

TADEUSZ SZWEDA

Katedra Elektroautomatyki Przemysłowej

CZĘSTOTLIWOŚCIOWE METODY POMIARU WSPÓŁCZYNNIKÓW  
OPERATOROWEJ FUNKCJI PRZEJŚCIA  
LINIOWYCH UKŁADÓW AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

Streszczenie: W pracy omówiono częstotliwościowe metody pomiaru współczynników operatorowej funkcji przejścia liniowych członów układu a.r. a) z jednomianem  $p$  w liczniku operatorowej funkcji przejścia, b) z dwumianem w liczniku operatorowej funkcji przejścia c) z opóźnieniem i inercją pierwszego rzędu. Wyprobowane zależności umożliwiają w sposób szybki i prosty wyznaczenie wartości współczynników, a ponadto stwarzają możliwości przeprowadzenia dyskusji uchybu względnego pomiarów.

## 1. WSTĘP

Własności regulacyjne układu automatycznej regulacji są określone przez jego charakterystyki statyczne i dynamiczne. Pomiaru charakterystyk statycznych poszczególnych elementów układu a.r. nie różnią się zarówno pod względem metod i środków technicznych służących do realizacji pomiarów, od metod i przyrządów stosowanych w poszczególnych gałęziach techniki. Technika pomiarowa dla określenia charakterystyk statycznych elementów i układów a.r. może więc być adoptowana bez większych trudności i bez zmian na użytek automatyki.

Eksperymentalne określenie charakterystyk dynamicznych układu a.r. lub jego elementów, stanowi natomiast zagadnienie specyficzne dla automatyki. Wyniki tych pomiarów mogą być użyte zarówno do syntezy jak i analizy układów a.r., mogą one również stanowić podstawę do matematycznego modelo-

wania układów. Wśród istniejących w chwili obecnej metod pomiaru własności dynamicznych elementów a.r. można wyodrębnić trzy zasadnicze grupy:

1. Metoda pobudzenia badanego członu sygnałem wejściowym będącym określoną (nieperiodyczną) funkcją czasu (np. skok jednostkowy, impuls jednostkowy, liniowo zmienny sygnał itp.) i analiza odpowiedzi czasowej.

2. Metoda pobudzenia badanego członu sygnałem sinusoidalnie zmiennym.

3. Statystyczne metody pomiaru własności dynamicznych. Wszystkie te metody są metodami pośrednimi. Ustalenie wartości współczynników równania różniczkowego badanego członu odbywa się przy użyciu niejednokrotnie skomplikowanych metod graficznych i analitycznych. Wymagania stawiane poszczególnym metodom pomiarowym można sformułować w następujący sposób:

a) możliwie daleko idąca uniwersalność; możliwość stosowania danej metody w przypadku badania członów rozmaitego typu (w zrozumieniu ich różnorodnych własności dynamicznych, jak też rodzaju fizycznej wielkości jaką stanowi sygnał wejściowy,

b) możliwość prostego, szybkiego, dokładnego i jednoznacznego określenia wartości współczynników równania różniczkowego badanego członu na podstawie wyników pomiaru,

c) możliwie prosta, a więc tania aparatura pomiarowa,

d) krótki czas trwania pomiaru.

Analiza wyżej wymienionych metod wykazuje, że w chwili obecnej w największym stopniu spełniają te wymagania metody pobudzenia badanego członu sygnałem sinusoidalnie zmiennym.

## 2. OGÓLNE ZASADY WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW FUNKCJI PRZEJŚCIA NIE MAJĄCEJ MIEJSC ZEROWYCH RÓŻNYCH OD ZERA

### 2.1. Klasyfikacja liniowych członów bez opóźnienia

Funkcja przejścia liniowego członu może być przedstawiona w postaci:

$$K(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (2.1)$$

gdzie:

$$N(p) = V_n (1 + pT_{10} + p^2 T_{20}^2 + \dots + p^n T_n^n) - \text{wielomian } p$$

w stopniu  $n$ ;

$$M(p) = 1 + pT_1 + p^2 T_2^2 + \dots + p^m T_m^m - \text{wielomian } p \text{ w stopniu } m;$$

Rozpatrzmy na razie wyłącznie metodę wyznaczania współczynników funkcji przejścia typu:

$$K(p) = \frac{V_n p^n}{M(p)} \quad (2.2)$$

gdzie:  $n$  - liczba całkowita,  $M(p)$  ma postać podaną wyżej.

