

ANTONI NIEDERLINSKI

Zakład Automatyzacji Napędu

WEWNĘTRZNE SPRZĘŻENIE ZWROTNE  
W UKŁADZIE LEONARDA

**Streszczenie:** W wielu publikacjach analizujących dynamikę układu Leonarda traktuje się motor jako element jednowejściowy. Założenie to nie jest zgodne z rzeczywistością i prowadzi do błędnego schematu blokowego układu. Autor przeprowadził analizę układu przy założeniu, że elementy układu są elementami wielowejściowymi. Analiza ta wskazuje na obecność w układzie Leonarda wewnętrznego sprzężenia zwrotnego. W oparciu o wyniki analizy zaproponowano schemat blokowy układu Leonarda.

Silnik układu Leonarda możemy uważać za element o dwóch wejściach i dwóch wyjściach. Sygnałami wejściowymi są: napięcie  $U$  i moment obciążenia  $M_{obc}$ . Za sygnały wyjściowe będziemy uważać prędkość obrotową  $n$  i prąd twornika  $I$ . Każda z wielkości wyjściowych zależy od obydwóch wielkości wejściowych. Schematycznie zaznaczymy to liniami przerywanymi wewnątrz bloku (rys.2).

Znajdźmy równania opisujące blok z rys.2. Dla silnika z rys.1. możemy napisać następujące zależności:

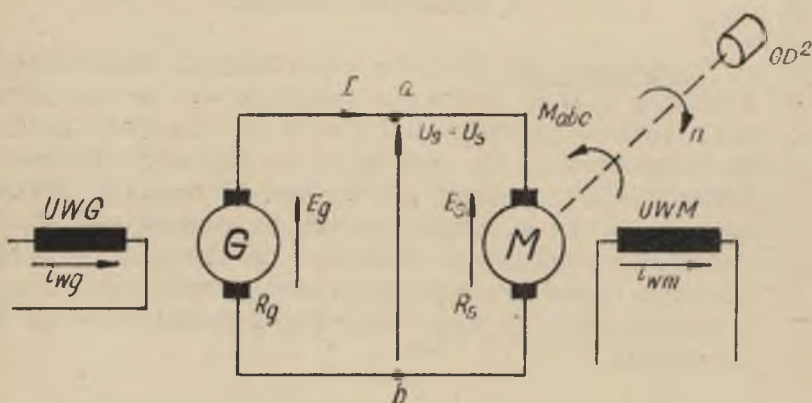
$$I = \frac{U_s - k_s}{R_s} \quad (1)$$

Prąd  $I$  jest sumą składowej obciążeniowej:

$$I_{obc} = f(M_{obc}) \quad (2)$$

oraz składowej dynamicznej

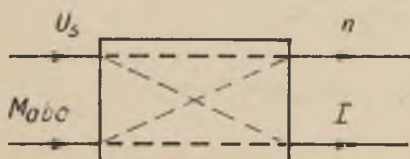
$$\Delta I = f\left(\frac{dU_{s1}}{dt}, \frac{dn}{dt}\right) \quad (3)$$



Rys.1. Schemat idealowy układu Leonarda

Poza tym z rys. 1 mamy:

$$E_s = C_e \cdot n \quad (4)$$



Rys.2. Blok motoru

$$\frac{dn}{dt} = \frac{C_m I - M_{obc}}{\frac{GD^2}{375}} \quad (5)$$

$$U_s = E_s + I R_s \quad (6)$$

Z równań 1, 2, 3 i 4 otrzymamy:

$$n = \frac{1}{C_e} (U_s - I \cdot R_s) \quad (7)$$

Z równań 5 i 7 otrzymamy:

$$\frac{1}{C_e} \left( \frac{dU_s}{dt} - R_s \frac{dI}{dt} \right) = \frac{375}{GD^2} (C_m \cdot I - M_{obc}) \quad (8)$$

Dokonując transformacji Laplace'a-Corsona równania 8 przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy:

$$\frac{1}{C_e} [pU_s(p) - R_s pI(p)] = \frac{375}{GD^2} [C_m I(p) - M_{obc}(p)] \quad (8a)$$

