległe, lecz przez 2 ćwiartki na krzyż leżące. Takich ćwiartek mamy dwie pary: I i IV, II i III, i odpowiednio do tego dwie proste kategorjalne, z których jedna przechodzi przez ćwiartki I i IV, druga zaś przez ćwiartki II i III. Pierwsza z nich łączy punkty $a+b$ i $a'+b'$, druga zaś punkty $a+b'$ i $a'+b$. Będą to więc proste:

$$(a + b)\,(a' + b'), \qquad (a + b')\,(a' + b).$$

Wobec tego zaś że

$$(a + b)\,(a' + b') = aa' + ba' + ab' + bb' = a'b + ab',$$

$$\text{zaś}\ (a + b')\,(a' + b) = aa' + b'a' + ab + b'b = ab + ab',$$

więc powyższe dwie proste możemy również przedstawić w postaci dodajnej:

$$a'b + ab', \qquad ab + a'b'.$$

Tym dwóm prostym kategorjalnym logiki geometrycznej odpowiadają proste geometrji analitycznej, przechodzące przez początek współrzędnych (a więc właśnie przez przeciwległe ćwiartki), przytem pod tym samym kątem względem obydwóch osi. Równania ich są, jak wiadomo:

$$x = y \text{ i } x = -y.$$

Otóż tymczasem nie widzimy żadnego związku między temi równaniami a powyższemi wzorami logiki geometrycznej. Wystarczy jednak przypomnieć sobie wzór I^c, głoszący, że $a < b = ab'$ [ściślej $= (ab' = 0)$], aby ten związek stał się widocznym.

Wzór bowiem: $a'b + ab'$ przyjmie wtedy postać: $(b < a) + (a < b)$, czyli zgodnie z def. równoważności: $a = b$
wzór zaś: $ab + a'b'$ przyjmie wtedy postać: $(a < b') + (b' < a)$ czyli $a = b'$.

I tu więc widzimy odpowiedniość między wzorami topologiki i wzorami geometrji analitycznej.

Reasumując dział II^b, możemy powiedzieć, że mamy 6 kategoryj prostych „dwućwiartkowych":

1) $a = (a + b)(a + b')$
2) $b = (a + b)(a' + b)$
3) $a' = (a' + b)(a' + b')$
4) $b' = (a + b')(a' + b')$
5) $(a + b)(a' + b')$ czyli $a'b + ab'$ czyli $a = b$
6) $(a + b')(a' + b)$ czyli $ab + a'b'$ czyli $a = b'$.

Przyjrzyjmy się stosunkowi prostych 5) i 6) do pierwszych czterech prostych. Widzimy, że, podobnie jak i pierwsze cztery, są one również połączeniem punktów „jednoćwiartkowych" z tą tylko różnicą, że stanowią one połączenie punktów przeciwległych, nie zaś obokległych (przyległych) — stąd sześć takich prostych, nie zaś cztery.

Odpowiednio do tego, dwoiście, również i w II^a mamy nie cztery punkty, lecz sześć punktów dwućwiartkowych. Punkty „dwućwiartkowe": a, b, a', b' możemy — dwoiście do prostych tego samego miana — przedstawić w postaci dichotomicznej:

$$a = ab + ab'$$
$$b = ab + a'b$$
$$a' = a'b + a'b'$$
$$b' = ab' + a'b'$$

Otóż brak jeszcze dwóch możliwych kombinacyj dodajnych linij prostych, figurujących w prawych stronach powyższych równań, mianowicie kombinacyj boków przeciwległych kwadratu wewnętrznego, nie zaś przyległych, jak w powyższej czwórce. Będą to punkty:

$ab + a'b'$ $[=(a + b')(a' + b)]$ oraz

$a'b + ab'$ $[=(a + b)(a' + b')]$

dwoiste do prostych 5) i 6).

Punkty te, przecięcia prostych równoległych, leżą — jak to widać z rys. 3 — w nieskończoności na prostych tego samego miana.

III[a]. Szukamy obecnie punktów, które mogłyby się znajdować w 3 ćwiartkach; oczywiście, byłyby to punkty graniczne dla 3 ćwiartek (i tylko dla 3 ćwiartek). Ale takie punkty są niemożliwe, jak niemożliwe były proste, któreby się znajdowały w obrębie tylko jednej ćwiartki. „Trzyćwiartkowych“ punktów być nie może.

III[b]. Natomiast bardzo pospolitą kategorją topologiczną są proste, przechodzące przez 3 ćwiartki; kategorja ta w swej pospolitości czy normalności odpowiada całkowicie kategorji punktów „jednoćwiartkowych“. Mogą istnieć 4 rodzaje, 4 typy takich prostych:

Prosta, przechodząca przez ćwiartkę I, II, III — będzie to prosta ab

„ „ „ „ I, II, IV — będzie to prosta ab'

„ „ „ „ I, III, IV — będzie to prosta $a'b$

„ „ „ „ II, III, IV — będzie to prosta $a'b'$

Oczywiście, mowa tu nie o odcinkach ab i t. p., lecz o prostej nieograniczonej, przechodzącej przez punkty a i b; taka prosta istotnie będzie przechodziła nietylko przez I-szą ćwiartkę, lecz i II-gą (prawą dolną) oraz III-cią (lewą górną). Zachodzi teraz pytanie, czy możemy analitycznie (algebraicznie) wyrazić to, że prosta ab przechodzi przez 3 ćwiartki: I, II i III. Na pytanie to odpowiemy twierdząco, skoro weźmiemy pod uwagę, że:

$$ab = (a + b)(a + b')(a' + b),$$

albowiem $a = (a + b)(a + b')$, zaś $b = (a + b)(a' + b)$.

W ten sposób prostą ab możemy przedstawić w takiej postaci, która wskazuje nam, że przechodzi ta prosta przez punkty: $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, czyli 3 punkty kategorjalne wyżej wspomnianych ćwiartek. Lecz w jaki to sposób, zapytamy, prosta ab przechodzić może przez punkty powyższe, przecież punkty te — jak widać na obrazie płaszczyzny geometrycznej — leżą właśnie pozewnątrz tej prostej? Otóż musimy pamiętać, że — jak wykazaliśmy na str. 42 — element kategorjalny może być uwielokrotniony, zajmować wiele położeń, oczywiście w obrębie tych ćwiartek, do których kategorjalnie należy (tak np. punkt a, lub prosta a, lub punkt $a+b'$ i t. p. (na diagramacie 6). Otóż na diagramacie tym widzimy już, że prosta ab jednakże przechodzi przez punkt $a+b'$, a jeżeli weźmiemy pod uwagę przecięcie tej prostej z prostą a', to otrzymamy punkt $ab+a' = a'+b$; czyli prosta ab przechodzi również przez punkt $a'+b$.

Pozostaje teraz tylko wykazać, że prosta ab przechodzi również przez punkt $a+b$. W tym celu weźmiemy pod uwagę punkt przecięcia tej prostej z prostą $(a+b)(a'+b')$ czyli $a'b+ab'$. Punktem tym będzie $ab+a'b+ab' = a+b$. A więc i punkt $a+b$ leży na prostej ab, i prosta ta istotnie przechodzi przez 3 punkty: $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, charakteryzujące I, II i III ćwiartkę płaszczyzny.

W ten sposób proste kategorjalne działu III[b] możemy przedstawić w takiej postaci, która byłaby odpowiednikiem algebraicznym ich „trójćwiartkowej" natury geometrycznej.

A więc:

$$ab = (a + b)(a + b')(a' + b)$$
$$ab' = (a + b')(a + b)(a' + b')$$
$$a'b = (a' + b)(a' + b')(a + b)$$
$$a'b' = (a' + b')(a' + b)(a + b')$$

Wzorom ab, ab', $a'b$ i $a'b'$ w ich oryginalnej postaci odpowiadają wzory geometrji analitycznej, wyznaczające prostą przy pomocy punktów (a, b), w których prosta ta przecina osie współrzędnych x i y.

Przechodzimy teraz do rozpatrzenia dwóch ostatnich, krańcowych możliwości kategorjalnych (IV i V), dotyczących utworów o rozległości maksymalnej i minimalnej.

IV[a]. A więc przedewszystkiem, czy możliwy jest punkt obecny we wszystkich 4 ćwiartkach? Otóż, jeżeli punkt taki byłby możliwy, to mógłby być nim tylko punkt graniczny dla wszystkich ćwiartek (gdyż w tem tylko znaczeniu, w znaczeniu „obecności na granicy" możemy mówić o obecności punktu w więcej, niż jednej ćwiartce). Dotychczasowe rozważania nasze, dotyczące „rozciągania" się elementów topologiki kategorjalnej, wykazują, że im element jest bogatszy, „większy" treściowo, t. j. bardziej zdeterminowany, tem jego „rozciąganie się", jego „zasiąg" jest mniejszy. A więc, gdy mamy szereg zmniejszających się elementów $a+b > a > ab$, to rozciąganie się ich, przeciwnie, wzrasta i od „jednoćwiartkowości" dla $a+b$ poprzez „dwućwiartkowość" dla a przechodzi do „trójćwiartkowości" dla ab. „Czteroćwiartkowym“ punktem będzie tedy element (punkt) minimum, 0 logiczne, które też widzimy w początku współrzędnych, na granicy, gdzie stykają się z sobą 4 ćwiartki płaszczyzny logicznej.

IV[b]. Czy możliwa jest prosta, obecna we wszystkich ćwiartkach? Na zasadzie tego, co było przed chwilą mówione, rozumiemy, że taką prostą będzie oś $aa' = 0_{aa'}$ oraz oś $bb' = 0_{bb'}$.

Punkt a znajduje się w I-szej i II-giej ćwiartce, punkt a' — w III-ej i IV-tej, prosta więc aa' będzie obecna w I, II, III i IV ćwiartkach. Podobnie dla prostej bb'.

Tę „czteroćwiartkowość“ osi zerowych przedstawić możemy algebraicznie, rozwijając 0 według a, a', b, b' (p. str. 26). Mianowicie:

$$0 = (a+b)(a+b')(a'+b)(a'+b').$$

Możemy również samą płaszczyznę układu współrzędnych rozpatrywać, jako maksymalnie wspólny substrat osi aa' i bb' (podobnie jak prostą ab rozpatrujemy jako to, co jest maksymalnie wspólne punktom a i b), i to $aa'bb' = 0$ uważać za maximum rozciągłości, za coś, co jest obecne we wszystkich kwadrantach (por. str. 20, 21).

V[a]. Wreszcie: czy istnieją elementy geometryczne — przedewszystkiem punkty — pozewnątrz kwadrantów płaszczyzny, nieobecne w żadnym z jej kwadrantów? Takiemi punktami będą, jak już wiemy, elementy treściowo maksymalne, punkty logiczno-geometryczne $= 1$.

Będą to punkty, dualne do osi aa' i bb', punkty $a+a' = 1$ i $b+b' = 1$, punkty w nieskończoności: pierwszy na osi $0_{bb'}$, drugi na osi $0_{aa'}$. Prosta a przechodzi przez ćwiartkę I i II, prosta a' — przez ćwiartkę III i IV, punkt ich przecięcia znajduje się w ćwiartce wspólnej pierwszej i drugiej parze ćwiartek[1]), a więc w żadnej z tych ćwiartek.

V^b. Mamy również i prostą, leżącą pozewnątrz kwadrantów płaszczyzny. Jest nią prosta maximum, dualna do początku współrzędnych ($0 = 0_{aa'} + 0_{bb'}$), prosta $1 = 1_{a+a'} \times 1_{b+b'}$). Będzie to prosta w nieskończoności, łącząca punkty w nieskończoności $1_{a+a'}$ ($= a + a'$) i $1_{b+b'}$ ($= b + b'$).

Zreasumujemy teraz otrzymane rezultaty.

Wszystkie elementy kategorjalne płaszczyzny logiczno-algebraicznej wyprowadziliśmy i podzieliliśmy, kierując się ich przestrzennemi właściwościami, mianowicie tem, w ilu i w jakich ćwiartkach płaszczyzny znajdują się (są obecne) te elementy. Jeżeli zważymy, że maximum treści elementu kategorjalnego jest związane z minimum jego obecności, to, chcąc uporządkować teraz elementy kategorjalne według wzrastającej ich obecności, należy zacząć od grupy o maksymalnej treści, gdyż będzie to właśnie grupa o obecności minimalnej — grupę tę nazwiemy też z tego powodu grupą zerową.

Otrzymujemy w ten sposób tablicę I (p. str. 54).

Jeżeli teraz wszystkie elementy kategorjalne równoważne, t. j. występujące w tych samych ćwiartkach płaszczyzny, raz tylko uwzględnimy w tablicy, wtedy przedstawi się ona w uproszczonej postaci (p. tabl. II, str. 54).

---

[1]) Podobnie jak np. punkt *a*, jako punkt przecięcia prostych *ab* i *ab'*, znajduje się w ćwiartkach I i II, wspólnych ćwiartkom, przez które przechodzi prosta *ab* (I, II, III) i prosta *ba'* (I, II, IV).

Tablica I.

ELEMENTY KATEGORJALNEJ PŁASZCZYZNY LOGICZNO-GEOMETRYCZNEJ.

Elementy płaszczyzny według ich obecności				
w żadnej z ćwiartek	w 1 ćwiartce	w 2 ćwiartkach	w 3 ćwiartkach	we wszystkich ćwiartkach
0	1	2	3	4
$1_{a+a'}$	$a+b$ (I)*)	a (I, II), a' (III, IV)	ab (I, II, III)	$0_{aa'}$
$1_{b+b'}$	$a+b'$ (II)	b (I, III), b' (II, IV)	ab' (I, II, IV)	$0_{bb'}$
$1_{(a+a')(b+b')}$	$a'+b$ (III)	$ab+a'b'$ (II, III), $ab'+a'b$ (I, IV)	$a'b$ (I, III, IV)	$0_{aa'+bb'}$
**)	$a'+b'$ (IV)	oraz 6 elementów dwoistych: a, a'; b, b'; $ab'+$ $+a'b$, $ab+a'b'$.	$a'b'$ (II, III, IV)	**)

Tablica II

ELEMENTY NIERÓWNOWAŻNE KATEGORJALNEJ PŁASZCZYZNY LOGICZNO-GEOMETRYCZNEJ

Elementv nierównoważne płaszczyzny według ich obecności				
w żadnej z ćwiartek	w 1 ćwiartce	w 2 ćwiartkach	w 3 ćwiartkach	we wszystkich ćwiartkach
0	1	2	3	4
1	$a+b$	a, a'	ab	0
	$a+b'$	b, b'	ab'	
	$a'+b$	$ab+a'b'$, $ab'+a'b$	$a'b$	
	$a'+b'$		$a'b'$	

*) Liczba rzymska oznacza tu ćwiartkę, w której obecny jest dany element.

**) Dochodzą tu jeszcze dwa elementy: $1_{(a+a')+(b+b')}$ i $0_{aa'.bb'}$, koincydujące odpowiednio z elementami $0_{aa'+bb'}$ i $1_{(a+a')(b+b')}$ (por. odnośnik na str. 58 oraz odnośniki na str. 70 i 71).

Pierwsza z tych tablic obejmuje 26 (wzgl. 28) elementów, druga — 16 = 2^4 (wykładnik potęgi wskazuje tu ilość ćwiartek płaszczyzny, wzgl. reprezentujących je punktów).

W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie elementy geometrji kategorjalnej płaskiej, wszystkie rodzaje (formy, kategorje) położeń, wzgl. kierunków możliwych na płaszczyźnie. I ta kategorjalna analiza daje w rezultacie nietylko wszystkie rodzaje położeń w dwuwymiarowej dziedzinie geometrycznej, lecz i wszystkie zarazem rodzaje pojęć w dwuelementowej dziedzinie logicznej, świadcząc w ten sposób o całkowitej odpowiedniości dziedziny myśli i dziedziny przestrzeni.

Te możliwe położenia logiczno-geometryczne zostały zdobyte przez odniesienie ich do 4 kwadrantów płaszczyzny. Każdy taki kwadrant jest reprezentowany kategorjalnie przez punkt typu $\alpha + \beta$ (grupa I), gdzie α jest współrzędną a albo a', β zaś — współrzędną b lub b'. Możemy tedy otrzymać powyższą tablicę (elementów nierównoważnych) na drodze czysto analitycznej, wychodząc z oznaczeń dla czterech kwadrantów ($a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$) i rozpatrując wszystkie możliwe (w liczbie 16) kombinacje (a więc po 1, 2, 3, 4 elementy oraz 0 elementów) z powyższych punktów-kwadrantów [1]).

Kombinacje te przedstawiają się w sposób następujący:

1) $a+b$	+	2) $a+b$	—	3) $a+b$	—	4) $a+b$	—
$a+b'$	—	$a+b'$	+	$a+b'$	—	$a+b'$	—
$a'+b$	—	$a'+b$	—	$a'+b$	+	$a'+b$	—
$a'+b'$	—	$a'+b'$	—	$a'+b'$	—	$a'+b'$	+

[1]) W powyższem zadaniu mamy analogon wyszukania wszystkich elementarnych funkcyj prawdziwościowych dwóch argumentów.

$$
5)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & + \\ a'+b & - \\ a'+b' & - \end{array}
\qquad
6)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & - \\ a'+b & + \\ a'+b' & - \end{array}
\qquad
7)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & - \\ a'+b & - \\ a'+b' & + \end{array}
$$

$$
8)\ \begin{array}{l|c|} a+b & - \\ a+b' & + \\ a'+b & + \\ a'+b' & - \end{array}
\qquad
9)\ \begin{array}{l|c|} a+b & - \\ a+b' & + \\ a'+b & - \\ a'+b' & + \end{array}
\qquad
10)\ \begin{array}{l|c|} a+b & - \\ a+b' & - \\ a'+b & + \\ a'+b' & + \end{array}
$$

$$
11)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & + \\ a'+b & + \\ a'+b' & - \end{array}
\qquad
12)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & + \\ a'+b & - \\ a'+b' & + \end{array}
\qquad
13)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & - \\ a'+b & + \\ a'+b' & + \end{array}
\qquad
14)\ \begin{array}{l|c|} a+b & - \\ a+b' & + \\ a'+b & + \\ a'+b' & + \end{array}
$$

$$
15)\ \begin{array}{l|c|} a+b & + \\ a+b' & + \\ a'+b & + \\ a'+b' & + \end{array}
\qquad
16)\ \begin{array}{l|c|} a+b & - \\ a+b' & - \\ a'+b & - \\ a'+b' & - \end{array}
$$

Znak $+$ figurujący obok elementu konstytuującego (t. j. elementu: $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$) oznacza, że element ten wchodzi w rachubę w danej kombinacji. Jeżeli daną kombinację konstytuuje 2 lub więcej elementów, to element przez nie wyznaczony jest iloczynem logicznym elementów konstytuujących[1]). Innemi słowy, kombinacje elementów konstytuujących są tu kombinacjami rozłącznemi czyli iloczynowemi. W ten spo-

[1]) Lub też, równoważnie, jest negacją iloczynu logicznego elementów, nie wchodzących w rachubę w danej kombinacji (oznaczonych znakiem minus).

sób kombinacje powyższe konstytuują 16 następujących elementów nierównoważnych (różnoważnych) logiki dwuelementowej:

1.	2.	3.	4.
$a+b$	$a+b'$	$a'+b$	$a'+b'$

5.	6.	7.
$a\,[=(a+b)\,(a+b')]$	$b\,[=(a+b)\,(a'+b)]$	$(a+b)\,(a'+b')$

8.	9.	10.
$(a+b')\,(a'+b)$	$b'\,[=(a+b')\,(a'+b')]$	$a'\,[=(a'+b)\,(a'+b')]$

11.	12.
$ab\,[=(a+b)\,(a+b')\,(a'+b)]$	$ab'\,[=(a+b)\,(a+b')\,(a'+b')]$

13.	14.
$a'b=[(a+b)\,(a'+b)\,(a'+b')]$	$a'b'=[(a+b')\,(a'+b)\,(a'+b')]$

15.

$$0\,[=(a+b)\,(a+b')\,(a'+b)\,(a'+b')]$$

16.

$$1=[(a+b)\,(a+b')\,(a'+b)\,(a'+b')]'=$$
$$=a'b'+a'b+ab'+ab.$$

Wszystkie te elementy widzimy na naszym obrazie dwuelementowego świata logicznego, który nam jednakże ad oculos wskazuje, że w świecie tym mamy więcej, aniżeli 16 elementów, albowiem niektóre z nich występują w rozmaitych, choć równoważnych postaciach. Stosuje się to, mianowicie, przedewszystkiem do elementów „dwućwiartkowych“ (5 — 10), które występują nietylko jako proste: a, b, $(a+b)\,(a'+b')$, $(a+b')\,(a'+b)$, b', a', lecz i jako równoważne tym prostym punkty: a,b, $a'b+ab'$, $ab+a'b'$, b', a', poza tem zaś do elementów granicznych 0 i 1, z których każdy występuje w 3 postaciach [1]). Mianowicie, zero — jako oś aa', oś bb', początek współrzędnych $(aa'+bb')$; zaś jedność jako punkt w nieskończoności $a+a'$, punkt w nieskończoności $b+b'$, prosta w nieskończoności $(a+a')(b+b')$.

Zapewniwszy sobie w ten sposób całkowite wyczerpanie możliwych kategoryj (rodzajów) elementów płaskich logiczno-geometrycznych, przejdziemy niebawem do bliższego rozpatrzenia związków, jakie istnieją między temi elementami.

---

[1]) Gdybyśmy prostą w nieskończoności wyznaczyli jako iloczyn punktów, leżących w nieskończoności na osiach skośnych, a więc jako $(a'b+ab')(ab+a'b')=(a+b)(a'+b')(a+b')(a'+b)=0$, to otrzymalibyśmy jeszcze czwartą postać zera; jednakże ta postać zera koincydowałaby już przestrzennie z jednością, jako prostą w nieskończoności, wyznaczoną przez punkty w nieskończoności, leżące na osiach zwykłych. Dwoiście: gdybyśmy początek współrzędnych wyznaczyli, jako sumę osi skośnych, a więc jako $(a'+b)(a+b')+(a+b)(a'+b')=ab+a'b'+ab'+a'b=1$, to otrzymalibyśmy jeszcze czwartą postać jedności; jednakże ta postać jedności koincydowałaby już przestrzennie z zerem, jako punktem-początkiem współrzędnych, wyznaczonym przez przecięcie się osi zwykłych.

Rozdział IV.

TRÓJWYMIAROWA PRZESTRZEŃ KATEGORJALNA I JEJ ELEMENTY.

Opuszczamy obecnie na chwilę logikę geometryczną dwuelementową czyli topologikę płaską (planilogikę) i przechodzimy do logiki geometrycznej trójwymiarowej czyli do stereologiki. Obraz „przestrzeni logicznej“ trójwymiarowej mamy już podany na rys. 5 (str. 35), obecnie zaś postaramy się bliżej zapoznać z elementami tej przestrzeni kategorjalnej, przeprowadzając badania analogiczne do tych, które nas zajmowały w rozdziale poprzednim ze względu na płaszczyznę kategorjalną.

Podobnie jak tam otrzymaliśmy wszystkie możliwe jakości logiczno-geometryczne płaskie, rozpatrując płaskie elementy logiczno-geometryczne z punktu widzenia ich obecności w żadnej, jednej, dwóch... i t. d. ćwiartkach płaszczyzny, tak samo i teraz rozklasyfikujemy wszystkie przedmioty przestrzeni logicznej z punktu widzenia ich obecności w żadnej, jednej, dwóch... ośmiu ósemkach przestrzeni trójwymiarowej. Każda taka ósemka przestrzenna jest reprezentowana kategorjalnie przez punkt typu $\alpha + \beta + \gamma$ gdzie α jest współrzędną a albo a', β — współrzędną b lub b', γ zaś współrzędną c lub c'. Wszystkie możliwe kombinacje iloczynowe z powyższych 8-miu punktów dadzą nam wszystkie możliwe elementy (różnoważne[1]) przestrzeni logicznej trójwymiarowej w liczbie $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$. Wszystkim tym elementom analitycznym (logicznym) przyporządkować możemy odpowiadające im kształty geometryczne (por. rys. 5). Jak wiemy z teorji kombinacyj, ta liczba ogólna 256 elementów rozpada się na 9 grup, z których pierwszą nazwiemy grupą zerową, albowiem zawiera element nie znajdujący się w żadnej z ósemek przestrzennych. Obsadzenie tych grup przez elementy jest — jak wiemy — następujące:

Nazwa (numer) grupy	*Liczba elementów*
Zerowa	1
Pierwsza	8
Druga	28 [2]
Trzecia	56 [2]
Czwarta	70 [2]
Piąta	56
Szósta	28
Siódma	8
Ósma	1

Pomijamy tymczasem grupę graniczną zerową, którą rozpatrzymy na końcu w związku z drugą grupą krańcową, grupą ósmą, i zaczynamy od rozpatrzenia elementów grupy pierwszej (i siódmej).

I i VII). Grupa pierwsza zawiera 8 elementów, przedstawiających rezultat kombinacyj „po jeden“ z 8 podstawowych ele-

---

[1]) Elementami równoważnemi przestrzeni logicznej zajmować się tu bliżej już nie będziemy.

[2]) $28 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$; $56 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$; $70 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$

mentów, innemi słowy, przedstawia te właśnie podstawowe elementy:

$$a+b+c,\quad a+b+c',\quad a+b'+c,\quad a+b'+c',\quad a'+b+c,\quad a'+b+c',$$
$$a'+b'+c,\quad a'+b'+c'$$

Mamy tu 8 punktów-wierzchołków sześcianu kategorjalnego. Każdy z tych elementów znajduje się w jednej tylko ósemce przestrzeni logicznej (której jest przedstawicielem).

Nie przejdziemy teraz bezpośrednio do grupy drugiej, lecz weźmiemy pod uwagę grupę dualną (dwoistą) do pierwszej, a jest nią grupa siódma. Każdemu elementowi grupy pierwszej będzie odpowiadał dualny element w grupie siódmej, a ta jedno-jednoznaczna odpowiedniość zapowiedziana jest już w tem, że liczba elementów grupy I i VII (tak jak II i VI oraz III i V) jest jedna i ta sama. Każdy z tych 8-iu elementów grupy siódmej będzie obecny w 7-iu ósemkach przestrzeni, co wyraża się analitycznie w ten sposób, że przedstawia on iloczyn 7-iu elementów podstawowych.

Istotnie element dualny do $a+b+c$ czyli element abc jest to element, który przedstawia się jako iloczyn następujących 7-iu podstawowych elementów:
$(a+b+c)$ $(a+b+c')$ $(a+b'+c)$ $(a+b'+c')$ $(a'+b+c)$ $(a'+b+c')$ $(a'+b'+c)$ (por. str. 39) i przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez wszystkie ósemki przestrzeni logicznej z wyjątkiem ósemki, reprezentowanej przez element $(a'+b'+c')$. Tego właśnie rodzaju 8 elementów dualnych względem elementów grupy I stanowi zakres grupy VII-ej:

$$abc,\quad abc',\quad ab'c,\quad ab'c',\quad a'bc,\quad a'bc',\quad a'b'c,\quad a'b'c'.$$

Elementy te są płaszczyznami zgodnie z zasadą dualności w przestrzeni, przyporządkowującej dualnie punktowi w przestrzeni płaszczyznę i odwrotnie. Przedstawiają one 8 ścian ośmiościanu dualnego do powyżej wzmiankowanego sześcianu. II i VI). Przechodzimy do grupy drugiej, zawierającej 28 elementów, będących rezultatem kombinacyj „po dwa“ 8 podstawowych elementów. Grupa ta rozpada się na 3 podgrupy w zależności od tego, czy każdy z 8 podstawowych punktów (np. punkt $a+b+c$) kombinuje się mnożnie z punktem podstawowym o jednym tylko elemencie różnym co do znaku (′) od elementów danego punktu[1]), czy też z punktem podstawowym o dwóch[2]) czy też trzech[3]) elementach, różniących się znakiem od elementów danego punktu.

Pierwsza podgrupa zawiera 12 prostych[4]), będących krawędziami sześcianu, a więc proste $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$, $a+c$, ... $b+c$, ... (por. tutaj — jak zawsze — rys. 5).

Druga podgrupa obejmuje 12 prostych[5]), będących przekątnemi 6-iu ścian sześcianu, a więc proste:

$(a+b+c)(a+b'+c') = a+(b+c)(b'+c')$, $(a+b+c)(a'+b+c')$, $(a+b+c)(a'+b'+c)$ i t. p.

Proste te przedstawiają rzuty osi skośnych $(b+c)(b'+c')$ i $(b+c')(b'+c)$ na ściany a i a', dalej osi skośnych $(a+c)(a'+c')$ i $(a+c')(a'+c)$ na ściany b i b', wreszcie osi skośnych $(a+b)(a'+b')$ i $(a+b')(a'+b)$ na ściany c i c'.

---

1) Np. — jeżeli chodzi o punkt $a+b+c$ — z punktem: $a+b+c'$, $a+b'+c$, $a'+b+c$. Odpowiednie kombinacje będą: $(a+b+c)(a+b+c') = a+b$; $(a+b+c)(a+b'+c) = a+c$; $(a+b+c)(a'+b+c) = b+c$

2) Np. z punktem: $a+b'+c'$, $a'+b+c'$, $a'+b'+c$. Odpowiednie kombinacje będą: $(a+b+c)(a+b'+c') = a+(b+c)(b'+c') = a+bc'+b'c$ i t. p.

3) Np. z punktem: $a'+b'+c'$. Odpowiednia kombinacja będzie: $(a+b+c)(a'+b'+c')$.

4) Względnie 12 punktów tego samego miana.

5) Względnie 12 punktów tego samego miana, leżących w nieskończoności na danych prostych.

Trzecia podgrupa zawiera 4 przekątne całego sześcianu: $(a+b+c)(a'+b'+c')$, $(a+b'+c)(a'+b+c')$, $(a'+b+c)(a+b'+c')$ $(a'+b'+c)(a+b+c')$.

Przechodząc teraz do grupy VI, dualnej względem powyższej grupy II, otrzymamy również 28 elementów podzielonych na 3 podgrupy (dualne względem 3 podgrup grupy II). Będą to linje proste, przechodzące przez sześć ósemek przestrzeni.

Pierwsza podgrupa zawiera 12 prostych[1]), będących krawędziami ośmiościanu, a więc proste ab[2]), ab', $a'b$, $a'b'$, ac....., bc.....

Druga podgrupa zawiera 12 prostych, przechodzących po dwie przez 6 wierzchołków ośmiościanu, mianowicie proste: $abc+ab'c' = a(bc+b'c')$, $abc+a'bc'$, $abc+a'b'c$ i t. p. Drugą prostą, przechodzącą przez wierzchołek a, będzie prosta: $ab'c+abc' = a(b'c+bc')$ i t. p.

Trzecia podgrupa zawiera 4 proste w nieskończoności, będące przecięciami przeciwległych (równoległych) ścian ośmiościanu, mianowicie: $abc+a'b'c'$, $ab'c+a'bc'$, $a'bc+ab'c'$, $a'b'c+abc'$.

Przechodzimy obecnie zkolei do rozpatrzenia grup III i V.

III i V). Grupa trzecia zawiera 56 elementów, będących rezultatem kombinacyj „po trzy" 8-miu podstawowych elementów punktowych. Grupa ta składa się z 3 podgrup o składzie następującym:

Pierwsza podgrupa obejmuje 24 proste, przedstawiające przekątne małych kwadratów na bokach sześcianu: $(a+b)(a+c)$[3]) $= a+bc$, $(a+b)(a+c')$, $(a+b)(b+c)$, $(a+b)(b+c')$ i t. p.

---

[1]) Względnie 12 płaszczyzn tego samego miana.

[2]) Prosta $ab = (a+b+c)(a+b+c')(a+b'+c)(a+b'+c')(a'+b+c)(a'+b+c')$ jest obecna w 6 ósemkach reprezentowanych przez punkty, których przedstawia iloczyn.

[3]) $(a+b)(a+c) = (a+b+c)(a+b+c')(a+b'+c)$.

Druga podgrupa obejmuje 24 proste, łączące środek krawędzi sześcianu, np. punkt $a+b$ z wierzchołkami przeciwległej krawędzi, np. z punktem $a'+b'+c$ lub $a'+b'+c'$. Będą to proste typu $(a+b)\ (a'+b'+c)$[1], wzgl. $(a+b)\ (a'+b'+c')$.

Trzecia podgrupa grupy III-ej zawiera 8 płaszczyzn, przechodzących każda przez 3 przekątne ścian sześcianu, jak np. płaszczyzna $(a+b+c)\ (a+b'+c')\ (a'+b'+c)$.

Grupa V, dualna względem powyższej, obejmuje również 56 elementów w 3 podgrupach.

Pierwszą podgrupę składają tu 24 proste, przedstawiające przekątne 8-iu małych sześcianów, składających wielki sześcian, o typie: $a(b+c) = ab+ac$, $b(a+c)$, $c(a+b)$ i t. p. (por. również rys. 4).

Druga podgrupa obejmuje 24 proste, będące przecięciem płaszczyzn typu ab z płaszczyzną typu $a'b'c$ (wzgl. $a'b'c'$). Będą więc to proste typu $ab+a'b'c$, wzgl. $ab+a'b'c'$.

Trzecia podgrupa obejmuje 8 punktów typu $abc+ab'c'+ +a'b'c = a(bc+b'c') + a'b'c$. Będą więc to punkty, leżące na przecięciu prostych typu $a(bc+b'c')$ i płaszczyzny typu $a'b'c$.

IV). Przechodzimy do grupy IV, dualnej względem samej siebie, to znaczy takiej, której elementy posiadają elementy dualne wewnątrz tejże grupy. Jak wiemy, zawiera ona 70 elementów, a każdy z nich posiada element dualny bądź w równoważnej sobie (choć odmiennej) postaci, bądź w postaci nierównoważnej, lecz zawartej wewnątrz tej grupy IV-tej. Konieczność tego wynika z tej własności elementów dwoistych każdej grupy, że zawierają się one w grupie, dopełniającej do 8-ki liczbę da-

---

[1] $(a+b)\ (a'+b'+c) = (a+b+c)\ (a+b+c')\ (a'+b'+c)$.

nej grupy. Wobec tego element dwoisty do elementu grupy IV-tej również musi być zawarty w tej grupie.

Elementy tej grupy możemy podzielić na następujące podgrupy:

1) 6 płaszczyzn[1]): a, a', b, b', c, c'

2) 24 płaszczyzny typu: $(a+b)\,(a+c)\,(a'+b'+c')$

3) 6 prostych: $(a+b)\,(a'+b'),\ (a'+b)\,(a+b');\ (a+c)\,(a'+c'),$
$(a'+c)\,(a+c');\ (b+c)\,(b'+c'),\ (b'+c)\,(b+c')$

4) 24 proste typu: $(a+b)\,(b'+c)$

5) 8 płaszczyzn typu: $(a+b)\,(a+c)\,(b+c) = ab+ac+bc$

6) 2 proste[2]): $(a+b+c')\,(a+b'+c)\,(a'+b+c)\,(a'+b'+c') =$
$= abc'+ab'c+a'bc+a'b'c'$ oraz $(a+b+c)\,(a+$
$+b'+c')\,(a'+b+c')\,(a'+b'+c) = abc+ab'c'+$
$+a'bc'+a'b'c.$

Wreszcie pozostają nam do rozpatrzenia grupy krańcowe: VIII i 0.