Dla członów stabilnych współczynniki  $T_k^k$  są dodatnie. Członny o funkcji przejścia (2.2) mogą mieć różne własności dynamiczne:

- 1)  $n = 0$  i  $m = 0$  - człon bezinercyjny
- 2)  $n = 0$  i  $m > 0$  - człon proporcjonalny z inercją
- 3)  $n > 0$  i  $m > 0$  - człon różniczkujący
- 4)  $n < 0$  i  $m = 0$  - bezinercyjny człon całkujący
- 5)  $n < 0$  i  $m > 0$  - człon całkujący z inercją

Widmowa funkcja przejścia odpowiadająca wyrażeniu (2.2) dana jest w postaci:

$$K(j\omega) = \frac{V_n \cdot (j\omega)^n}{M(j\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.3)$$

gdzie:

$$A(\omega) = \frac{V_n \omega^n}{\sqrt{(1 - \omega^2 T_2^2 + \omega^4 T_4^4 - \dots)^2 + (\omega T_1 - \omega^3 T_3^3 + \omega^5 T_5^5 - \dots)^2}} \quad (2.4)$$

- stosunek amplitud

oraz

$$\varphi(\omega) = n \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \frac{\omega T_1 - \omega^3 T_3 + \omega^5 T_5 - \dots}{1 - \omega^2 T_2 + \omega^4 T_4 - \dots} =$$

$$= \text{arc tg}(-1)^{(n-1)} \left( \frac{\omega T_1 - \omega^3 T_3 + \omega^5 T_5 - \dots}{1 - \omega^2 T_2 + \omega^4 T_4 - \dots} \right)^{(n-1)^n} \quad (2.5)$$

- kąt przesunięcia fazowego.

## 2.2. Zasada pomiaru

W przedziale zmian kąta  $\varphi$  w funkcji częstotliwości mieszczą się wartości tego kąta wygodne dla obliczenia współczynników operatorowej funkcji przejścia danej równaniem (2.2). Jako pierwszą z tych wartości przyjmijemy:

$$\varphi_1 = n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (2n - 1) \quad (2.6)$$

Mierząc przy tej wartości kąta  $\varphi$  stosunek amplitud  $A_1$  oraz częstotliwość  $\omega_1$  i uwzględniając (2.5), otrzymamy:

$$\text{arc tg} \frac{\omega_1 T_1 - \omega_1^3 T_3 + \omega_1^5 T_5 - \dots}{1 - \omega_1^2 T_2 + \omega_1^4 T_4 - \dots} = \frac{\pi}{4}$$

A zatem otrzymujemy prosty związek:

$$\omega_1 T_1 - \omega_1^3 T_3 + \omega_1^5 T_5 - \dots = 1 - \omega_1^2 T_2 + \omega_1^4 T_4 - \dots \quad (2.7)$$

Stosunek amplitud dla kąta  $\varphi_1$  wyniesie:

$$A_1 = \frac{V_n \omega_1^n}{\sqrt{(1 - \omega_1^2 T_2 + \omega_1^4 T_4 - \dots)^2 + (\omega_1 T_1 - \omega_1^3 T_3 + \omega_1^5 T_5 - \dots)^2}} \quad (2.8)$$



Drugi pomiar wykonujemy przy:

$$\varphi_2 = n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (n - 1) \quad (2.9)$$

Z pomiaru tego uzyskujemy częstotliwość  $\omega_2$  (stosunku amplitud mierzyć nie trzeba) ze związków (2.5) i (2.9) otrzymamy:

$$1 - \omega_2^2 T_2^2 + \omega_2^4 T_4^2 - \dots = 0 \quad (2.10)$$

Zadając następne wartości kąta przesunięcia fazowego różniące się od  $\varphi_2$  o wielokrotność kąta  $\frac{\pi}{2}$ , otrzymamy z pomiarów dalsze częstotliwości  $\omega_3, \omega_4 \dots$  wchodzące w proste równania algebraiczne ze współczynnikami  $T_1, T_2, \dots, T_m$ . W ogólności wykonujemy  $m$  pomiarów częstotliwości ( $m > 0$  - stopień wielomianu mianownika), przy czym ostatni z pomiarów wykonujemy przy wartości kąta:

$$\varphi_m = \frac{\pi}{2} [n - (m - 1)] \quad (2.11)$$

Przy znanych częstotliwościach  $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_m$  można napisać w podany wyżej sposób  $m$  liniowych równań algebraicznych, które można rozwiązać dla dowolnego stopnia mianownika  $m$ . W celu znalezienia współczynnika  $V_n$ , korzystamy z zależności (2.8.) która przy znanym stosunku amplitud  $A_1$  pozwala znaleźć wartość liczbową  $V_n$ . Na przykład dla  $m = 7$  otrzymamy wzory:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \frac{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_6^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_5^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_7^2}\right)}; \quad (2.11)$$

$$T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_4^2} + \frac{1}{\omega_6^2};$$

$$T_3^3 = \left( \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_5^2} + \frac{1}{\omega_7^2} \right) T_1$$

$$T_4^4 = \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^2} + \frac{1}{\omega_4^2 \omega_6^2} + \frac{1}{\omega_2^2 \omega_6^2}$$

$$T_5^5 = \left( \frac{1}{\omega_3^2 \omega_5^2} + \frac{1}{\omega_3^2 \omega_7^2} + \frac{1}{\omega_5^2 \omega_7^2} \right) T_1$$

$$T_6^6 = \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^2 \omega_6^2}$$

$$T_7^7 = \frac{1}{\omega_3^2 \omega_5^2 \omega_7^2} T_1$$

$$V_n = \frac{A_1 \sqrt{2}}{\omega_1^n} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_6^2} \right) =$$

$$= \frac{A_1 \sqrt{2}}{\omega_1^{n-1}} T_1 \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_5^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_7^2} \right)$$

c.d.  
(2.11)

przy czym pulsuje  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7$  należy mierzyć przy wartościach kąta przesunięcia fazowego:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} (2n - 1)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} (n - 1)$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} (n - 2)$$

.....

$$\varphi_7 = \frac{\pi}{2} (n - 6)$$

(2.13)

zaś stosunek amplitud przy:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} (2n - 1)$$

Przedstawione wzory (2.12) i (2.13) obowiązują zarówno dla członów proporcjonalnych jak i różniczkujących i całkujących z inercją 7-go rzędu, pod warunkiem, że licznik operatorowej funkcji przejścia tych członów jest jednomianem  $n$ -tego stopnia ze względu na  $p$ . Regularność budowy wzorów pozwala je wypisać dla członu z inercją dowolnego rzędu bez wyliczeń. Również przejście od wzorów określających wartości współczynników operatorowej funkcji przejścia członu z inercją  $m$ -tego rzędu do wzorów wyrażających wartości tych współczynników dla członów z inercją niższego niż  $m$ -ty rzędu jest bardzo proste. Chcąc na przykład uzyskać wzory na współczynniki członu z inercją szóstego rzędu, należy we wzorach (2.12) założyć:  $\omega_7 \rightarrow \infty$ . Podobnie redukcję do piątego rzędu przeprowadzamy zakładając we wzorach (2.12)  $\omega_7 \rightarrow \infty$  i  $\omega_6 \rightarrow \infty$ . Tablice I, II i III zawierają charakterystyki widmowe z zaznaczeniem na nich punktów pomiarowych, odpowiadające im operatorowe funkcje przejścia oraz wzory na poszczególne współczynniki tych funkcji przejścia dla członów z inercją do czwartego rzędu włącznie.

### 2.3. Uchyb systematyczny pomiaru

Możliwość ogólnego przedstawienia współczynników funkcji przejścia liniowych członów wg wzorów (2.12) stwarza warunki dla obliczenia uchybu systematycznego pomiaru. Dyskusja uchybu prowadzi do wniosków, mogących znaleźć praktyczne zastosowanie przy konstruowaniu układów pomiarowych. Poniższe rozważania przeprowadzone zostaną w odniesieniu do członów proporcjonalnych różniczkujących i całkujących z inercją do czwartego rzędu włącznie, przy założeniu, że wszystkie częstotliwości a więc  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  i  $\omega_4$  są mierzone z tą samą dokładnością, tzn.:

$$\frac{\Delta \omega_1}{\omega_1} = \frac{\Delta \omega_2}{\omega_2} = \frac{\Delta \omega_3}{\omega_3} = \frac{\Delta \omega_4}{\omega_4} = \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (2.14)$$