Stąd:

$$I(p) \left[ 1 + \frac{C_e C_m 375}{R_s GD^2} \frac{1}{p} \right] = M_{obc}(p) \left[ \frac{375 C_e}{R_s \cdot GD^2} \frac{1}{p} \right] + \frac{U_s(p)}{R_s}$$

lub:

$$I(p) = \frac{\frac{1}{C_m}}{1 + p \frac{R_s \cdot GD^2}{C_e C_m \cdot 375}} \cdot M_{obc}(p) + \frac{p \frac{R_s \cdot GD^2}{C_e \cdot C_m \cdot 375}}{1 + p \frac{R_s \cdot GD^2}{C_e \cdot C_m \cdot 375}} \frac{1}{R_s} U_s(p)$$

Oznaczając stałą elektromechaniczną silnika przez

$$T_M = \frac{R_s \cdot GD^2}{C_e \cdot C_m \cdot 375}$$

otrzymamy ostatecznie:

$$I(p) = \frac{1}{1 + pT_M} M_{obc}(p) + \frac{P T_M}{1 + pT_M} \cdot \frac{1}{R_s} U_s(p) \quad (9)$$

Znajdziemy z kolei zależność prędkości obrotowej  $n$  od momentu  $M_{obc}$  i napięcia  $U_s$ . Z równań 4 i 6 mamy:

$$n = \frac{1}{C_e} (U_s - I \cdot R_s) \quad (10)$$

Z równania 5:

$$I = \frac{1}{C_m} \left( \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} + M_{obc} \right) \quad (11)$$

Stąd:

$$n = \frac{1}{C_e} \left( U_s - \frac{R_s}{C_m} \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} - \frac{R_s}{C_m} M_{obc} \right) \quad (12)$$

Dokonując transformacji Laplace'a-Carsona przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy:

$$n(p) = \frac{1}{C_e} \left[ U_s(p) - \frac{R_s}{C_m} \frac{GD^2}{375} p \cdot n(p) - \frac{R_s}{C_m} M_{obc}(p) \right] \quad (13)$$

Po uporządkowaniu:

$$n(p) = - \frac{\frac{R_s}{C_e \cdot C_m}}{1 + pT_M} M_{obc}(p) + \frac{\frac{1}{C_e}}{1 + pT_M} U_s(p) \quad (14)$$

Element z rys. 2 możemy więc scharakteryzować układem równań:

$$\begin{aligned} n(p) &= K_{nu}(p) \cdot U_s(p) - K_{nM}(p) \cdot M_{obc}(p) \\ I(p) &= K_{Iu}(p) \cdot U_s(p) + K_{IM}(p) \cdot M_{obc}(p) \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie

$$K_{nu}(p) = \frac{\frac{1}{C}}{1 + p^T M} \quad K_{nM}(p) = \frac{R_s}{C_e \cdot C_m} \cdot \frac{1}{1 + p^T M}$$

$$K_{Iu}(p) = \frac{1}{R_s} \cdot \frac{p^T M}{1 + p^T M} \quad K_{IM}(p) = \frac{1}{C_m}$$

Równanie 15 możemy zapisać macierzowo

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} n(p) \\ I(p) \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} K_{nu}(p) & -K_{nM}(p) \\ K_{Iu}(p) & K_{IM}(p) \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} U_s(p) \\ M_{obc}(p) \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (15a)$$

Macierz  $K_s(p)$  układu równań 15

$$K_s(p) = \left\| \begin{array}{cc} K_{nu}(p) & -K_{nM}(p) \\ K_{Iu}(p) & K_{IM}(p) \end{array} \right\| \quad (16)$$

nazywamy funkcją przejścia silnika.

Generator układu Leonarda możemy uważać (przy założeniu stałości obrotów silnika napędowego) za element o dwóch wejściach i jednym wyjściu (rys.3). Wielkościami wejściowymi są prąd wzbudzenia generatora i prąd obciążenia generatora.

Wielkością wyjściową jest napięcie generatora. Dla generatora jest równanie:

$$U_g(p) = K_g \cdot i_{wg}(p) - R_g \cdot I(p) \quad (17)$$

Równanie to możemy zapisać

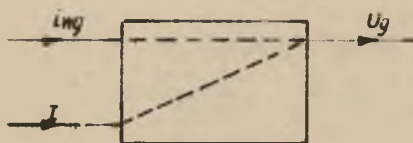
$$U_g(p) = K_{ui}(p) \cdot i_{wg}(p) - K_{uI}(p) \cdot I(p) \quad (18)$$

gdzie

$$K_{uI}(p) = R_g \quad K_{ui}(p) = K_g$$

Korzystając z zapisu macierzowego otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} U_g(p) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ui}(p) & -K_{uI}(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{wg}(p) \\ I(p) \end{pmatrix} \quad (18a)$$