Grupa VIII, jako iloczyn 8-miu elementów podstawowych, wierzchołków sześcianu, będzie przedstawiała *0* logiczne (początek współrzędnych), grupa zaś do niej dualna, zerowa, bę-

---

[1]) Przypominamy tu raz jeszcze, cośmy mówili o elementach równoważnych, choć innej postaci. Oczywiście, będziemy w tej podgrupie mieli nietylko 6 płaszczyzn, lecz i 6 punktów, a poza tem dwa razy po 6 prostych tego samego miana, co płaszczyzny.

[2]) Każdy z tych elementów przedstawia iloczyn dwóch prostych, przekątnych przeciwległych ścian sześcianu, przytem przekątnych nierównoległych. Są to przekątne kwadratu zewnętrznego jednej z płaszczyzn współrzędnych, np. płaszczyzny $b0c$ [a więc proste: $(b+c')\,(b'+c)$ oraz $(b+c)\,(b'+c')$], każda na inną płaszczyznę rzutowana: jedna na płaszczyznę sześcianu a, druga na płaszczyznę a'. Jednakże zamiast iloczynu tych prostych możemy wziąć iloczyn równoważnych tym prostym punktów w nieskończoności na nich leżących, w ten sposób nasze dwa elementy przedstawią się jako dwie zlewające się sobą proste w nieskończoności na płaszczyźnie współrzędnych.

dzie reprezentowana przez element dualny do *0*, przez *1* logiczną (płaszczyznę w nieskończoności [1]).

W ten sposób podaliśmy elementy geometryczne, odpowiadające 256 nierównoważnym elementom przestrzeni logicznej. Poniższa tablica grupuje te logiczno-geometryczne elementy, przyczem liczba w nawiasie oznacza ilość elementów, reprezentujących dany typ.

ELEMENTY NIERÓWNOWAŻNE KATEGORJALNEJ PRZESTRZENI LOGICZNO-GEOMETRYCZNEJ.

Typy elementów nierównoważnych przestrzeni logicznej według ich obecności								
w żadnej z 8-ek	w 1 ósemce	w 2 ósemkach	w 3 ósemkach	w 4 ósemkach	w 5 ósemkach	w 6 ósemkach	w 7 ósemkach	we wszystkich 8 ós.
1	$a+b+$ $+c$ (8)	$(a+b)$ (2) $a+(b+c)$ $(b'+c')$ (12) $(a+b+c)$ $(a'+b'+$ $+c')$ (4)	$(a+b)(a+$ $+c)$ (24) $(a+b)$ $(a'+b'+c)$ (24) $(a+b+c)$ $(a+b'+c')$ $(a'+b'+c)$ (8)	$(a+b)(a+$ $+c)(b+c)$ (8) a (6) $(a+b)(a+$ $+c)(a'+$ $+b'+c')$ (24) $(a+b)$ $(a'+b')$ (6) $(a+b)$ $(b'+c)$ (24) oraz: $abc'+$ $+ab'c+$ $+a'bc+$ $+a'b'c'$ i $abc+$ $+ab'c'+$ $+a'bc'+$ $+a'b'c$ (2)	$ab+ac$ (24) $ab+a'b'c$ (24) $abc+$ $+ab'c'+$ $+a'b'c$ (8)	ab (12) $a(bc+b'c')$ (12) $abc+a'b'c'$ (4)	abc (8)	*0*

[1]) Musimy pamiętać o tem, że te elementy grupy VIII-ej i 0-wej posiadają szereg rozmaitych postaci, których tu nie rozpatrujemy.

CZĘŚĆ II.

ARCHITEKTONIKA ELEMENTÓW PŁASZCZYZNY KATEGORJALNEJ.

Rozdział V.

ELEMENTY PŁASZCZYZNY KATEGORJALNEJ A DWOISTE KWADRATY ZUPEŁNE.

Część integralną i rzucającą się odrazu w oczy naszego obrazu logiki dwuelementowej stanowią dwa kwadraty dwoiste (patrz rys. 3). Kwadraty te okazują się dwoistemi, gdyż 4 bokom wewnętrznego kwadratu *(ab, ab', a'b, a'b')* odpowiadają dwoiście 4 wierzchołki zewnętrznego kwadratu *(a+b, a+b', a'+b, a'+b')*, 4 zaś bokom zewnętrznego kwadratu *(a, a', b, b')* odpowiadają dwoiście 4 wierzchołki kwadratu wewnętrznego *(a, a', b, b')*. Otóż i pozostałe w liczbie 10 (wzgl. 12 [1]) elementy logiczno-geometryczne będziemy mogli związać najściślej z naszemi dwoistemi kwadratami, jeżeli kwadraty te pojmiemy jako „kwadraty zupełne".

Musimy się zwrócić w tym celu do pojęć „czworokąta zupełnego" i „czworoboku zupełnego" [2]), które w nowszej syntetycznej czyli rzutowej geometrji odgrywają bardzo ważną rolę i ściśle są związane z pojęciem struktur harmonicznych [3]).

Przez „czworokąt zupełny" rozumie się figurę określoną przez

---

[1]) Por. odnośnik drugi na str. 54 oraz odnośniki na str. 58, 70 i 71.

[2]) Por. F. Enriques. Wykłady geometrji rzutowej, tł. polskie, Warszawa, 1917 str. 37.

[3]) Por. odnośnik na str. 95 i 96.

cztery wierzchołki, które wyznaczają (w 6-ciu kombinacjach po dwa elementy) sześć prostych, t. zw. sześć boków czworokąta zupełnego. Te sześć boków czworokąta zupełnego tworzą trzy pary boków przeciwległych (t. j. nieprzechodzących przez ten sam wierzchołek), przecinających się w trzech punktach, t. zw. punktach przekątnych czworokąta.

I dwoiście: przez „czworobok zupełny“ rozumiemy figurę, określoną przez cztery boki, które wyznaczają (w 6 kombinacjach po dwa elementy) sześć punktów, t. zw. sześć wierzchołków czworoboku zupełnego. Te sześć wierzchołków czworoboku zupełnego tworzą trzy pary wierzchołków przeciwległych (t. j. nieleżących na tym samym boku czworoboku), połączonych trzema prostemi, t. zw. linjami przekątnemi czworoboku.

Otóż spójrzmy teraz na rys. 3, mając na widoku pojęcia „czworokąta zupełnego“ i „czworoboku zupełnego“, a natychmiast nasze podstawowe kwadraty pojmiemy jako „kwadraty zupełne“.

A więc przedewszystkiem kwadrat wewnętrzny, jako „czworokąt zupełny“, będzie posiadał:

4 określające go wierzchołki (a, a', b, b');

6 boków, wyznaczonych przez te wierzchołki, mianowicie: cztery boki kwadratu prostego $(ab, ab', a'b, a'b')$ i dwie przekątne[1]): $aa' = 0_{aa'}$ i $bb' = 0_{bb'}$; oraz

3 punkty przekątne, utworzone przez przecięcie (zjednocze-

[1]) Gdybyśmy w wewnętrznym kwadracie zupełnym wzięli jeszcze 3-cią przekątną, jako linję łączącą jego punkty przekątne: $ab+a'b'$ i $a'b+ab'$, to otrzymalibyśmy 7-y bok tego kwadratu, prostą w nieskończoności $(ab+a'b') \times (a'b+ab') = [0]$, koincydujący wprawdzie z 3-cią przekątną kwadratu zewnętrznego: $(a+a')\,(b+b') = 1_{a+a'} \cdot 1_{b+b'} = 1$, lecz będącą mimo to innego od niej miana (por. odnośnik na str. 58).

nie) trzech par boków przeciwległych, a więc punkty: $ab+a'b'$, $a'b+ab'$ i $aa'+bb'$ ($= 0_{aa'}+0_{bb'} = 0$).

I dwoiście: kwadrat zewnętrzny, jako „czworobok zupełny", będzie posiadał:

4 określające go boki (a, a', b, b');

6 wierzchołków, wyznaczonych przez te boki, mianowicie: cztery wierzchołki kwadratu prostego ($a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$) i dwa punkty przekątne[1]: $a+a' = 1_{a+a'}$ i $b+b' = 1_{b+b'}$; oraz

3 linje przekątne, utworzone przez połączenie trzech par wierzchołków przeciwległych, a więc linje: $(a+b)\,(a'+b')$, $(a'+b)\,(a+b')$ i $(a+a')\,(b+b')$ ($= 1_{a+a'} \cdot 1_{b+b'} = 1$).

W ten sposób kwadrat wewnętrzny, jako „czworokąt zupełny", jest zespołem 13 jego elementów:

4 wierzchołków, 6 boków i 3 punktów przekątnych.

I dualnie: kwadrat zewnętrzny, jako „czworobok zupełny", jest zespołem 13 jego elementów dualnych do poprzednich:

4 boków, 6 wierzchołków i 3 linij przekątnych.

Możemy teraz przedstawić dwadzieścia sześć powyższych elementów płaszczyzny kategorjalnej (por. tabl. I na str. 54) w postaci dwóch szeregów dwoistych (dualnych) w ten również sposób, że wszystkie elementy pierwszego szeregu będą linjami prostemi, wszystkie zaś dwoiste względem nich elementy drugiego szeregu będą punktami. W terminologji „kwadratów zupełnych" te dwoiste szeregi — każdy zawierający po 13 elementów — tak się przedstawiać będą:

---

[1]) Gdybyśmy w zewnętrznym kwadracie zupełnym wzięli jeszcze 3-i punkt, jako punkt przecięcia jego przekątnych $(a+b)(a'+b')$ i $(a'+b)(a+b')$, to otrzymalibyśmy 7-y wierzchołek tego kwadratu, początek współrzędnych $(a+b)(a'+b')+$ $+(a'+b)\,(a+b') = [1]$, koincydujący wprawdzie z 3-cim punktem przekątnym kwadratu wewnętrznego ($= aa'+bb' = 0_{aa'} + 0_{bb'} = 0$), lecz będący mimo to innego od niego miana (por. odnośnik na str. 58).

6 boków kwadratu wewn.	4 boki kwadratu zewnętrznego
$0_{aa'}$, $0_{bb'}$, ab, ab', $a'b$, $a'b'$;	a, a', b, b';

3 linje przekątne kwadratu zewnętrznego

$(a+b)\,(a'+b')$, $(a'+b)\,(a+b')$, 1

6 wierzchołków kwadratu zewnętrznego	4 wierzch. kw. wewn.
$1_{a+a'}$, $1_{b+b'}$, $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$;	a, a', b, b';

3 punkty przekątne kwadratu wewnętrznego

$ab+a'b'$, $a'b+ab'$, 0

Znaczy to: wszystkie elementy kategorjalnej płaszczyzny logiczno-geometrycznej okazują się elementami naszych podstawowowych dualnych kwadratów, pojętych jako dualne „kwadraty zupełne“ [1]), lub jeszcze inaczej: płaszczyzna kategorjalna logiczno-geometryczna składa się z dwóch dualnych „kwadratów zupełnych“.

Możemy również ustanowić odpowiedniość już nie między elementami dwoistemi podstawowych kwadratów zupełnych, lecz między ich elementami tej samej postaci, a więc punktami i punktami, prostemi i prostemi. Taka odpowiedniość, łącząca elementy płaszczyzny logiczno-geometrycznej, tak się przedstawiać będzie:

7 prostych[2]) kwadr. wewn.: $[0]$, $0_{aa'}$, $0_{bb'}$, ab, ab', $a'b$, $a'b'$

7 prostych kwadr. zewn.: 1, $(a+b)\,(a'+b')$, $(a'+b)\,(a+b')$, a, b, b', a'

7 punktów kwadr. wewn.: 0, $(ab+a'b')$, $(a'b+ab')$, a, b, b', a

7 punktów[2]) kwadr. zewn.: $[1]$, $1_{a+a'}$, $1_{b+b'}$, $(a+b)$, $(a+b')$, $(a'+b)$, $(a'+b')$

Każdy z tych odpowiadających sobie elementów pełni

---

[1]) Przy zaliczeniu do ich elementów punktów wzgl. prostych przekątnych.

[2]) Po włączeniu 7 boku $[0]$ kwadratu wewnętrznego i 7 wierzchołka $[1]$ kwadratu zewnętrznego (por. odnośniki na str. 70 i 71).

w kwadracie, do którego należy, tę samą rolę, jaką pełni w drugim kwadracie odpowiadający mu element. Np. przeciwległym bokom właściwym kwadratu zewnętrznego a i a' odpowiadają w powyższej tabeli przeciwległe boki właściwe kwadratu wewnętrznego ab i $a'b'$ i t. p. Dzięki ustanowieniu tej odpowiedniości będziemy mogli przechodzić od związków między elementami logiczno-geometrycznemi jednego kwadratu do związków odpowiadających im elementów drugiego kwadratu.

Ustanowimy tu jeszcze jedną odpowiedniość, wysoce znamienną dla architektoniki świata logicznego. Będzie to odpowiedniość również między elementami tej samej postaci, lecz będzie ona tutaj wewnętrzną, w obrębie elementów tego samego kwadratu (wewnętrznego, wzgl. zewnętrznego). Posłuży ona specjalnie do uwydatnienia stanowiska, jakie zajmują w systemie topologiki dwuelementowej jej dwa osobliwe elementy: 7-my bok wewnętrznego kwadratu, t. j. *0*, jako prosta w nieskończoności, oraz 7-my wierzchołek zewnętrznego kwadratu, t. j. *1*, jako początek współrzędnych (por. odnośniki na str. 70 i 71 oraz stronicę 72).

Ułóżmy elementy płaszczyzny logicznej w dwa szeregi dwoiste, zaczynając od elementów prostych i kończąc nadzłożonemi [1]). Szeregi te tak się przedstawiać będą:

---

[1]) Przez elementy nadzłożone rozumiemy tu elementy: $ab'+a'b$, $ab+a'b'$, ich iloczyn: $(ab'+a'b)\,(ab+a'b')=(a+b)\,(a'+b')(a'+b)(a+b')=[0]$ (zero jest tu prostą w nieskończoności, nie zaś punktem - początkiem współrzędnych) oraz ich elementy dualne: $(a+b')(a'+b)$, $(a+b)(a'+b')$, ich sumę: $(a+b')\,(a'+b)+(a+b)\,(a'+b') = ab'+a'b+ab+a'b' = [1]$ (jedność jest tu punktem - początkiem współrzędnych, nie zaś prostą w nieskończoności).

Elementy proste[1])	*Elementy złożone*
$a, b; a', b'; 0_{aa'}, 0_{bb'}$	$ab, ab', a'b, a'b'$
punkty l. proste	l. proste
$a, b; a', b'; 1_{a+a'}, 1_{b+b'}$	$a+b. a+b', a'+b, a'+b$
l. proste punkty	punkty

Elementy nadzłożone

$ab'+a'b; ab+a'b'; [0]$

punkty l. prosta

$(a'+b)(a+b'); (a+b)(a'+b'); [1]$

l. proste punkt

Otóż między skrzydłami tych szeregów, między elementami prostemi i nadzłożonemi każdego szeregu, zachodzi odpowiedniość, w której wyraża się pokrewieństwo kategorjalne, istniejące między wierzchołkami a dwoma punktami przekątnemi kwadratu prostego, wzgl. dualnie: między jego bokami i dwiema przekątnemi [2]).

Odpowiedniość ta tak się przedstawia:

Kwadrat wewnętrzny

(1) Punktowi a wzgl. b odpowiada punkt $ab'+a'b$
(2) Punktowi a' wzgl. b' „ punkt $ab+a'b'$
(3) Prostej $0_{aa'}$ wzgl. $0_{bb'}$ „ prosta $[0]$

Kwadrat zewnętrzny

(4) Prostej a wzgl. b odpowiada prosta $(a'+b)(a+b')$
(5) Prostej a' wzgl. b' „ prosta $(a+b)(a'+b')$
(6) Punktowi $1_{a+a'}$ wzgl. $1_{b+b'}$ „ punkt $[1]$

---

[1]) Elementy $0_{aa'}$, $0_{bb'}$, $1_{a+a'}$, $1_{b+b'}$ zaliczamy tutaj do elementów prostych, w tym tylko sensie, że każdy z nich jest funkcją jedynie elementów tego samego wymiaru (np. $a—a'$), gdy natomiast elementy w tym sensie złożone są już funkcjami elementów a i b.

[2]) To pokrewieństwo kategorjalne uwidocznione jest na tabl. I (str. 54) przez wskazanie „dwućwiartkowej" natury wszystkich tych elementów.

Widzimy, że wyżej wspomniane pokrewieństwo kategorjalne, wyrażające się w odpowiedniościach (1), (2) oraz (4), (5), prowadzi do pokrewieństwa kategorjalnego dwóch (zwykłych) przekątnych kwadratu wewnętrznego z trzecią (dodatkową) przekątną, wzgl. dwóch (zwykłych) punktów przekątnych kwadratu zewnętrznego z trzecim (dodatkowym) punktem przekątnym, które to pokrewieństwa znajdują wyraz w odpowiedniościach (3), (6). W istocie bowiem iloczynowi

$$aa' \text{ (wzgl. } bb') \text{ czyli } 0_{aa'} \text{ (wzgl. } 0_{bb'})$$

odpowiada iloczyn elementów, odpowiadających elementom a, a' (wzgl. b, b'), a więc iloczyn

$$(ab'+a'b)(ab+a'b') = [0],$$

sumie zaś

$$a+a' \text{ (wzgl. } b+b') \text{ czyli } 1_{a+a'} \text{ (wzgl. } 1_{b+b'})$$

odpowiada suma elementów, odpowiadających tym składnikom, a więc suma

$$(a'+b)(a+b')+(a+b)(a'+b') = [1]$$

Geometrycznie odpowiedniości te przedstawiają się w ten sposób: (nadzłożony) trzeci punkt $[1]$ i trzecia (nadzłożona) prosta $[0]$ zajmują odwrotne położenie, aniżeli proste jednostki i zera. Mianowicie, gdy $1_{aa'}$ i $1_{bb'}$ były punktami w nieskończoności, $[1]$ jest tu punktem w początku współrzędnych; $[0]$ natomiast jest tu prostą w nieskończoności, gdy $0_{aa'}$ i $0_{bb'}$ były osiami, przechodzącemi przez początek współrzędnych. Proste a-a' i b-b' zbiegały się w nieskończoności; natomiast odpowiadające im proste nadzłożone przecinają się w początku współrzędnych, i podobne odwrócenie zachodzi w dwoistych elementach.

Jeżeli teraz przejdziemy do rozwinięć elementów prostych z jednej strony, elementów zaś nadzłożonych z drugiej, to z dwóch przeciwnych stron znajdziemy się na tym samym terenie elementów złożonych. Albowiem:

punkt prosty *a* rozwija się na proste: *ab* i *ab'*, zaś
punkt nadzłożony *ab'*+*a'b*[1]) rozwija się na proste: *ab'* i *a'b*.
Podobnie punkt prosty *a'* i jego nadzłożony odpowiednik.

I dwoiście:

prosta *a* rozwija się na punkty: *a*+*b* i *a*+*b'*, zaś
prosta nadzłożona *(a'+b) (a+b')* rozwija się na punkty: *(a'+b)* i *(a+b')*.
Podobnie prosta *a'* i jej nadzłożony odpowiednik.

Jak widzimy, odpowiedniość ta wskazuje dwie odwrotne drogi, prowadzące do elementów złożonych. Jedna z nich będzie prowadziła od $1_{a+a'}$ i $1_{b+b'}$ wzgl. $0_{aa'}$ i $0_{bb'}$ przez dichotomje tych elementów na elementy proste i przez dalszą dichotomję tych elementów prostych na elementy złożone. Druga zaś — odwrotnie — będzie szła od elementów: trzeciego punktu [*1*], wzgl. trzeciej prostej [*0*] przez dichotomje ich na elementy nadzłożone i przez dalszą dichotomję tych elementów nadzłożonych na elementy złożone.

Odpowiedniość funkcyj elementów prostych i nadzłożonych jest tu całkowita.

---

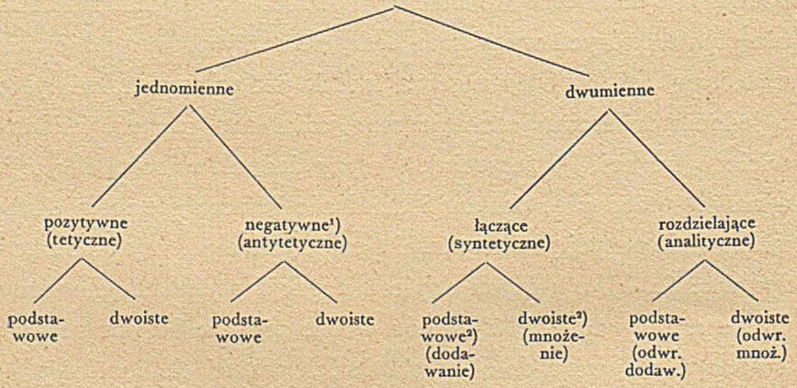
[1]) Punkt w nieskończoności na osi skośnej *(a+b)(a'+b'*.

Rozdział VI.

DZIAŁANIA LOGICZNE A CZWÓRKI ELEMENTÓW PŁASZCZYZNY KATEGORJALNEJ.

Dwóm elementom dwoistym, sumie i iloczynowi logicznemu, odpowiadają w logice matematycznej dwa dwoiste działania logiczne, dwoiste działania łączące, syntetyczne: dodawanie i mnożenie logiczne (por. str. 12—13). Jeżeli jednak mamy działania syntetyczne, to musimy również uwzględniać działania proste, których wytworem będą elementy proste, takie jak *a*, *b*, wzgl. *a'*, *b'*. Otóż algebra logiki, jak wiemy, mówi tylko o jednem działaniu jednomiennem, działaniu prostem, mianowicie o negacji (przeczeniu). Należy jednak u boku negacji, a nawet przed nią, postawić działanie jeszcze pierwotniejsze, mianowicie pozycję, która powołuje do życia elementy proste pozytywne *(a, b)*, z których dopiero negacja wytwarza elementy proste negatywne *(a', b')*. Otóż wobec tego że logika geometryczna doprowadza do odkrycia dwóch postaci elementów prostych, zarówno pozytywnych jak i negatywnych (por. również niżej str. 86), więc i działania proste pozycji i negacji (tezy i antytezy) przedstawią się nam w dwoistej postaci, całkowicie analogicznie do dwoistej postaci, w jakiej występują działania syntetyczne (dodawanie i mnożenie). Jeżeli zaś zkolei zapytamy, czy też dla działań łączących niema takiego odpowiednika, jaki wśród działań prostych widzimy w odpowiednikach pozycji i negacji, to odpowiedź wypadnie twierdząca, gdyż możemy mówić, oczywiście, nietylko o syntezie a i b w $a+b$, lecz i o analizie, podziale $a+b$ na elementy proste a i b. Tych działań analitycznych logika algebraiczna nie uwzględnia z tego przedewszystkiem względu, że istotnie znajdują one wyraz w tych samych wzorach, co i działania syntetyczne, tylko z innej strony, w innym kierunku czytanych i rozpatrywanych. Jednakże są to działania wręcz przeciwne syntetycznym i jako takie powinny być wyróżnione. W ten sposób pełna tablica działań logicznych, uwzględniająca również działania proste w ich dwoistej postaci, przedstawia się, jak następuje:

DZIAŁANIA LOGICZNE.



W ten sposób, jeżeli chodzi o działania proste, logika geometryczno-architektoniczna zamiast jednego działania prostego, uwzględnianego przez algebrę logiki (działania negacji), od-

[1]) W szerokiem tego słowa znaczeniu.

[2]) Jest rzeczą względną i umowną, które z dwóch dwoistych działań łączących przyjąć za podstawowe.

różnia cztery takie działania (i ich wytwory): 1) pozycję (tezę) podstawową, 2) pozycję (tezę) dwoistą względem podstawowej, 3) negację (antytezę) podstawową i 4) negację (antytezę) dwoistą względem podstawowej. Taką właśnie dwoistość w dziedzinie pojęć negatywnych widzimy już w logice tradycyjnej, która odróżnia pojęcia: zły i niedobry; pojęcie „zły" — jest to pojęcie przeciwne (biegunowe) względem pojęcia „dobry", pojęcie „niedobry" — to właściwa negacja (zaprzeczenie) pojęcia „dobry". I takie właśnie jest znaczenie dwoistych elementów negatywnych (antytetycznych) w logice architektonicznej: jeden z nich jest *biegunem* podstawowego elementu pozytywnego (tetycznego), drugi — jego właściwą *negacją* (tutaj[1]) w znaczeniu prywacji, braku elementu pozytywnego). Stosunek elementu biegunowego do negatywnego (w ścisłem tego słowa znaczeniu) okazuje się stosunkiem dwoistości, całkowicie analogicznym do stosunku, w jakim znajduje się element pozytywny podstawowy do elementu pozytywnego dwoistego. W ten sposób czwórka naszych elementów prostych tak się będzie przedstawiała:

1) element pozytywny podstawowy
2) element dwoisty (względem 1)
3) element biegunowy (względem 1)
4) element negatywny (względem 1),

przyczem nietylko element 2) jest dwoisty względem 1), lecz i element 4) jest dwoisty względem 3), będąc negacją 1).

Rozpatrzymy tę czwórkę elementów na obrazie płaszczyzny logicznej (rys. 3, str. 20).

Weźmy, jako podstawowy element pozytywny, punkt *a*.

---

[1]) Por. niżej str. 92

Wtedy prosta *a* przedstawiać będzie element pozytywny dwoisty względem punktu *a*, punkt *a'* będzie odpowiednio podstawowym elementem negatywnym (w szerszem tego słowa znaczeniu), prosta *a'* będzie przedstawiała element negatywny dwoisty względem punktu *a'*. Punkt *a'* będzie równocześnie elementem biegunowym, czyli biegunem względem punktu *a*, prosta zaś *a'* będzie w stosunku do punktu *a* jego negacją (zaprzeczeniem) [1]). Przytem możemy stosunek biegunowości przenieść z dziedziny elementów punktowych na elementy równoważne dwoiste, a więc należące do dziedziny linjowej, i mówić w ten sposób nietylko, że punkty *a* i *a'* (elementy 1 i 3) stanowią względem siebie bieguny, lecz że biegunami są względem siebie również proste *a* i *a'* (elementy 2 i 4), czyli elementy: dwoisty i negatywny względem podstawowego elementu pozytywnego (1). W ten sposób nietylko struktura dwoista przenosi się z dziedziny pozytywnej na negatywną, lecz i struktura biegunowa przechodzi z dziedziny podstawowej na dwoistą względem niej.

Algebraicznie możemy wyróżnić równoważne elementy proste w ten sposób:

1) element pozytywny podstawowy: $a = a + 0$ (punkt *a*)

2) element dwoisty (względem 1): $a = a \, . \, 1$ (prosta *a*)

3) element biegunowy (względem 1): $a' = a' + 0$ (punkt *a'*)

4) element negatywny (względem 1): $a' = a' \, . \, 1$ (prosta *a'*).

Przy przejściu od elementu danego do dwoistego widzimy tu zastosowane znane nam prawidła przejścia od danego wzoru do dualnego (p. str. 13), podobnie jak przy przejściu od elementu danego do jego negacji zachowane są prawidła de

---

[1]) Prosta *a* wyraża się, jak wiemy, wzorem: $a = a \, . \, 1$, punkt *a* wzorem $a = a + 0$, punkt *a'* wzorem: $a' = a' + 0$. Otóż — zgodnie z wzorami de Morgana (p. str. 28) — $(a \, . \, 1)' = a' + 0$, to zaś znaczy, że negacją prostej *a* jest punkt *a'*. Prosta zaś *a'* będzie już nie negacją prostej *a*, lecz jej biegunem.

Morgana (p. str. 28). Elementy biegunowe nie są odróżniane w algebrze logiki od elementów negatywnych, i wobec tego algebra logiczna nie podaje prawideł przejścia od elementów danych do ich biegunów. Jak widzimy jednak z powyższego zestawienia, ażeby przejść np. od elementu $a + 0$ do jego bieguna, należy a zamienić na jego biegun a' (prostą a na prostą a'), znak $+$ pozostawić bez zmiany i zamiast prostej 0 wziąć jej biegun, którym też będzie prosta 0. Biegunem zera jest więc zero, a przechodzi ono w jedność tylko pod działaniem negacji i dwoistości; podobnie również biegunem jedności jest jedność, nie zaś zero [1]). Ogólniej: przy przejściu od sumy (wzgl. iloczynu) dwóch lub więcej elementów do elementu biegunowego należy zamiast składników tej sumy (wzgl. czynników iloczynu) wstawić elementy względem nich biegunowe, nie zmieniając znaku działania i pozostawiając bez zmiany 0 oraz 1. Możemy jednak uniknąć tego nowego bezpośredniego przejścia od elementów danych do biegunowych, sprowadzając je do dwóch przejść już znanych, mianowicie, przejścia od elementu danego do elementu dwoistego i następnie do elementu negatywnego względem tego dwoistego (albo też w odwrotnym porządku). Istotnie bowiem, jak to widać z powyższego zestawienia, element $a' + 0$, biegunowy względem podstawowego $a + 0$, jest negacją elementu $a \,.\, 1$, dwoistego względem elementu podstawowego (lub w odwrotnym porządku:

[1]) Tę równoważność biegunów elementów granicznych widzimy również w arytmetyce, gdzie 0 arytmetyczne jest $\pm . 0$, i podobnie ∞ jest $\pm \infty$. Że istotnie biegunem zera logicznego jest zero, biegunem zaś jedności logicznej jest jedność, widzimy również z wzorów $aa' = 0$ oraz $a + a' = 1$, które przy przejściu do elementów biegunowych dają w swych lewych częściach $a'a$ oraz $a' + a$, a więc znowu 0 oraz 1.

jest dwoisty względem elementu a' . 1, będącego negacją elementu podstawowego $a + 0$). I podobnie element dwoisty możemy określić przy pomocy biegunowości i negacji elementu podstawowego, zaś element negatywny przy pomocy dwoistości i biegunowości.

Związki między czterema elementami prostemi stały się przejrzyste dzięki temu, że elementy proste przedstawione zostały jako granice elementów złożonych (np. a jako $a + b$, gdzie $b = 0$). Nie ulega więc wątpliwości, że takie czwórki elementów odnajdziemy również w dziedzinie elementów złożonych. I tak też jest w rzeczywistości. Spójrzmy na rys. 3, biorąc jako punkt wyjścia element złożony $a + b$. Natychmiast odnajdziemy cztery w mowie będące elementy, zsuwając się po przekątnej większego kwadratu.

1) element podstawowy: $a + b$ (punkt)

2) element dwoisty wzgl. 1): ab (prosta)

3) element biegun. wzgl. 1): $a' + b'$ (punkt)

4) element negat. wzgl. 1): $a' b'$ (prosta).

Analogiczną czwórkę elementów otrzymamy, biorąc za punkt wyjścia element $a' + b$, element mieszany, składający się z elementu pozytywnego i negatywnego (w szerszem tego słowa znaczeniu). W ten sposób wszystkie elementy płaszczyzny kategorjalnej przedstawić możemy w postaci zespołów czwórkowych (element podstawowy, element względem niego dwoisty, biegunowy i negatywny). Otrzymamy wtedy następującą tablicę elementów topologicznych płaszczyzny kategorjalnej (patrz str. 83).

El. podstawowy	punkt a	punkt b	punkt $a+b$	punkt $a'+b$
El. dwoisty	prosta a	prosta b	prosta ab	prosta $a'b$
El. biegunowy	punkt a'	punkt b'	punkt $a'+b'$	punkt $a+b'$
El. negatywny	prosta a'	prosta b'	prosta $a'b'$	prosta ab'

El. podstawowy	punkt $a'b+ab'$	punkt $1_{a+a'}$
El. dwoisty	prosta $(a'+b)(a+b')$	prosta $0_{aa'}$
El. biegunowy	prosta $(a+b)(a'+b')$	prosta 1[1])
El. negatywny	punkt $ab+a'b'$	punkt 0[2])

El. podstawowy	punkt $1_{b+b'}$	punkt $[1]$
El. dwoisty	prosta $0_{bb'}$	prosta $[0]$
El. biegunowy	prosta 1[1])	prosta 1[1])
El. negatywny	punkt 0[2])	punkt 0[2])

Jak wiemy, element dualny względem 1 jest równoważny z elementem negatywnym względem 1; podobnie element dualny względem $a'b + ab'$ jest równoważny z elementem negatywnym względem $a'b + ab'$; i tak samo przedstawia się sprawa elementów dualnych i negatywnych względem 0 i $(a' + b)(a + b') = ab + a'b'$. Otóż dopiero logika geometryczna wy-

[1]) Ta sama prosta 1 (prosta w nieskończoności) występuje tu w 3 różnych kompleksach.

[2]) Ten sam punkt 0 (początek współrzędnych) występuje tu w 3 różnych kompleksach.

Trzy ostatnie czwórki wobec powtarzania się w nich elementów biegunowych i negatywnych moglibyśmy przedstawić w postaci jednej jedynej czwórki strukturalnej o potrójnych elementach biegunowych i negatywnych, mianowicie: element podstawowy — punkt 0, element dwoisty — prosta 1, element biegunowy — proste $0_{aa'}$, $0_{bb'}$, $[0]$, el. negatywny — punkty $1_{a+a'}$, $1_{b+b'}$, $[1]$. Gdybyśmy teraz zechcieli uwzględnić nie wszystkie elementy równoważne płaszczyzny kategorjalnej, lecz tylko te wśród nich, które się przedstawiają w różnych postaciach (punkt—prosta), wtedy powyższa czwórka strukturalna elementów zredukowałaby się do zwykłej, prostej czwórki, i odpowiednio liczba elementów płaszczyzny (z uwzględnieniem elementów równoważnych o różnej jednak tylko postaci) okazałaby się równą 24.

kazuje ad oculos, że te elementy algebraicznie równoważne są jednak w istocie rzeczy różne, że np. element dwoisty względem punktu $I_{a+a'}$ przedstawia się w postaci prostej $O_{aa'}$ (elementy dwoiste są wyznaczane przez t. zw. biegunowość wzajemną względem koła — por. niżej str. 109), element zaś względem punktu $I_{a+a'}$ negatywny przedstawia się w postaci punktu O na osi $O_{aa'}$. Przytem, jeżeli chodzi o w mowie tu będące elementy graniczne, to okazuje się, że tutaj elementy biegunowe (podstawowy i biegunowy, wzgl. dwoisty i negatywny) występują w rozmaitych postaciach geometrycznych; podczas gdy zawsze elementem biegunowym punktu był punkt, linji zaś prostej — linja prosta, tutaj odwrotnie: biegunem punktu jest prosta, biegunem prostej — punkt (por. ostatnie 4 czwórki).

Rozdział VII.

DWOISTOŚĆ ORAZ NEGACJA ELEMENTÓW I ICH INTERPRETACJE.

Dwoistość (dualność) panuje — jak wiemy — nad całą płaszczyzną i przestrzenią (por. str. 69—72 oraz 77—79) i ona przedewszystkiem nadaje jej wybitne piętno architektoniczne, przejawiające się z natury rzeczy i we wszystkich wzorach, wiążących jej elementy. Przyjrzyjmy się tej dwoistości działań i związanej z nią dwoistości elementów nieco bliżej.