Człony różniczkujące I-go rzędu z inercją

	Funkcja przejścia	Charakterystyka amplitudowo fazowa	Wzory na współczynniki operatorowej funkcji przejścia.
Człon idealny $n=1; m=0$	$K(p) = V_n P$		$\varphi_k = +\frac{\pi}{2}$ ; $V_n = \frac{A_k}{\omega_k}$ ;
Inercja I-go rzędu $n=1; m=1$ ;	$K(p) = \frac{V_n P}{1 + p T_1}$		$\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}$ ; $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$ ; $V_n = \frac{A_1 \sqrt{2}}{\omega_1}$
Inercja II-go rzędu $n=1; m=2$ ;	$K(p) = \frac{V_n P}{1 + p T_1 + p^2 T_2^2}$		$\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}; \varphi_2 = 0$ ; $T_1 = \frac{1}{\omega_1} (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}); T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2}$ ; $V_n = \frac{A_2 \sqrt{2}}{\omega_1} (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})$ ; $f_2 = f_1 (1 + \sqrt{2})$ - stan krytyczny $f_2 > f_1 (1 + \sqrt{2})$ - stan aperiodyczny $f_2 < f_1 (1 + \sqrt{2})$ - stan periodyczny
Inercja III-go rzędu $n=1; m=3$	$K(p) = \frac{V_n P}{1 + p T_1 + p^2 T_2^2 + p^3 T_3^3}$		$\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}; \varphi_2 = 0; \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$ ; $T_1 = \frac{1}{\omega_1} (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}); T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2}$ ; $T_3^3 = \frac{1}{\omega_3^3} \cdot T_1$ ; $V_n = \frac{A_1 \sqrt{2}}{\omega_1} (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})$ ;
Inercja IV-go rzędu $n=1; m=4$ ;	$K(p) = \frac{V_n P}{1 + p T_1 + p^2 T_2^2 + p^3 T_3^3 + p^4 T_4^4}$		$\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}; \varphi_2 = 0; \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}; \varphi_4 = -\frac{\pi}{4}$ ; $T_1 = \frac{1}{\omega_1} (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}) (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2})$ ; $T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_4^2}; T_3^3 = \frac{1}{\omega_3^3} T_1$ ; $T_4^4 = \frac{1}{\omega_4^4} \omega_1^4 V_n^2 = \frac{A_1 \sqrt{2}}{\omega_1} (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}) (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2})$



TABLICA II

Człony całkujące I-go rzędu z inercją

	Funkcja przejścia	Charakterystyka amplitudowo-fazowa	Wzory na współczynniki operatorowej f. przejścia
Człon idealny $n = -1; m = 0$	$K(p) = \frac{V_n}{p}$		$\varphi_K = -\frac{\pi}{2}$ $V_n = A_K \omega_K$
Inercja I-go rzędu $n = -1; m = 1$	$K(p) = \frac{V_n}{p(1+pT_1)}$		$\varphi_1 = -3\frac{\pi}{4}$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$ ; $V_n = A_1 \omega_1 \sqrt{2}$
Inercja II-go rzędu $n = -1; m = 2$	$K(p) = \frac{V_n}{p(1+pT_1+p^2T_2^2)}$		$\varphi_1 = -3\frac{\pi}{4}$ ; $\varphi_2 = -\pi$ ; $T_1 = \frac{1}{\omega_1(1-\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})}$ ; $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$ ; $V_n = A_1 \sqrt{2} \omega_1 (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})$ ; $f_2 > f_1(1 + \sqrt{2})$ - stan krytyczny $f_2 > f_1(1 + \sqrt{2})$ - stan aperiodyczny $f_2 < f_1(1 + \sqrt{2})$ - stan periodyczny
Inercja III-go rzędu $n = -1; m = 3$	$K(p) = \frac{V_n}{p(1+pT_1+p^2T_2^2+p^3T_3^3)}$		$\varphi_1 = -3\frac{\pi}{4}$ ; $\varphi_2 = -\pi$ ; $\varphi_3 = -3\frac{\pi}{4}$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1} \frac{(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})}{(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2})}$ ; $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$ ; $T_3 = \frac{1}{\omega_3} T_1$ ; $V_n = A_1 \sqrt{2} \omega_1 (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2})$ ;
Inercja IV-go rzędu $n = -1; m = 4$	$K(p) = \frac{V_n}{p(1+pT_1+p^2T_2^2+p^3T_3^3+p^4T_4^4)}$		$\varphi_1 = -3\frac{\pi}{4}$ ; $\varphi_2 = -\pi$ ; $\varphi_3 = -3\frac{\pi}{4}$ ; $\varphi_4 = -2\pi$ ; $T_1 = \frac{1}{\omega_1} \frac{(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2})}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}}$ ; $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$ ; $T_3 = \frac{1}{\omega_3} T_1$ ; $T_4 = \frac{1}{\omega_4} T_1$ ; $V_n = A_1 \sqrt{2} \omega_1 (1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2})(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2})$