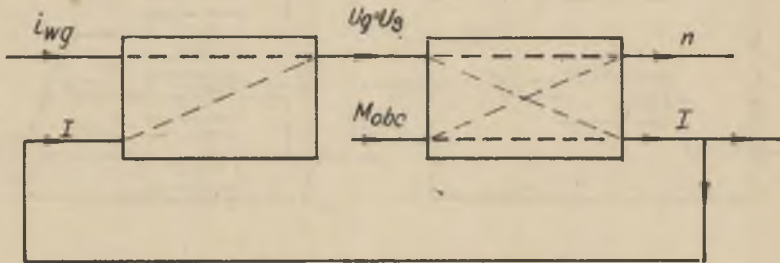
Rys.3. Blok generatora

Macierz  $K_g(p)$  równania 18

$$\begin{pmatrix} K_g(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ui}(p) & -K_{uI}(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

nazywamy funkcją przejścia generatora.

Narysujmy schemat blokowy zespołu generator-motor z rys.1 przy założeniu, że  $U = U$ .<sup>\*)</sup> Schemat ten jest pokazany na rys.4. Jak widać z rys.4, w układzie Leonarda z rys.1 istnieje



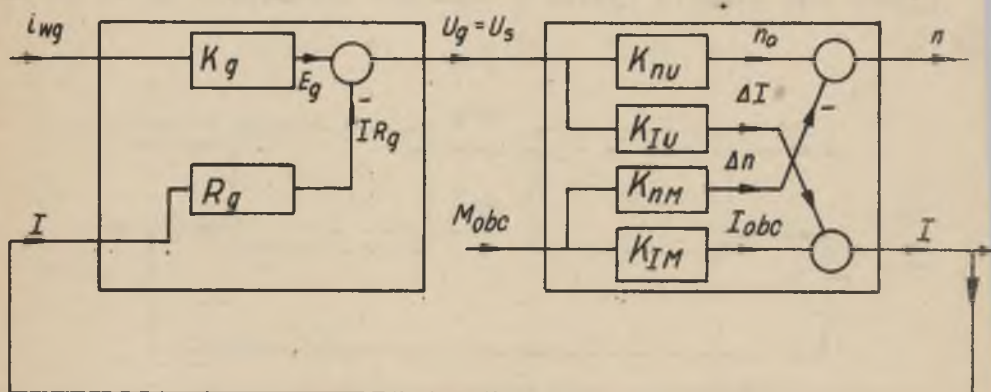
Rys.4. Schemat blokowy układu z rys.1

je sprzężenie zwrotne wywołane przez składową dynamiczną prądu twornika silnika (tzn. składową prądu silnika wywołaną przez zmianę napięcia  $U$  - por. równanie 3). Sprzężenie to nazwiemy wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym układu Leonarda. Z analizy znaków elementów macierzy  $K_{s-g}(p)$  i  $K_{g-s}(p)$

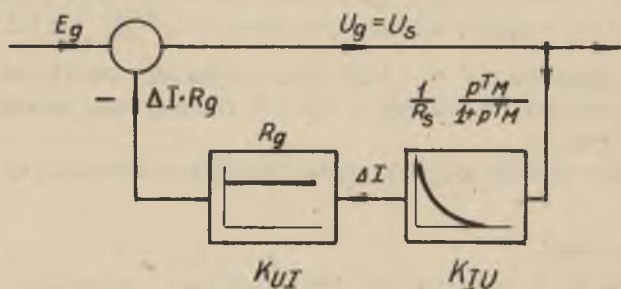
widać, że sprzężenie to jest sprzężeniem zwrotnym ujemnym. W istocie schemat blokowy z rys.4 możemy narysować w postaci jak na rys.5.

Wyodrębnijmy obwód objęty wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym (rys.6).