Dwoistość ta — przebijająca się już w pracach ojca nowej syntetycznej geometrji, Desargues'a (1593—1662) — została ostatecznie najaw wyprowadzona w dziedzinie geometrji rzutowej przez Ponceleta (1822) i Gergonne'a (1826), jako dwoistość cięcia i rzutowania (łączenia), w dziedzinie zaś czysto logicznej przez jednego z współtwórców współczesnej logistyki, przez Peirce'a (1867) i niezależnie od niego w dziesięć lat później (1877) przez Schrödera, jako dwoistość dodawania i mnożenia logicznego. Ta uderzająca koincydencja między własnościami działań logicznych i geometrycznych była dla nas wskaźnikiem niewątpliwym, że między światem logiki i światem geometrji istnieje głęboka odpowiedniość, i ta właśnie koincydencja pobudziła nas do tego, by całej logice algebraicznej nadać postać geometryczną, zdolną dwoistość tę uwypuklić specjalnie plastycznie. I nietylko uwypuklić. Zgeometryzowanie logiki odkrywa dwoistość tam, gdzie przy stosowaniu metody tylko algebraicznej długo jeszcze pozostałaby ona niewykryta. Mamy tu na myśli dwoistość elementów prostych: *a*, *b*, *a'*, *b'*, z których każdy występuje w dziedzinie geometrycznej w dwoistej postaci, jako punkt *a* i jako prosta *a*, i ta właśnie dwupostaciowość geometryczna przekonywa nas o dwoistości każdego elementu prostego i każe nam szukać dla niej algebraicznego odpowiednika [1]).

Postaramy się teraz uświadomić sobie dokładniej stosunek, w jakim znajduje się element dwoisty względem elementu podstawowego (i podobnie: element negatywny względem biegunowego).

1) Przedewszystkiem możemy interpretować sens elementu dwoistego w stosunku do elementu podstawowego, opierając się na bardziej nam znanych znaczeniach elementów biegunowych i negatywnych. Z zestawienia czterech elementów na str. 80 to sprowadzenie dwoistości do biegunowości łącznie z przeczeniem daje się łatwo uskutecznić. Widzimy tam bowiem, że element dwoisty względem podstawowego jest zaprzeczeniem (negacją) elementu biegunowego względem podstawowego. Jeżeli więc element pozytywny podstawowy będzie np. reprezentowany przez pojęcie „dobry“ (1), wtedy jego biegunem będzie po-

[1]) Dwoistość algebraiczną elementów prostych *a*, *b*, *a'*, *b'* można przedstawić, wyrażając te elementy dwojako przy pomocy wyrażeń dwoistych, mianowicie element *a*, jako $a = a + 0$ oraz jako $a = a \,.\, 1$, i podobnie dla innych elementów prostych. Geometrycznie pierwszy wzór: $a = a + 0$ będzie oznaczał punkt *a*, jako przecięcie prostej *a* z osią zerową $0_{aa'}$, wzór zaś dwoisty: $a = a \,.\, 1$ oznaczać będzie dwoiście prostą *a*, jako połączenie punktu *a* z punktem w nieskończoności $1_{a+a'}$.

jęcie „zły“ (jego negacją pojęcie „niedobry“ (4) = „taki, którego cechuje *brak* dobroci“), zaś elementem dwoistym względem pojęcia „dobry“ będzie pojęcie „niezły“, będące właśnie w takim samym stosunku (mianowicie stosunku dwoistości) do pojęcia „dobry“ (1), w jakim pojęcie „niedobry“ (4) jest do pojęcia „zły“ (3). Z powyższej czwórki pojęć logika klasyczna pomija pojęcie dwoiste do podstawowego (tutaj: pojęcie „niezły“), zadowalając się trójką pojęć: dobry — niedobry — zły, w której dwoistości po stronie negatywnej nie odpowiada dwoistość pozytywna; logika zaś algebraiczna, nie wyróżniając dwoistych pojęć prostych, sprowadza tę czwórkę do dwójki, nie odróżniając wśród pojęć prostych nawet elementów właściwie negatywnych od biegunowych.

Musimy tu jednak zwrócić uwagę na to, że pojęcie dwoistości (a w związku z nią i negacji), jakie powyżej było wyłożone, dotyczy tylko logiki „jednorodnej“, a więc takiego systemu, w którym wszystkie elementy są np. pojęciami ogólnemi, albo też wszystkie reprezentują pojęcia klas i t. p. Sprawa jednak przedstawia się zasadniczo odmiennie, kiedy w płaszczyźnie kategorjalnej pewne elementy będą przedstawiały np. pojęcia ogólne, inne znów pojęcia klas, odpowiadających tym treściom. Wtedy odsłoni się nam zupełnie odmienny i znacznie donioślejszy sens dwoistości topologicznej, okaże się, mianowicie, że stosunki między treściami danemi (pojęciami ogólnemi) mają w stosunkach między odpowiadającemi tym treściom klasami (zakresami) swoje dwoiste odpowiedniki. Rozpatrzmy bliżej tę interpretację dwoistości w systemie topologiki „niejednorodnej“, mianowicie w systemie treściowo-zakresowym.

2) Między treścią i zakresem pojęć ujawnił nam się związek

(por. Geometrja logiki kategorjalnej, Przegląd Filozoficzny r. 1926, t. 29, str. 176—177), polegający na tem, że jeżeli jedną z dwoistych formuł logiki będziemy interpretowali treściowo, to formuła względem pierwszej dwoista wyrażać będzie stan rzeczy między zakresami pojęć (oraz ich sum i iloczynów), występujących w pierwszej treściowej formule. I to samo — mutatis mutandis — dotyczy interpretacji zakresowej jednego z dwoistych wzorów. Weźmy np. zasadę dichotomji:

$$a = (a + b)(a + b') \qquad (5^a)$$

Interpretujemy ją treściowo i bierzemy pod uwagę, że występują w niej: pojęcie *a*, suma pojęć: $a + b$, suma pojęć: $a + b'$ oraz iloczyn tych sum. Twierdzimy, że formuła dwoista do powyższej wyraża stosunki, zachodzące między zakresami tych pojęć. Rozpatrzmy to systematycznie.

Treści *a* niechaj odpowiada zakres (klasa) *a*, treści *b* — zakres (klasa) *b*. Jaki zakres odpowiada treści $a + b$, a więc jakie to przedmioty będą posiadały zarówno cechę *a*, jak i cechę *b*, a więc cechę $a + b$? Będą to, oczywiście, te elementy, które należą równocześnie (zarówno) do klasy *a*, jak i klasy *b*; gdyż takie właśnie elementy podpadają zarówno pod treść *a*, jak i *b*, innemi słowy, posiadają zarówno cechę *a*, jak i *b*, a więc cechę $a + b$. Ogół zaś elementów, należących zarówno do klasy *a*, jak i do klasy *b*, t. j. maksymalnie wspólnych tym klasom, jest — jak wiemy — iloczynem logicznym tych klas, a więc klasą *ab*. Na pytanie więc, jaki zakres (klasa) odpowiada treści $a + b$, odpowiedź brzmi: zakres (klasa) *ab*. Np. zakres, odpowiadający treści „człowiek dobry" $(a+b)$, będzie to ogół elementów, z których każdy należy zarówno do zakresu ludzi (*a*), jak i do zakresu istot dobrych (*b*), a więc będzie to zakres $a \times b$, zakres (klasa) ludzi dobrych. A teraz odpowiemy na pytanie: jaki zakres odpowiada treści $a \times b$? Odpowiada tej treści zakres $a + b$ (suma zakresów a i b), gdyż każdy element tego zakresu, tej sumy zakresów a i b — i tylko taki element — posiada cechę „albo a albo b“, czyli odpowiada treści $a \times b$ (mnożenie logiczne wyraża wszak tę dysjunkcję, to „albo“). W ten sposób widzimy:

treści $a + b$ odpowiada zakres ab (i odwrotnie), zaś treści ab odpowiada zakres $a + b$ (i odwrotnie).

Jako przykład przyporządkowania zakresu do iloczynu treści, weźmiemy zakres, odpowiadający treści ab, gdzie a „człowiek“, b — „dobry“, treść więc ab — „albo człowiek, albo istota dobra“. Tej treści odpowiadać będzie zakres, obejmujący zarówno wszystkich ludzi, jak i wszystkie istoty dobre, gdyż istotnie, każdy z elementów tego zakresu podpada pod pojęcie: „albo człowiek, albo istota dobra“.

Teraz już przyporządkowanie zakresów pojęciom, ich sumom i iloczynowi tych sum we wzorze 5^a nie będzie przedstawiało żadnych trudności.

Podobnie jak treści $a + b$ odpowiada zakres ab, tak samo treści $a + b'$ odpowiadać będzie zakres ab'. Wobec tego zaś, że treści ab odpowiada zakres $a + b$, więc treści $(a + b)$ $(a + b')$, figurującej w prawej części wzoru 5^a, odpowiadać będzie zakres, składający się z sumy zakresów czynników tej treści, a więc zakres $ab + ab'$. Treści zaś a, występującej w lewej części wzoru 5^a, odpowiada również zakres a, tak że jako odpowiednik zakresowy tego wzoru otrzymamy wzór:

$$a = ab + ab'.$$

Wzór ten — jak wiemy — jest to wzór 5^b, dualny właśnie względem 5^a. W ten sposób wykazaliśmy, że formuła dwoista do formuły: $a = (a + b)(a + b')$, interpretowanej *treściowo*, wyraża stosunki między *zakresami* tych treści.

Weźmy jeszcze jako przykład ze znakiem nierówności (zawierania się) wzór

$$a < a+b \qquad (10^a).$$

Interpretujemy go treściowo; znaczy on wtedy: treść a zawarta jest w treści $a+b$; i zapytujemy, jaki wzór będzie wyrażał związek między zakresami treści a i treści $a+b$? Treści a niech odpowiada zakres a, treści b — zakres b, treści $a+b$ odpowiadać wtedy będzie — jak wiemy — zakres ab. Lecz zakres ab jest mniejszy, uboższy od zakresu a, zawiera się w nim, otrzymamy więc, jako stosunek omawianych zakresów:

$$ab < a \qquad (10^b)$$

Wzór ten — jak wiemy — jest to właśnie wzór dwoisty (dualny) względem (10^a). I podobnie we wszystkich analogicznych przypadkach.

Dochodzimy w ten sposób do bardzo ważnego twierdzenia: Przekształcenie zawsze prawdziwych związków treściowych (wzgl. zakresowych) na zawsze prawdziwe związki zakresowe (wzgl. treściowe) jest przekształceniem przez dwoistość. Również i odwrotnie: przekształcenie przez dwoistość jest przekształceniem zawsze prawdziwych związków treściowych (wzgl. zakresowych) na zawsze prawdziwe związki zakresowe (wzgl. treściowe).

W związku z powyższemi rozważaniami dwoistość samych elementów logiki geometrycznej możemy pojmować jako dwoistość ze względu na treść i zakres (klasę). Np. element a, znajdujący się w lewej części wzorów 5, będzie czem innem we wzorze 5^a i czem innem we wzorze 5^b. Mianowicie, jeżeli we wzorze 5^a będzie on oznaczał treść (wspólną treściom $a+b$ i $a+b'$), to we wzorze 5^b oznaczać on będzie zakres (łączący dodajnie zakresy *ab* i *ab'*) — i odpowiednio do tego prosta *a* będzie oznaczała treść pojęcia ogólnego, punkt zaś *a* — jego zakres (klasę). Elementem dwoistym względem pojęcia ogólnego „dobry" nie będzie tu już pojęcie ogólne „niezły", lecz pojęcie klasy „dobry" (lub wprost: klasa „dobry"). Podobnie elementem negatywnym względem pojęcia ogólnego „dobry" nie będzie tu już ogólne pojęcie prywatywne ‚niedobry'", lecz pojęcie klasy „zły".

3) Przechodzimy teraz do innej jeszcze interpretacji dwoistości w systemie logiki o elementach „niejednorodnych". Interpretacja, którą tu wprowadzamy, będzie pokrewna poprzedniej, treściowo-zakresowej, z tą jednak różnicą, że pojęcie zakresu (klasy) będzie zastąpione przez pojęcie kolektywne (całościowe). To ostatnie pojęcie jest pokrewne pojęciu klasy pod tym względem, że i jego również przedmiot przedstawia mnogość jednorodnych elementów, mnogość jednakże nie rozdzieloną, dystrybutywną, jak przedmiot pojęcia klasy, lecz kolektywną, zjednoczoną, stanowiącą całość spójną. I podobnie jak pojęciu ogólnemu *a* (np. „człowiek" = „człowieczeństwo") odpowiadała poprzednio klasa *a* (klasa „człowiek"), przedstawiająca mnogość rozproszoną wszystkich istot, posiadających cechę „człowieczeństwo", tak samo pojęciu ogólnemu *a* („człowiek" = „człowieczeństwo") odpowiadać teraz będzie dwoiście pojęcie kolektywne *a* („ludzkość"), którego przedmiot będzie przedstawiał całość organiczną wszystkich istot, podpadających pod pojęcie ogólne „człowiek", a więc posiadających cechę „człowieczeństwo". Dwoistość pojęć: pojęcie ogólne — pojęcie klasy będzie mogła być zastąpiona przez dwoistość: pojęcie ogólne — pojęcie kolektywne (całościowe). Elementem dwoistym wzglę-

dem pojęcia ogólnego „dobry“ będzie teraz pojęcie kolektywne: „związek (całość) istot dobrych“ i podobnie elementem negatywnym względem pojęcia ogólnego „dobry“ będzie pojęcie kolektywne: „związek (całość) istot złych“.

Na tem kończymy szereg interpretacyj pojęcia dwoistości oraz negacji w logice dwuelementowej pojęć, bynajmniej zresztą nie uważając, że wyczerpaliśmy tu już wszystkie możliwości ich rozumienia. Chcemy tu tylko raz jeszcze podkreślić ten fakt, dotyczący negacji, że — jak widzieliśmy — element negatywny w ścisłem, węższem tego słowa znaczeniu (a więc nie element biegunowy względem danego) niekoniecznie musi być pojmowany jako brak, jako prywacja czegoś pozytywnego, że, przeciwnie, w systemie logiki „niejednorodnej“ element właściwie negatywny może nie zawierać w sobie nic z braku, z prywacji, lecz być — jak i element biegunowy — nosicielem cechy posiadanej, a nie brakującej. W systemie takim (por. wyżej punkty: drugi i trzeci) element, pełniący rolę elementu właściwie negatywnego względem elementu podstawowego, nie będzie niczem innem, jak jego elementem biegunowym, przeniesionym tylko z dziedziny podstawowej do dziedziny dualnej. Tak więc np. w systemie logiki niejednorodnej, której elementami będą pojęcia ogólne i pojęcia całościowe, elementem właściwie negatywnym względem pojęcia ogólnego „dobry“ będzie pojęcie „zły“, pojęte już jednak jako element dualnej dziedziny pojęć całościowych („zły“ = „związek istot złych“).

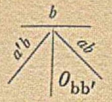
CZĘŚĆ III.

HARMONICZNOŚĆ I PROPORCJA W LOGICE GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNEJ.

Rozdział VIII.

ELEMENTY HARMONICZNE W LOGICE GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNEJ.

Przechodzimy obecnie do rozpatrzenia kwestji, która będzie może najwymowniejszym dowodem płodności metody geometrycznej w logice. Dzięki zgeometryzowaniu świata logiki będziemy w stanie dojrzeć w nim i stwierdzić tego rodzaju własności zasadnicze, których, być może, na drodze czysto logicznej nie udałoby się nigdy odkryć. Spójrzmy oto uważnie na obraz geometryczny płaszczyzny logicznej, a ujrzymy w czterech wierzchołkach wewnętrznego kwadratu następującą strukturę. W wierzchołku np. b spotykają się dwie proste ab i $a'b$, ich dwusieczna — oś $0_{bb'}$ oraz prosta b, prostopadła do tej dwusiecznej. I podobnie w wierzchołkach b', a i a'. Każdy, kto jest obznajmiony z początkami geometrji rzutowej, odpozna w tej strukturze, o ile zwróci na nią uwagę, pęk harmonicznych promieni z wierzchołkiem w punkcie b, i podobne pęki



z wierzchołkami w punktach b', a i a' [1]). W ten sposób intuicja

[1]) Jeżeli tu zwrócimy uwagę jeszcze na pęk harmoniczny promieni z wierzchołkiem w środku współrzędnych, pęk więc czterech prostych: $(a+b)(a'+b')$,

geometryczna doprowadza bezpośrednio do odkrycia w dziedzinie logiki elementów harmonicznych. Zbadajmy teraz kwestję tę bliżej, i analitycznie sprawdźmy otrzymane intuicyjnie wyniki.

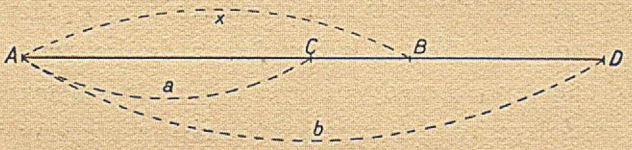
Nazywamy, jak wiadomo, cztery punkty A, B, C, D danej linji prostej *harmonicznemi*, gdy mamy:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1 \text{ czyli:}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \qquad (\alpha)$$

Mówimy wtedy również, że mamy dwie pary punktów harmonicznie sprzężonych, parę punktów A, B i parę C, D.

Oznaczmy AB przez x, AC przez a, AD przez b (rys. 7).



Rys. 7.

$(a'+b)$ $(a+b')$, $0_{aa'}$ i $0_{bb'}$, to harmoniczność tej grupy 4 prostych daje się natychmiast związać z istnieniem zewnętrznego kwadratu, jako czworoboku zupełnego, i z istnienia jego wyprowadzić. Nasz kwadrat zewnętrzny posiada, jak wiemy, 3 pary wierzchołków przeciwległych: $(a+b)-(a'+b')$, $(a+b')-(a'+b)$ oraz $I_{a+a'}-I_{b+b'}$. Otóż z geometrji rzutowej wiadomo (por. Enriques. Wykłady geometrji rzutowej, str. 54—55), że 4 promienie, należące do jednego pęku, tworzą grupę harmoniczną, jeżeli na jednym z tych promieni leży jedna para wierzchołków przeciwległych czworoboku zupełnego, na drugim — druga para takich wierzchołków, trzeci zaś i czwarty promień zawiera po jednym z elementów, stanowiących trzecią parę wierzchołków przeciwległych. Te właśnie warunki spełnia pęk promieni z wierzchołkiem w środku współrzędnych, albowiem na promieniu $(a+b)(a'+b')$ leży pierwsza para wierzchołków przeciwległych kwadratu zewnętrznego, punkty $(a+b)$ i $(a'+b')$, na promieniu $(a'+b)$ $(a+b')$ leży druga ich para, punkty $(a+b')$ i $(a'+b)$, zaś każdy z promieni $0_{aa'}$ i $0_{bb'}$ zawiera jeden z elementów trzeciej pary tych wierzchołków, mianowicie promień $0_{aa'}$ zawiera punkt $I_{b+b'}$, promień zaś $0_{bb'}$ — punkt $I_{a+a'}$.

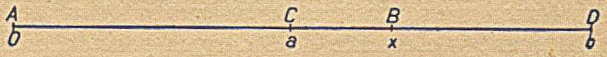
W myśl powyższej definicji elementów harmonicznych (α) punkty A, B, C, D będą punktami harmonicznemi, gdy mieć będziemy:

$$\frac{a}{x-a}=\frac{b}{b-x} \qquad (\beta)$$

Mówimy wtedy również, że *odcinek $AB = x$ został podzielony harmonicznie przez punkty C i D, a sam odcinek $AB = x$ nazywamy średnią harmoniczną dla AC (a) i AD (b)*. Z wzoru (β), przedstawiającego proporcję harmoniczną ciągłą, otrzymujemy dla średniej harmonicznej:

$$x=\frac{2ab}{a+b} \qquad (\gamma)$$

Oznaczmy teraz punkt wyjścia A przez 0, wtedy punkt C będzie oznaczony przez a, punkt B przez x i punkt D przez b, i na podstawie wzorów (α) i (β), wzgl. (α) i (γ) możemy powiedzieć: średnia harmoniczna (x) jest to czwarty element harmoniczny do trzech danych: 0, a, b lub dokładniej: element harmoniczny sprzężony z 0 ze względu na parę harmonicznie sprzężoną a i b (por. rys. 8).



Rys. 8.

Jak widać z powyższego, staramy się teraz nawiązać kontakt między elementami harmonicznemi geometrji rzutowej a dziedziną logiki, korzystając z własności metrycznych elementów harmonicznych, własności, wyrażonych wzorami (α) i (β); innemi słowy, staramy się nawiązać tu ów kontakt nie wprost, nie bezpośrednio, lecz przy pomocy algebry, wzgl. arytmetyki. Otóż posuniemy się o krok dalej na tej drodze, przytem o krok zasadniczy, gdy z pojęciem punktów harmonicznych zwiążemy również i pojęcie średniej arytmetycznej.

Weźmy teraz, mianowicie, za punkt wyjścia *(A)* nie *0*, lecz ∞ i szukajmy punktu harmonicznie sprzężonego z ∞ ze względu na podstawową parę punktów *a* i *b*. Wobec tego że punkt *A* oddalił się teraz w ∞, mieć będziemy $AC = AD$, i wzór (α) przybierze postać: $CB = BD$. Jeżeli teraz punkt *C* oznaczymy przez *a*, punkt *D* — przez *b*, zaś punkt *B* przez *X* — to otrzymamy: $X - a = b - X$ (δ) czyli

$$X = \frac{a+b}{2} \qquad (\varepsilon)$$

Wzór (δ) przedstawia proporcję arytmetyczną ciągłą i pozwala określić *X*, jako *średnią arytmetyczną* dla *a* i *b* (ε). W ten sposób nietylko średnią harmoniczną, lecz i średnią arytmetyczną pojęliśmy jako czwarty harmoniczny punkt do 3 danych punktów: średnia harmoniczna dla punktów *a* i *b* to punkt *x* harmonicznie sprzężony z *0* ze względu na punkty *a* i *b*; średnia arytmetyczna dla *a* i *b* to punkt *X* harmonicznie sprzężony z ∞ ze względu na punkty *a* i *b*. Tego rodzaju powiązanie średniej arytmetycznej ze średnią harmoniczną w pojęciu czwartego harmonicznego elementu do 3 danych posiada podstawowe znaczenie dla naszych dalszych wywodów.

Porównywując, mianowicie, czwórkę elementów, wśród których występuje średnia harmoniczna (p. rys. 8), z czterema odnośnemi elementami, wśród których występuje średnia arytmetyczna, łatwo zauważymy następującą ich odpowiedniość:

elem.	*0*	odpowiada element	∞
„	*a*	„ „	*a*
„	*b*	„ „	*b*
„	*x*	„ „	*X*
(śr. harm.)			(śr. arytm.)

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na to, że elementy graniczne *0* i ∞ w algebrze zwykłej pełnią, jako graniczne, rolę tę samą, co dwoiste elementy graniczne *0* i *1*, minimum i maximum logiczne w algebrze logiki, oraz na to, że średnia harmoniczna i średnia arytmetyczna dla *a* i *b* są jednoznacznie wyznaczonemi funkcjami *a* i *b*, podobnie jak dwoiste elementy logiczne: suma i iloczyn *a* i *b*, to narzuca się myśl, że dwie powyższe kolumny przedstawiają odpowiedniość dwoistą, i paralelizacja między algebrą ilości i algebrą jakości (logiką algebraiczną) na podłożu harmoniczności geometrycznej nie przedstawi już poważniejszych trudności. Ta paralelizacja algebry i logiki prowizorycznie [1]) wyraziłaby się w sposób następujący:

Elementy algebry ilości		*Elementy logiki (algebry jakości)*
a	odpowiada	*a*
b	„	*b*
0	„	*0* [1])
∞	„	*1* [1])
śr. harmon.	„	$a+b$
śr. arytm.	„	ab

W ten sposób dwie odpowiadające sobie czwórki harmoniczne przedstawiają w języku logiki dwa logiczne szeregi dwoiste (dualne): *0* odpowiada dualnie *1*, elem. *a* — dualne *a*, elem. *b* — dualne *b*, wreszcie $a + b$ odpowiada dualnie *ab*. Rzeczą zaś tu dla nas najważniejszą jest to, że każda z dwoistych czwórek przedstawia czwórkę elementów harmonicznych lub, inaczej mówiąc, dwie pary elementów harmonicznie sprzężonych z sobą.

[1]) Mówimy: prowizorycznie, gdyż, jak zobaczymy na str. 102, zeru i nieskończoności algebry zwykłej (czy arytmetyki) w logice dwuelementowej odpowiada jeszcze inna para elementów granicznych poza parą logiczną *0* i *1*.

Paralelizację tę między logiką a geometrją przedstawia prowizorycznie poniższa tabliczka:

Elementy logiki	*Elementy geometrji rzutowej*
a, b	Para punktów harmonicznie sprzężonych z sobą
0, 1[1])	Jeden z punktów drugiej pary elementów harmonicznie sprzężonych z sobą
$a+b$, ab	Czwarty punkt harmoniczny

Zasadniczym momentem, który nam umożliwił osiągnięcie powyższego rezultatu, było sparalelizowanie średniej arytmetycznej i średniej harmonicznej z iloczynem, wzgl. z sumą logiczną. Że odwzorowanie to jest słuszne, że istotnie stosunki między iloczynem i sumą logiczną są identyczne ze stosunkami, jakie wiążą średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną, wykazać daje się łatwo, założywszy nasuwającą się odpowiedniość między odwrotnością algebraiczną (czy arytmetyczną) elementu i jego logiczną negacją[2]). Znamy bowiem *określenie średniej harmonicznej dwóch elementów, jako odwrotności średniej arytmetycznej wziętej dla odwrotności tych elementów.*

Niechaj temi elementami będą a i b. Mamy więc:

Średnia arytm.: $\frac{a+b}{2}$

Średnia arytm. ich odwrotności: $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$

---

[1]) Względnie inna para elementów granicznych, odpowiadających zeru i nieskończoności algebry zwykłej (por. poprzedni odnośnik).

[2]) Tę odpowiedniość włączyć przeto należy do wyżej podanej tabelki (str. 99), umożliwiającej przejście od algebry ilości do logiki (algebry jakości).

Śr. harmoniczna: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

Otóż identyczne stosunki wiążą iloczyn i sumę logiczną. Możemy bowiem określić sumę logiczną dwóch elementów, jako negację iloczynu logicznego, wziętego dla negacji tych elementów (wzór de Morgana 9^B, por. str. 28).

A więc:

Iloczyn log. elementów:	$a \times b$
Iloczyn ich negacyj:	$a' \times b'$
Suma logiczna:	$(a' \times b')' = a + b$

Widzimy więc, że średnia harmoniczna powstaje ze średniej arytmetycznej w ten sam sposób, w jaki suma logiczna powstaje z iloczynu logicznego — mianowicie przez zamianę elementów na ich odwrotności (negacje) i następne odwrócenie (negację) w ten sposób otrzymanego rezultatu. Tak oto wykazaliśmy ścisłą analogję między sumą i iloczynem logicznym z jednej strony, średnią harmoniczną zaś i średnią arytmetyczną z drugiej.

Pozostaje jeszcze do rozpatrzenia przyporządkowanie zera logicznego i jedności logicznej arytmetycznemu 0 i ∞, które występują w dwóch czwórkach, względem siebie dwoistych. Przyporządkowaliśmy te elementy logiczne elementom arytmetycznym 0 i ∞ dlatego, że zero i jedność logiczna są względem siebie nietylko dwoiste, lecz i przedstawiają również wzajemne negacje, tak właśnie jak 0 i ∞ są wzajemnemi odwrotnościami $\left(0=\dfrac{1}{\infty},\ \infty=\dfrac{1}{0}\right)$. Zachodzi jednak teraz pytanie, czy warunkom stawianym tu przez 0 i ∞, a więc dwoistości i odwrotności (negacji), odpowiadają w dziedzinie logiki tylko elementy logiczne *0* i *1*, czy też może istnieje tam jeszcze inna para, wzgl. pary, czyniące zadość tym wymaganiom. Otóż w istocie rzeczy mamy w kategorjalnej topologice dwuelementowej jeszcze jedną parę — i tylko jedną — elementów, czyniących zadość powyższym warunkom; są to elementy: $a'b + ab'$ oraz $ab + a'b'$, przekątne większego kwadratu. Są one — jak łatwo sprawdzić — względem siebie dwoiste i równocześnie są wzajemnemi negacjami. W ten sposób tabliczki przejścia od algebry ilości do logiki i od logiki do geometrji w pełnej swej postaci przedstawiają się, jak następuje:

Elementy algebry ilości	*Elementy logiki*	*Elementy geometrji rzutowej*
Elem: a, b	Elem: a, b	Para elem. harmonicznie sprzężonych z sobą
Odwrotności tych elem.: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$	Negacje tych elementów: a', b'	Para elementów w ćwiartce przeciwległej[1])
0, ∞	Para: $0,1$ wzgl. para: $ab+a'b'$, $a'b+ab'$[2])	Jeden z elementów drugiej pary harm. sprzężonych z sobą elementów
Śr. harm., śr. aryt.	$a+b$, ab[3])	Czwarty punkt harm.

W ten sposób zostaje ugruntowane przejście od algebry zwykłej do algebry logiki i geometrji rzutowej, a wraz z tem i wprowadzenie elementów harmonicznych do dziedziny logiki ścisłej.

---

[1]) Przytem elementy te będą innej postaci, aniżeli elementy powyżej wymienione (por. odnośnik na str. 80).

[2]) Niżej zobaczymy, kiedy występuje jedna z tych par, kiedy zaś druga.

[3]) O restrykcjach, jakim podlegają tu *a* i *b*, patrz niżej str. 145, 146.

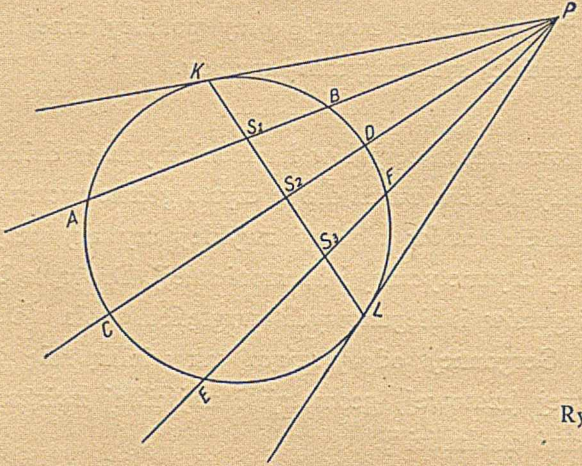
Rozpatrzmy teraz tę kwestję przy pomocy innej zupełnie, przytem bardziej systematycznej metody.

Do wprowadzenia zespołów harmonicznych w dziedzinę logiki możemy dojść również drogą czysto geometryczną, bez pośrednictwa elementów algebry zwykłej czy arytmetyki (pojęć średniej arytmetycznej i harmonicznej). Drogą tą będzie tu teorja biegunów i biegunowych względem koła (Desargues, Poncelet, Gergonne), odgrywająca tak wielką rolę w nowej syntetycznej (rzutowej) geometrji i najściślej związana z zagadnieniami dualności [1]).

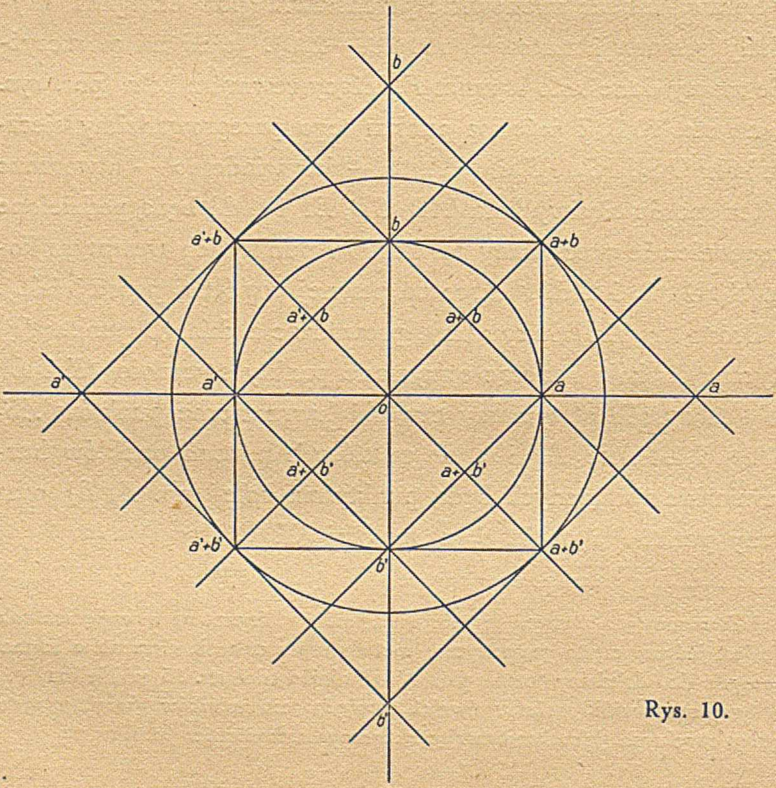
Sprawa tak się mianowicie przedstawia (por. Enriques. Wykłady geometrji rzutowej, str. 188—200). Jeżeli na płaszczyźnie mamy dane koło i punkt *P*, leżący zewnątrz koła (por. rys. 9 na str. 104), i jeżeli z punktu tego przeprowadzimy sieczne koła (PS_1, PS_2, PS_3 i t. d.), to — jak wiadomo — utworzone w ten sposób cięciwy koła (*AB*, *CD*, *EF* i t. d.) będą podzielone harmonicznie przez dany punkt (*P*) i punkty ich wewnątrz koła (S_1, S_2, S_3 i t. d.), leżące na pewnej wspólnej prostej (*KL*). Prostą tę (*KL*) otrzymamy, prowadząc z danego punktu (*P*) styczne do koła i łącząc otrzymane punkty styczności (*K* i *L*). W ten sposób otrzymamy czwórki harmoniczne punktów AS_1 BP, $CS_2\,DP$, $ES_3\,FP$ i t. p., w których parami punktów harmonicznie sprzężonych będą punkty na kole (np. *A*, *B*) oraz dany punkt *P* i punkt S_1 na prostej *KL*.

---

[1]) Zwracamy tu uwagę, że teorja biegunów i biegunowych względem koła nie jest jedyną czysto geometryczną metodą wprowadzenia elementów harmonicznych do dziedziny topologiki. W odnośniku do str. 95 widzieliśmy, że w tym celu wyjść możemy również z pojęcia czworoboków (wzgl. czworokątów) zupełnych, jako konstytuujących grupy harmoniczne.



Rys. 9.



Rys. 10.

Prostą *KL* nazywamy *biegunową punktu P* ze względu na dane koło, punkt zaś *P* — *biegunem prostej KL*. Jeżeli punkt *P* odsunie się w nieskończoność, to jego biegunową będzie średnica koła (prostopadła do linji, łączącej środek koła z danym punktem w nieskończoności), i odwrotnie: dla wszelkiej średnicy koła biegunem będzie punkt nieskończoności (leżący na prostopadłej do tej średnicy). Jeżeli zaś punkt *P* zajmie położenie na kole, wtedy jego biegunową będzie styczna do koła w tym punkcie, i odwrotnie: dla wszelkiej stycznej do koła biegunem będzie jej punkt styczności z kołem.

Na podstawie tej teorji biegunów i biegunowych względem koła możemy przystąpić do wykazania istnienia elementów harmonicznych w logice geometrycznej, rozumiejąc przez grupę harmoniczną elementów logicznych zespół elementów logicznych, przyporządkowanych topologicznie zespołowi geometrycznych elementów, tworzących grupę harmoniczną. W tym celu w naszym podstawowym diagramacie płaskim opisujemy z początku współrzędnych *0* dwa koła: jedno wokół mniejszego, drugie wokół większego kwadratu, przyczem mniejsze koło będzie równocześnie wpisane w większy kwadrat (por. rys. 10[1]).