Człony proporcjonalne z inercją

T A B L I C A III

Funkcja przejścia	Charakterystyka amplitudowo fazowa	Wzory na współczynniki opóźnieniowe i przejścia
Człon proporc. z inercją I-go rzędu; $n=0$ ; $m=1$ $K(p) = \frac{V_n}{1 + pT_1}$		$y_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad y_n = -\frac{\pi}{2};$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1}; \quad T_1^2 = \frac{1}{\omega_1^2};$ $V_n = A_1 \sqrt{2}$
Człon proporc. z inercją II-go rzędu; $n=0$ ; $m=2$ $K(p) = \frac{V_n}{1 + pT_1 + p^2T_2^2}$		gdz: $f_2^2 = f_1(1 + \sqrt{2})$ - stan krytyczny $f_2, f_1(1 + \sqrt{2})$ - stan opóźnieniowy $f_2 < f_1(1 + \sqrt{2})$ - stan przelotowy
Człon proporc. z inercją III-go rzędu; $n=0$ ; $m=3$ $K(p) = \frac{V_n}{1 + pT_1 + p^2T_2^2 + p^3T_3^3}$		$y_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad y_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad y_3 = -\pi;$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1} \cdot \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)$ $T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2}; \quad T_3^3 = \frac{1}{\omega_3^3}; \quad T_1;$ $V_n = A_1 \sqrt{2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)$
Człon proporc. z inercją IV-go rzędu; $n=0$ ; $m=4$ $K(p) = \frac{V_n}{1 + pT_1 + p^2T_2^2 + p^3T_3^3 + p^4T_4^4}$		$y_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad y_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad y_3 = -\pi$ $y_4 = -3\frac{\pi}{2};$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}\right)}$ $T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2}; \quad T_3^3 = \frac{1}{\omega_3^3}; \quad T_4;$ $T_4^4 = \frac{1}{\omega_4^4};$ $V_n = A_1 \sqrt{2} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}\right);$

Przy takim założeniu uchyby systematyczne pomiaru poszczególnych współczynników wyrażą się następującymi zależnościami:

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \pm \left[ \frac{\left(1 + \frac{3\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \left(3 - 7 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}\right)} \right] \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (2.15)$$

$$\frac{\Delta T_2^2}{T_2^2} = \pm 2 \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (2.16)$$

$$\frac{\Delta T_3^3}{T_3^3} = \pm \left[ \frac{\Delta T_1}{T_1} + 2 \frac{\Delta \omega}{\omega} \right] \quad (2.17)$$

$$\frac{\Delta T_4^4}{T_4^4} = \pm 4 \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (2.18)$$

$$\frac{\Delta V_n}{V_n} = \pm \left[ \frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta A_1}{A_1} + \left| 1 - n - \frac{2 \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}} \right| \frac{\Delta \omega}{\omega} + \right. \\ \left. + \frac{2 \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega} \right] \quad (2.19)$$

Wartości uchybu systematycznego pomiaru poszczególnych współczynników operatorowej funkcji przejścia członów proporcjonalnych różniczkujących i całkujących z inercją niższego rzędu niż 4-ty otrzymuje się przez redukcję wzorów (3.2) (3.3)(3.4) (3.5) i (3.6) w sposób opisany w części (2.2). Tak na przykład dla członu z inercją drugiego rzędu obowiązują zależności:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= + \left[ \frac{1 + 3 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \right] \frac{\Delta \omega}{\omega} \\ \frac{\Delta T_2^2}{T_2^2} &= + 2 \frac{\Delta \omega}{\omega} \\ \frac{\Delta V_n}{V_n} &= + \left[ \frac{\Delta T_1}{T_1} + \frac{\Delta A_1}{A_1} + \left| 1 - n \right| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right] \end{aligned} \right\} (2.20)$$

Jak widać uchyb systematyczny pomiaru współczynników zaproponowaną metodą pozornie nie zależy od dokładności pomiaru kąta przesunięcia fazowego  $\varphi$ . Jest tak dlatego, że przy wyprowadzaniu wzorów (2.12) założono stałe wartości kąta  $\varphi$  określone wzorami (2.13). Jednakże między wartością kąta  $\varphi$  a częstotliwością  $\omega$  istnieje jednoznaczna zależność funkcyjna, tak że błąd pomiaru kąta  $\varphi$  jest we wzorach (2.15) do (2.19) zastąpiony przez uchyb pomiaru częstotliwości  $\omega$ .