\*) Założenie to nie oznacza, że pomijamy oporność przewodów łączących układ Leonarda. W przypadku, gdy zautomatyzowany układ Leonarda posiada ujemne sprzężenie napięciowe, którego sygnał jest wzięty z punktów a-b schematu z rys.1, za oporność  $R$  uważamy całkowitą oporność obwodu: punkt a - generator<sup>g</sup> - punkt b, natomiast za oporność  $R_s$  całkowitą oporność obwodu: punkt a - motor - punkt b. O ile natomiast zautomatyzowany układ Leonarda posiada ujemne sprzężenie tachogeneratorowe, to jest rzeczą obojętną (por. schemat blokowy na rys.10), czy oporność przewodów łączących dodamy do oporności wewnętrznej generatora, czy do oporności wewnętrznej silnika.



Rys.5. Przekształcony schemat blokowy układu z rys.1



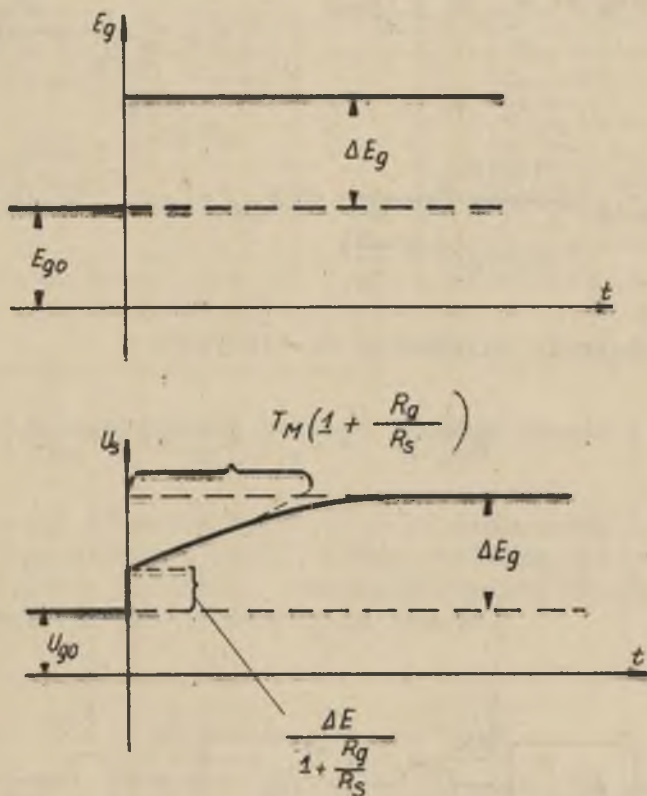
Rys.6. Obwód objęty wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym

Funkcja przejścia tego obwodu:

$$K_{uE}(p) = \frac{U_s(p)}{E_g(p)} = \frac{1}{1 + R_g \frac{1}{R_s} \frac{pT_M}{1 + pT_M}} = \frac{1 + pT_M}{1 + pT_M \left(1 + \frac{R_g}{R_s}\right)} \quad (20)$$

Wykres zmiany napięcia silnika  $U_s$  przy skokowej zmianie sem generatora  $E_g$  jest przedstawiony na rys.7.





Rys.7. Wykres zmiany napięcia  $U_s$  przy skokowej zmianie  $E_g$

Na obwód wewnętrznego sprzężenia zwrotnego wpływa jeszcze wielkość  $M_{obc}$ . Obliczmy więc funkcję przejścia:

$$K_{\mathcal{M}}(p) = \frac{U_B(p)}{M_{obc}(p)}$$

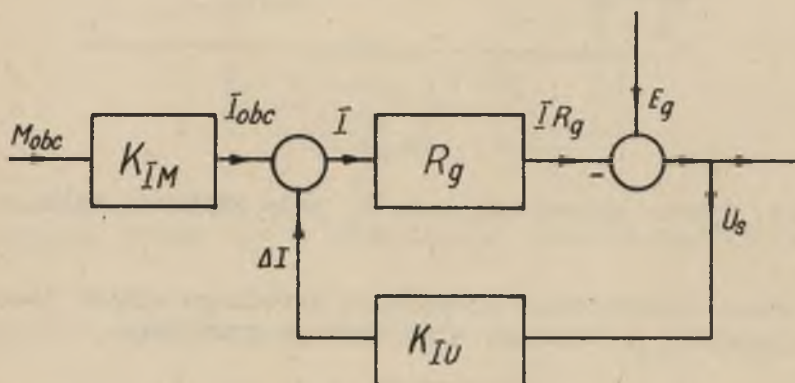
Ze schematu na rys.5 otrzymamy obwód z rys.8. Stąd funkcja przejścia:

$$K_{uM}(p) = K_{IM}(p) \frac{R}{1 + R_g \frac{K_{IU}(p)}{R}} = \frac{K_{IM}(p) R_g}{1 + R_g \frac{1}{R_s} \frac{pT_M}{1 + pT_M}} =$$

$$R_g K_{IM}(p) \frac{1 + pT_M}{1 + pT_M \left(1 + \frac{R_g}{R_s}\right)} R_g K_{IM}(p) \quad (21)$$