Następnie z punktów w nieskończoności prowadzimy do kół tych sieczne (które będą tu prostemi równoległemi). Te punkty w nieskończoności (innemi słowy: kierunki na płaszczyźnie)

---

[1]) Ażeby nie komplikować diagramatu, nie wprowadzamy tu oznaczeń boków wewnętrznego kwadratu $(ab, ab', a'b, a'b')$, natomiast wprowadzamy punkty przecięć tych boków z przekątnemi większego kwadratu, punkty $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$, równoważne 4 wierzchołkom większego kwadratu (np. przecięcie prostej ab z przekątną $(a+b)(a'+b')=a'b+ab'$ daje punkt: $ab+a'b+ab'$ czyli $a+b$).

wybieramy w ten sposób, by siecznemi tych kół, ich cięciwami, były boki i przekątne naszych kwadratów. Takiemi punktami w nieskończoności okazują się 4 punkty: 1) punkt w nieskończoności na osi bb', 2) punkt w nieskończoności na osi aa', 3) punkt w nieskończoności na osi skośnej $(a+b)(a'+b')$ i 4) punkt w nieskończoności na osi skośnej $(a'+b)(a+b')$. Z pierwszego punktu w nieskończoności $(I_{a+a'})$ prowadzimy 3 proste równoległe a, a' i $O_{bb'}$, dwie cięciwy większego koła i średnicę mniejszego, a równocześnie dwa boki większego kwadratu i przekątną mniejszego; podobnie z drugiego punktu w nieskończoności $(I_{b+b'})$ przeprowadzone 3 proste równoległe: b, b' i $O_{aa'}$, jako dwie cięciwy większego koła i średnica mniejszego, dają dwa pozostałe boki większego kwadratu i drugą przekątną mniejszego. Trzeci punkt w nieskończoności $a'b + ab'$ czyli $(a + b)(a' + b')$ da nam trzy sieczne równoległe $a'b$, ab' i $(a+b)(a'+b')$, a więc dwie cięciwy mniejszego koła i średnicę większego, a równocześnie dwa boki mniejszego kwadratu i przekątną większego; podobnie czwarty punkt w nieskończoności $ab + a'b'$ czyli $(a' + +b)(a + b')$ da nam, jako dwie cięciwy mniejszego koła (ab i ab') i średnicę większego $(a' + b)(a + b')$, dwa pozostałe boki mniejszego kwadratu i drugą przekątną większego kwadratu.

W ten sposób do 12 prostych naszego diagramatu dają się natychmiast zastosować twierdzenia o biegunowości wzajemnej względem koła, i każda z tych prostych okaże się podkładem czwórki punktów harmonicznych.

Weźmy np. prostą a, przeprowadzoną z punktu w nieskończoności $I_{a+a'}$, jako bieguna ze względu na większe koło. Biegunową punktu $I_{a+a'}$, jako punktu w nieskończoności, będzie — jak już wiemy — średnica prostopadła do kierunku bb' lub, co na jedno wychodzi, do kierunku a, t. j. oś $0_{aa'}$. Tak więc na prostej a otrzymamy czwórkę harmoniczną, składającą się z dwóch punktów na kole większem, w których sieczna to koło przecina, oraz dwóch innych punktów harmonicznie sprzężonych: bieguna $1_{a+a'}$ oraz punktu a, w którym biegunowa punktu $1_{a+a'}$ t. j. oś $0_{aa'}$ przecina naszą prostą a. Punktowi P naszego rys. 9-go odpowiada tu punkt $1_{a+a'}$ w nieskończoności, jego biegunowej KL — biegunowa punktu $1_{a+a'}$ t. j. oś $0_{aa'}$, a czwórce harmonicznej punktów AS_1BP — czwórka harmoniczna punktów $a + b'$, a, $a + b$, $1_{a+a'}$. I tak samo rzecz się przedstawia z każdą inną z 12 prostych, jako podkładem szeregów harmonicznych.

Tak więc otrzymujemy 12 następujących czwórek harmonicznych [1]), które piszemy w porządku przestrzennym, tak że elementy sprzężone jednej pary są tu podzielone przez elementy sprzężone drugiej.

1a) $1_{a+a'}$,	$a+b$,	a,	$a+b'$	(o podkładzie a)
2a) $1_{a+a'}$,	b,	0,	b'	(„ $0_{bb'}$)
3a) $1_{a+a'}$,	$a'+b$,	a',	$a'+b'$	(„ a')
4a) $1_{b+b'}$,	$a+b$,	b,	$a'+b$	(„ b)
5a) $1_{b+b'}$,	a,	0,	a'	(„ $0_{aa'}$)
6a) $1_{b+b'}$,	$a+b'$,	b',	$a'+b'$	(„ b')
7a) $(a+b)(a'+b')$,	a,	$a+b'$,	b'	(„ ab')
8a) $(a+b)(a'+b')$,	$a+b$,	$[1]$ [2]),	$a'+b'$	(„ $(a+b)(a'+b')$)
9a) $(a+b)(a'+b')$,	b,	$a'+b$,	a'	(„ $a'b$)
10a) $(a'+b)(a+b')$,	a,	$a+b$,	b	(„ ab)
11a) $(a'+b)(a+b')$,	$a+b'$,	$[1]$ [2]),	$a'+b$	(„ $(a+b')(a'+b)$)
12a) $(a'+b)(a+b')$,	b',	$a'+b'$,	a'	(„ $a'b'$)

[1]) i [2]) patrz str. nast.

Dołączyć tu należy jeszcze graniczny szereg harmoniczny 13-ty na prostej w nieskończoności:

13a[3]) $I_{a+a'}, (a + b)(a' + b'), I_{b+b'}, (a + b')(a' + b)$

Jeżeli teraz zważymy, że algebraiczne wyrazy oznaczają tu nietylko elementy geometryczne (punkty i proste), lecz i pojęcia, to istnienie czwórek harmonicznych w logice geometrycznej zostanie tem samem stwierdzone.

Odpowiednio do powyższych 12 czwórek logiczno-geometrycznych (oraz 13-tej granicznej) możemy natychmiast otrzymać dalszych 12 czwórek (oraz 13 graniczną), których elementami będą już nie punkty, lecz proste, podkład zaś linjowy zostanie zastąpiony przez punkt-wierzchołek. Będą to pęki harmoniczne, które otrzymamy z powyższych czwórek punktowych, zamieniając każdy punkt na jego biegunową względem koła, podkład zaś szeregu punktów na jego biegun. Możemy zaś to uczynić w myśl twierdzenia geometrji rzutowej, że o ile punkt jakiś leży na prostej, to jego biegunowa przechodzić będzie przez biegun tej prostej, tak że 4 punktom pewnej prostej będą odpowiadały 4 proste, przechodzące przez biegun tej prostej, przytem jeżeli punkty te tworzyły szereg harmoniczny, to i odpowiednie proste (ich biegunowe) również utworzą zespół harmoniczny (pęk harmoniczny). W myśl powyższego

---

[1]) Zwracamy uwagę na to, że wszystkie elementy czwórki harmonicznej są tej samej postaci (*tutaj są punktami*), że więc i suma dwóch elementów będzie tu elementem o tej samej postaci, co składniki tej sumy.

[2]) *[1]* przedstawia tu początek współrzędnych. Albowiem dla skośnych osi początek współrzędnych, w którym się one przecinają, wyraża się — jak wiemy z odnośnika na str. 58 — nie jako *0*, lecz *1*, ponieważ $(a+b)(a'+b') + (a'+b)(a+b') = 1$.

[3]) Harmoniczność tej grupy punktów najprościej daje się wyprowadzić z kwadratu wewnętrznego (*czworokąta zupełnego*) jako konstytuującego grupę harmoniczną (por. przypadek dwoisty w odnośniku do str. 95).

z czwórki harmonicznej punktowej 1a): $1_{a+a'}$, $a + b$, a, $a + b'$ o podkładzie linjowym a otrzymujemy natychmiast pęk prostych harmonicznych: $0_{aa'}$, ab, a, ab' o wierzchołku w punkcie a, albowiem, przedewszystkiem, prostej a, jako stycznej do koła, odpowiada — jak wiemy — biegun w punkcie styczności a (i odwrotnie), a dalej: punktowi $1_{a+a'}$ odpowiada, jako biegunowa, średnica $0_{aa'}$, punktowi $a + b$ odpowiada biegunowa ab, jako linja, łącząca punkty styczności stycznych, przeprowadzonych do wewnętrznego koła z punktu $a + b$, i z tej samej racji punktowi $a + b'$ odpowiada prosta ab'.

Z powyższego przekonywamy się przedewszystkiem, że związek między biegunem i biegunową nie jest niczem innem, jak znanym nam związkiem dwoistym (dualnym), t. j. że biegun i jego biegunowa przedstawiają elementy dwoiste.

Tak więc z powyższych punktowych czwórek harmonicznych otrzymujemy biegunowo wzajemnie (dwoiście) następujące pęki:

1b)	$0_{aa'}$,	ab,	a,	ab'	(o wierzchołku a)
2b)	$0_{aa'}$,	b,	1,	b'	(„ $1_{b+b'}$)
3b)	$0_{aa'}$,	$a'b$,	a',	$a'b'$	(„ a')
4b)	$0_{bb'}$,	ab,	b,	$a'b$	(„ b)
5b)	$0_{bb'}$,	a,	1,	a'	(„ $1_{a+a'}$)
6b)	$0_{bb'}$,	ab',	b',	$a'b'$	(„ b')
7b)	$(a'+b)(a+b')$,	a,	ab',	b'	(„ $a+b'$)
8b)	$(a'+b)(a+b')$,	ab,	$[0]$[1],	$a'b'$	(„ $(a'+b)(a+b')$)
9b)	$(a'+b)(a+b')$,	b,	$a'b$,	a'	(„ $a'+b$)
10b)	$(a+b)(a'+b')$,	a,	ab,	b	(„ $a+b$)
11b)	$(a+b)(a'+b')$,	ab',	$[0]$[1],	$a'b$	(„ $(a+b)(a'+b')$)
12b)	$(a+b)(a'+b')$,	b',	$a'b'$,	a'	(„ $a'+b'$)

[1]) $[0]$ przedstawia tu prostą w nieskończoności. Albowiem dla skośnych osi prosta ta przedstawia się — jak wiemy — jako iloczyn z $(a+b)(a'+b')$ i $(a'+b)(a+b')$.

Dołączyć tu należy jeszcze graniczny pęk harmoniczny 13-ty z wierzchołkiem w początku współrzędnych:

13b) $0_{aa'}, (a'+b)(a+b'), 0_{bb'}, (a+b)(a'+b')$

W ten sposób kategorjalna płaszczyzna logiczna okazuje się domeną elementów harmonicznych: każdy z 26 jej elementów jest ośrodkiem (podkładem lub wierzchołkiem) czwórki harmonicznej i, co więcej, wszelka czwórka jej elementów o tym samym podkładzie lub wierzchołku jest czwórką harmoniczną.

Jak się przekonywamy, każda z tych czwórek harmonicznych zawiera przynajmniej jako jeden ze swych elementów element graniczny, t. j. element położony w nieskończoności (4 punkty i prosta w nieskończoności) lub też dualny względem niego (4 osie i początek współrzędnych), podczas gdy inny element, z pierwszym harmonicznie sprzężony, przedstawia iloczyn logiczny lub sumę logiczną dwóch pozostałych elementów[1]. Przytem ten iloczyn lub suma wyrażają również

---

[1]) Zauważyć należy, że wśród 24 zespołów harmonicznych (dwa zespoły graniczne pomijamy tu) w każdej trójce takich zespołów, mających wspólny element graniczny, jest jeden zespół, w którym występuje nietylko ten wspólny trzem zespołom element graniczny, lecz poza tem drugi jeszcze taki element, z pierwszym tworzący parę sprzężoną. W ten sposób mamy 8 zespołów harmonicznych (2a, 5a, 8a, 11a i dwoiste), z których w każdym występują 2 elementy graniczne (sprzężone), przytem tak, że gdy jeden z nich jest sumą (iloczynem) dwóch elementów drugiej pary, to drugi z nich przedstawia ich iloczyn (wzgl. sumę).

Tak więc np. w zespole

$$1_{a+a'},\ b,\ 0,\ b'$$

oprócz elementu granicznego $1_{a+a'}$ mamy jeszcze element graniczny, punkt 0, przyczem nietylko $b + b' = 1$, lecz również $bb' = 0$.

Podobnie w zespole:

$$(a+b)(a'+b'),\ a+b,\ [1],\ a'+b'$$

oprócz elementu granicznego $(a+b)(a'+b')$, punktu w nieskończoności na osi skośnej, mamy jeszcze element graniczny, punkt 1 — początek współrzędnych, iloczyn lub sumę pierwszej pary sprzężonych ze sobą elementów i przedstawiają równoważnie podkład wzgl. wierzchołek czwórki. W pierwszej grupie (w 12 czwórkach harmonicznych punktowych [1]) ten element podkładowy (linja prosta) oznacza ten sam iloczyn elementów par harmonicznie sprzężonych, w drugiej grupie (w 12 czwórkach harmonicznych linjowych [1])

przyczem nietylko $(a+b)\times(a'+b')=(a+b)(a'+b')$, lecz również $(a+b)+$ $+(a'+b')=1$. Podobnie dla wszystkich 8 wspomnianych zespołów harmonicznych, z których 4 (punktowe) leżą na 4 osiach, 4 zaś (pęki prostych) przechodzą przez dwoiste do tych osi punkty w nieskończoności.

Otóż tego rodzaju osiowe czy nieskończonościowe zespoły harmoniczne mogą być interpretowane zarówno dodajnie, jak i mnożnie, w zależności od tego, który z dwóch granicznych elementów wybierzemy jako element funkcyjny (+ wzgl. .) względem pary podstawowej. Tak więc zespół:

$$1_{a+a'},\ b,\ 0,\ b'$$

mówi nam z jednej strony, że:

$b\times b'=0$ (przy 1, jako elemencie, występującym tu w charakterze granicznym),

z drugiej zaś strony, że:

$b+b'=1$ (przy 0, jako elemencie, występującym tu w charakterze granicznym).

Otóż te dwie otrzymane tutaj równości wiele nam mówią. Mamy wszak w nich znaną nam dobrze definicję elementu negatywnego przy pomocy elementu pozytywnego oraz 0 i 1. Możemy teraz nadać sens głębszy tej definicji (por. str. 22), widzimy bowiem, że czwórka elementów, wchodzących tu w grę, przedstawia zespół harmoniczny, tak że element negatywny (b') może być określony, jako element sprzężony harmonicznie z elementem pozytywnym (b) w grupie harmonicznej, której drugą parę elementów stanowią 0 i 1. W ten sposób rozwinięcie naczelne 0 i 1 ze względu na b, b' polega, jak widzimy, na wyznaczeniu pary elementów harmonicznie z sobą sprzężonych w grupie harmonicznej, której drugą parę stanowią właśnie rozwijające się elementy 0 i 1.

[1]) Trzynasta para, absolutna, złożona wyłącznie z elementów granicznych, przedstawia osobliwości, któremi się tutaj bliżej zajmować nie będziemy, a które płyną ze znanej nam własności punktu, będącego początkiem współrzędnych, oraz prostej w nieskończoności, polegającej na tem, że każdy z tych elementów w zależności od sposobu, w jaki jest wyznaczony (przez osie poziomopionowe, czy też przez osie skośne), przedstawia się bądź jako 0, bądź jako 1. Tutaj 0 staje się równoważne 1.

element wierzchołkowy (punkt) oznacza tę samą sumę elementów, należących do par harmonicznie sprzężonych.

Gdy teraz w drodze czysto geometrycznej stwierdziliśmy istnienie w logice zespołów harmonicznych, jest już rzeczą prostą ustosunkować te zespoły logiczne do pewnych zespołów arytmetycznych. Wystarczy tu wziąć pod uwagę wyżej podane własności średniej arytmetycznej i średniej harmonicznej, jako elementów harmonicznych czwórek arytmetycznych, i zestawić je z odpowiedniemi własnościami harmonicznych czwórek logicznych. Zestawienie to tak się przedstawia:

Średnia arytmetyczna wzgl. średnia harmoniczna dwóch danych liczb przedstawia jeden z elementów harmonicznej czwórki arytmetycznej, przyczem elementem z nią sprzężonym będzie element graniczny (∞, 0), dwoma zaś pozostałemi elementami (sprzężonemi) będą dwie dane liczby.	Iloczyn logiczny wzgl. suma logiczna dwóch danych elementów logicznych przedstawia jeden z elementów harmonicznej czwórki logicznej, przyczem elementem z nim (z nią) sprzężonym będzie element graniczny 1,0 wzgl. $(a+b)(a'+b')$, $(a'+b)(a+b')$, dwoma zaś pozostalemi elementami (sprzężonemi) będą dwa dane elementy logiczne.

Uderza tu natychmiast analogja między średnią arytmetyczną wzgl. średnią harmoniczną i funkcjami logicznemi iloczynu wzgl. sumy, i analogja ta okazuje się analogją prawdziwą, gdyż istotnie, przyporządkowując negacji logicznej odwrotność arytmetyczną, można dowieść (jak to uczyniliśmy na str. 101), że stosunek iloczynu logicznego do sumy logicznej jest identyczny ze stosunkiem średniej arytmetycznej do średniej harmonicznej [1]).

W ten sposób teraz — w przeciwieństwie do pierwszego sposobu (por. str. 95—102, specjalnie str. 97) — systematycznie zostają wprowadzone do logiki zespoły harmoniczne *wprost* przez oparcie się o własności elementów przestrzeni rzutowej i o wykazaną już dawniej ich odpowiedniość z elementami logicznemi, i następnie dopiero logika zostaje tu związana z arytmetyką za pośrednictwem tych właśnie zespołów harmonicznych, jako że posiadają one odpowiedniki liczbowe.

Postaramy się teraz podać określenie logicznych elementów harmonicznych całkowicie immanentne dziedzinie pojęciowej, to znaczy oderwane zupełnie i uniezależnione od podłoża geometrycznego. Będzie ono brzmiało:

Cztery elementy logiki dwuelementowej tworzą zespół harmoniczny, gdy:

1) jedna para (elementów sprzężonych) składa się bądź z elementów prostych, bądź też złożonych tego samego typu [2]), trzeci element przedstawia sumę wzgl. iloczyn

---

[1]) Przy arytmetyzacji logicznych czwórek harmonicznych wszystkie elementy logiczne graniczne, a więc $1, 0, (a+b)\,(a'+b'), (a'+b)\,(a+b')$ otrzymują, jako odpowiednik arytmetyczny ∞ wzgl. 0, przyczem 1 logiczna — jako że występuje zawsze w sprzężeniu ze średnią arytmetyczną (szeregi 1a — 6a) — ma za odpowiednik zawsze ∞ arytmetyczną, 0 zaś logiczne — jako że występuje zawsze w sprzężeniu ze średnią harmoniczną (szeregi 1b — 6b) — ma za odpowiednik zawsze 0 arytmetyczne, elementy zaś $(a+b)\,(a'+b')$ oraz $(a'+b)\,(a+b')$, występujące zarówno w sprzężeniu ze średnią arytmetyczną (szeregi 7b — 12b) jak i średnią harmoniczną (szeregi 7a — 12a), otrzymują w pierwszym przypadku odpowiednik ∞, w drugim — 0 arytmetyczne.

[2]) Tego samego typu — to znaczy dodajnego lub mnożnego. Elementy proste są — jak wiemy — natury dwoistej: $a = a+0$ i $a = a\,.\,1$.

logiczny elementów pierwszej pary w zależności od tego, czy elementy złożone są typu mnożnego czy dodajnego, czwarty zaś element (sprzężony z trzecim) jest elementem granicznym: 0, 1, $(a+b)(a+b')$ lub $(a'+b)(a+b')$

i 2) posiadają tę własność, że trzeci element wraz z czwartym tworzy sumę wzgl. iloczyn równy (równoważny) sumie wzgl. iloczynowi pierwszej pary (elementów harmonicznie sprzężonych [1]). Przytem w przypadku elementów prostych pierwszej pary w grę wchodzi iloczyn, gdy trzeci element przedstawia sumę, i suma, gdy trzeci element przedstawia iloczyn, w przypadku zaś elementów złożonych w grę wchodzi iloczyn, gdy trzeci element przedstawia iloczyn, i suma, gdy trzeci element przedstawia sumę.

Być może, że to określenie logicznych elementów harmonicznych uda się jeszcze uprościć [2]).

---

[1]) Ta podstawowa własność grup harmonicznych służy do jednoznacznego wyznaczenia czwartego (granicznego) elementu.

[2]) Nie będziemy bliżej rozpatrywali sprawy elementów harmonicznych w logice trójwymiarowej (stereologice), albowiem przedstawia się ona całkowicie analogicznie do odnośnych kwestyj planilogicznych. tylko że występują tu na plan pierwszy pęki płaszczyzn harmonicznych oraz dwoiste do nich szeregi punktów. A więc np. zamiast logicznej czwórki harmonicznej: $a+b$, a, $a+b'$, 1 oraz dwoistej do niej czwórki: ab, a, ab', 0 mieć będziemy w stereologice dualne czwórki:

$a+b+c$, $a+b$, $a+b+c'$, 1 (cztery punkty)
oraz abc, ab, abc', 0 (cztery płaszczyzny).

Rozdział IX.

DICHOTOMICZNY PODZIAŁ HARMONICZNY POJĘĆ W LOGICE GEOMETRYCZNEJ.

Z nauką o harmonicznych elementach w logice najściślej będzie się łączył dział o podziale pojęć. Podstawowemi wzorami, wyrażającemi związek między pojęciem podlegającem podziałowi i wytworami tego podziału, są znane nam (por. str. 24) dwoiste formuły dichotomji.

$$a=(a+b)(a+b') \qquad (5^a)$$

$$a=ab+ab' \qquad (5^b)$$

Otóż wiemy, że rodzaj a i jego gatunki $(a+b)$ i $(a+b')$ przedstawiają wraz z elementem 1 czwórkę elementów harmonicznych, i podobnie elementy wzoru 5^b wraz z elementem 0. Zatrzymajmy się nad temi wzorami, przedewszystkiem nad drugim z nich. Wyraża on podział logiczny elementu a na dwa elementy mniejsze od a, mianowicie ab i ab'. Jaki jest stosunek elementów, występujących w tym podziale, do zespołu harmonicznego $0, ab, a, ab'$ (lub równoważnego z nim: $0, ab', a, ab$[1]), przedewszystkiem więc, jaką rolę odgrywa przy

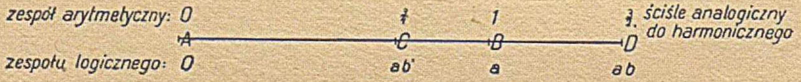
[1]) Zespół harmoniczny $0, ab', a, ab$ jest równoważny z zespołem $0, ab, a, ab'$ (zespół 1b ze str. 109) — jak to natychmiast z rys. 3 widać. Możemy bowiem równie dobrze dla otrzymania czwórki harmonicznej obracać oś $0_{aa'}$ w kierunku przez ab, jak i przez ab'.

tym podziale element *0*, nieujawniony wprawdzie we wzorze 5^b, lecz w nim implicite zawarty, albowiem wzór: $a = ab + ab'$ jest równoważny wzorowi: $a + 0 = ab + ab'$.

Otóż sprawa przedstawia się tu całkowicie analogicznie do podziału harmonicznego ilościowego, kiedy to odcinek AB (por. rys. 8 oraz 11) zostaje podzielony harmonicznie przez punkty C i D, przyczem punkt wyjścia A przyjmuje się za *0* (arytmetyczne); elementom ab i ab' odpowiadałyby wtedy — w myśl analogji ścisłej między iloczynem logicznym i średnią arytmetyczną — elementy arytmetyczne:

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad \frac{a+\frac{1}{b}}{2} \left(= \frac{ab+1}{2b}\right)$$

Jeżeli np. $a = 1$, $b = 2$, to mielibyśmy:



Rys. 11.

Otóż podobnie jak odstęp arytmetyczny *0 — 1* został przez liczbę $^3/_4$ i $^3/_2$ podzielony harmonicznie [t. j. podzielony wewnętrznie i zewnętrznie w tym samym stosunku $(^3/_4 - 0) : (1 - {}^3/_4) = (^3/_2 - 0) : (^3/_2 - 1)$], tak samo harmonicznie został tu podzielony odstęp logiczny *0 — a* przez elementy logicznie ab' i ab. To zaś znaczy, że zamiast mówić: wzór 5^b wyraża podział harmoniczny elementu logicznego a na elementy ab' i ab, możemy powiedzieć: wzór 5^b wyraża podział harmoniczny odstępu logicznego *0 — a* przez powyższe elementy. Widzimy tedy, że rola elementu logicznego *0* jest taka sama, jak rola arytmetycznego *0* w analogicznej sytuacji arytmetycznej: jest on punktem wyjścia podziału pewnego odstępu, który to odstęp wobec modułowego charakteru tego punktu wyjścia może być równoważnie wyrażony przez swój punkt krańcowy (odstęp arytmetyczny $0 — 1$ przez liczbę - punkt 1, odstęp logiczny $0 — a$ przez pojęcie - punkt a).

Musimy się teraz zatrzymać nad pojęciem „odstępu", „różnicy" między dwoma elementami logicznemi. Pojęcie to, które spotykamy już u Arystotelesa, gdy mówi o przeciwieństwie (ἐναντίον) jako o największej różnicy między gatunkami tego samego rodzaju (Metafizyka X. 4, początek), nie rozwinęło się w logice dotychczas, i tutaj dopiero okazuje się jego znaczenie w dziedzinie logiki i matematyki jakości, przedewszystkiem w zajmującej nas teraz kwestji podziału pojęć.

Jak widzieliśmy przed chwilą, zwykły podział logiczny pojęcia a jest to w istocie rzeczy podział harmoniczny jakościowego odstępu (różnicy), który dzieli to pojęcie od 0. Ten odstęp $0 — a$ należy podzielić na dwa odstępy logiczne, których suma logiczna będzie równa (równoważna) danemu odstępowi logicznemu (podobnie jak przy podziale harmonicznym odstępu arytmetycznego z początkiem w 0 dzielimy go na dwa odstępy, których średnia harmoniczna równa się danemu odstępowi).

Tak więc w myśl teorji elementów harmonicznych w logice wzór dichotomiczny:

$$a = ab + ab',$$

przedstawiając sumę logiczną dwóch elementów logicznych, przedstawia równocześnie sumę logiczną dwóch odstępów logicznych (od 0 do ab i od 0 do ab'), przyczem ten odstęp a, będący sumą, jest harmonicznie sprzężony z 0 ze względu na elementy tego podziału, tak że wzór $a + 0 = ab + ab' = a$

wyraża tu podstawową własność zespołów harmonicznych (por. str. 114): równoważność sum (wzgl. iloczynów) elementów w parach sprzężonych.

Weźmy przykład, który nam zilustruje tę teorję dichotomji logicznej.

Niechaj *a* będzie tu treść „człowiek“, *b* „istota dobra“, *b'* — „istota niedobra“ [1]), tak że *ab* znaczy „albo człowiek, albo istota dobra“, *ab'* zaś — „albo człowiek, albo istota niedobra“. Podzielić w sensie właściwym pojęcie *a* ze względu na *b*, *b'* nie jest to nic innego, jak znaleźć takie dwa pojęcia złożone z *a* i *b*, wzgl. *a* i *b'*, które łącznie (+) wypełnią odstęp, jaki dzieli pojęcie *a* („człowiek“) od treści zerowej (przedmiotu wogóle). Otóż niechaj pierwszą z tych treści mniejszych od *a* będzie treść *ab*, treść „albo człowiek, albo istota dobra“; jest to treść już większa od *0* (przedmiotu wogóle), lecz jeszcze mniejsza od *a*, mniej od *a* zdeterminowana, nie jest to jeszcze treść „człowiek“, lecz: „albo człowiek, albo istota dobra“. Ażeby teraz osiągnąć treść *a*, ażeby przejść cały odstęp od *0* do *a*, całą tę różnicę wypełnić, trzeba jeszcze drugi krok uczynić, mianowicie od *0* do *ab'*, czyli utworzyć treść „albo człowiek, albo istota niedobra“. Jeżeli bowiem treść tę *ab'* dołączymy do poprzedniej *ab*, to osiągniemy treść o determinacji $= a$ i wypełnimy temi dwoma złączonemi krokami różnicę, jaka dzieli pod względem determinacji treść *a* od treści *0*.

Ten podział harmoniczny treści *a* zobrazowuje nasz rys. 3 w ten sposób, że odstęp treści *a* od treści zerowej przedstawiony tu jest w postaci kąta między prostą *a* i osią $0_{aa'}$, i odstęp ten jest podzielony przez proste (treści) *ab* i *ab'*, dzielą-

[1]) Por. odnośnik na str. 131.

ce kąt ten wewnętrznie i zewnętrznie zgodnie z prawem grup harmonicznych.

Omówiliśmy dotychczas tylko drugą z dwóch formuł dichotomji (5^b). Zaczęliśmy od niej, gdyż ona to wyraża podział w sensie właściwym, kiedy właśnie człony podziału są mniejsze od dzielonego elementu ($ab < a$, $ab' < a$). Dualna formuła dichotomji 5^a nie wyraża takiego podziału, elementy jej są większe, bogatsze pod względem treści, bardziej zdeterminowane od pojęcia, podlegającego podziałowi ($a + b > a$, $a + b' > a$). Ściśle mówiąc, mamy tu nie podział właściwy, lecz determinację, możemy powiedzieć: podział wyznaczający w odróżnieniu od podziału właściwego „dzielącego".

Między temi dwoma podziałami zachodzi ścisła odpowiedniość dualna:

Dichotomja dzieląca ($a=ab+ab'$)	*Dichotomja wyznaczająca* $a=(a+b)(a+b')$
Całość podlegająca podziałowi (totum dividendum — a)	Element podlegający wyznaczeniu (determinandum — a)
Czynnik dzielący (dividens — b, b')	Czynnik wyznaczający (determinans — b, b')
Człony - wytwory podziału (membra divisa — ab, ab')	Człony - wytwory wyznaczenia (membra determinata — $(a+b)(a+b')$

Otóż wszystko, cośmy dotychczas mówili o dichotomji dzielącej, daje się dwoiście przenieść na dichotomję determinującą, z tą tylko różnicą, że treść a będzie tu odniesiona do treści granicznej *1*. Tutaj, przy dichotomji determinującej, punktem wyjścia jest nie *0* logiczne, lecz *1* logiczna, zaś „odstępy" dualne wyrażają się iloczynem danej treści i *1*, a więc w istocie rzeczy wskazują to, co dany element ma wspólnego z *1*. Treść *a*, wspólną *a* i *1*, osiąga się tu dwoma logicznemi krokami, wychodzącemi z *1*. Pierwszy krok, nie osiągając *a*, zuboża jednak treść *1* do $a + b$, drugi zuboża ją z innej strony do $a + b'$, a biorąc to, co te dwa kroki mają wspólnego, osiągamy zmniejszenie treści *1* do *a*. W tym sensie „odstęp“ $a \,.\, 1$ jest harmonicznie podzielony przez treści - odstępy $(a + b)$ i $(a + b')$, z których się „składa“ mnożnie, a wzór $a \,.\, 1 = (a + b)(a + b') = a$ wyraża podstawową własność zespołów harmonicznych: równoważność iloczynów (wzgl. sum) elementów w parach sprzężonych.

To zróżnicowanie harmoniczne treści rodzajowej na dwie treści gatunkowe zobrazowuje nam rys. 3 w ten sposób, że podaje nam grupę harmoniczną na prostej *a*, składającą się z punktów $a + b'$, *a*, $a + b$ i punktu w nieskończoności *1* ($= a + a'$). Odstęp $a - 1$ ($= a \,.\, 1$) jest tu podzielony przez punkty $a + b$ i $a + b'$, dzielące go wewnętrznie i zewnętrznie zgodnie z prawem grup harmonicznych.

* *

*

Zastanowimy się teraz bliżej nieco w związku z kwestją podziału pojęć nad stosunkiem elementu *a* do elementów *b* i *b'*.

Otóż wszelki stosunek *a* do *b* i *b'*, przy którym zachodzi niezawieranie się:

$$b \nless a \text{ i } b' \nless a,$$

nazywać będziemy stosunkiem „*neutralności*“ *a* względem *b* i *b'* i dla oznaczenia tego stosunku wprowadzimy znak: $\begin{smallmatrix} b \\ b' \end{smallmatrix}\big]\, a$, tak że określenie tego stosunku neutralności będzie następujące:

$$\left.{}^{b}_{b'}\right]a = (b \not< a) + (b' \not< a)$$

W tym stosunku neutralności zawsze pozostaje *0* względem *b* i *b'*, albowiem zawsze mamy:

$$b \not< 0 \text{ i } b' \not< 0.$$

Zawsze więc zachodzi stosunek: $\left.{}^{b}_{b'}\right] 0$.

I dwoiście: wszelki stosunek *a* do *b* i *b'*, przy którym zachodzi

$$a \not< b \text{ i } a \not< b',$$

nazywać będziemy stosunkiem *„dwoistej neutralności"* *a* względem *b* i *b'* i dla oznaczenia tego stosunku wprowadzimy znak ${}^{b}_{b'}\!\triangleright a$, tak że określenie tego stosunku dwoistej neutralności będzie następujące:

$${}^{b}_{b'}\!\triangleright a = (a \not< b) + (a \not< b').$$

W tym stosunku dwoistej neutralności zawsze pozostaje *1* względem *b* i *b'*, albowiem zawsze mamy:

$$1 \not< b \text{ i } 1 \not< b'.$$

Zawsze więc zachodzi stosunek: ${}^{b}_{b'}\!\triangleright 1$.

Natura logiczna w mowie będących stosunków jest nader prosta i specjalnie ważna, jeżeli chodzi o kwestję podziału pojęć. Istotnie bowiem to, co nazwaliśmy tu stosunkiem neutralności, nie jest niczem innem, jak stosunkiem rodzaju (treściowego) *a* do różnic gatunkowych (treściowych) *b* i *b'*. Jeżeli bowiem ani pojęcie *b* nie zawiera się, a więc i nie wynika z *a*, ani też pojęcie *b'* nie zawiera się, a więc i nie wynika z *a*, znaczy to, że *a* nie skłania się koniecznie ani ku *b*, ani ku *b'*, jest względem *b* i *b'* neutralne i może z niemi, jako z różnicami gatunkowemi, utworzyć dwa gatunki (treściowe) $a+b$ i $a+b'$.

Rozumiemy, że nie wszelkie b i b' w stosunku do danego a pełnić mogą funkcję różnic gatunkowych i tworzyć z niem odpowiednie gatunki. Tak np. pojęcie śmiertelny *(b)* i nieśmiertelny *(b')* nie będą różnicami gatunkowemi w stosunku do pojęcia człowiek *(a)*, albowiem pojęcie to skłania się ku b, nie zachowując stosunku neutralności między b i b'; tutaj $b < a$, niema więc stosunku ${}^{b}_{b'}]a$ i odpowiednio do tego niema dwóch gatunków: $a+b$ i $a+b'$, lecz człowiek jest zawsze człowiekiem śmiertelnym $(a = a+b)$.