Uchyb pomiaru współczynników zależy od rodzaju biegunów operatorowej funkcji przejścia. Dla biegunów zespolonych i sprzężonych funkcji przejścia członu z inercją II-go rzędu czynnik  $\frac{\omega^2}{\omega_1^2}$  jest bliski jedności, a zatem uchyb pomiaru współczynnika  $T_1$  będzie w tych samych warunkach pomiaru większy niż w przypadku członów których funkcja przejścia posiada bieguny rzeczywiste. W celu uzyskania dokładniejszych danych o zależności uchybu systematycznego od dynamicznych własności badanego członu, na rys.1. przedstawiono krzywe



$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = f(D) \quad (\text{gdzie } D = \frac{T_1}{2T_2} - \text{logarytmiczny dekrement tłumienia członu z inercją II-go rzędu}).$$

Wykres sporządzono dla uchybu pomiaru częstotliwości  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 1\%$ , przyjętego jako parametr. Z przebiegu  $\frac{\Delta T_1}{T_1} = f(D)$  wynika, że uchyb systematyczny pomiaru współczynnika  $T_1$  rośnie bardzo szybko dla  $D \rightarrow 0$ . Wynikałoby stąd, że stosowanie metody podanej w 2.2 jest celowym tylko w przypadku członów, których operatorowa funkcja przejścia posiada bieguny rzeczywiste. W celu zmniejszenia tego uchybu, koniecznym byłoby zaostrożenie wymagań odnośnie stabilizacji częstotliwości generowanego sygnału pomiarowego, jak również dokładności pomiaru tej częstotliwości. Jeśli dla przykładu przyjmując, że pomiar współczynnika  $T_1$  funkcji przejścia członu z inercją drugiego rzędu ma być wykonany z uchybem  $\frac{\Delta T_1}{T_1} = \pm 1\%$ , a badany człon ma logarytmiczny dekrement tłumienia  $D = 0,05$  (wartość ta odpowiada dobroci obwodu elektrycznego  $RLC:Q = 10$ ), to łatwo obliczyć, że pomiar częstotliwości winien być dokonany z uchybem nie przekraczającym wartości

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 2,6 \cdot 10^{-2}\%.$$

Firma Solartron podaje w swoich katalogach dla produkowanego generatora przeznaczonego do badania członów automatyki uchyb względny pomiaru częstotliwości  $\pm 2\%$ , co jak wynika z rys.1, prowadzi w omawianym przykładzie do uchybu  $\frac{\Delta T_1}{T_1} = 77\%$ . Ponieważ zaś współczynnik  $T_1$  w przypadku członów z inercją wyższego rzędu wchodzi do wzorów na współczynniki z nieparzystymi indeksami, (por.wzory (2.12)) dokładność pomiaru współczynnika  $T_1$  ma decydujące znaczenie.

W celu zwiększenia dokładności pomiaru współczynnika  $T_1$  członów, których funkcja przejścia posiada bieguny zespolone, bez konieczności stosowania zbyt skomplikowanych środków technicznych dla stabilizacji częstotliwości sygnału pomiarowego i uzyskania dużej dokładności pomiaru częstotliwości, zmienimy nieco omówioną poprzednio metodę pomiaru w odniesieniu do takich członów, uzupełniając pomiary częstotliwości  $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_m$  dla założonych wartości kąta przesunięcia fazowego według wzorów (2.13), dodatkowym pomiarem kąta przesunięcia fazowego  $\varphi_1 = \arctg z$  przy częstotli-

wości  $\omega'_1 = k \cdot \omega_2$  gdzie  $0 < k < 1$ . Wówczas dla współczynnika  $T_1$  operatorowej funkcji przejścia liniowego członu z inercją siódmego rzędu otrzymano wyrażenie:

$$T_1 = \frac{z}{k\omega_2} \frac{(1 - k^2)(1 - k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_4^2})(1 - k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_6^2})}{(1 - k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2})(1 - k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_5^2})(1 - k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_7^2})} \quad (2.21)$$