Po uwzględnieniu zależności 20 otrzymamy

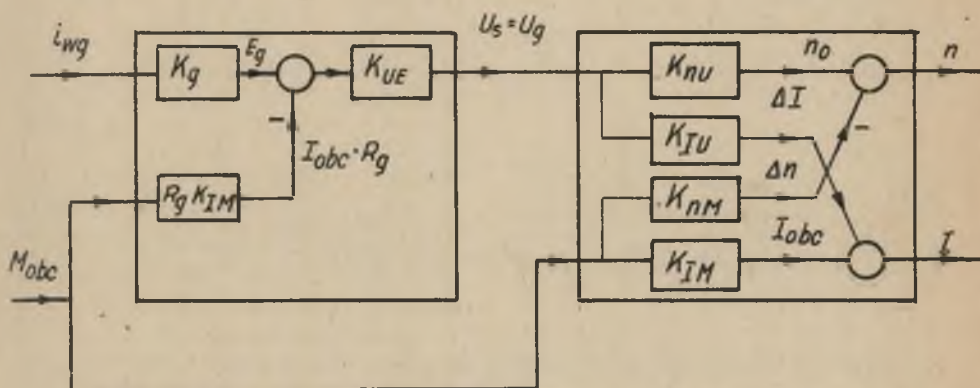
$$K_{uM}(p) = R_g \cdot K_{IM}(p) \cdot K_{uE}(p) \quad (22)$$



Rys.8. Wpływ momentu obciążenia na napięcie silnika.

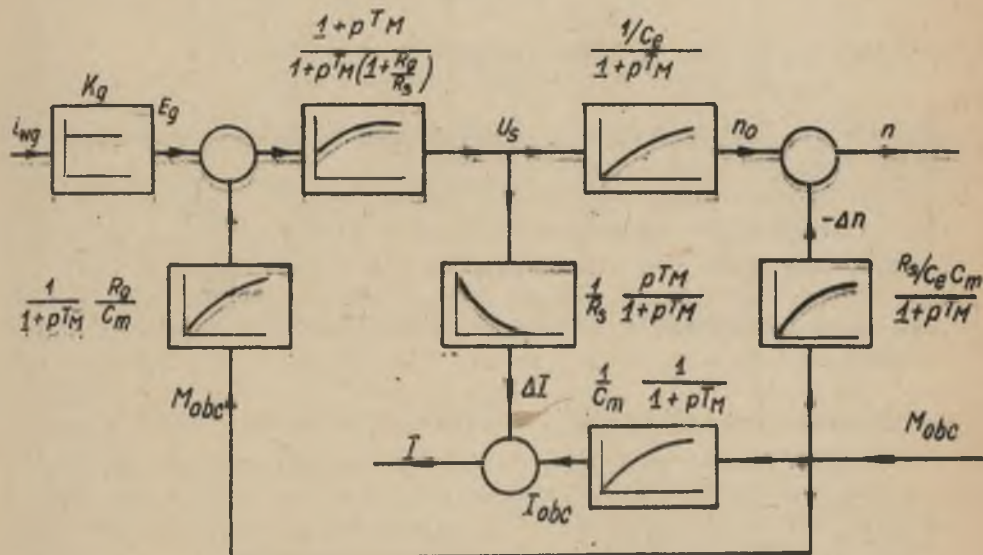
Ze schematów przedstawionych na rys. 6 i 8 oraz wyprowadzonych funkcji przejścia wynika, że możemy uprościć schemat blokowy z rys.5. Możemy przedstawić generator jako element o dwu wejściach - a mianowicie  $i_{wg}$  i  $M_{obc}$ , i wyjściu

U, pomijając pętlę sprzężenia zwrotnego. Schemat blokowy układu z rys.1 będzie wówczas wyglądał jak na rys.9.