Ten związek stosunku neutralności z podziałem dichotomicznym właściwym, t. j. takim, w którym mamy dwa człony podziału, niezredukowane do jednego, możemy wyprowadzić ściśle, opierając się na formule dichotomji i naszem określeniu stosunku neutralności:

Stosunek ten: ${}^{b}_{b'}]a = (b \not< a) + (b' \not< a)$ możemy równoważnie przedstawić w ten sposób (por. str. 29 wzór I^{c} i I^{d}):

$$ {}^{b}_{b'}]a = (b \not< a) + (b' \not< a) = (a'b \neq 0) + (a'b' \neq 0) = [a+b' \neq 1] + $$
$$ + [a+b \neq 1]. $$

Jeżeli więc mamy ${}^{b}_{b'}]a$, to $a+b' \neq 1$ i $a+b \neq 1$, czyli oba człony podziału dichotomicznego pojęcia $a = (a+b)(a+b')$ istnieją w postaci właściwej, niezredukowanej do 1 i a nie redukuje się ani do $a = a+b$, ani do $a = a+b'$. Jeżeli więc a jest neutralne między b i b', to zachodzi dichotomja właściwa, t. j. niezredukowana (i odwrotnie).

Co zaś dotyczy *0*, to względem niego wszelkie *b* i *b'* mogą pełnić funkcje różnic gatunkowych i tworzyć z niem dwa gatunki *b* i *b'*, jako wyniki dichotomji właściwej:

$$0 = (0 + b)(0 + b') = bb',$$

albowiem zawsze mamy ${}^{b}_{b'}\rceil 0$.

Rozpatrzymy teraz pokrótce naturę logiczną stosunku dwoistej neutralności. Najprościej i najjaśniej przedstawi się nam ten stosunek dwoisty do poprzednio rozpatrzonego, gdy pojmiemy go jako stosunek rodzaju (zakresowego) *a* do różnic gatunkowych (zakresowych) *b* i *b'*. Istotnie, jeżeli klasa *a* nie zawiera się ani w klasie *b*, ani *b'* (np. klasa ludzi nie zawiera się ani w klasie istot dobrych, ani w klasie istot niedobrych), to klasa *a* nie wyróżnia żadnej z dwóch klas *b* i *b'*, zachowuje względem nich neutralność dwoistą (tutaj znaczy to: zakresową) i z każdą z nich może wejść w związek mnożny, dający dwa gatunki klasowe (zakresowe), jako wyniki dichotomji właściwej.

Istotnie stosunek: ${}^{b}_{b'}\triangleright a = (a \nless b) + (a \nless b')$ możemy równoważnie przedstawić w ten sposób:

$${}^{b}_{b'}\triangleright a = (a \nless b) + (a \nless b') = (ab' \mp 0) + (ab \mp 0).$$

Jeżeli więc mamy ${}^{b}_{b'}\triangleright a$, to człony dichotomji $a = ab + ab'$ nie redukują się do jednego (albowiem ani *ab*, ani *ab'* nie równają się zeru), innemi słowy, mamy tu dichotomję właściwą, w której *b* i *b'* pełnią funkcję różnic gatunkowych.

Co zaś dotyczy *1*, to względem niej wszelkie *b* i *b'* pełnić mogą funkcje różnic gatunkowych i tworzyć z nią dwa gatunki *b* i *b'*, jako wyniki dichotomji właściwej:

$$1 = 1 \,.\, b + 1 \,.\, b' = b + b',$$

albowiem mamy zawsze $\frac{b}{b'} \triangleright 1$.

Jeżeli zarówno stosunek neutralności, jak i stosunek dwoistej neutralności pojmować będziemy treściowo, to zauważymy łatwo, że z prawdziwości jednego z tych stosunków nie wynika prawdziwość drugiego. Natomiast związek między temi stosunkami jest następujący:

$$\frac{b}{b'}]a' = \frac{b}{b'} \triangleright a \text{ (wzgl. } \frac{b}{b'}]a = \frac{b}{b'} \triangleright a').$$

Albowiem: $\frac{b}{b'}]a' = (b \nless a') + (b' \nless a')$[1] $= (a \nless b') + (a \nless b) =$

$= \frac{b}{b'} \triangleright a.$

Wkońcu przyjrzymy się geometrycznemu odwzorowaniu stosunków neutralności.

Przedewszystkiem rozpatrzmy geometrycznie na rys. 3 zawsze prawdziwe stosunki: $\frac{b}{b'}]0$ i $\frac{b}{b'} \triangleright 1$.

Pierwszy z tych stosunków logicznych będzie zobrazowany przez stosunek osi $bb' = 0$ do prostych równoległych b i b' — a więc przez stosunek *prostopadłości* tej osi do dwóch prostych równoległych — stąd też nasz symbol tego stosunku: $\frac{b}{b'}]0$. Drugi stosunek, stosunek dwoistej neutralności, będzie w myśl swej dwoistości zobrazowany przez stosunek punktu $1_{b+b'}$ na osi $0_{aa'}$ do punktów b i b', a więc przez położenie na prostej, będącej geometrycznem miejscem punktów *równoodległych* od punktów b i b' — stąd symbol $\frac{b}{b'} \triangleright 1$.

[1]) $b < a' = (ab = 0) = a < b'; b' < a' = (ab' = 0) = a < b.$

Podobnie stosunek neutralności $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{b'}\rbrack a$ będzie zobrazowany przez prostopadłość linji prostej a względem prostych b i b', zaś dwoisty stosunek $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{b'}\triangleright a$ — przez równoodległość punktu a od punktów b i b'. Tylko że te stosunki neutralności między a i b-b' niezawsze — jak wiemy — są prawdziwe, niezawsze a zajmuje neutralne stanowisko względem b i b', umożliwiając połączenie dodajne wzgl. mnożne z obydwoma temi elementami, a więc właściwą dichotomję elementu a. Może się zdarzyć, że oba warunki neutralności a względem b i b' ($b \nless a$ i $b' \nless a$) nie są spełnione, i że np. $b < a$. Wtedy dichotomja a przestaje być właściwą i redukuje się do $a = a + b$ [1]), punkt a z położenia środkowego między $a + b$ i $a + b'$ przechodzi do punktu $a + b$, i prosta b, przechodząca przez punkt $a + b$, przechodzi właśnie teraz tem samem przez punkt a (czyli $b < a$) [2]).

---

[1]) $(a = a + b) = b < a$ (por. str. 13 wzór I^a).

[2]) Por. str. 30.

Rozdział X.

TETRATOMICZNY PODZIAŁ HARMONICZNY POJĘĆ W LOGICE GEOMETRYCZNEJ.

Możemy teraz z innej jeszcze strony rozpatrzeć sprawę harmonicznych podziałów logicznych, uważając, mianowicie, elementy, wyznaczające odstęp logiczny, już jako wytwory podziału. Spójrzmy z tego punktu widzenia na formuły, które wyrażają harmoniczną naturę podziałów logicznych:

$$a = a \,.\, 1 = (a + b)(a + b') \qquad (5^{a}_{1})$$

$$a = a + 0 = ab + ab' \qquad (5^{b}_{1})$$

a uderzy nas natychmiast, że obie strony równoważności $a \,.\, 1 = (a + b)(a + b')$ mają te samą dwuczłonową budowę, i że to samo daje się stwierdzić również o stronach równoważności dualnej: $a + 0 = ab + ab'$. Utwierdzimy się zaś jeszcze bardziej w poglądzie na istotne pokrewieństwo natury dwóch stron naszych równoważności, jeżeli wyrazy $a \,.\, 1$ (odstęp $a - 1$) i $a + 0$ (odstęp $a - 0$) przedstawimy w sposób następujący:

$$a \,.\, 1 = (a + 0)(a + 1)$$

$$a + 0 = a \,.\, 1 + a \,.\, 0$$

Wtedy bowiem odrazu zobaczymy, że $a \,.\, 1$ nie jest niczem innem, jak tylko granicznym przypadkiem $(a + b)(a + b')$ dla $b = 0$, zaś $a + 0$ przedstawia graniczny przypadek $ab + ab'$ dla $b = 1$. Jeżeli tedy elementy $(a + b)$ i $(a + b')$ są już wytworami podziału, to nic nie stoi już na przeszkodzie uważać również elementy a i 1 za wytwory podziału dichotomicznego. I to samo stosuje się dualnie do elementów a i 0 wzoru dualnego. Lecz w takim razie zachodzi pytanie, jaki element podlega tu tej dwukrotnej dichotomji, co dzielimy tu tetratomicznie, gdzie jest tu determinandum czy dividendum?

Odpowiedź otrzymamy, zwróciwszy się do wzorów 5^a_1 i 5^b_1. Każdy z tych wzorów oprócz czterech elementów, powyżej przez nas rozpatrywanych a stanowiących czwórkowe grupy harmoniczne, zawiera jeszcze element piąty, mianowicie a proste, jeszcze nierozwinięte, równoważne iloczynowi $a \,.\, 1$ [wzgl. $a + 0$] oraz iloczynowi $(a + b)(a + b')$ [wzgl. $ab + ab'$]. Otóż to właśnie a proste rozwija się tetratomicznie, dwukrotnie dzieli się dichotomicznie, jest owem poszukiwanem przez nas determinandum, wzgl. dividendum. Natychmiast odpoznajemy naturę geometryczną tego a: to a proste wzoru 5^a_1 będzie linją prostą a, podkładem grupy harmonicznej punktów: $1, a + b, a, a + b'$; zaś a proste wzoru 5^b_1 będzie punktem a, wierzchołkiem pęku harmonicznego prostych: $0, ab, a, ab'$ i jako takie właśnie te a proste będą równoważne dwóm iloczynom, wzgl. sumom elementów harmonicznie z sobą sprzężonych (por. str. 111—112). Co jednak oznacza logicznie prostota tego elementu a? Otóż oznacza ona właśnie jego naturę jeszcze nieokreśloną, niezdeterminowaną aktualnie, niezróżniczkowaną, niepodzieloną; to niewyznaczone aktualnie a — linja prosta — dwukrotnie się wyznacza[1]) jako $a \,.\, 1$ i $(a + b)(a + b')$, to znaczy raz jako prosta, przechodząca przez punkt a i punkt 1, drugi raz jako prosta, przechodząca przez punkt $(a + b)$ i $(a +$

[1]) Przez przecięcie linjami 0 i 1 (prostą w nieskończoności) oraz linjami b i b'.

$+ b')$; zaś niewyznaczony aktualnie, prosty punkt a dwukrotnie się wyznacza[1]) jako $a + 0$ i $ab + ab'$, to znaczy raz jako punkt przecięcia prostej a i prostej 0, drugi raz jako punkt przecięcia prostej ab i prostej ab'. W ten sposób na prostej a zjawiają się jej 4 punkty-determinacje, punkt zaś a przecinają 4 linje-składniki, wytwory tetratomicznego podziału lub rozwinięcia prostego elementu a.

Z wzorów dwoistych dla dichotomji $5^a{}_1$ i $5^b{}_1$ otrzymujemy natychmiast wzór dwoisty harmonicznego podziału (rozwinięcia) tetratomicznego, łączący w sobie dwa podziały dichotomiczne, w postaci następującej:

$$a = (a + b) . (a + b') . a . 1 \qquad (V^a)$$

$$a = ab + ab' + a + 0 \qquad (V^b)$$

lub też w postaci pełniejszej:

$$a = (a + b)(a + b')(a + 0)(a + 1) \qquad (V^a{}_1)$$

$$a = ab + ab' + a . 1 + a . 0 \qquad (V^b{}_1)$$

Wreszcie w postaci najbardziej pełnej:

$$a = (a + b)(a + b')(a + bb')(a + b + b') \qquad (V^a{}_2)$$

$$a = ab + ab' + a . (b + b') + a . bb' \qquad (V^b{}_2)$$

Niechaj a będzie tu treść: „człowiek“, b — treść: „dobry“, b' — treść biegunowa: „zły“. Wtedy wzór $V^a{}_2$ będzie znaczył: człowiek jest albo „człowiekiem dobrym“, albo „człowiekiem złym“, albo „człowiekiem dobrym lub złym“, albo „człowiekiem dobrym i złym“. Dwie ostatnie możliwości wymagają bliższych wyjaśnień. A więc przedewszystkiem, co to jest „człowiek dobry lub zły“? Otóż jest to człowiek o charakterze moralnym *jednoznacznie niewyznaczonym* („albo“), zmiennym, chwiejnym, wahającym się to w tę, to w tamtę stronę, występującym bądź w tej, bądź w innej postaci. Natomiast czło-

[1]) Pizez połączenie z punktami 1 i 0 oraz punktami b i b'.

wiek, którego charakter jednoczy w sobie przeciwne wyznaczenia dobra i zła („człowiek dobry i zły") w tej swojej supradeterminacji moralnej, oznaczającej *zrównoważenie (zneutralizowanie, zobojętnienie) przeciwnych tendencyj* moralnych, jest już wyprowadzony poza obrąb właściwej moralności, jest człowiekiem, stojącym poza dobrem i złem na tej granicy, gdzie nie dochodzą już do głosu zneutralizowane przeciwne tendencje moralne[1]). Tak więc tetratomja logiczna pojęcia „człowiek" ze względu na jego charakter moralny przedstawia się w tej postaci: człowiek jest albo dobry, albo zły, albo wahający się między dobrem i złem, albo poza dobrem i złem stojący — i te *cztery* jego gatunki przedstawiają, jak wiemy, harmoniczną grupę logiczną.

Wszystko, cośmy dotychczas mówili o podziale elementu a, daje się mutatis mutandis przenieść na podział elementu 0, wzgl. jego dwoistości — elementu 1.

I tutaj mieć będziemy:

$0_{aa'} = 0\,.\,1 = aa'$ (harmoniczny podział dichotomiczny)

$0_{aa'} = a\,.\,a'\,.\,0\,.\,1$ (harmoniczny podział tetratomiczny) (A)

oraz dwoiście:

---

[1]) Te zneutralizowane tendencje są tendencjami przeciwnemi, biegunowemi względem siebie, lecz nie sprzecznemi z sobą, t. j. negatywnemi w znaczeniu prywacji (por. str. 79). Ich połączenie, prowadzące do ich neutralizacji, jest równoważne brakowi tych tendencyj, bezjakościowości, jeżeli o nie chodzi, co stanie się dla nas bezpośrednio oczywiste, jeżeli elementy biegunowe b i b' pojmować będziemy nie jako element podstawowy i jego biegun (por. str. 80), lecz jako dwoistości tych elementów, jako negację bieguna (b') i negację elementu podstawowego (b), a więc nie jako punkty, lecz właśnie jako proste, łączące się w punkcie 1. Wtedy istotnie pojęcie $1 = (b')' + (b)'$ wykaże brak wszelkich w grę wchodzących jakości, brak (negację) nietylko jakości b, lecz i b'. W ten sposób brzmiące paradoksalnie pojęcie „człowiek dobry i zły" może być równoważnie zastąpione przez pojęcie: „człowiek ani dobry, ani zły".

$1_{a+a'} = 1+0 = a+a'$ (harmoniczny podział dichotomiczny)
$1_{a+a'} = a+a'+1+0$ (harmoniczny podział tetratomiczny) (B)

Jeżeli teraz, idąc za przykładem dopiero co wspomnianych zdwojonych dichotomij, chcielibyśmy rozwinąć naszą jednowymiarową tetratomję harmoniczną przez podział tetratomiczny każdego jej elementu, wtedy wyszlibyśmy na płaszczyznę i otrzymalibyśmy następujące czwórki harmoniczne, człony podziału elementów linjowych *(a, a', 0, 1)* [por. rys. 3].

$$a = (a+b).(a+b').a.1_{a+a'}$$
$$a' = (a'+b).(a'+b').a'.1_{a+a'}$$
$$0_{bb'} = b.b'.0.1_{a+a'}$$
$$1 = (a+b)(a'+b').(a+b')(a'+b).\ 1_{b+b'}.1_{a+a'}$$ [1]

Skąd, podstawiając w (A), otrzymamy następujące trzynastoelementowe (zredukowane z szesnastoelementowego $= 4^2$) rozwinięcie *0:*

$$0_{aa'} = (a+b).(a+b').a.(a'+b).(a'+b').a'.b.b'.0.[(a+b)(a'+ +b')].[(a+b')(a'+b)].1_{b+b'}.1_{a+a'}$$

I dwoiście, przez podstawienie w (B) czwórkowych podziałów harmonicznych punktów: *a, a', 1* i *0*, otrzymamy następujące trzynastoelementowe rozwinięcie *1:*

$$1_{a+a'} = ab+ab'+a+a'b+a'b'+a'+b+b'+1+[ab+a'b']+ +[ab'+a'b]+0_{bb'}+0_{aa'}$$

Jak widzimy: wszystkie elementy — w liczbie 26 — płaszczyzny kategorjalnej możemy otrzymać przez dwukrotną tetratomję harmoniczną *0* i *1*, przyczem rozwinięcie *0*, jako osi, da nam 13 punktów tej płaszczyzny, rozwinięcie zaś dualne *1*,

---

[1]) Por. czwórkę 13a na str. 108. W niniejszym rozdziale elementy sprzężone czwórek harmonicznych piszemy jeden po drugim, jako należące do tej samej dichotomji.

jako punktu w nieskończoności, da nam jej 13 linij prostych (por. str. 72).

Widzimy tu zasadniczą różnicę, jaka zachodzi między podziałem dichotomicznym a tetratomicznym ze względu na ich zupełność: podczas gdy podwójna dichotomja zera oraz jedności daje nam tylko $2^2 + 2^2 = 8$ elementów płaszczyzny kategorjalnej, podwójna tetratomja zera oraz jedności wyczerpuje całość tej płaszczyzny ($4^2+4^2=32$, zredukowane do 26 naskutek czterokrotnego powtarzania się elementu $1_{a+a'}$ i $0_{a+a'}$)[1].

---

[1]) Nasuwa się tu kwestja: w jaki sposób już podział dichotomiczny pojęcia (np. pojęcia „człowiek") może być uważany za zupełny. Otóż uprawnione jest to tylko wtedy, gdy jego człon negatywny (np. „człowiek niedobry") oznacza ogół istot, do których natury *nie należy dobroć* (ludzie, którzy nie są zawsze dobrzy), nie zaś ogół istot, do których natury *należy niedobroć (złość)* (ludzie, którzy nigdy nie są dobrzy = którzy zawsze są niedobrzy). W tym ostatnim przypadku dichotomiczny podział oczywiście będzie niewyczerpujący: między ludźmi „zawsze dobrymi" i „zawsze niedobrymi" („zawsze złymi") znajdą się jeszcze grupy pośrednie, podobnie jak między dwoma sądami przeciwnemi *A* i *E*.

Rozdział XI.

PROPORCJA (ANALOGJA) LOGICZNA.

Do dziedziny logiki daje się przenieść poza pojęciem harmonji również pojęcie proporcjonalności po odczyszczeniu go od momentów ilościowych. Daje się to uczynić łatwo, gdyż proporcja, jako taka, posiada charakter wybitnie jakościowy, który może się tylko, lecz nie musi, wiązać z pierwiastkiem ilościowym. Według Euklidesa (ks. VII, def. 20) cztery liczby tworzą proporcję (są liczbami proporcjonalnemi, ἀριθμοί ἀνάλογοι) jeżeli pierwszą i trzecią możemy otrzymać, mnożąc (lub dzieląc) drugą i czwartą przez tę samą liczbę całkowitą. Wobec tego zaś, że ta liczba całkowita będzie tem, co nazywamy stosunkiem liczby pierwszej do drugiej i trzeciej do czwartej, więc określenie powyższe jest równoważne z określeniem proporcji liczbowej, jako równości dwóch liczbowych stosunków. Jeżeli teraz w pierwszem określeniu, zamiast mówić o mnożeniu drugiego i czwartego człona proporcji przez tę samą liczbę, mówić będziemy o mnożeniu logicznem przez ten sam element jakościowy drugiego i czwartego człona (jakościowego) dla otrzymania pierwszego i trzeciego człona (również jakościowego), wtedy otrzymamy określenie proporcji jakościowej, logicznej, przytem proporcji logicznej mnożnej (odpowiadającej liczbowej proporcji geometrycznej). W podobny sposób określimy przy pomocy dodawania logicznego proporcję logiczną dodajną (odpowiadającą liczbowej proporcji arytmetycznej). Te określenia dwóch rodzajów proporcji (analogji) logicznej będą, oczywiście, równoważne z określeniem jej jako tożsamości dwóch stosunków logicznych (jakościowych) [1]), wyrażonych przez odpowiedni element logiczny (ten, który w sposób dodajny lub mnożny przekształca człon drugi i czwarty na pierwszy i trzeci). Podczas gdy proporcja liczbowa była tożsamością dwóch stosunków liczbowych czyli „analogją" ilościową, proporcja logiczna, jako tożsamość dwóch stosunków jakościowych, okazuje się analogją jakościową, czyli analogją we właściwem tego słowa znaczeniu. Ten jej charakter specjalnie wyraźnie się zaznacza, gdy powyżej podane określenie proporcji logicznej wyrazimy w ten sposób: człon pierwszy proporcji tak powstaje z drugiego przez dodawanie lub mnożenie logiczne, jak trzeci z czwartego. Widzimy, że tak pojęta proporcja logiczna posiada wybitnie genetyczny charakter.

Weźmy czwórkę elementów logicznych: $a+b$, a, b, 0. Czy tworzą one proporcję logiczną dodajną:

$$(a+b)-a=b-0.$$

Istotnie tworzą te cztery elementy proporcję logiczną, gdyż człon trzeci (b) powstaje z czwartego (0) przez dodanie logiczne elementu b, i w ten sam sposób przez dodanie logiczne elementu b powstaje człon pierwszy $(a+b)$ z drugiego (a).

Tak samo rzecz się przedstawia z czwórką elementów dwoistych względem poprzednich: ab, a, b, 1, i one również tworzą proporcję logiczną — tym razem mnożną:

$$ab:a=b:1,$$

[1]) Najogólniejsze zaś pojęcie proporcji, obejmujące proporcję zarówno ilościową, jak i jakościową, będzie dane przez określenie jej, jako tożsamości dwóch stosunków wogóle (por. odn. drugi na str. 135).

albowiem pierwszy człon jej tak powstaje z drugiego, jak trzeci z czwartego, mianowicie zapomocą pomnożenia przez *b*[1]).

Podobnie jak proporcje algebry zwykłej dają się zobrazować geometrycznie, tak samo i proporcje logiczne czyli proporcje algebry jakości. Spójrzmy na obraz płaszczyzny logicznej, a przekonamy się o tem przedewszystkiem, jeżeli chodzi o powyższą proporcję logiczną dodajną. Mianowicie: punkt *b* powstał z prostej *0* (oś $0_{bb'}$) przez przecięcie jej prostą *b*, i w ten sam sposób powstał punkt $a + b$ z prostej *a*: też przeciąć ją należało w tym celu prostą *b*. W proporcji więc dodajnej logiczno-geometrycznej: $(a + b) — a = b — 0$ człony $a + b$ i *b* będą to *punkty*-wytwory z dwóch drugich członów *linij prostych a* i *0* przy pomocy prostej *b* (wartości stosunku).

Podobnie rzecz się przedstawia z obrazem geometrycznym proporcji logicznej mnożnej, dwoistej do powyższej dodajnej. Prosta *b* powstała z punktu *1* (punkt w nieskończoności $1_{bb'}$) przez połączenie tego punktu z punktem *b*, i w ten sam sposób powstała prosta *ab* z punktu *a*: też połączyć go należało w tym celu z punktem *b*. W proporcji więc mnożnej logiczno-geometrycznej $ab : a = b : 1$ człony *ab* i *b* będą to *linje proste*-wytwory z dwóch drugich członów *punktów a* i *1* przy pomocy punktu *b* (wartości stosunku).

Musimy teraz zwrócić uwagę na to, że stosunki: „$(a+b)—a$“ i „$ab : a$“ nie są jednoznacznie wyznaczone, gdyż nie jeden,

[1]) Powyższe elementarne proporcje logiczne, których pierwszym członem jest suma wzgl. iloczyn logiczny drugiego i trzeciego członu, czwartym zaś logiczne *0* wzgl. *1*, są analogonem proporcyj arytmetycznych określających sumę wzgl. iloczyn arytmetyczny, np.: $8\ (= 3 + 5) — 3 = 5 — — 0$ lub $15\ (= 3 \,.\, 5) : 3 = 5 : 1$.

lecz więcej elementów spełnia warunek: $x + a = a + b$ lub $xa = ab$.

Z tego więc względu należy przy proporcji podawać stosunek (wartość stosunku), który sprawdza proporcję i o który w danym przypadku chodzi.

Tak więc pisać należy:

$$(a + b) - a = b - 0\ (D = b)$$[1]

$$ab : a = b : 1\ (Q = b)$$

Jeżeli teraz zapytamy, w jakim związku pozostają te nowe stosunki, oznaczone znakiem „:“ i „—“ do stosunku „<“, to odpowiedź nie będzie trudna, o ile tylko uświadomimy sobie, że stosunek $x : y$ posiada taką wartość, która pomnożona logicznie przez y daje x, zaś stosunek $x - y$ taką, która dodana do y daje x. Z tego okazuje się, że w stosunku $x : y$ jest x mniejsze od y, w stosunku zaś $x - y$ jest x większe od y, czyli, innemi słowy, w pierwszym przypadku mamy stosunek $x < y$, w drugim zaś $x > y$. Tak że proporcje powyższe można byłoby również pisać w ten sposób:

$$a + b > a = b > 0\ (D = b)$$

$$ab < a = b < 1\ (Q = b)$$

Nawias, towarzyszący równości, wystarczy do poinformowania o znaczeniu, jakie posiada tu znak $=$, i zabezpieczy przed mieszaniem proporcji logicznej, jako tożsamości (równowartości)[2] dwóch stosunków, z równoważnością dwóch stosunków, t. j. z ich wzajemnem wynikaniem.

---

[1]) Zamiast $D = b$ możemy pisać wprost $(+ b)$, zamiast $Q = b$ wprost $(\times b)$.

[2]) Mówiliśmy tu niejednokrotnie o proporcji logicznej, jako tożsamości dwóch stosunków jakościowych. Postaramy się teraz — w myśl wywodów rozdziału 3-go tomu I-go — bliżej sprecyzować to pojęcie tożsamości stosunków, jak również i odrębności elementów w proporcji logicznej. Istotnie,

Weźmy teraz pod uwagę proporcję bardziej ogólnej natury:

$$ab : a = b : a + b \ (\times b)$$

Przedewszystkiem wskazuje nam ona — jak tego zresztą można było się spodziewać, znając własności dodawania i mnożenia logicznego — że trzy człony proporcji logicznej nie wyznaczają jednoznacznie czwartego, nawet przy tej samej wartości stosunku, który w nich występuje. Przed chwilą bowiem mieliśmy proporcję o tych samych, co teraz, trzech członach, czwartym zaś odmiennym, mianowicie proporcję:

$$ab : a = b : 1 \text{ przy } Q \text{ również } = b.$$

---

jak się tego należało spodziewać, i w proporcji o elementach logicznych czy topologicznych odnajdujemy dwa momenty: kategorjalność i substratowość, przytem zarówno, jeżeli chodzi o stosunki, jak i o elementy proporcji (analogji) logicznej.

Weźmy np. proporcję:

$$(a+b) - a = b - 0\,(+b),$$

dla uproszczenia zaś jej obrazu geometrycznego przyjmijmy, że wszystkie jej elementy są punktami (rys. 3). Jej człony analogiczne, punkty $a+b$ i b, mają wspólny element — prostą b i podobnie jej człony analogiczne, punkty a i 0, mają wspólny element — prostą 0. Otóż te proste b i $0\ (=aa')$ będą to elementy kategorjalne, które się różnicują przy pomocy różnych substratów - prostych a i $0\ (= bb')$, tworząc dwie pary punktów analogicznych: $a+b$ i b oraz a i 0. W ten sposób w elementach analogicznych naszej analogji logicznej widzimy wyraźnie składające je momenty tożsamościowe (kategorjalne) i różnościowe (substratowe). I podobnie ma się sprawa stosunków w analogji logicznej. Stosunki: ($a+b$ do a) i (b do 0) przedstawiają w istocie rzeczy ten sam kategorjalny stosunek b do 0 (stosunek między prostemi kategorjalnemi b i 0), tylko że raz skonkretyzowany w postaci stosunku punktów w substracie a, drugi zaś raz w stosunku punktów w substracie 0. Tak więc to, co w skróceniu nazywamy tożsamością stosunków, w analogji logicznej, ściśle rzecz biorąc, okazuje się ich izokategorjalnością przy odrębności substratów.

W przypadku, gdy elementy analogiczne będą linjami prostemi, ich elementami kategorjalnemi będą punkty, w których te proste tkwią, jako składniki — por. niżej o analogji dwoistej (analogji składników), dodatek B.

Rzeczą interesującą będzie prześledzić geometrycznie, jak dwie proporcje powyżej przez nas wzmiankowane:

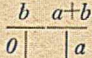
(1) dodajna: $(a + b) - a = b - 0 \; [+ b]$

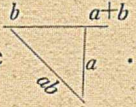
(2) mnożna: $ab : a = b : 1 \; [\times b]$

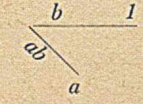
przechodzą przez zamianę 0 na ab i 1 na $a+b$ w proporcje, jedną dodajną, drugą mnożną o tych samych algebraicznie elementach (tylko w innym porządku):

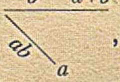
(1') $(a+b) - a = b - ab \; [+ b]$

(2') $ab : a = b : a + b \; [\times b]$

Proporcja dodajna *(1)*, jak pamiętamy, przedstawia się przestrzennie w postaci: 

i — wobec tego, że punkt b można otrzymać również przez przecięcie prostej b nie z osią 0, lecz z prostą ab — może być przekształcona na proporcję *(1')* o strukturze 

. Otóż na strukturę o tych samych algebraicznie elementach możemy przekształcić proporcję mnożną *(2)* o postaci 

, zwróciwszy uwagę na to, że prostą b można otrzymać również przez połączenie punktu b nie z punktem w ∞-ci ($1_{b+b'}$), lecz z punktem $a+b$. Wtedy właśnie otrzymamy mnożną proporcję logiczno-geometryczną o strukturze 

, przyczem w dziedzinie przestrzennej okaże się, że te dwie proporcje *(1')* i *(2')* o pozornie tych samych elementach, w istocie rzeczy posiadają elementy dwoiste, albowiem w pierwszej proporcji a jest prostą, człon zaś b jest punktem, natomiast w drugiej człon *a* jest punktem, człon zaś *b* jest prostą, poza tem zaś wykładnik (wartość) stosunku w pierwszej proporcji przedstawia się pod postacią prostej *b*, w drugiej zaś pod postacią punktu *b*. Znów spotykamy się tu z tem ciekawem zjawiskiem, że dziedzina przestrzenna ostatecznie dopiero wykazuje nam nieujawnioną całkowicie w dziedzinie algebraicznej dwoistość. Widzimy, jak przestawienie terminów krańcowych wiąże się tu ze zmianą charakteru proporcji (z dodajnego na mnożny), ta zaś zmiana wyraża się w zmianie elementów proporcji na elementy dwoiste.

Proporcja: $ab : a = b : a + b \; (\times b)$ jest proporcją bardzo wybitną, gdyż mamy w niej przeniesioną na grunt jakościowy t. zw. proporcję muzyczną.

Przez proporcję muzyczną rozumie się proporcję geometryczną, wiążącą średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną elementów *a* i *b* z temi elementami, mianowicie:

$$\frac{a+b}{2} : a = b : \frac{2ab}{a+b}$$

Proporcja ta zawdzięcza swą nazwę temu, że wiąże ona wysokości: tonu podstawowego *(a)*, jego oktawy *(b)*, kwinty (która jest średnią harmoniczną tonów *a* i *b* czyli $\frac{a+b}{2}$) oraz kwarty (która jest średnią harmoniczną tonów *a* i *b* czyli $\frac{2ab}{a+b}$).

Otóż w proporcji logicznej

$$ab : a = b : a + b \; [\times b]$$

natychmiast odpoznamy proporcję muzyczną w jej jakościowym charakterze, o ile tylko przypomnimy sobie, że średniej arytmetycznej elementów *a* i *b* odpowiada w dziedzinie logiki iloczyn logiczny tych elementów, średniej zaś harmonicznej — ich suma logiczna.

Pomijając tu wywód systematyczny własności proporcyj logicznych, zatrzymamy się jedynie na tej ich elementarnej właściwości, która polega na tem, że suma logiczna wyrazów krańcowych w proporcji logicznej dodajnej (wzgl. iloczyn logiczny tych wyrazów w proporcji mnożnej) jest równoważna sumie logicznej (wzgl. iloczynowi logicznemu) jej wyrazów środkowych.

Właściwość ta wynika natychmiast z określenia proporcji logicznej, jako takiego zespołu 4 członów, w którym człon pierwszy tak powstaje z drugiego przez dodawanie lub mnożenie logiczne, jak trzeci z czwartego.

Niechaj cztery elementy x_1, y_1, x_2, y_2 stanowią proporcję logiczną dodajną i niech x_1 powstaje z y_1 oraz x_2 z y_2 przez dodanie logiczne elementu a.

Wtedy:

$$x_1 = y_1 + a$$

$$x_2 = y_2 + a$$

$$x_1 + y_2 = y_1 + a + y_2 = y_1 + y_2 + a = y_1 + x_2 \text{ c.b.d.d.}$$

I analogicznie dla twierdzenia o równoważności iloczynów wyrazów środkowych i krańcowych w proporcji logicznej mnożnej. Mianowicie niechaj cztery elementy x_1, y_1, x_2, y_2 stanowią proporcję logiczną mnożną i niech x_1 powstaje z y_1 oraz x_2 z y_2 dzięki pomnożeniu logicznemu przez element a.

Wtedy:

$$x_1 = y_1 \times a$$

$$x_2 = y_2 \times a$$

$$x_1 y_2 = y_1 \,.\, a \,.\, y_2 = y_1 \,.\, y_2 \,.\, a = y_1 x_2 \text{ c. b. d. d.}$$

Przytem — w przeciwieństwie do proporcyj ilościowych — z równości (równoważności) sumy logicznej, wzgl. iloczynu, wyrazów środkowych i krańcowych nie wynika bynajmniej, że taka czwórka wyrazów tworzy proporcję logiczną (przykład niżej).

Ta własność równoważności sumy logicznej, wzgl. iloczynu logicznego, elementów środkowych i krańcowych, stanowiących proporcję logiczną, zbliża czwórkę logicznych elementów proporcjonalnych do znanej nam już czwórki logicznych elementów harmonicznych. Albowiem i w grupie harmonicznej sumy logiczne, wzgl. iloczyny logiczne, elementów harmonicznie sprzężonych są sobie równoważne. Zachodzi wobec tego pytanie, czy wszelka czwórka logicznych elementów proporcjonalnych stanowi czwórkę harmoniczną, i czy wszelka czwórka harmoniczna przedstawia proporcję?