We wzorze tym wartość  $k$  jest określona, znana i stała. W praktyce takie warunki dla  $k$  można uzyskać przez zastosowanie w generatorze elektromechanicznym szeregu przekładni zębatach, pomiędzy dwoma identycznymi przemiennikami potencjometrycznymi lub selsynami. Przy określonym nastawieniu przekładni, stosunek częstotliwości na wyjściu potencjometrów lub selsynów będzie równy  $k$ , gdy pierwszy z nich będzie generował sygnał o częstotliwości  $\omega_2$ . Teraz uchyb systematyczny pomiaru współczynnika  $T_1$  wyrazi się dla członu z inercją IV-go rzędu zależnością:

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \pm \left[ \frac{\Delta z}{z} + \frac{1 + 3k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_4^2}}{1 - k^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_4^2}} \frac{\Delta \omega}{\omega} \right] \quad (2.22)$$

zaś dla członu z inercją II-go rzędu:

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \pm \left( \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right) \quad (2.23)$$

Dla uzupełnienia wyżej podanych zależności, należy przeanalizować czynnik  $\Delta z/z$ . Uwzględniając, że  $z = \operatorname{tg} \varphi_1$ , otrzymamy:

$$\frac{\Delta z}{|z|} = \frac{2 \varphi_1'}{\sin 2 \varphi_1'} \cdot \frac{\Delta \varphi_1'}{|\varphi_1'|} \quad (2.24)$$

Ponieważ  $\frac{2 \varphi_1'}{\sin 2 \varphi_1'}$  jest stosunkiem łuku do długości cięciwy

dla kąta wewnętrznego  $\alpha = 2 \varphi_1'$ , więc wyrażenie to jest nie mniejsze od jedności. Z analizy tego wyrażenia wynika, że kąt przesunięcia fazowego  $\varphi_1'$  zmierzony dla częstotliwości  $\omega_1 = k \omega_2$  nie powinien przyjmować wartości większych niż  $\pi/4$ , jeśli ma ono przyjmować wartości mniejsze od 2. Uchyb względny  $\Delta z/z$  jest iloczynem dwóch czynników (por. wzór 3.12), mogą więc zachodzić dwa przypadki:

- 1) Uchyb względny pomiaru kąta  $\varphi_1'$  jest stały
- 2) Uchyb bezwzględny pomiaru kąta  $\varphi_1'$  jest stały

Na rys.1 przedstawiono rodzinę krzywych  $\Delta z/z = f(D)$  dla członów proporcjonalnych i różniczkujących z inercją drugiego rzędu. Wykres sporządzono przy  $k =$  parametr oraz

$$\frac{\Delta \varphi_1'}{|\varphi_1'|} = 1 \% = \text{const.}$$

Z rys.1 wynika, że w przeciwieństwie do poprzedniego omówionego przypadku, teraz najdokładniejsze wyniki pomiaru stałej czasowej  $T_1$  otrzymuje się gdy  $D \ll 1$ . Przedstawione krzywe tracą jednakże ważność dla członów całkujących z inercją drugiego rzędu dla których ogólnie rzecz biorąc, uchyb systematyczny pomiaru  $T_1$  będzie w tych samych warunkach większy. Jak się jednak wydaje, możliwość praktycznej realizacji takich warunków pomiaru by

$$\frac{\Delta \varphi_1'}{|\varphi_1'|} = \text{const}$$

nie istnieją. Z tego też względu o wiele ważniejszą rolę odgrywa przypadek drugi, zachodzący często w praktyce. Funkcję  $\Delta z/z = f(D)$  przedstawiono wykreślnie na rys.2. przy założeniu  $k = \frac{\omega_1}{\omega_2} =$  parametr oraz  $\Delta \varphi_1' = 1^\circ = \text{const.}$ , przy



czym krzywe z rys.2 zachowują ważność dla wszystkich członów z inercją drugiego rzędu. Z rys.2. widać, że funkcja  $\Delta z/z = f(D)$  osiąga minimum dla  $\varphi'_1 \approx (2s - 1) \frac{\pi}{4}$ , gdzie  $s$  - liczba całkowita. Przy odpowiednim doborze współczynnika  $k$  są teraz możliwe pomiary współczynnika  $T_1$  ze znacznie większą dokładnością niż w poprzednio omówionym przypadku. Wracając do przykładu, otrzymamy teraz przy założeniach

$\frac{\Delta \omega}{\omega} = 1\%$  oraz  $\Delta \varphi'_1 = 1^\circ$  przy  $k = 0,9$  uchyb systematyczny  $\Delta T_1/T_1 = 5,6\%$ . Przy  $k \approx 0,95$ , uchyb osiąga minimum, którego wartość jest  $4,6\%$ .