Rys.9. Przekształcony schemat blokowy układu z rys.1

Uwzględniając równania 15,18,20 i 21 dochodzimy do schematu blokowego układu z rys.1, który powinien być podstawowym przy analizie stabilności zautomatyzowanych układów Leonarda. Schemat ten jest pokazany na rys.10.



Rys.10. Ostateczny schemat blokowy układu z rys.1

Należy podkreślić, że do schematu blokowego z rys. 10 można dojść w bardziej prosty sposób, wychodząc z równań 15 i 17: założymy  $U = U_s$  i podstawmy do równania 17 wartość na  $I(p)$  z równania 15:

$$U_s(p) = K_g \cdot i_{wg}(p) - R_g \cdot K_{Iu}(p) \cdot U_s(p) - K_{IM}(p) \cdot R_g \cdot M_{obc}(p) \quad (23)$$

lub

$$U_s(p) = \frac{K_g}{1 + R_g \cdot K_{Iu}(p)} i_{wg}(p) - \frac{R_g \cdot K_{IM}(p)}{1 + R_g \cdot K_{Iu}(p)} M_{obc}(p) \quad (23a)$$

Wprowadźmy oznaczenie (podobnie jak w równaniu 20):

$$\frac{1}{1 + R_g \cdot K_{Iu}(p)} = K_{uE}(p)$$

Ostatecznie otrzymamy równanie

$$U_s(p) = K_g \cdot K_{uE}(p) \cdot i_{wg}(p) - R_g \cdot K_{IM}(p) \cdot K_{uE}(p) \cdot M_{obc}(p) \quad (23b)$$

którego zapis macierzowy wygląda następująco:

$$\begin{vmatrix} U_s(p) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_g K_{uE}(p) & -R_g \cdot K_{IM}(p) \cdot K_{uE}(p) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{wg}(p) \\ M_{obc}(p) \end{vmatrix}$$

Jak łatwo sprowadzić równanie 24 opisuje nam blok generatora z rys. 9.

Podsumujmy na zakończenie wnioski z powyższej analizy:

1. W układzie Leonarda istnieje wewnętrzne sprzężenie zwrotne wywołane przez składową dynamiczną prądu twornika silnika (a więc występuje ono niezależnie od tego, czy silnik jest obciążony czy też nie).

2. Sprzężenie to wprowadza w główny obwód sterowania układu człon o funkcji przejścia

$$\frac{1 + pT_M}{1 + pT_M \left(1 + \frac{R}{R_s}\right)}$$

3. Obecność tego członu pozwala przypuszczać, że stabilność zautomatyzowanych układów Leonarda ze sprzężeniem zwrotnym napięciowym jest lepszą a własności dynamiczne gorsze, niżby to wynikało z obliczeń opartych na dotychczas stosowanych schematach blokowych. Zagadnienie to wymaga jeszcze gruntowniejszego rozpatrzenia.

4. Ze schematu blokowego przedstawionego na rys. 10 wiadać ponadto, że dodatnie sprzężenie prądowe, często stosowane w zautomatyzowanych układach Leonarda, nie jest sprzężeniem czysto kompensacyjnym, nie wpływającym na stabilność układu, lecz sprzężeniem kompensacyjno-zwrotnym, którego składowa zwrotna wywiera wpływ na stabilność.

#### LITERATURA

- [1] W.Oppelt - Poradnik technik regulacji, PWT, 1958.
- [2] J.Siwiński - Automatyka napędu elektrycznego, PWT, 1960.
- [3] S.Węgrzyn - Elementy wielowejściowe w układach automatyki. Referat wygłoszony na Seminarium Automatyki, październik 1959 r.

## Внутренняя обратная связь в системе Леонара

### С о д е р ж а н и е

Во многих публикациях исследующих систему Леонара двигатель обсуждается как одномерный элемент. Это предложение не согласуется на практике и приводит к ошибочной структурной схеме. Автор проводил исследование системы при предположении, что элементы системы суть многомерными элементами. Это исследование указывает на наличие внутренней обратной связи в системе Леонара. Опираясь на результатах анализа предложено структурную схему системы Леонара.

### The internal Feedback in The Ward — Leonhard Set

#### S u m m a r y

In many papers dealing with the dynamics of the Ward — Leonhard set, the motor is usually assumed as a single input element. This simplification is unjustified and may lead to erroneous conclusions. The author analyses the system assuming that the elements have multiple inputs. The analysis shows an inherent internal feedback in the Ward — Leonhard set. A new correct block diagram of the system is proposed.