Otóż, gdyby równoważność sum logicznych, wzgl. iloczynów, elementów dwóch par stanowiła już o proporcjonalności tych elementów, to wszelka czwórka harmoniczna, jako że posiada tę własność równoważności sum, wzgl. iloczynów logicznych, byłaby również czwórką proporcjonalną; podobnie, gdyby wspomniana równoważność stanowiła już o harmoniczności grupy tych elementów, to wszelka czwórka proporcjonalnych elementów, jako że tę własność równoważności posiada, byłaby już tem samem czwórką harmoniczną. Wtedy więc wszelka proporcja przedstawiałaby grupę harmonicznych elementów, i odwrotnie. Ale tak nie jest. Wiemy bowiem, że ta własność równoważności sum logicznych, wzgl. iloczynów, dwóch par elementów skojarzonych nie wystarcza do nadania czwórce elementów charakteru harmoniczności (por. str. 114), podobnie jak nie wystarcza do nadania jej charakteru proporcjonalności. To zaś znaczy, że z proporcjonalności czwórki elementów nie wynika ich harmoniczność, ani z ich harmoniczności — proporcjonalność. Nie znaczy to jednak, oczywiście, że wogóle niema zespołów czwórkowych równocześnie proporcjonalnych i harmonicznych.

Weźmy parę przykładów, ilustrujących wyżej omówione stosunki między proporcją logiczną a logiczną grupą harmoniczną. A więc np. grupę harmoniczną 10a ze str. 107:

$$(a' + b)(a + b'),\ a,\ a + b,\ b,$$

grupę 4 punktów o podkładzie *ab*.

Otóż iloczyny ich elementów sprzężonych są sobie równoważne $[(a' + b)(a + b') \times (a + b) = a \times b]$, jednakże te dwie pary elementów nie stanowią proporcji, nieprawdą bowiem jest, że:

$$(a' + b)(a + b') : a = b : a + b$$

Natomiast cztery elementy ab, a, b, $a + b$ stanowią znaną nam proporcję logiczną (muzyczną):

$$ab : a = b : a + b\ [\times b]$$

lecz chociaż mamy tu: $ab \times (a + b) = a \times b$, jednakże ta czwórka elementów nie stanowi grupy harmonicznej, albowiem element, stanowiący parę z elementem $a+b$, nie jest tu elementem granicznym, nie jest $(a'+b)(a+b')$, lecz jest ab.

Z drugiej jednak strony mogą istnieć czwórki elementów, łączące w sobie zarówno cechy harmoniczności, jak i proporcjonalności. Np. grupa punktów (5a ze str. 107):

$$1,\ a,\ 0,\ a'$$

jest nietylko grupą harmoniczną, lecz również przedstawia proporcję, albowiem a' tak powstaje z 1, jak 0 z a, mianowicie przez $\times a'$. W ten sposób dwie powyższe pary elementów harmonicznie sprzężonych stanowią, istotnie, proporcję:

$$0 : a = a' : 1 \ [\times a'], \text{ lub inaczej } 0 < a = a' < 1 \ [\times a']$$

Podobnie stanowią proporcję wszystkie czwórki harmoniczne, leżące na prostych, równoległych do osi poziomo-pionowych (1a—6a), i czwórki do nich dwoiste (1b—6b).

CZĘŚĆ IV.

LOGIKA ARYTMETYCZNA I AKUSTYCZNA.

Rozdział XII.

LOGIKA GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNA A ARYTMETYKA.

Architektonikę logiczną odnajdujemy również w dziedzinie arytmetycznej, w dziedzinie liczb, która zwykle uchodzi za teren obcy wszelkim jakościowym związkom. Otóż na przykładzie trzech pitagorejskich średnich — średniej arytmetycznej, harmonicznej i geometrycznej — postaramy się wykazać, w jak wysokim stopniu struktury logiczne przenikają świat arytmetyczny, odwzorowując się w tym świecie m. in. w postaci wspomnianych trzech średnich. Ujawni się logiczna natura tych trzech podstawowych związków arytmetycznych, i zjawi się możliwość wykrycia pewnych nieznanych dotychczas stosunków, zachodzących między niemi, przez uświadomienie sobie tych struktur jakościowych, których są one wyrazem.

Kwestję tę poruszyliśmy już w tomie I-ym „Architektoniki świata" (por. tam str. 90—94). Obecnie zajmiemy się nią bliżej nieco i gruntowniej. Wiemy już (por. przedewszystkiem str. 100 i 101 obecnego tomu), że średnia arytmetyczna odwzorowuje iloczyn logiczny, średnia zaś harmoniczna — logiczną sumę. Musimy jednak uprzytomnić sobie teraz, że to odwzorowanie nie jest bezwzględne, lecz jest poddane pewnym warunkom.

Nie można go stosować wtedy np., gdy chcemy zarytmetyzować związek logiczny, wyrażający równoważność między sumą (wzgl. iloczynem logicznym) i jednym ze składników tej sumy (wzgl. iloczynu), powiedzmy związek (niezawsze zresztą zachodzący) $a = a + b$, albowiem średnia harmoniczna (wzgl. średnia arytmetyczna) dwóch różnych liczb nigdy nie może być równą jednej z tych liczb. Jeżeli więc mamy jakikolwiek wzór logiczny, wyrażający równoważność elementu prostego z pewną funkcją elementów, w skład których wchodzi dany element prosty, to w mowie będące odwzorowanie tego wzoru wtedy tylko da się przeprowadzić, gdy wyłączone zostaną przypadki, sprowadzające dany wzór do typu $a = a + b$, wzgl. $a = ab$.

Jeżeli np. chcemy w sposób powyższy odwzorować arytmetycznie zasadę dichotomji:

$$a = (a + b)(a + b'),$$

to uczynić to możemy tylko pod tym warunkiem, że $b \nless a$ i $b' \nless a$. Warunek ten bowiem jest równoważny temu, że $a + b' \neq 1$ i $a + b \neq 1$ (por. wzór I^d na str. 29), co zabezpiecza zasadę powyższą przed redukcją do postaci, niedających się w omawiany sposób zarytmetyzować.

Analogicznie warunek zarytmetyzowania zasady dichotomji dwoistej względem poprzedniej:

$$a = ab + ab'$$

będzie polegał na tem, by $a \nless b$ i $a \nless b'$, to zaś jest równoważne temu, by $ab' \neq 0$ i $ab \neq 0$ (por. wzór I^c na str. 29). Wtedy zasada $a = ab + ab'$ zabezpieczona jest przed redukcją do postaci $a = ab$ wzgl. $a = ab'$, niedających się w omawiany sposób zarytmetyzować.

Powyższe warunki, którym podlega zarytmetyzowanie logicznych wzorów dichotomji, nie są więc niczem innem, jak warunkami, zabezpieczającemi *normalność* dichotomji, jej dwuczłonowość, i sprowadzają się one — jak to sobie przypominamy (por. str. 120—125) — do tego, by a znajdowało się w stosunku neutralności względem b i b' [jeśli chodzi o wzór: $a = (a+b)(a+b')$] wzgl. w stosunku dwoistej neutralności [jeżeli chodzi o wzór: $a = ab + ab'$]. Te zaś stosunki neutralności określiliśmy właśnie w ten sposób:

pierwszy: $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{b'}]a = (b \not< a) + (b' \not< a)$

drugi: $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{b'}\triangleright a = (a \not< b) + (a \not< b') = (b' \not< a') + (b \not< a') = \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{b'}]a'$.

Jeżeli teraz zdołamy w dziedzinie liczb odpoznać ten stosunek logiczno-geometryczny neutralności, jeżeli zdołamy przetłomaczyć go na język arytmetyczny, tak jak przetłomaczyliśmy na ten język pojęcia sumy i iloczynu logicznego, to odwzorowaniu arytmetycznemu zasad dichotomji nic już na przeszkodzie stać nie będzie.

Ażeby odpoznać w dziedzinie arytmetycznej stosunek logiczny neutralności, musimy dobrze uświadomić sobie jego najogólniejszą naturę, polegającą na tem, że element a nie skłania się ani ku elementowi b, ani ku odwrotności (negacji) b, elementowi b', że zajmuje między niemi neutralne właśnie, środkowe, średnie miejsce. Nasuwa się tu natychmiast myśl, że ten element a, neutralny między elementami b i b', przedstawia się w dziedzinie liczb w postaci jakiejś *średniej* między dwiema liczbami. Lecz jakiej średniej?

Średnia arytmetyczna odwzorowuje już sumę logiczną, średnia harmoniczna — iloczyn logiczny, i dla odwzorowania elementu neutralnego pozostaje tylko średnia geometryczna. Jeżeli jednak tak jest w istocie rzeczy, to średnia geometryczna będzie odwzorowywała nietylko stosunek neutralności prostej, lecz i dwoistej. Elementy bowiem b i b' są względem siebie w stosunku negacji, ich odpowiedniki arytmetyczne są więc względem siebie w stosunku odwrotności (por. str. 100), i średnią geometryczną między niemi będzie 1 $\left(b : 1 = 1 : \frac{1}{b'}\right)$. Ta sama jednak 1 odwzorowuje nietylko element a, lecz i negację a czyli element a', albowiem odwrotnością 1 jest $\frac{1}{1}$ $= 1$. A więc średnia geometryczna między dwiema odwrotnościami $\left(b \text{ i } \frac{1}{b'}\right)$ odwzorowuje nietylko stosunek $\frac{b}{b'}]a$, lecz i stosunek $\frac{b}{b'}]\, a'$, który jest równoważny — jak już wiemy — dwoistej neutralności elementu a względem b i b', t. j. $= \frac{b}{b'} \rhd a$.

Teraz możemy już przeprowadzić odwzorowanie arytmetyczne zasad dichotomji, posiłkując się naszym słowniczkiem:

logiczny iloczyn — średnia arytmetyczna,
logiczna suma — średnia harmoniczna,
logiczna średnia neutralna — średnia geometryczna,

pamiętając przytem o warunkach, którym czynić muszą zadość występujące tu elementy.

Otrzymamy pewne — dotychczas nieznane — związki łączące 3 średnie arytmetyczne, które dają się sformułować w następujących 3 twierdzeniach [1]).

---

[1]) W twierdzeniach tych zamiast elementu $\frac{1}{b}$ (odpowiadającego elementowi logicznemu b') występować może element ogólniejszy w postaci c, tak że dla $c = \frac{1}{b}$ będziemy mieli poszczególny przypadek tych twierdzeń (patrz niżej).

Twierdzenie I.

Jeżeli a jest średnią geometryczną między b i c $(bc = a^2)$, to średnia arytmetyczna ze średnich harmonicznych z a i b oraz a i c jest równa a (tw. I α), i odwrotnie (tw. I β).

Twierdzenie II (dwoiste do I).

Jeżeli a jest średnią geometryczną między b i c $(bc = a^2)$, to średnia harmoniczna ze średnich arytmetycznych z a i b oraz a i c jest równa a (tw. II α), i odwrotnie (tw. II β).

Twierdzenie III (wniosek z tw. I i II).

Jeżeli a jest średnią geometryczną między b i c $(bc = a^2)$, to średnia arytmetyczna ze średnich harmonicznych z a i b oraz a i c jest równa średniej harmonicznej ze średnich arytmetycznych z powyższych elementów (tw. III α), i odwrotnie (tw. III β).

Dowód twierdzenia I.

α) $H_{ab} =$ śr. harm. z a i $b = \dfrac{2ab}{a+b}$; $A_{ab} =$ śr. arytm. z a i $b = \dfrac{a+b}{2}$

$$A_{H_{ab} \,.\, H_{ac}} = \frac{\dfrac{2ab}{a+b} + \dfrac{2ac}{a+c}}{2} = \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} =$$

$$= \frac{ab\,(a+c) + ac\,(a+b)}{(a+b)\,(a+c)} = \frac{a^2b + 2abc + a^2c}{a^2 + ab + ac + bc}$$

Jeżeli $bc = a^2$, to $A_{H_{ab} \,.\, H_{ac}} = \dfrac{a^2b + 2a \,.\, a^2 + a^2c}{a^2 + ab + ac + a^2} =$

$$= \frac{a^2\,(2a+b+c)}{a\,(2a+b+c)} = a. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

β) $A_{H_{ab} \,.\, H_{ac}} = \dfrac{a^2b + 2abc + a^2c}{a^2 + ab + ac + bc} = a$

$$a^2b+2abc+a^2c = a^3+a^2b+a^2c+abc$$
$$abc = a^3$$
$$bc = a^2. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Dowód twierdzenia II.

$$\alpha)\ H_{A_{ab}\cdot A_{ac}} = \frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}} = \frac{(a+b)(a+c)}{a+b+a+c} =$$
$$= \frac{a^2+ab+ac+a^2}{2a+b+c}$$

Jeżeli $bc = a^2$, to $H_{A_{ab}\cdot A_{ac}} = \frac{a^2+ab+ac+a^2}{2a+b+c} = \frac{a(2a+b+c)}{2a+b+c} =$

$$= a. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

$$\beta)\ H_{A_{ab}\cdot A_{ac}} = \frac{a^2+ab+ac+bc}{2a+b+c} = a$$
$$a^2+ab+ac+bc = 2a^2+ab+ac$$
$$bc = a^2. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Dowód twierdzenia III.

$\alpha)$ Jeżeli $bc = a^2$, to $A_{H_{ab}\cdot H_{ac}} = a$ (Iα) i $H_{A_{ab}\cdot A_{ac}} = a$ (IIα).

A więc, jeżeli $bc = a^2$, to $A_{H_{ab}\cdot H_{ac}} = H_{A_{ab}\cdot A_{ac}}$. c. b. d. d.

$$\beta)\ A_{H_{ab}\cdot H_{ac}} = H_{A_{ab}\cdot A_{ac}};\ \frac{a^2b+2abc+a^2c}{a^2+ab+ac+bc} = \frac{a^2+ab+ac+bc}{2a+b+c};$$
$$(a^2+ab+ac+bc)^2 = (a^2b+2abc+a^2c)(2a+b+c);$$
$$a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^3b+2a^3c+2a^2bc+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 =$$
$$= 2a^3b+4a^2bc+2a^3c+a^2b^2+2ab^2c+a^2bc+a^2bc+2abc^2+a^2c^2;$$
$$a^4+2a^2bc+b^2c^2 = 4a^2bc;\ a^4-2a^2bc+b^2c^2=0;\ (a^2-bc)^2=0;$$
$$bc = a^2. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Poszczególny przypadek tych twierdzeń otrzymujemy dla $c = \frac{1}{b}$. Wtedy trzy interesujące nas twierdzenia logiczne, dotyczące dichotomji, odwzorowują się w trzech poniższych twierdzeniach arytmetycznych.

Twierdzenie logiczne	*Twierdzenie arytmetyczne*
Jeżeli a jest średnią neutralną między b i b', to	Jeżeli a jest średnią geometryczną między b i $\frac{1}{b}$, to
1) $a = (a+b)(a+b')$, gdzie $a+b \neq 1$, $a+b' \neq 1$, i odwr.	1) $a = A_{H_{ab} \cdot H_a \cdot \frac{1}{b}}$, i odwr.
2) $a = ab + ab'$, gdzie $ab \neq 0$, $ab' \neq 0$, i odwr.	2) $a = H_{A_{ab} \cdot A_a \cdot \frac{1}{b}}$, i odwr.
3) $(a+b)(a+b') = ab + ab'$, gdzie $(a+b) \neq 1$, $a+b' \neq 1$, $ab \neq 0$, $ab' \neq 0$, i odwr.	3) $A_{H_{ab} \cdot H_a \cdot \frac{1}{b}} = H_{A_{ab} \cdot A_a \cdot \frac{1}{b}}$, i odwr.

Widzimy tedy, że istotnie logiczna średnia neutralna odwzorowuje się arytmetycznie, jako średnia geometryczna, podobnie jak logiczna średnia typowa (iloczyn logiczny) odwzorowuje się — jak już o tem wiemy — w postaci średniej arytmetycznej, i jak logiczna średnia całościowa (suma logiczna) odwzorowuje się w postaci średniej harmonicznej.

Widzimy tu zastanawiającą odpowiedniość między światem logiki, światem jakości i światem liczb. Świat bowiem liczb okazuje się niepozbawionym jakościowego charakteru, jeżeli jego średnie tak ściśle odpowiadają średnim logicznym, jakościowym. I w arytmetyce więc można mówić o liczbach, które są jakgdyby średniemi typowemi względem innych liczb, oscylujących wokoło nich, jakgdyby je różnicujących, tak np. jak około 2 (średniej arytmetycznej dla 1 i 3) oscyluje $1 = 2 + (-1)$ i $3 = 2 + (+1)$; albo też o liczbach, stanowiących całości jakościowe innych liczb, te całości, które zwiemy średniemi harmonicznemi dwóch liczb; wreszcie widzimy tam liczby średnio-geometrycznie proporcjonalne względem dwóch liczb, liczby nieprzechylające się ku żadnej stronie, liczby realizujące w swym świecie jakościową kategorję neutralności. I jeżeli w tych średnich dziedziny arytmetycznej zwrócić uwagę na tę ich jakościową stronę, to pokrewieństwo tych liczb z odpowiedniemi średniemi pojęciowemi (logicznemi) będzie tak wyraźne i tak zresztą zadokumentowane przez odpowiedniość twierdzeń, które ich dotyczą, że śmiało i ściśle będzie można zastosować do nich nazwę platońską: ἀριθμοὶ εἰδητικοί = liczby idealne = liczby-idee, liczby-pojęcia. Podobnie więc, jak mówimy o geometrji jakościowej, mówić możemy i o arytmetyce jakości, i — jak widzimy — ta arytmetyka jakości, tak zresztą jak i geometrja jakości, znajduje się w najściślejszym związku z logiką.

Spójrzmy teraz w związku z powyższem na nasz podstawowy diagramat logiczny, na naszą charakterystykę geometryczną (rys. 3). Normalne a zajmuje w niej neutralne położenie względem b i b', podobnie b względem a i a'. Otóż, jak głęboka odpowiedniość łączy tę logiczną przedstawicielkę neutralności z jej odpowiednikiem arytmetycznym, możemy się przekonać, rozpatrując zagadnienie wstawiania dwóch średnich (geometrycznych) proporcjonalnych między dwie dane liczby — zagadnienie ściśle związane z t. zw. problemem delijskim.

Niechaj a i b będą temi liczbami. Szukamy x i y takich, aby:

$$a : x = x : y$$
$$x : y = y : b$$

[Czyli $ay = x^2$ i $bx = y^2$, a więc $ab = xy$, skąd $x^3 = a^2b$ i $y^3 = ab^2$].

Analogonem logicznem tego zagadnienia będzie następujące: wstawić dwie średnie neutralne między dwa dane elementy logiczne a i b (wierzchołki wewnętrznego kwadratu). Szukamy więc takich elementów logicznych x i y, aby

el. x był średnią neutralną między a i y, zaś

el. y był średnią neutralną między x i b.

Te dwa elementy natychmiast odpoznajemy w dwóch pozostałych wierzchołkach kwadratu wewnętrznego. Wiemy bowiem, że normalne b' przedstawia właśnie średnią neutralną między a i a', a' zaś średnią neutralną między b' i b, tak że x jest to wierzchołek b', y zaś wierzchołek a':

b' — średnia neutralna między a i a', zaś

a' — średnia neutralna między b' i b.

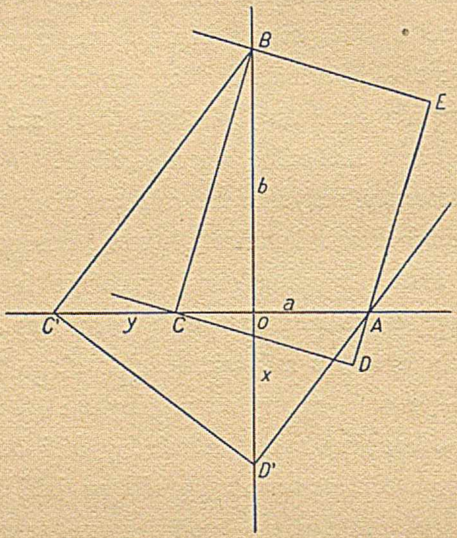
Porównajmy z tem teraz ten sposób, w jaki Platon — tak głosi przynajmniej tradycja — rozwiązywał w związku z problematem delijskim to zagadnienie w dziedzinie ilościowej, jako wstawienie dwóch średnich (geometrycznych) proporcjonalnych między dwie dane wielkości [1]).

Postępujemy tu tak oto zgodnie z konstrukcją, przypisywaną Platonowi [1]). Od punktu 0 przecięcia dwóch prostopadłych osi odkładamy na jednej z nich odcinek wielkości a do punktu A, na drugiej — odcinek wielkości b do punktu B (por. rys. 12). Przez punkt B przechodzi bok BC prostokąta $BEDC$, którego drugi bok DE, równoległy do BC, przechodzi przez punkt A, zaś wierzchołek C leży na osi $0A$. W pro-

---

[1]) Por. M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1880, tom I, str. 195 oraz A. Herrmann. Das Delische Problem, 1927, str. 43 (Mathem.-physikalische Bibliothek, Nr. 68, Teubner).

stokącie tym boki BE i CD mogą się odpowiednio zwiększać lub zmniejszać, albowiem bok BC jest ruchomy (może się przesuwać równolegle do DE). Teraz obracamy czworokąt ten



Rys. 12.

około punktów B i A, co w związku z przesuwalnością boku BC pozwoli nam doprowadzić punkt D do położenia D' na osi $0B$ (punkt zaś C zajmie przytem położenie C' na osi $0A$). Wtedy $0D'$ i $0C'$ będą szukanemi średniemi proporcjonalnemi x i y, albowiem z trójkątów prostokątnych $AD'C'$ i $D'C'B$ otrzymujemy:

$$a : x = x : y$$

$$x : y = y : b$$

Już rzut oka na powyższą konstrukcję Platona wystarcza, by stwierdzić zasadnicze pokrewieństwo w rozwiązaniu porównywanych przez nas zagadnień. Dwie średnie neutralne wstawione między dwa wierzchołki kwadratu, leżące na osiach (por. rys. 3), okazują się dwoma punktami, z których jeden leży na osi, przechodzącej przez *0* i *b*, drugi na osi, przechodzącej przez *0* i *a;* dwie zaś średnie geometryczne wstawione między dwa punkty, leżące na osiach (por. rys. 12), okazują się wyznaczone (jako odcinki) przez dwa punkty, również leżące na osiach: jeden na osi, przechodzącej przez *0* i *B*, drugi na osi, przechodzącej przez *0* i *A*. Przy tem zasadniczem pokrewieństwie konstrukcji dwóch średnich neutralnych i dwóch średnich geometrycznych zachodzi, oczywiście, zasadnicza różnica punktów widzenia: w drugim przypadku chodzi o wielkości odcinków wyznaczone na czterech osiach, o wielkości *a, b, x, y*, a więc o odległości punktów na osiach od początku współrzędnych; w pierwszym natomiast odległości te są całkowicie obojętne, chodzi zaś o samo położenie tych punktów, o to, że leżą one właśnie na tych osiach symetrji, na osiach neutralności, wszystko jedno bliżej czy dalej od początku współrzędnych. Mamy tu to samo zagadnienie w dwóch odmiennych postaciach: jakościowej i ilościowej, i w dwóch postaciach widzimy tu elementy środkowe, jako logiczną średnią neutralną i średnią geometryczną (ilościową). Ta ilościowa strona średniej geometrycznej wyodrębnia ją od średniej logicznej, z którą znów identyfikuje ją jej strona jakościowa.

* *

*

Posuniemy się teraz o krok dalej i, korzystając z odpowiedniości elementów wewnętrznego i zewnętrznego kwadratu, którą poznaliśmy z rozdziale V (por. str. 72, 73), postaramy się znaleźć średnie neutralne również między elementami zewnętrznego kwadratu (por. rys. 3). Zachodzi, mianowicie, odpowiedniość między wierzchołkami a, b, b', a' wewnętrznego kwadratu i wierzchołkami $a+b$, $a+b'$, $a'+b$, $a'+b'$ kwadratu zewnętrznego, i nasuwa się nieodparcie myśl, że jeżeli a jest średnią neutralną między b i b', to takąż neutralną będzie również element $a+b$ w stosunku do $a+b'$ i $a'+b$. Powtarza się tu, niewątpliwie, ta sama konfiguracja, jaka istniała między a, b i b'; i tu również mamy trzy wierzchołki trójkąta $(a+b, a+b', a'+b)$, opartego o oś współrzędnych, tylko orjentacja tu jest zmieniona z pionowo-poziomej na skośną. Myśl ta zyskuje jeszcze na pewności, jeżeli przyjrzymy się bliżej tym elementom złożonym. Otóż istotnie $a+b$ zajmuje między dwoma pozostałemi położenie średnie, jednakowo od nich odległe pod względem jakościowym. Od $a+b'$ różni się znakiem b, od $a'+b$ znakiem a, a różnice te są tej samej wartości, tego samego znaczenia wobec zupełnie symetrycznego udziału elementu a i elementu b w sumie $a+b$.

I tak samo sprawa się przedstawia w dziedzinie dualnej: podobnie jak prosta a zewnętrznego kwadratu była średnią neutralną między prostemi do niej prostopadłemi b i b', tak samo w wewnętrznym kwadracie prosta ab musi być średnią neutralną między prostemi do niej prostopadłemi ab' i $a'b$. Oczywiście, neutralność elementu ab i elementu $a+b$ w stosunku do obokległych uwarunkowana jest normalnością tych elementów, inaczej mówiąc, normalnością w grę tu wchodzących dichotomij. Zarówno więc dichotomja:

$$a = (a+b)(a+b') \text{ i } a = ab+ab'$$

jak i $$b = (a+b)(a'+b) \text{ i } b = ab+a'b,$$

muszą być normalne, co, jak wiemy, jest uwarunkowane tem, że a jest średnią neutralną (zwykłą i dualną) między b i b', zaś b między a i a'.

W ten sposób otrzymujemy twierdzenie:

Jeżeli a jest średnią neutralną między b' i b, zaś b średnią neutralną między a i a' (innemi słowy, jeżeli a i b są dwiema średniemi neutralnemi między b' i a'), to $a+b$ jest średnią neutralną między $a+b'$ i $a'+b$, zaś ab między ab' i $a'b$. Jeżeli jednak tak jest, to prawdziwem być musi również twierdzenie arytmetyczne, które otrzymamy jako odwzorowanie powyższego twierdzenia przy zamianie logicznej „średniej neutralnej" na „średnią geometryczną", „sum logicznych" (średnich całościowych) na „średnie harmoniczne" i „iloczynów logicznych" (średnich typowych) na „średnie arytmetyczne".

Otóż istotnie — rezygnując z tego, żeby dwa z powyższych czterech elementów prostych były negacjami (odwrotnościami) dwóch pozostałych [1]) — możemy dowieść poniższego (dotychczas nieznanego) twierdzenia arytmetycznego.

Twierdzenie IV.

Jeżeli a jest średnią geometryczną między d i b [2]), zaś b jest średnią geometryczną między a i c [3]) (innemi słowy, jeżeli a i b są dwiema średniemi geometrycznemi między d i c [4]), to średnia harmoniczna z a i b jest średnią geometryczną dla średnich harmonicznych z a i d oraz z b i c — oraz dwoiście:

---

[1]) Por. odnośnik na str. 148.

[2]) Czyli $d: a = a : b$ lub $a^2 = bd$.

[3]) Czyli $a: b = b : c$ lub $b^2 = ac$.

[4]) Oba warunki łącznie dają: $a^2 b^2 = abdc$ czyli $ab = cd$.

Twierdzenie V.

Jeżeli a jest średnią geometryczną między d i b, zaś b jest średnią geometryczną między a i c, to średnia arytmetyczna z a i b jest średnią geometryczną dla średnich arytmetycznych z a i d oraz z b i c.

Dowód twierdzenia IV.

$$H_{ab} = \frac{2ab}{a+b}; \quad H_{bc} = \frac{2bc}{b+c}; \quad H_{ad} = \frac{2ad}{a+d}$$

$$[H_{ab}]^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2};$$

$$H_{bc} . H_{ad} = \frac{4 . bc . ad}{(b+c)(a+d)} = \frac{4ab . cd}{ab+ac+bd+cd}$$

Jeżeli $a^2 = bd$, $b^2 = ac$ i przeto $ab = cd$, to

$$H_{bc} . H_{ad} = \frac{4 . ab . ab}{ab+b^2+a^2+ab} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} = [H_{ab}]^2 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Dowód twierdzenia V.

$$A_{ab} = \frac{a+b}{2}; \quad A_{bc} = \frac{b+c}{2}; \quad A_{ad} = \frac{a+d}{2}$$

$$[A_{ab}]^2 = \frac{(a+b)^2}{4};$$

$$A_{bc} . A_{ad} = \frac{(b+c)(a+d)}{4} = \frac{ab+ac+bd+cd}{4}$$

Jeżeli $a^2 = bd$, $b^2 = ac$ i przeto $ab = cd$, to

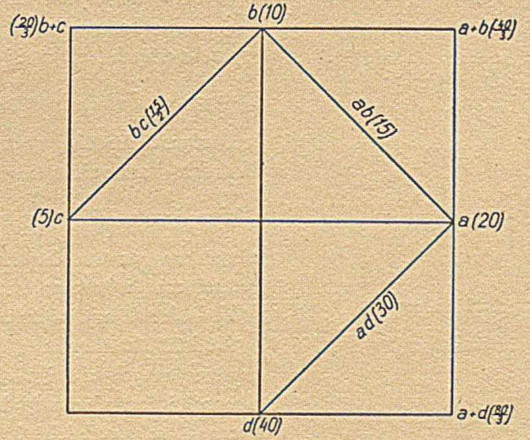
$$A_{bc} . A_{ad} = \frac{ab+b^2+a^2+ab}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} = [A_{ab}]^2 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Poniższy diagramat unaoczni nam na przykładzie te twierdzenia dwoiste, dotyczące czterech liczb, z których dwie są średniemi proporcjonalnemi między dwiema drugiemi. Weźmy np. $a = 20$, $b = 10$, $c = 5$, $d = 40$. Wtedy będzie:

$a^2 = bd\,(20 \,.\, 20 = 10 \,.\, 40)$ i $b^2 = ac\,(10 \,.\, 10 = 20 \,.\, 5)$, a więc również:

$$[H_{ab}]^2 = H_{bc} \,.\, H_{ad} \text{ czyli } \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{20}{3} \,.\, \frac{80}{3} \text{ oraz}$$

$$[A_{ab}]^2 = A_{bc} \,.\, A_{ad} \text{ czyli } (15)^2 = \frac{15}{2} \,.\, 30$$



Rys. 13.

Ten również diagramat unaocznia nam tw. I, II, III niniejszego rozdziału (przy zamianie w nich znaku *c* na *d*), przyczem + oznacza tu zawsze wzięcie średniej harmonicznej, × — wzięcie średniej arytmetycznej.

Na tem kończymy nasze rozważania, dotyczące związku między dziedziną logiki geometrycznej i arytmetyki. Przekonaliśmy się, jak głęboko sięga zadziwiająca odpowiedniość tych światów, i że ścisła analogja, która łączy dziedzinę pojęć i dziedzinę liczb, pozwala nawet odkrywać nieznane dotychczas, choć tak elementarne związki arytmetyczne (twierdzenia I — V, str. 149 i 157, 8) Niewątpliwie dalsze rozbudowanie tej arytmetyki logiki, opartej o odpowiedniość średnich logicznych i średnich arytmetycznych, doprowadzi do systematycznego zbogacenia naszej wiedzy o związkach między trzema średniemi arytmetycznemi i temi funkcjami, które pozostają z niemi w stosunkach [1]).

---

[1]) Podajemy tu jeszcze parę twierdzeń, dotyczących związków między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną, odkrytych na drodze analogji z dziedziną logiki:

Twierdzenie logiczne (VI)

$$ab' + a'b = (a+b)(a'+b')$$

Twierdzenie arytmetyczne (VI)

Średnia harmoniczna ze średnich arytmetvcznych z a i odwrotności $b\left(=\frac{1}{b}\right)$ oraz z b i odwrotności $a\left(=\frac{1}{a}\right)$ jest równa średniej arytm· tycznej ze średnich harmonicznych z a i b oraz z ich odwrotności $\left(=\frac{1}{a} \text{ i } \frac{1}{b}\right)$. (Dowód elementarny z wzorów na średnią arytmetyczną i harmoniczną).

Twierdzenie logiczne (VII)

$$ab + a'b' = (a'+b)(a+b')$$

Twierdzenie arytmetyczne (VII)

Srednia harmoniczna ze średnich arytmetycznych z a i b oraz ich odwrotności jest równa średniej arytmetycznej ze średnich harmonicznych z $\frac{1}{a}$ i b oraz z ich odwrotności.

Twierdzenia te można otrzymać z poprzednich (VI) przez zmianę elementu a (lub b) na jego negację (odwrotność).

Twierdzenie logiczne (VIII)

$$ab' + a'b = (ab + a'b')' = [(a'+b)(a+b')]'$$

Twierdzenie arytmetyczne (VIII)

Średnia harmoniczna ze średnich arytmetycznych z a i $\frac{1}{b}$ oraz z ich odwrotności jest odwrotnością średniej harmonicznej ze średnich arytmetycznych z a i b oraz z ich odwrotności, lub też — w myśl twierdz. VII — jest odwrotnością średniej arytmetycznej ze średnich harmonicznych z $\frac{1}{a}$ i b oraz z ich odwrotności.
(Dowód elementarny z wzorów na średnią arytmetyczną i harmoniczną).

Rozdział XIII.

LOGIKA TONÓW HARMONICZNYCH.

Jak widzieliśmy w części III niniejszego tomu, logika architektoniczna jest przepojona pierwiastkiem harmoniczności, który ją łączy najściślej z dziedziną geometrji i arytmetyki. Będzie tu tedy rzeczą zgoła naturalną, że tę logikę architektoniczno-harmoniczną odkryjemy w tej również dziedzinie, która jest pierwotną domeną harmonji, w dziedzinie realnej akustyczno-muzycznej. I nie zdziwi nas także, że w tej dziedzinie akustyczno-muzycznej odnajdziemy budowę dualną, albowiem — jak widzieliśmy w logice, geometrji i arytmetyce — struktury harmoniczne występują zawsze w postaci dwoistej, dualnej, przyczem ta dwoistość elementów i połączeń wcześniej nawet została odkryta w geometrji i akustyce wzgl. muzyce, aniżeli w samej logice. Obecnie okaże się niewątpliwie, że związki harmoniczne i dualne, które występują w akustyce (wzgl. muzyce), są natury wyraźnie logicznej, i że — podobnie jak mówimy o logice geometrycznej i arytmetycznej — możemy mówić o logice akustycznej wzgl. akustyczno-harmonicznej. System tej logiki, logiki tonów harmonicznych, logiki dotyczącej już dziedziny realnej, podajemy poniżej. Zanim jednak to uczynimy, musimy bliżej nieco zapoznać się ze związkami i stosunkami akustycznemi, jako przedstawicielami działań i stosunków logicznych. Przedewszystkiem zaś musimy słów parę powiedzieć o zasadzie dualności w akustyce.

Wyraźnie już zaznaczony dualny pogląd na świat tonów widzimy w XVIII w. u kompozytora i teoretyka muzyki Rameau (Noveau Système de Musique, 1726) oraz u znakomitego fizyka i matematyka d'Alemberta, który rozwinął poglądy tego muzyka (Eléments de Musique suivant les principes de M. Rameau, 1762). Istota ich poglądów w interesującej nas tu kwestji polega na następującem[1].

Gdy dźwięczy pewien ton (zasadniczy), wtedy równocześnie słyszymy jeszcze dwa inne tony, tak zwane tony harmoniczne, będące oktawą kwinty i drugą oktawą tercji tonu zasadniczego. W ten sposób w tonie zasadniczym (właściwie w drugiej oktawie dolnej tego tonu) zawarty już jest implicite cały akord dur, składający się właśnie z trzech tonów: zasadniczego, jego tercji wielkiej i kwinty. Otóż — mówią Rameau i d'Alembert — odpowiednio do tego, jak tony akordu dur *(c-e-g)* są zawarte w tonie C_1, tak znów tony akordu moll *(c-es-g)*, t. j. ton zasadniczy, jego mała tercja i kwinta, charakteryzuje to, że każdy z nich zawiera pewien wspólny im ton, mianowicie ton harmoniczny g''.

Ta odpowiedniość między akordami dur i moll — to „zawieranie się" tonów akordu dur w jednym i tym samym tonie oraz to „zawieranie" przez tony akordu moll tego samego wspólnego tonu — stanowi podstawę tego współczesnego dualnego poglądu na świat tonów i harmonję muzyczną, jaki widzimy w dziełach fizyka Artura Oettingena. Roz-

[1]) Por. H. Helmholtz. Die Lehre von den Tonempfindungen, als die physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Wydanie drugie, str. 351, 352.

winął on zarówno akustycznie, jak i muzycznie myśli podstawowe Rameau i d'Alemberta i w ten sposób dopiero stworzył właściwie „dualny system harmonji muzycznej“ [1]).

Rozpatrzymy teraz bliżej owe wspomniane wyżej dane, leżące u podstawy dualnego systemu akustyczno-muzycznego Oettingena.

Nasuwa się tu przedewszystkiem pojęcie tonów harmonicznych. Otóż już Mersenne w XVII w. zauważył, że w dochodzącym do nas dźwięku muzycznym możemy odróżnić cały szereg tonów, „tonów składowych“ owego dźwięku [2]). Śród tych „tonów składowych“ lub „częściowych“ wyróżniamy przedewszystkiem dominujący ton ‚zasadniczy“, pierwszy ton składowy, następnie zaś szereg tonów słabszych, wyższych od niego, które nazywamy tonami harmonicznemi górnemi lub nadtonami harmonicznemi („harmonische Obertöne“ Helmholtza). Nadtony harmoniczne cechuje ta własność, że ich wysokości (ściślej: odpowiadające im liczby drgań czyli częstości) są całkowitemi wielokrotnościami wysokości tonu zasadniczego, tak że szereg tonów składowych (harmonicznych) da-

---

[1]) Podstawowem dziełem Oettingena jest „Harmoniesystem in dualer Entwickelung. Studien zu Theorie der Musik“, Dorpat 1866. Jako drugie, zmienione wydanie tego dzieła możemy uważać jego książkę: „Das duale Harmoniesystem“, 1913, będącą rozszerzeniem szeregu artykułów, które pod podobnym tytułem ukazały się w „Annalen der Naturphilosophie“ Ostwalda (tomy 1—V). W r. 1916, a więc w 50 lat po wydaniu podstawowego swego dzieła, pisze jeszcze Oettingen „Die Grundlagen der Musikwissenschaft und das duale Reininstrument“ (odbitka z XXXIV t. „Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften“, Leipzig).

[2]) Poniżej dla ujednostajnienia terminologji w tych miejscach, gdzie kwestja złożoności dźwięku będzie dla nas obojętna, będziemy również i dźwięk złożony nazywali tonem.

nego dźwięku charakteryzują wysokości (częstości drgań) proporcjonalne do szeregu liczb naturalnych:

$1, 2, 3, 4, 5, 6$... i t. d.

Jeżeli za ton zasadniczy weźmiemy np. ton *c*, wtedy tonami składowemi dźwięku *c* będą:

1) ton zasadniczy *c*; 2) ton *c'* — oktawa jednokreślna tonu zasadniczego *c* o liczbie drgań dwa razy większej; 3) ton *g'* — kwinta jednokreślna o liczbie drgań trzy razy większej; 4) ton *c''* — oktawa dwukreślna o liczbie drgań 4 razy większej; 5) ton *e''* — tercja w oktawie dwukreślnej o liczbie drgań 5 razy większej, aniżeli liczba drgań tonu zasadniczego i t. d., i t. d. W ten sposób znajdywanie nadtonów harmonicznych dla danego zasadniczego nie przedstawia najmniejszej trudności, a tem samem i znajdywanie nadtonów wspólnych dwóm lub większej ilości dźwięków. Równie łatwe będzie zadanie dualne (dwoiste) do poprzedniego, polegające na znalezieniu dźwięków, zawierających dane tony w charakterze nadtonów.

Weźmy najprostszy przypadek, a więc dotyczący tylko dwóch tonów (dwudźwięk). Wobec tego że harmoniczne własności tonów nie zależą od ich wysokości (częstości) bezwzględnych, lecz tylko od ich stosunku, od interwału, który tworzą, więc zawsze będziemy mogli tutaj wyrażać zespoły tonów w postaci liczb całkowitych względnie pierwszych, t. j. takich, które nie mają innego wspólnego dzielnika prócz jedności.

Weźmy np. dwa tony *c* i *g*, t. j. tony, stanowiące interwał kwinty, a więc takie, których częstości są względem siebie w stosunku $1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$, i poszukajmy: 1) tonów, w których skład wchodzą tony *c* i *g*, jako nadtony (tony górne), i 2) tonów, będących wspólnemi nadtonami (tonami górnemi) tonów *c* i *g*.

Co do 1) kwestja natychmiast się rozwiązuje, skoro tylko uświadomimy sobie, że *2* i *3* są obie wielokrotnościami *1*, a więc jej tonami częściowemi i nadtonami, nie są zaś obie wielokrotnościami (nadtonami) żadnego tonu, leżącego między *1* i *2*. Będąc jednakże wielokrotnościami *1*, są tem samem wielokrotnościami $1/2$, $1/3$, $1/4$ i t. d. (harmonische Untertöne Helmholtza). Jednakże ten szereg podtonów *1* bliżej nas teraz obchodzić nie będzie; ważny dla nas będzie przedewszystkiem ton najwyższy[1]) z wszystkich tych, w których skład wchodzą nasze tony o częstościach względnych *2* i *3* jako nadtony, a tym tonem, jak widzieliśmy, jest ton *1* (a więc oktawa dolna tonu *c* czyli ton *C*). Jest to największy wspólny dzielnik naszych tonów (mówimy tak w skrócie, w istocie rzeczy: ton o częstości przedstawiającej największy wspólny dzielnik liczb, wyrażających częstości względne naszych tonów). I o ile tylko częstości tonów będą wyrażone przez liczby względnie pierwsze, zawsze najwyższym tonem, zawierającym dane tony, jako nadtony, będzie ton o częstości względnej *1*, albowiem częstości danych tonów, wyrażone przez liczby względnie pierwsze, mogą być, jako takie, wielokrotnościami tylko *1*.

Co do 2) postępujemy w sposób następujący. Wypisujemy szereg tonów częściowych (poczynając od drugiego będą to nadtony) dla naszych danych tonów *c*, *g* o częstościach względnych *2* i *3*.

---

[1]) Zwracamy tu jeszcze tylko uwagę na to, że ten ton najwyższy (*1*) zawiera się w każdym z innych tonów ($1/2$, $1/3$ i t. d.), w których skład wchodzą nasze tony.

Szereg ten dla *c* = *2* będzie: *2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18*...
Szereg ten dla g = *3* będzie: *3, 6, 9, 12, 15, 18*...

Znajdujemy natychmiast wspólne nadtony dla naszych tonów; będzie to przedewszystkiem ton o częstości względnej *6*, następnie ton *12*, ton *18* i t. d. Zwracamy uwagę tylko na najniższy z tych nadtonów, którym będzie ton *6*, a więc oktawa górna tonu *g*, czyli ton *g'* (dalsze nadtony, wspólne naszym tonom, a będące nadtonami zawartemi w tonie *6*, obchodzić nas tu specjalnie nie będą). Jest to — jak widzimy — najmniejsza wielokrotna częstości naszych tonów, która w przypadku liczb względnie pierwszych sprowadza się do ich iloczynu. Mając dwa tony, których częstości wyrażone są przez liczby względnie pierwsze, natychmiast odnajdujemy liczbę porządkową najniższego wspólnego im nadtonu, np. jeżeli te częstości są *2* i *3*, to będzie to trzeci ton częściowy tonu *2* i drugi ton częściowy tonu *3*. I wogóle, jeżeli będą to tony o częstościach względnych *m* i *n*, to będzie to *n*-ty ton częściowy tonu *m i m*-ty ton częściowy tonu *n*.

Teraz już bardzo łatwo i szybko znajdziemy interesujące nas obecnie tony w przypadku większej liczby tonów, których częstości będą dane w liczbach całkowitych. Weźmy np. jakiś trójdźwięk, choćby akord dur, składający się z tonu zasadniczego, jego tercji wielkiej i kwinty *(c - e - g)*, a więc z tonów o częstościach w stosunku $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6$. Wtedy najwyższym z tonów, zawierających tony naszego akordu, będzie ton = *1* ($=C_1$), t. j. ton, którego częstość drgań będzie największym wspólnym dzielnikiem naszych tonów, najniższym zaś z nadtonów, wspólnych naszym tonom, będzie ton o częstości drgań, wyrażonej przez najmniejszą wielokrotną tych tonów, t. j. ton $= 60$ $(= h''')$. Albo też weźmy akord moll *(c-es-g)*, składający się z tonu zasadniczego, małej tercji i kwinty, a więc z tonów, będących w stosunku $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} =$ $= 10 : 12 : 15$. Wszystkie tony tego akordu będą zawarte przedewszystkiem w tonie *1*, ich największym wspólnym dzielniku (tutaj będzie to ton *As,,,*), z drugiej zaś strony wszystkie one będą zawierały, jako pierwszy wspólny nadton, ton *g''* $= 60$, będący najmniejszą wspólną wielokrotną tych tonów. Własność dwudźwięków i akordów, która polega na pokrewieństwie składających ich dźwięków („Klangverwandschaft" Helmholtza), płynącem z tego, że są one zawarte jako nadtony w tym samym dźwięku — Oettingen nazywa ich tonicznością (Tonizität). I dwoiście: tę własność dwudźwięków i akordów, która polega na pokrewieństwie składających ich dźwięków, wyrażającem się w posiadaniu tych samych nadtonów — Oettingen nazywa ich fonicznością (Phonizität). Odpowiednio do tego najwyższy z tonów, zawierających dane tony, nazywa on tonicznym tonem zasadniczym (tonischer Grundton) i dwoiście: najniższy z nadtonów, zawartych w danych tonach, nazywa on fonicznym nadtonem (phonischer Oberton) [1].

Rozpatrzyliśmy nieco bliżej podstawę systemu dualnego akustyki muzycznej. Zwróćmy teraz uwagę szczególną na istotę tych dwoistych (dualnych) względem siebie tonów: na toniczny ton zasadniczy (moglibyśmy powiedzieć: toniczny podton) i foniczny nadton. Toniczny ton zasadniczy zawiera w sobie dane tony, przytem jest to najwyższy w szeregu tonów, zawierających dane tony, a więc sam jest zawarty w każdym

[1]) „Harmoniesystem in dualer Entwickelung", str. 31, 32.

innym tonie, który zawiera dane tony. Foniczny zaś nadton jest tonem, zawartym w danych tonach, przytem jest to najniższy w szeregu tonów, zawartych w danych tonach, a więc sam zawiera w sobie każdy inny ton, w tonach tych zawarty (każdy inny nadton).

Wystarcza uświadomić sobie w ten sposób istotę tonicznego tonu zasadniczego i fonicznego nadtonu, aby w tej chwili zrozumieć, że mamy tu przed sobą ścisły odpowiednik sumy i iloczynu logicznego dwóch lub więcej elementów, i że dwoistość akustyczno-muzyczna tych tonów nie jest niczem innem, jak realizacją dwoistości logicznego dodawania i mnożenia. Przez sumę bowiem logiczną dwóch (lub więcej) pojęć rozumiemy przecież „pojęcie, zawierające każde z tych pojęć i zawarte we wszelkiem innem pojęciu, które zawiera każde z nich“; zaś przez iloczyn logiczny — „pojęcie, zawarte w każdem z tych pojęć i zawierające w sobie każde inne pojęcie, które jest zawarte w każdem z nich“ [1]).

Tę równoległość między elementami akustycznemi z jednej strony i logicznemi z drugiej przedstawia ad oculos poniższe zestawienie:

a) Przez „toniczny ton zasadniczy“ dwóch lub więcej danych tonów rozumiemy ton, zawierający każdy z danych tonów i zawarty we wszelkim innym tonie, który zawiera każdy z danych tonów.	Przez „sumę logiczną“ dwóch lub więcej danych pojęć rozumiemy pojęcie, zawierające każde z danych pojęć i zawarte we wszelkiem innem pojęciu, które zawiera każde z danych pojęć.

---

[1]) Por. Couturat „Algebra logiki“ (tł. polskie) 1918, str. 8.

Dualnie (dwoiście):	*Dualnie (dwoiście):*
b) Przez „foniczny nadton“ dwóch lub więcej danych tonów rozumiemy ton, zawarty w każdym z danych tonów i zawierający wszelki inny ton, który jest zawarty w każdym z danych tonów.	Przez „iloczyn logiczny“ dwóch lub więcej danych pojęć rozumiemy pojęcie, zawarte w każdem z danych pojęć i zawierające wszelkie inne pojęcie, które jest zawarte w każdem z danych pojęć.

Jak widzimy, wystarczy zamienić wyraz „ton“ na wyraz „pojęcie“ oraz wyrazy: „toniczny ton zasadniczy“ na „sumę logiczną“, zaś „foniczny nadton“ na „iloczyn logiczny“, ażeby przejść od dziedziny akustyczno-muzycznej do logicznej (mutatis mutandis również i odwrotnie). Możemy wobec tego „toniczny ton zasadniczy“ nazwać „sumą logiczną“ lub bardziej akustycznie: „sumą harmoniczną“ dwóch lub więcej tonów, zaś „foniczny nadton“ — iloczynem logicznym“ lub „iloczynem harmonicznym“ tych tonów. Odpowiednio do tego mówić możemy o dwóch podstawowych dwoistych działaniach akustycznych, o „dodawaniu harmonicznem“ (+) i „mnożeniu harmonicznem“ (×), polegających na wyznaczaniu „harmonicznej sumy“ i „harmonicznego iloczynu“ tonów, t. j. tonicznego tonu zasadniczego i fonicznego nadtonu.

Powyżej wykazana przez nas najściślejsza odpowiedniość, zachodząca między tonicznym tonem zasadniczym i fonicznym nadtonem z jednej strony, zaś sumą logiczną i iloczynem logicznym z drugiej strony, manifestuje się wyraźnie w ich odpowiednikach arytmetycznych. Dawno już zauważono (J. Cantor, Dedekind) najbliższe pokrewieństwo, zachodzące między wspomnianemi elementami logicznemi i elementami arytmetycznemi: najmniejszą wspólną wielokrotnością i największym wspólnym dzielnikiem. Otóż — jak pamiętamy — ta odpowiedniość również zachodzi między naszemi elementami akustycznemi i temiż elementami arytmetycznemi. Tylko że „sumie harmonicznej“ („tonowi zasadniczemu“ Oettingena) odpowiada tu nie najmniejsza wspólna wielokrotna, lecz największy wspólny dzielnik, zaś „iloczynowi harmonicznemu“ („nadtonowi fonicznemu“) nie największy wspólny dzielnik, lecz najmniejsza wspólna wielokrotna. Jest to najzupełniej zrozumiałe i zgodne z naturą rozpatrywanych elementów, albowiem nadton foniczny, jako nadton, ton górny, posiada wysokość (częstość) wyższą od tonów, dla których jest wspólnym nadtonem, jest ich wspólną wielokrotnością, i dlatego też musi mu odpowiadać liczba wyższa, aniżeli tym tonom, a więc nie ich wspólny dzielnik, lecz ich najmniejsza wspólna wielokrotność [1]).

Odkrywszy w ten sposób najściślejszą odpowiedniość podstawowych dualnych działań i elementów w dziedzinie akustyki i logiki, możemy teraz posunąć się dalej i, starając się odnaleźć dalszą tożsamość struktur w tych dziedzinach, dążyć do zbudowania logiki dźwięków.

Przedewszystkiem wprowadzimy do dziedziny akustycznej ścisłe pojęcie zawierania się. Jest ono w algebrze logiki związane z działaniem dodawania i mnożenia logicznego. Wobec tego zaś, że te działania znajdują — jak widzieliśmy — do-

---

[1]) Sprawa przedstawiałaby się odwrotnie, gdybyśmy tony charakteryzowali nie przez ich wysokość (częstość drgań), lecz przez odwrotność tej częstości — okres drgania lub przez długość fali, proporcjonalną do okresu drgania. Możnaby również przywrócić odpowiedniość Cantora-Dedekinda między elementami logicznemi i arytmetycznemi w ten sposób, że częstość tonu, zawierającego w sobie tony składowe, rozumielibyśmy jako iloczyn harmoniczny częstości tych tonów, nie zaś ich sumę.

równaną realizację w dziedzinie akustycznej, więc i logiczne pojęcie zawierania się ($<$) również znajdzie w tej dziedzinie swe wierne odbicie.

Jak wiadomo (por. wzór I^a na str. 13), w logice twierdzenie, że $b < a$ jest równoważne twierdzeniu, że $a = a + b$ $[b < a = (a = a + b)]$[1]).

Odpowiednio do tego i w dziedzinie akustycznej musimy przy określeniu zawierania się tonów oprzeć się o odkryte już tam działanie dodawania (wzgl. mnożenia) i powiedzieć:

Ton o częstości drgań b jest zawarty w tonie o częstości drgań a (jest tonem składowym tonu a), znaczy to, że suma harmoniczna tych tonów jest tonem o częstości drgań a.

Weźmy np. dwa tony, stanowiące interwał oktawy, np. tony C $(= 1)$ i c $(= 2)$. Wiemy, że $c < C$, gdyż ton c jest drugim tonem składowym (a pierwszym nadtonem) dźwięku C. Łatwo sprawdzić, że istotnie $C + c = C$. Sumą bowiem harmoniczną $C + c$ jest — jak wiemy — ton o częstości drgań równej największemu wspólnemu dzielnikowi częstości drgań tonów C i c, a więc w danym przypadku ton o częstości drgań $= 1$, czyli właśnie dźwięk C.

Podobnie łatwo sprawdzić w dziedzinie akustycznej oczywistą zasadę logiczną, głoszącą, że wszelki element logiczny zawarty jest w sumie logicznej, której jest składnikiem, i dualnie: wszelki iloczyn logiczny zawarty jest w każdym ze swych czynników (por. wzory 10^a i 10^b na str. 31):

$$a < a + b \text{ i } ab < a \text{ (oraz } b < a + b \text{ i } ab < b).$$

W dziedzinie akustycznej zasada ta będzie głosiła:

---

[1]) W rozprawie p. t. „Sąd a konsonans" („Polskie Archiwum Psychologji t. V, 1932, Nr. 1) wykazujemy znaczenie tego wzoru dla teorji sądu i akustyczno-muzycznego konsonansu.

Wszelki ton zawarty jest w tonie, będącym sumą harmoniczną, której jest składnikiem, i dualnie: wszelki iloczyn harmoniczny zawarty jest w tonie, który jest jego czynnikiem.

Weźmy np. dwa tony, stanowiące interwał kwinty, np. *c* (= *2)* i *g* (= *3)*. Wtedy ich sumą harmoniczną będzie dźwięk *C* (= *1)*, zaś ich iloczynem harmonicznym dźwięk *g'* (= *6)*. I, istotnie, wtedy $c < C$ oraz $g' < c$, albowiem *c* (= *2)* jest wielokrotnością *C* (= *1)*, zaś *g'* (= *6)* jest wielokrotnością *c* (= *2)*.

Przechodzimy obecnie do działania logicznego negacji (przeczenia) i w związku z tem do wprowadzenia do dziedziny akustycznej elementów negatywnych. Jeżeli, mianowicie, mamy pewien ton, np. ton o względnej częstości drgań = *2*, a więc będący oktawą górną tonu zasadniczego (= *1)*, to biorąc oktawę dolną tego zasadniczego tonu, oktawę więc w odwrotnym, niż pierwsza, kierunku, otrzymamy ton o względnej częstości drgań = $\frac{1}{2}$, i ten właśnie ton, jako odwrotność tonu o częstości drgań = *2*, będzie pełnił w akustyce rolę tonu negatywnego, odwrotnego (ogólniej: przeciwstawnego) w stosunku do dźwięku = *2* [1]). Przypuszczenie to potwierdza się istotnie, albowiem t. zw. wzory de Morgana, dotyczące działania negacji logicznej, znajdują zastosowanie w akustyce, przy tak właśnie pojętych negatywnych elementach akustycznych.

Przyjrzymy się temu nieco bliżej.

Weźmy linję prostą i wyznaczmy na niej w postaci punktu *1* (jednostka arytmetyczna) ton zasadniczy (właściwie: jego wysokość wzgl. częstość drgań), poza tem jeszcze na tej pro-

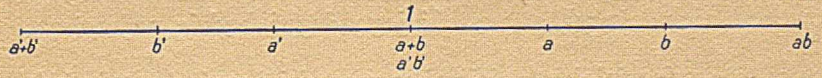
---

[1]) Jak widać z powyższego, szereg tonów negatywnych nie jest niczem innem, jak szeregiem podtonów tonu zasadniczego (por. str. 165).

stej dwa inne tony a i b, składowe tonu 1, a więc o częstościach, będącemi wielokrotnościami 1, oraz dwa tony, będące ich odwrotnościami (negacjami), a także sumy i iloczyny harmoniczne tych pozytywnych i negatywnych tonów. Otrzymamy wtedy następujący układ tonów (por. rys. 14):

Rys. 14.

Ton (o częstości) $a + b$ będzie zawsze zawierał się w tonie (o częstości) $a'b'$ $(a + b < a'b')$, albowiem będzie zawierał się w tonie 1 (będzie wielokrotnością tonu 1), ten zaś będzie zawierał się w tonie $a'b'$, którego częstość drgań będzie wyrażona przez ułamek właściwy. W przypadku, gdy tony a i b będą wyrażone przez liczby względnie pierwsze, tony $a + b$ i $a' b'$ będą się wyrażały przez 1 (jednostkę) i będą w niej koincydowały. Wtedy mieć będziemy układ poniższy (por. rys. 15).



Rys. 15.

Weźmy np. dwa tony o częstościach drgań, wyrażonych przez liczby względnie pierwsze: a $(= 2)$ i b $(= 3)$. Mają one pierwszy wspólny nadton harmoniczny, to znaczy iloczyn harmoniczny ab $(= 6)$, który właśnie, jako nadton, ton górny, posiada, oczywiście, częstość drgań (wysokość) większą od dźwięków a i b i leży — odpowiednio do tego — na diagramacie 15 bardziej od nich na prawo. Sumą zaś harmoniczną tych tonów będzie ton $a + b$, ton od nich niższy, ten sam ton $= 1$ dla jakichkolwiek tonów a i b, byleby wyrażonych przez liczby całkowite względnie pierwsze. Przechodzimy teraz do tonów negatywnych $a' \left(= \frac{1}{2}\right)$ i $b' \left(= \frac{1}{3}\right)$. Będą to tak zwane podtony tonu zasadniczego $(= 1)$, t. j. takie tony, których wspólnym nadtonem będzie ton zasadniczy $(= 1)$. I rzeczywiście ton $a' = \frac{1}{2}$ ma już ton 1, jako pierwszy swój nadton $\left(\frac{1}{2} \cdot 2 = 1\right)$, ton zaś $b' = \frac{1}{3}$ ma ten ton 1, jako swój drugi nadton $\left(\frac{1}{3} \cdot 3 = 1\right)$. A więc iloczynem harmonicznym tych negatywnych tonów $(a'b')$ będzie ton od nich wyższy, przytem zawsze ten sam ton $1 \left(\frac{1}{1}\right)$ dla jakichkolwiek tonów a' i b', byleby wyrażonych przez ułamki typu $\frac{1}{n}$, gdzie n liczby całkowite względnie pierwsze. Jeżeli teraz utworzymy sumę harmoniczną tych tonów negatywnych a' i b', to otrzymamy ton $a' + b'$, który będzie niższy od tych tonów (bardziej więc na lewo od nich leżący), a częstość jego drgań będzie najwyższą z tych, których wielokrotnościami są częstości drgań $a' \left(= \frac{1}{2}\right)$ i $b' \left(= \frac{1}{3}\right)$. Takim tonem będzie tu ton $a' + b' = \frac{1}{6}$ (dźwięk $a' = \frac{1}{6} . 3$, dźwięk $b' = \frac{1}{6} . 2$).

I oto tutaj widzimy, że w dziedzinie akustycznej znajdują realizację wzory de Morgana (por. str. 28), dotyczące negacji, przedewszystkiem wzór: $(ab)' = a' + b'$, albowiem istotnie negacją (odwrotnością) tonu ab $(= 6)$ jest ton $a' + b' \left(= \frac{1}{6}\right)$.

Podobnie sprawdza się tu inny wzór de Morgana: $(a+b)' = a'b'$, albowiem negacją (odwrotnością) tonu $a+b$ $(= 1)$ jest istotnie ton $a'b'$ $(= 1)$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej stosunkom, które łączą pozytywne elementy akustyczne z negatywnemi. Otóż spostrzegamy tu natychmiast pewną swoistość, polegającą na tem, że wszelki element akustyczny pozytywny zawiera się w swej negacji:

$$a < a'$$ [1]),

wobec tego że wszelka liczba całkowita jest wielokrotnością swej odwrotności. Co więcej, nietylko $a < a'$ i $b < b'$, lecz wszelki wogóle ton negatywny naszego szeregu (rys. 14, 15) zawiera w sobie wszelki ton pozytywny, wobec tego że zawiera w sobie ton *1*, który znów zawiera w sobie wszelki ton pozytywny. Nierówność $a < a'$ jest, jak wiadomo (por. wzór I na str. 29), równoważna z jednej strony równości $a = aa'$, z drugiej zaś równości $a' = a + a'$ — i obie te równości możemy natychmiast sprawdzić w dziedzinie tonów przy zastosowaniu arytmetyczno-akustycznych odpowiedników elementów i działań logicznych.

Obecnie, po wprowadzeniu do dziedziny tonów i nadtonów odpowiedników działań logicznych dodawania i mnożenia, stosunku logicznego zawierania się oraz elementów negatywnych i po stwierdzeniu pewnych cech swoistych, charakteryzujących stosunki akustyczne elementów pozytywnych i negatywnych, możemy już przystąpić do systematycznej budowy matematycznej logiki tonów harmonicznych.

* *
*

[1]) W algebrze logiki wzór ten stosuje się do elementów negatywnych granicznych, mianowicie do zera logicznego i jedności logicznej ($0 < 1$). Paradoksalność wzorów takich, jak: $0 < 1$ lub $a < a'$ zostaje usunięta, gdy pamiętamy, że nie wszelka negacja jest prywacją pozytywnego elementu, a więc czemś istotnie z nim sprzecznem (por. rozdział VII).

System logiki tonów harmonicznych będzie, jak już wiemy, w jednym punkcie różnił się zasadniczo od logiki pojęć zwykłych (będzie natomiast zgodny z logiką pojęć granicznych, por. odnośnik na str. poprz.). Punktem tym będzie twierdzenie, orzekające, że wszelki element pozytywny zawiera się, jest składnikiem elementu negatywnego (odwrotnego). W innych punktach logika tonów harmonicznych będzie zgodna z logiką pojęć zwykłych, tak że budując system logiki akustycznej, możemy oprzeć się na układzie pewników algebry logiki, wprowadzając odpowiednie modyfikacje. Za podstawę bierzemy tu system pewników logiki algebraicznej, którym operowaliśmy dotychczas, przyczem wprowadzamy wspomniane wyżej modyfikacje, dotyczące elementów negatywnych [1]).

Pewniki logiki tonów harmonicznych.

1a) $a<a+b$ 1b) $ab<a$ (zasada uproszczenia)
2a) $a+b=b+a$ 2b) $ab=ba$ (zasada przemienności)
3a) $a+bc=(a+b)(a+c)$ 3b) $a(b+c)=ab+ac$ (zasada rozdzielności)
4) $(a+b)'=a'b'$ (zasada de Morgana negacji sumy)
5a) $a+a'=a'$ 5b) $aa'=a$ [2])
6) $(a')'=a$ (zasada podwójnej negacji)
I) $b<a=(a=a+b)$ (określenie zawierania się)
II) $(b=a)=(b<a)+(a<b)$ (określenie równoważności)

Widzieliśmy już na str. 171—175, że zasady 1, 4, 5 oraz I są zasadami, panującemi w dziedzinie tonów harmonicznych.

[1]) Bardzo być może, że poniższy system pewników da się jeszcze uprościć — dla nas jednak sprawa ta nie posiada tu zasadniczego znaczenia.

[2]) Te właśnie zasady (5) odróżniają logikę tonów harmonicznych od logiki zwykłych pojęć, w której $a+a'=1$ i $a.a'=0$. Odpowiadają one natomiast zasadom pojęć granicznych: $0+1=1$ i $0.1=0$. W tomie III bliżej rozpatrzymy, jakie znaczenie posiada ten fakt istnienia logiki, odbiegającej w pewnym punkcie od systemu logiki zwykłej.

Ważność w tej dziedzinie zasad 2 i 6 oraz II nie wymaga bliższych wyjaśnień. Co zaś dotyczy zasady 3 (zasady rozdzielności), którą zresztą niżej rozpatrzymy bardziej szczegółowo, to jej realizacja w dziedzinie akustycznej również się potwierdza przy zastosowaniu odpowiedników arytmetyczno-akustycznych działań dodawania i mnożenia. Wobec tego że w ten sposób dziedzina tonów harmonicznych realizuje pewniki wyżej podane, więc realizować będzie również i twierdzenia z pewników tych wynikające, przyczem wszystkie te twierdzenia — z wyjątkiem tych, które opierają się o pewniki 5 — będą z natury rzeczy twierdzeniami formalnie identycznemi z twierdzeniami zwykłej algebry logiki. Poniżej podajemy szereg ważniejszych twierdzeń logiki tonów harmonicznych.

7) $a+a=a$ (prawo tautologji dla sumy elementów)
Dowód: 5b, 1b, I

8a) $a+ab=a$ 8b) $a(a+b)=a$ (prawo absorbcji)
Dow. 1b, I. Dow. 7, 3a, 8a.

9) $b<a=(b=ab)$ (pochodne określenie zawierania się)
Dow. I, 8a, 8b, II.

10) $aa=a$ (prawo tautologji dla iloczynu elementów)
Dow. 7, I, 9.

11) $a<a'$ (prawo zawier. się elem. pozytywn. w jego negacji)
Dow. 5a. I.

12) $(a<c)<[(a<b)+(b<c)]$ (prawo sylogizmu)
Dow. 9.

13) $a<b'$
Dow. 1a, 4, 11, 1b, 12.

14a) $b'=a+b'$ 14b) $a=ab'$
Dow. 13, I. Dow.: 13, 9.

15) $(a+b)(a+c)(b+c)=ab+ac+bc$
Dow. 3a, 3b, 2b, 10, 7.

* *
*

Z powyżej podanych praw, dotyczących tonów harmonicznych, których ilość zresztą możnaby powiększyć kilkakrotnie, wybierzemy parę przykładów i wyrazimy je explicite w terminach fizycznych. Pozwoli nam to bliżej wniknąć w istotę otrzymanych rezultatów.

Ażeby z języka logiki przejść na język akustyki, posiłkować się będziemy wyżej ustanowionem odwzorowaniem:

$a+b$ — suma harmoniczna tonów (o częstości) a i b = toniczny ton zasadniczy tonów a i b = najwyższy z tonów, zawierających tony a i b (jako swe nadtony).

$a\times b$ — iloczyn harmoniczny tonów (o częstości) a i b = foniczny nadton tonów a i b = najniższy z tonów składowych (nadtonów) zawarty w tonach a i b.

a' — negacja (odwrotność) tonu (o częstości) a = ton symetryczny (dolny) względem tonu (górnego) a.

$b<a$ — ton (o częstości) b zawiera się w tonie (o częstości) a = ton b jest tonem składowym (nadtonem) tonu a.

Jeżeli do powyższego odwzorowania akustycznego elementów logicznych dodamy jeszcze odwzorowanie arytmetyczne elementów akustycznych, wtedy otrzymamy taki słowniczek:

Elementy logiczne	*Elementy akustyczne*	*Elementy arytmetyczne*
$a+b$	Suma harmoniczna tonów (o częstości) a i b	Największy wspólny dzielnik liczb, wyrażających częstości a i b

$a \times b$	Iloczyn harmoniczny tonów (o częstości) a i b	Najmniejsza wspólna wielokr. liczb, wyrażających częstości a i b
a'	Negacja tonów (o częstości) a	$\frac{1}{a}$
$b<a$	b jest nadtonem tonu a	b jest wielokrotnością[1]) a

Weźmy, jako przykład, dualne prawo rozdzielności (dystrybucji), figurujące wśród pewników logiki tonów pod p. 3. W postaci formalno-logicznej wyraża się ono:

1) $a+bc = (a+b)(a+c)$, 2) $a(b+c) = ab+ac$

Po przetłomaczeniu przy pomocy powyższego słowniczka na język akustyki będzie ono głosiło:

1) Częstość najwyższego tonu (najwyższego podtonu), zawierającego: ton o częstości a oraz najniższy z nadtonów, zawarty w tonach o częstości b i c, jest ta sama, co częstość najniższego tonu, zawartego: w najwyższym tonie, zawierającym tony o częstości a i b, oraz w najwyższym tonie, zawierającym tony o częstości a i c.

   Krócej: Częstość tonu, będącego sumą harmoniczną tonu o częstości a oraz iloczynu harmonicznego tonów o częstości b i c, jest ta sama, co częstość tonu, będącego iloczynem harmonicznym z sumy harmonicznej tonów o częstości a i b przez sumę harmoniczną tonów o częstości a i c.

2) Częstość najniższego tonu (najniższego nadtonu), zawarte-

---

[1]) Wyrazu „wielokrotność" używamy tu zawsze w znaczeniu „wielokrotność całkowita".

go: w tonie o częstości *a* oraz w najwyższym (pod)tonie, zawierającym tony o częstości *b* i *c*, jest ta sama, co częstość najwyższego tonu, zawierającego: najniższy ton, zawarty w tonach o częstości *a* i *b*, oraz najniższy ton, zawarty w tonach o częstości *a* i *c*.

Krócej: Częstość tonu, będącego iloczynem harmonicznym tonu o częstości *a* przez sumę harmoniczną tonów o częstości *b* i *c*, jest ta sama, co częstość tonu, będącego sumą harmoniczną iloczynu harmonicznego tonów o częstości *a* i *b* i iloczynu harmonicznego tonów o częstości *a* i *c*.

Jedno z tych dualnych twierdzeń akustycznych daje się otrzymać z drugiego przez zamianę wyrazów:

„najwyższy" na „najniższy"
„podton" na „nadton"
„zawierający" na „zawarty"
„suma harmoniczna" na „iloczyn harmoniczny" —
i vice versa.

Jeżeli zaś teraz z dziedziny akustycznej przejdziemy przy pomocy podanego wyżej słownika do dziedziny liczb, wyrażających w mowie będące częstości tonów, to otrzymamy dualne twierdzenia arytmetyczne, które równocześnie będą odwzorowaniem logicznych zasad rozdzielności:

1) Największy wspólny dzielnik liczby *a* oraz najmniejszej wspólnej wielokrotnej liczb *b* i *c* jest równy najmniejszej wspólnej wielokrotnej największego wspólnego dzielnika liczb *a* i *b* oraz największego wspólnego dzielnika liczb *a* i *c*.

2) Najmniejsza wspólna wielokrotna liczby *a* oraz największego wspólnego dzielnika liczb *b* i *c* jest równa największe-

mu wspólnemu dzielnikowi najmniejszej wielokrotnej liczb a i b oraz najmniejszej wielokrotnej liczb a i c.

Jako drugi przykład twierdzeń logiki akustycznej weźmiemy twierdzenie, będące odwzorowaniem zasady logicznej (p. 15), głoszącej:

$$(a+b)(a+c)(b+c) = ab+ac+bc.$$

Jest to twierdzenie logiczne dualne względem siebie samego; druga część równości jest tu dualna względem części pierwszej, i odwrotnie.

Przy użyciu naszego słowniczka logiczno-akustycznego otrzymujemy (w krótkiem sformułowaniu) następujące dualne względem siebie samego prawo akustyczne:

Częstość tonu, będącego iloczynem harmonicznym trzech tonów, przedstawiających sumy harmoniczne tonów o częstości a i b, a i c oraz b i c, jest ta sama, co częstość tonu, będącego sumą harmoniczną trzech tonów, przedstawiających iloczyny harmoniczne tonów o częstości a i b, a i c oraz b i c.

Jeżeli zaś teraz przejdziemy do odwzorowania liczbowego tych stosunków akustycznych, to otrzymamy interesujące, dualne względem siebie samego twierdzenie arytmetyczne, które równocześnie jest odwzorowaniem liczbowem zasady logicznej: $(a+b)(a+c)(b+c) = ab+ac+bc$. To twierdzenie arytmetyczne będzie brzmiało:

Najmniejsza wspólna wielokrotna trzech największych wspólnych dzielników z liczb: a i b, a i c oraz b i c jest równa największemu wspólnemu dzielnikowi trzech najmniejszych wspólnych wielokrotnych z tych samych liczb.

Wkońcu jeszcze jedna uwaga natury ogólniejszej. Od czasów Ohma wiemy, że ucho nasze rozkłada przy pomocy organu Cortiego dochodzący je dźwięk na tony proste, które odpowiadać będą tonom fizycznym o częstościach, proporcjonalnych do szeregu liczb naturalnych. W ten sposób mamy tu stwierdzony dokładny paralelizm między analizą (i syntezą) dźwięków psychicznych i fizycznych i możemy formuły logiki tonów zastosować również do akustyki psychologicznej (por. tom I, str. 167, 168).

W ten sposób zasiąg stosowalności metody logicznej, metody jakościowo-matematycznej okazuje się w zasadzie rozleglejszy, aniżeli matematyki ilościowej, obejmuje bowiem nietylko świat fizyczny, lecz i psychiczny. A równocześnie przekonywamy się, jak daleko odbiegliśmy od czasów, kiedy to Whitehead, autor „A treatise of Universal Algebra" (1898), mógł słusznie twierdzić, że logika pojęć jest „the only known member of the non-numerical genus of universal algebra". Nietylko bowiem widzimy teraz tę algebrę jakościową zastosowaną do elementów geometrycznych (logika geometryczna), lecz widzimy ją również w świecie realnym, fizycznym i psychicznym, jako wyrazicielkę tej logiki, która panuje w świecie tonów harmonicznych [1]).

---

[1]) Nietylko w świecie dźwięków, lecz i w dziedzinie światła i barw przejawia się ta logika negacji (dopełnień) i dualności. Spraw tych tutaj jednak już nie rozpatrujemy.

DODATKI.

Dodatek A.

SĄDY W LOGICE GEOMETRYCZNO-ARCHITEKTONICZNEJ.

Przechodzimy obecnie do krótkiego rozpatrzenia kwestji, w jaki sposób wyrażają się sądy w logice geometryczno-architektonicznej. Rachunkiem sądów, jako całości, interesować się tu nie będziemy, zwrócimy się natomiast do sądów rozczłonkowanych już na podmiot i orzeczenie i zobaczymy, jak się one wyrażają w logice geometrycznej. Weźmy nasamprzód sąd powszechny twierdzący: „wszystkie *a* są *b*" i szukajmy jego wyrazu logicznego i geometrycznego. Otóż wiemy, że wyrazem symbolicznym tego sądu w logice algebraicznej będzie wyrażenie: $a'b$, pojęte jako orzeczenie do podmiotu „wszelki przedmiot" ($a'b = 0$). Istotnie sąd: „wszelki przedmiot jest albo a', albo *b*" jest równoważny sądowi „wszystkie *a* są *b*", albowiem sąd „wszelki przedmiot jest albo a', albo *b*" jest równoważny sądowi „jeżeli coś nie jest a', to jest *b*" = „jeżeli coś jest *a*, to jest *b*", to zaś znaczy właśnie, że „wszystkie *a* są *b*". Np. sąd: wszelki przedmiot jest to albo nie-człowiek albo śmiertelny" jest równoważny sądowi: „jeżeli coś jest człowiekiem, to jest śmiertelne", a więc i sądowi: „wszelki człowiek jest śmiertelny". Sąd więc powszechny „wszystkie *a* są *b*" wyraża logika algebraiczna zapomocą wzoru $a'b = 0$ lub wprost zapomocą wyrazu $a'b$, pojętego jako orzeczenie dla wszelkiego podmiotu. Wobec tego zaś, że z punktu widzenia logiki treści orzeczenie b tego sądu zawiera się w podmiocie a, możemy sąd ten wyrazić również zapomocą wzoru: $b < a$ (który możemy czytać również: „z treści a wynika treść b", lub: „jeżeli a, to b") i w ten sposób otrzymujemy znaną już nam równoważność: $b < a = (a'b = 0)$, której obie strony wyrażają sąd „wszelkie a jest b".

W podobny sposób wyraża algebra logiki nietylko sąd E: „żadne a nie jest b" (= „wszelkie a jest b'") zapomocą wyrażenia: $a'b'$, lecz i dwa powszechne sądy o zaprzeczonym podmiocie (wprowadzone przez de Morgana): „wszelkie a' jest b" i „żadne a' nie jest b" (= wszelkie a' jest b'). Pierwszy z tych sądów (oznaczać go będziemy przez A_1) wyraża się zapomocą wyrażenia ab, drugi zaś (oznaczać go będziemy przez E_1) — zapomocą wzoru ab'.

Co dotyczy czterech sądów szczegółowych: „niektóre a są b" (I), „niektóre a są b'" (0), „niektóre a' są b" (I_1) i „niektóre a' są b'" (0_1) (dwa ostatnie wprowadzone zostały przez de Morgana), to otrzymamy natychmiast wyrażenia im odpowiadające, jeżeli uprzytomnimy sobie tylko, że:

Sąd I jest zaprzeczeniem (negacją) sądu E,
sąd 0 „ „ „ sądu A,
sąd I_1 „ „ „ sądu E_1,
i sąd 0_1 „ „ „ sądu A_1.

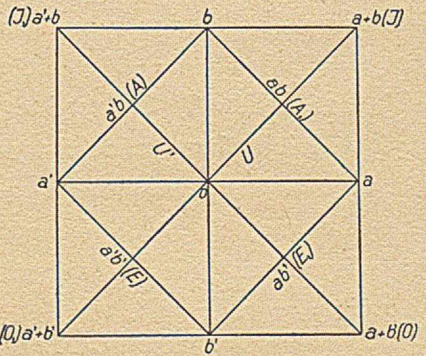
Stąd, stosując wzory de Morgana (por. str. 28), otrzymujemy następujące wyrażenia [1]) dla czterech sądów szczegółowych:

---

[1]) Wyrażenia te należy rozumieć, jako orzeczenia dla podmiotu: „niektóre przedmioty".

$$I = (a'b')' = a + b$$
$$0 = (a'b)' = a + b'$$
$$I_1 = (ab')' = a' + b$$
$$0_1 = (ab)' = a' + b'$$

Jak widzimy, sądy te rozmieszczają się niezwykle symetrycznie na naszym schemacie logiki dwuelementowej (patrz rys. 16): sądy powszechne zajmują cztery boki wewnętrznego kwadratu, sądy zaś szczegółowe cztery wierzchołki kwadratu zewnętrznego, przyczem sąd powszechny (prosta) i sąd szczegółowy (punkt), będący jego zaprzeczeniem, leżą w ćwiartkach



Rys. 16.

przeciwległych, np. sąd A i sąd 0.

Sądy arystotelesowskie: A, E i sprzeczne z niemi sądy 0, I zobrazowane są przez dwie proste, wychodzące z punktu a, i dwa punkty, leżące w ćwiartkach im przeciwległych. Orjentację w stosunkach między sądami bardzo ułatwia tu ta okoliczność, że śród czterech sądów, rozmieszczonych wzdłuż osi skośnych (I, A_1, E, 0_1 oraz I_1, A, E_1, 0), tylko dwa mogą być prawdziwe.

Tych 8 elementów nie wyczerpuje ogółu sądów logiki dwuwymiarowej. Zobaczymy, jakie to sądy reprezentowane są przez pozostałe elementy.

A więc nasamprzód, jaki to sąd jest reprezentowany przez element: $(a+b)(a'+b') = a'b+ab'$ oraz dwoisty doń i z nim sprzeczny element: $ab+a'b' = (a'+b)(a+b')$. Pierwszy z tych elementów jest połączeniem elementów $a'b$ i ab', t. zn. sądów $b < a$ (sąd A) i $a < b$ (sąd E_1), a więc w myśl definicji równoważności wyraża sąd: $a = b$, który jako połączenie sądów: „wszystkie a są b" i „wszystkie b są a" jest sądem: wszystkie a są wszystkiemi b" (= wszystkie a i tylko a są b"), czyli jest hamiltonowskim sądem U. Drugi z tych elementów [dwoista negacja pierwszego $= (a'+b)(a+b')$] jest połączeniem elementów ab i $a'b'$, t. zn. sądów $b < a'$ (sąd A_1) i $a' < b$ (sąd E), a więc w myśl definicji równoważności wyraża sąd $a' = b$ (czyli $a = b'$), a więc sąd: „wszystkie nie-a są wszystkiemi b" (wszystkie nie-a i tylko nie-a są b) lub równoważny z nim sąd: „wszystkie a są wszystkiemi „nie-b" (wszystkie a i tylko a są „nie-b"). Nazwijmy go sądem U'.

Jak widzimy na rys. 16, sąd $U = (a+b)(a'+b')$ wyraża się geometrycznie przez prostą $(a+b)(a'+b')$, t. j. jedną z osi skośnych, jedną z przekątnych zewnętrznego kwadratu. Podobnie sąd $U' = (a'+b)(a+b')$ wyraża się przez drugą oś skośną, drugą przekątną zewnętrznego kwadratu.

Przechodzimy teraz do czwórki elementów prostych (nie-złożonych): a, a', b, b'.

Analogicznie do tego, jak element $a'b$ oznaczał sąd: „wszelki przedmiot jest albo a' albo b", element a $(= a \,.\, 1)$ oznaczać będzie sąd: „wszelki przedmiot jest albo a, albo $a + a'$ (a więc również *a)*", czyli innemi słowy oznaczać będzie sąd: „wszelki przedmiot jest *a*". Znaczy to, że zakres klasy *a* jest maximum, a więc treść pojęcia — minimum. Podobne znaczenie mają elementy a' ($= a' . 1$), b ($= b . 1$) i b' ($= b' . 1$). Obrazem geometrycznym tej czwórki sądów są proste: a, a', b, b'.

Zachodzi teraz pytanie, jakie sądy wyrażać będą elementy dwoiste do wyżej rozpatrzonych, a więc do a, jako $a + 0$, do a', jako $a' + 0$, do b, jako $b + 0$, i do b', jako $b' + 0$? Otóż analogicznie do tego, jak element $a + b$ jest negacją sądu $a'b'$ („żadne *a* nie jest *b*") i jako taki oznacza sąd: „niektóre *a* są *b*", tak samo sąd $a + 0$ jest negacją sądu $a' . 1$ („żaden przedmiot nie jest *a*") i jako taki oznacza sąd: „niektóre przedmioty są *a*". Gdy więc sąd a' ($= a' . 1$) wyraża, że klasa *a* jest pusta — jego negacja, sąd z nim sprzeczny a ($= a + 0$) wyraża stan faktyczny, że „niektóre przedmioty są *a*", a więc że klasa *a* nie jest pusta, gdy natomiast sąd przeciwny sądowi a' ($= a' . 1$), t. j. sąd a ($= a . 1$) oznacza, jak wiemy, że „wszelki przedmiot jest *a*", a więc oznacza pełnię klasy *a*, to, że obejmuje ona wszystkie przedmioty, że ma maximum zakresu, że więc pojęcie *a* przedstawia minimum treści. Podobne znaczenie mają elementy a' ($= a' + 0$), b ($= b + 0$) i b' ($= b' + 0$). Obrazem geometrycznym tej czwórki sądów są punkty: a, a', b, b'.

Dla odróżnienia dwoistych sądów prostych dodamy im indeksy: sąd szczegółowy *a* oznaczymy przez a_0, sąd powszechny *a* przez a_1. Sąd a_0, stwierdzający, że „niektóre przedmioty są *a*", stwierdza innemi tylko słowy, że „przedmioty *a* istnieją", mamy więc w sądach prostych a_0, a'_0, b_0, b'_0 czwórkę sądów egzystencjalnych. Sąd zaś a_1, głoszący, że „wszelki przedmiot jest *a*", głosi tem samem, że do istoty wszelkiego przedmiotu należy cecha *a*, a więc obwieszcza powszechny, ontologiczny, transcendentalny charakter cechy *a*. Tę czwórkę dualnych sądów prostych: a_1, a'_1, b_1, b'_1 nazwiemy sądami ontologicznemi. Widzimy w ten sposób, że na płaszczyźnie logicznej, pomijając już elementy graniczne *0* i *1*, mamy oprócz 8 sądów de Morgana jeszcze sądy *U* i *U'* (= negację *U*) oraz dualne sądy proste: ontologiczne (powszechne) i egzystencjalne (szczegółowe).

Poruszymy tu jeszcze pokrótce sprawę dichotomji sądów, pomijając już zupełnie sprawę ich tetratomicznego podziału.

Otóż możemy mówić nietylko o dichotomji pojęć, lecz i sądów. Weźmy np. sądy: $a + 0$, $a + b$ i $a + b'$. Sąd $a + 0 = a_0$ (punkt *a*) jest to sąd: niektóre przedmioty są *a* = przedmioty *a* istnieją, i jako taki, jako sąd egzystencjalny, jest on sądem o treści niezróżnicowanej (niewyznaczonej) w stosunku do sądów $a + b$ i $a + b'$, które głoszą nietylko, że *a* istnieją, lecz że niektóre *a* są *b*, niektóre zaś *b'*. Sąd (egzystencjalny) a_0 różnicuje się tu, dzieli się na dwa sądy i jest tem, co mają one wspólnego z sobą („*a* istnieje“), co się przejawia dwojako, około czego one w swej konkretności jakgdyby oscylują $[a_0 = (a + b)(a + b')]$.

Przejdźmy teraz do sądów powszechnych, dwoistych względem poprzednich, a więc do sądów: $a \cdot 1$, ab, ab'. Sąd $a \cdot 1 = a_1$ (prosta *a*) jest to sąd: wszystkie przedmioty są *a* = żaden przedmiot nie jest *a'*. Otóż tę niemożliwość, sprzeczność przedmiotów *a'* możemy również wyrazić w sposób bardziej rozwinięty w postaci zespołu dwóch sądów powszechnych: „wszystkie *a'* są *b*“ (sąd *ab*) i „wszystkie *a'* są *b'* (sąd *ab'*), wyraźnie wskazujących w swym zespole, że żaden przedmiot (niesprzeczny) nie może być a'. Istotnie więc sąd ontologiczny $a . 1 = a_1$ jest tu całością, dającą się wyrazić dichotomicznie zapomocą sumy sądów *ab* i *ab'* $[a_1 = ab + ab']$ [1]).

---

[1]) Ograniczamy się tu do rozpatrzenia sądów w logice geometrycznej płaskiej (planilogice). Sprawę analogiczną sądów w logice trójwymiarowej (stereologice) pomijamy tu, zwracając tylko uwagę na to, że w stereologice mieć będziemy do czynienia z sądami o naturze bardziej złożonej, z sądami wyrażonemi zapomocą symbolów troistych: *abc*, $a+b+c$ i t. p. Będą to np. sądy o treści: „wszystkie $(ab)'$ są *c*" (abc) lub „niektóre $a+b$ są *c*" $(a+b+c)$ i t. p.

Dodatek B.

DUALNE RODZAJE WNIOSKOWANIA W LOGICE ARCHITEKTONICZNEJ [1]).

Zaczynamy od wnioskowania z analogji, od którego już łatwo następnie przejść możemy do wnioskowania indukcyjnego i dedukcyjnego. Przez I-y rodzaj wnioskowania z analogji pojmujemy wnioskowanie następującego typu. Pierwsza z przesłanek przypisuje gatunkowi *b* (wzgl. poszczególnemu przedmiotowi) pewną cechę czy zespół cech *P*, przytem stwierdza, że *P* przynależy gatunkowi *b*, już jako przedstawicielowi rodzaju *a*, że więc jest *P* niezależne od różnicy gatunkowej tego gatunku. Druga przesłanka stwierdza analogję (izokategorjalność) elementów *b* i *c* ze względu na rodzaj *a*, innemi słowy stwierdza, że nietylko *b*, lecz i *c* jest gatunkiem rodzaju *a*. (Tej właśnie drugiej przesłance, stwierdzającej istnienie analogji między elementami *b i c*, zawdzięcza wnioskowanie z analogji

[1]) Jak zobaczymy niżej, nietylko wnioski dedukcyjne, lecz również wnioski indukcyjne i z analogji są wnioskami ścisłemi, t. j. dającemi się uzasadnić na podstawie zasad formalnej logiki. A więc nie każdy ścisły wniosek jest wnioskiem dedukcyjnym (od ogółu do szczegółu), i w ramach ogólnego, rodzajowego pojęcia wnioskowania (ścisłego) należy odróżniać — według dawnego zwyczaju — poszczególne jego gatunki: dedukcję, indukcję, wnioskowanie z analogji. Z tych względów uważamy za wysoce niecelowe tworzenie rodzajowego pojęcia dedukcji, jako równoznacznika wszelkiego ścisłego wnioskowania.

swą nazwę). Oczywiście, jeżeli cecha P przynależy elementowi b już z tej racji, że jest on a, to przynależeć również musi wszelkiemu elementowi c, również będącemu a. Wnioskowanie to jest bezwzględnie ścisłe wobec tego, że przesłanka pierwsza nietylko stwierdza, że $P < b$, lecz również, że P zawiera się w b, jako w gatunku rodzaju a [1]). Możemy je przedstawić algebraicznie w sposób następujący:

I przesłanka: $P < ba$.

(P zawiera się w b, jako a, czyli: P zawiera się w tem, co jest wspólne b i a).

II przesłanka: $ba = ca = a$.

(Wobec tego że $a < b$ czyli $a = ba$ oraz $a < c$ czyli $a = ca$).

Wniosek: $P < ca$, a więc $P < c$.

Znaczy to: Jeżeli P jest cechą elementu b, jako gatunku rodzaju a, to jest również cechą elementu c, o ile c również jest gatunkiem rodzaju a.

Taka jest zasada pierwszego rodzaju wnioskowania z analogji; pozwala ona przenosić cechy, przynależne rodzajowi, z jednego gatunku danego rodzaju na inny gatunek tegoż rodzaju.

Otóż struktura formalna powyższej zasady wnioskowania z analogji, polegająca na zawieraniu się elementu P w iloczynie logicznym ba, nasuwa myśl, że istnieć może inny jeszcze rodzaj wnioskowania z analogji, rodzaj do powyższego dualny, w którego zasadzie występowałyby związki do poprzednich dualne, a więc zawieranie się sumy logicznej $b + a$ w elemencie dualnie odpowiadającym elementowi P. Ten dualny rodzaj

[1]) Materjalna prawdziwość tego twierdzenia i jej kryterja tutaj nas, oczywiście, nie interesują.

wnioskowania musiałby mieć jako przesłankę również fakt analogji dwóch elementów, analogji jednak odmiennego rodzaju, analogji dwoistej względem tej, którą widzieliśmy przy wnioskowaniu powyższem. Istotnie, jeżeli poprzednio mówiliśmy o dwóch elementach, jako analogicznych, gdy zawierały one w sobie wspólną kategorję, rodzaj (była to analogja gatunków), to teraz, dwoiście, mówić możemy o dwóch elementach analogicznych, jeżeli oba one są zawarte w tym samym elemencie, w tej samej całości (mamy tu analogję składników). Poprzednio elementy analogiczne spokrewnione były przez składnik wspólny, w nich zawarty, obecnie spokrewnione byłyby jako składniki tej samej całości, w której byłyby zawarte, tak że mielibyśmy zarówno $b < a$, jak i $c < a$, czyli $b + a = c + a = a$. Taka byłaby druga przesłanka drugiego (dualnego) rodzaju wnioskowania z analogji. Pierwsza zaś przesłanka tego wniosku stwierdzałaby, że jakiś podmiot S posiada cechę b, nie jako cechę oddzielną, niestowarzyszoną z innemi, lecz jako składnik większej całości, mianowicie zespołu (kompleksu) cech a; tak że w S zawarte jest nietylko b, lecz i $b + a$. Z tych przesłanek wynika już niewątpliwy, bezwzględnie ścisły wniosek, że S posiada również cechę c, albowiem posiada cechę b, jako składnik zespołu a, obejmującego również i c. Możemy to dwoiste wnioskowanie z analogji przedstawić algebraicznie w sposób następujący:

I przesłanka: $b + a < S$.

II przesłanka: $b + a = c + a = a$ (wobec tego że $b < a$ i $c < a$).

Wniosek: $c + a < S$, a więc i $c < S$.

Znaczy to: Jeżeli element S posiada cechę b, jako składnik całości (zespołu cech) *a*, to posiada również cechę *c*, o ile *c* również jest składnikiem całości *a*.

Taka jest zasada drugiego (dualnego) rodzaju wnioskowania z analogji; pozwala ona przechodzić w obrębie elementu, któremu przynależy pewien zespół cech, od jednego składnika danego zespołu do innego składnika tegoż zespołu.

Dwoistość tych dwóch rodzajów wnioskowania z analogji wystąpi specjalnie wyraźnie, jeżeli porównamy ich zasady.

Zasada I rodzaju wnioskowania z analogji	*Zasada II (dualnego) rodzaju wnioskowania z analogji*
Jeżeli *P* jest cechą elementu *b*, jako gatunku rodzaju *a*, to jest również cechą elementu *c*, o ile *c* również jest gatunkiem rodzaju *a*.	Jeżeli element *S* posiada cechę *b*, jako składnik całości *a*, to posiada również cechę *c*, o ile *c* również jest składnikiem całości *a*.

Jak widzimy, można przejść od jednej zasady do drugiej przez zamianę pojęć: „cecha“ na „element“ („substancja“), „być cechą“ na „posiadać cechę“, „rodzaj“ na „całość“, „gatunek“ na „składnik“ — i odwrotnie, przytem cecha *P* (praedicatum) przechodzi w element *S* (subjectum). Wraz z podstawową dwoistością ogólności i całości (por. str. 91), mnożenia i dodawania, jako przejścia od gatunków treściowych do rodzaju z jednej strony i przejścia od składników do całości z drugiej strony, występuje tu jeszcze dwoistość substancji i cechy, podmiotu i orzeczenia. Gatunki i rodzaje występują w charakterze nosicieli cech, w charakterze podmiotów, składniki i zespoły w charakterze samych cech, a więc orzeczeń.

Przechodzimy teraz do rozpatrzenia wnioskowania indukcyjnego, które w istocie rzeczy leży w postaci ukrytej, nierozwiniętej, u podstawy wnioskowania z analogji. Jeżeli tak jest, to wobec dwoistej natury wnioskowania z analogji należy się spodziewać ujawnienia również dwoistego rodzaju wnioskowania indukcyjnego. Przedewszystkiem jednak o indukcji, ukrytej w przesłankach wnioskowania z analogji. Mamy tu na myśli przesłankę pierwszą I-go rodzaju wnioskowania z analogji. Twierdzi ona nietylko, że cecha P przynależy gatunkowi b $(P < b)$, lecz że jest ona zależna tylko od cech rodzajowych tego gatunku, od tego, co ma on wspólnego z rodzajem (a), że więc przynależy mu, jako przedstawicielowi rodzaju a $(P < ba)$. Lecz w tem twierdzeniu mieści się już sposobem ukrytym przeniesienie cechy z gatunku na rodzaj, skoro bowiem twierdzimy, że cecha ta zawarta jest w gatunku b, jako przedstawicielu rodzaju a, to stwierdzamy innemi tylko słowy, zachowując jeszcze kontakt z gatunkiem b, że jest ona cechą, przynależną rodzajowi a. Skąd już krok formalny tylko dzieli nas od twierdzenia jawnie indukcyjnego $P < a$ $(P < ba;\ ba < a)$.

Otóż przesłanka pierwsza II-go rodzaju (dualnego) wnioskowania z analogji również — jak się tego należało spodziewać — przedstawia nam wynik wnioskowania indukcyjnego, niedoprowadzonego tylko do swej ostatecznej postaci. Twierdzi ona bowiem nietylko, że element S posiada cechę b $(b < S)$, lecz że ją posiada, jako stanowiącą składnik całości a, że posiada więc element S cały kompleks cech $b + a$ $(b + a < S)$. Lecz w tem twierdzeniu mieści się już sposobem ukrytym przypisanie elementowi S nietylko cechy składowej b, lecz całego ich zespołu a, przejście od składnika b do całości a, działanie dwoiste względem przejścia od gatunku do rodzaju. Skąd już krok formalny tylko dzieli nas od twierdzenia jawnie indukcyjnego $a < S$ $(b + a < S;\ a < b + a)$.

W ten sposób architektonika dualna świata logicznego doprowadziła nas do stwierdzenia istnienia drugiego (dualnego) rodzaju wnioskowania przez indukcję, które wznosi się tu nie od gatunku do rodzaju, jako podmiotów pewnej cechy, lecz dualnie: od cechy składowej do zespołu (całości) cech, jako orzeczeń pewnego elementu (substancji)[1].

Rozpatrzymy bliżej nieco zasady tych dwóch rodzajów wnioskowania indukcyjnego. Indukcja zwykła, uogólniająca (abstrahująca), wychodzi z przesłanki o posiadaniu przez element b cechy P ($P < b$). Następnie zaś zakłada[2], że, jeżeli chodzi o cechę P, element b wchodzi tu w grę tylko jako przedstawiciel rodzaju a, a więc tylko w tych swoich składnikach, które są wspólne dla b i a ($b = ba$ czyli $b < a$). Tak że oprócz $a < b$ (rodzaj treściowy a tkwi w gatunku swym b), mamy tu jeszcze $b < a$, a więc $a = b$.

I przesłanka indukcji uogólniającej (abstrahującej): $P < b$

---

[1]) Ten drugi rodzaj indukcji został odkryty już dawniej przez B. Erdmanna (por. jego Logik, str. 564 i nast. w wyd. z r. 1892 lub str. 691 i nast. w wyd. z r. 1923), który jednak nie uświadamiał sobie głębokich podstaw dualno-architektonicznych, decydujących o konieczności tego rodzaju rozdwojenia w dziedzinie wnioskowania. Erdmann ten drugi rodzaj indukcji w odróżnieniu od indukcji uogólniającej (verallgemeinernde Induktion) nazywa indukcją dopełniającą (ergänzende Induktion). Mybyśmy chętnie nadali temu dwoistemu rodzajowi indukcji miano indukcji całkującej (przejście od składnika do całości). Zarzuty Biegańskiego (por. Zasady logiki ogólnej, 1903, str. 296-8), skierowane przeciwko wyodrębnieniu przez Erdmanna tego drugiego rodzaju indukcji, nie mogą tu być bliżej rozpatrzone; naszem zdaniem są one zupełnie nieprzekonywające, tem bardziej teraz, gdy to odróżnienie dwóch rodzajów wnioskowania okazuje się głęboko ugruntowane w podstawowej dla logiki zasadzie dwoistości mnożenia i dodawania.

[2]) Materjalna prawdziwość tego założenia i jej kryterja tutaj nas, oczywiście, nie interesuje. Również obojętna jest tu dla nas ilość elementów b, posiadających cechę P (w pierwszej przesłance wniosku).

II przesłanka indukcji uogólniającej (abstrahującej): $b = a$ $[= (a < b) + (b < a)]$

Wniosek indukcji uogólniającej (abstrahującej): $P < a$.

I dwoiście dla indukcji typu dualnego, całkującego. Wychodzi ona z przesłanki, że element S posiada cechę b $(b < S)$. Następnie zaś zakłada, że, jeżeli chodzi o element S, to cecha b wchodzi tu w grę jako przedstawiciel (przejaw) większej całości, całego zespołu cech a, tak że, mając b, mamy tem samem $b + a$ $(b = b + a$ czyli $a < b)$. Wobec tego zaś, że $b < a$ $(a = b + a)$, mamy więc $a = b$.

I przesłanka indukcji całkującej: $b < S$

II przesłanka indukcji całkującej: $b = a$ $[b < a + a < b]$

Wniosek indukcji całkującej: $a < S$.

Możemy teraz w sposób następujący sformułować zasady dwóch dwoistych rodzajów wnioskowania indukcyjnego.

Zasada I rodzaju wnioskowania indukcyjnego	*Zasada II (dualnego) rodzaju wnioskowania indukcyjnego*
Jeżeli P jest cechą elementu b, element zaś ten występuje tu, jako przedstawiciel (gatunek) rodzaju a, to P jest cechą rodzaju a.	Jeżeli element S posiada cechę b, cecha zaś ta występuje tu, jako przedstawiciel (składnik) całości a, to element S posiada jako cechę całość a.

Jak widzimy, możemy przejść od zasady indukcji uogólniającej do zasady indukcji całkującej przy pomocy tego samego odwzorowania (słowniczka), jakiem posiłkowaliśmy się przy przejściu od jednego do drugiego rodzaju wnioskowania z analogji. I tutaj również widzimy, że indukcja od gatunku do rodzaju dotyczy substancji, podmiotu sądu, indukcja zaś od składnika do całości dotyczy cech i wyraża się w orzeczeniu sądu.

Podobnie jak stwierdziliśmy dotychczas istnienie dwoistego wnioskowania z analogji oraz dwoistego wnioskowania indukcyjnego, tak też w naturalnej konsekwencji rzeczy skonstatujemy teraz istnienie dwoistej dedukcji. Jeżeli bowiem mogliśmy dwoiście indukować: z jednej strony — od podmiotu gatunkowego do podmiotu rodzajowego, jako posiadającego pewną cechę, z drugiej zaś: od składnika do zespołu cech, jako orzeczeń pewnego podmiotu, to, oczywiście, będziemy mogli również odwrotnie wnioskować, i dedukować z jednej strony podmiot gatunkowy z podmiotu rodzajowego, jako posiadający pewną cechę (dedukcja zwykła), z drugiej zaś — składnik z zespołu cech, jako orzeczenie pewnego podmiotu (dedukcja dualna). I jeżeli za zasadę zwykłej dedukcji przyjmiemy dictum de omni (w pojmowaniu treściowem: dictum de genere lub ogólniej: dictum de abstracto), to dedukcję dualną obowiązywać musi zasada dualna względem powyższej, zasada, którą nazwalibyśmy dictum de toto. Tak więc:

Zasada I rodzaju wnioskowania dedukcyjnego	*Zasada II (dualnego) rodzaju wnioskowania dedukcyjnego*
Jeżeli *P* jest cechą rodzaju *a*, *b* zaś jest gatunkiem[1]) rodzaju *a*, to *P* jest cechą gatunku[2]) *b*.	Jeżeli element *S* cechuje całość (zespół) cech *a*, zaś *b* jest składnikiem całości *a*, to element *S* cechuje składnik *b*.

Pierwsza z tych zasad — dictum de genere (de abstracto)[3]) — przypisuje to samo orzeczenie *P* dwóm podmiotom (jeżeli ro-

---

[1]) wzgl. osobnikiem.

[2]) wzgl. osobnika.

[3]) Jest to w istocie rzeczy kantowska zasada: nota notae est nota rei ipsius.

dzajowi, to i jego gatunkowi), druga (dualna) — dictum de toto — przypisuje temu samemu podmiotowi *S* dwa orzeczenia (jeżeli zespół cech, to i jego składnik). Pierwsza jest dedukcją wyszczególniającą (konkretyzującą), drugą nazwalibyśmy różnicującą (dzielącą). W ten sposób okazuje się, że, dedukując sąd jakiś, możemy postępować dwojako: bądź dedukując jego podmiot według dictum de genere, bądź jego orzeczenie według dictum de toto. A więc np. że „Sokrates jest śmiertelny", możemy dowieść: 1) kładąc za podstawę dedukcji przesłankę: „Człowiek jest śmiertelny", a następnie, stwierdziwszy, że „Sokrates jest człowiekiem", przenosimy orzeczenie śmiertelności z podmiotu rodzajowego na nowy podmiot „Sokrates"; 2) kładąc za podstawę dedukcji przesłankę: „Sokrates jest człowiekiem" (w znaczeniu: Sokratesa cechuje zespół cech, który nazywamy „człowieczeństwem"), a następnie, stwierdziwszy, że człowiek jest śmiertelny (to znaczy, że zespół cech „człowieczeństwo" zawiera w sobie jako cechę składową „śmiertelność"), przypisujemy Sokratesowi nowe orzeczenie: „śmiertelny". W ten sposób droga do sądu „Sokrates jest śmiertelny" poprzez pojęcie „człowiek" jest dwojaka; bądź wychodzimy z pojęcia: śmiertelny (+ człowiek), bądź z pojęcia: Sokrates (+ człowiek). W pierwszym przypadku we wniosku „Sokrates jest śmiertelny" mamy nowy podmiot „Sokrates" zamiast dawnego „człowiek", w drugim przypadku we wniosku tym mamy nowe orzeczenie „śmiertelny" („śmiertelność") zamiast dawnego „człowiek" („człowieczeństwo").

Rekapitulując wszystko, powiemy, że, biorąc za punkt wyjścia dwoistość pojęć ogólnych i całościowych, należy odróżnić w każdym ze sposobów wnioskowania dwa jego rodzaje, a więc:

I: 1) wnioskowanie z analogji gatunków i 2) wnioskowanie z analogji składników,

II: 1) wnioskowanie indukcyjne abstrahujące i 2) wnioskowanie indukcyjne całkujące,

III: 1) wnioskowanie dedukcyjne konkretyzujące i 2) wnioskowanie dedukcyjne różnicujące (dzielące).

TREŚĆ.

ZAUWAŻONE BŁĘDY

Str.	*wiersz*	*wydrukowano*	*powinno być*
27	2 od dołu	wewnętrzny	wewnętrznego
47	15 od góry	$ab+ab'$	$ab+a'b'$
53	1 od dołu	ba'	ab'
65	1 od dołu	sobą	z sobą
65	2 od dołu	w ten	i w ten
66	1 w tabl.	$(a+b)$ (2)	$(a+b)$ (12)
75	10 od dołu	$I_{\mathrm{aa'}}$ i $I_{\mathrm{bb'}}$	$I_{\mathrm{a+a'}}$ i $I_{\mathrm{b+b'}}$
76	1 od dołu	$(a+b)\ (a'+b$	$(a+b)(a'+b')$
111	14 od góry	(+ wzgl.)	(+ wzgl. $\times$)