Jako trzeci należy rozważyć przypadek, gdy nie mierzy się bezpośrednio kąta  $\varphi'_1$  lecz bezpośrednio lub pośrednio  $z = \text{tg } \varphi'_1$ . Przykładem takiego pomiaru może być pomiar w układzie firmy Solartron. W wyniku pomiaru otrzymuje się w tym układzie składową  $A_r = A \cos \varphi'_1$  będącą w fazie z sygnałem wejściowym badanego członu oraz składową  $A_b = A \sin \varphi'_1$  przesuniętą w fazie o  $90^\circ$  względem sygnału wejściowego. Wynika stąd, że:

$$z = \text{tg } \varphi'_1 = \frac{A_b}{A_r}$$

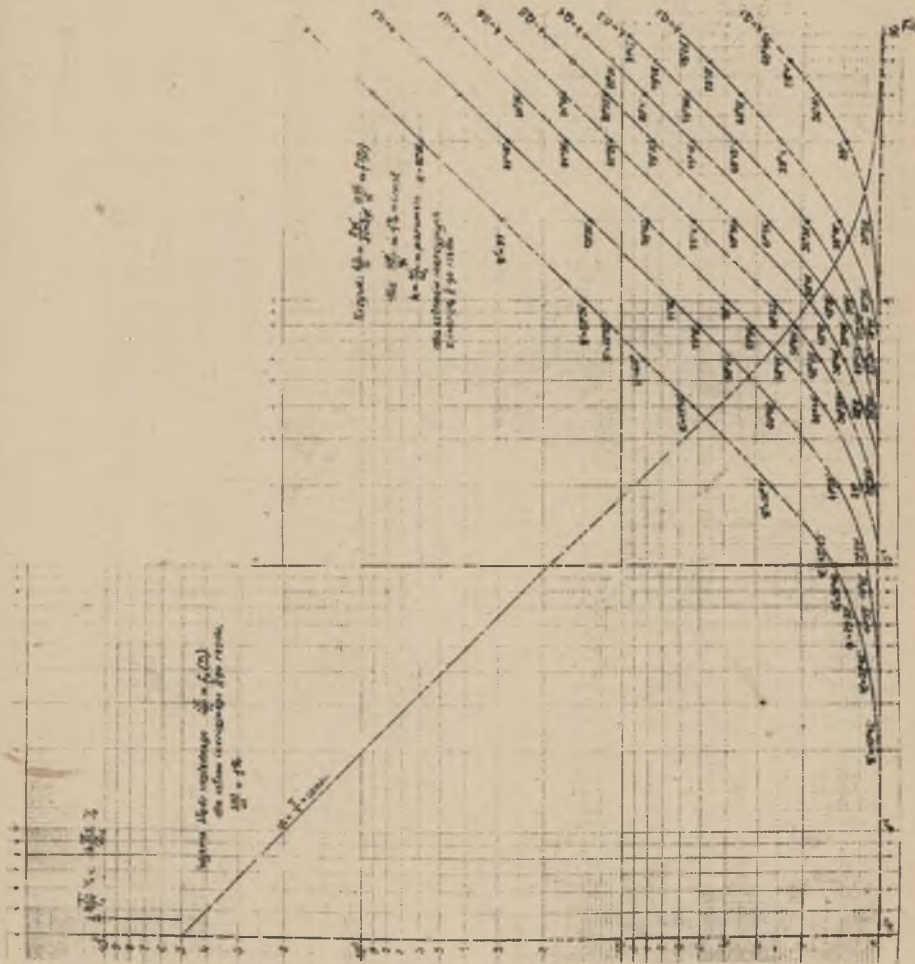
a uchyb względny pomiaru  $z$ :<sup>x)</sup>

$$\frac{\Delta z}{z} = \pm \left( \frac{\Delta A_r}{A_r} + \frac{\Delta A_b}{A_b} \right)$$

Według katalogów firmy Solartron  $\Delta A_r/A_r = \Delta A_b/A_b = 2\%$ , a zatem  $\Delta z/z = 4\%$ . Zakładając ponadto  $\frac{\Delta \omega}{\omega} = 2\%$ , otrzymamy dla członów z inercją drugiego rzędu uchyb systematyczny pomiaru współczynnika  $T_1$  równy  $6\%$ , niezależnie od rodzaju biegunów funkcji przejścia badanego członu.

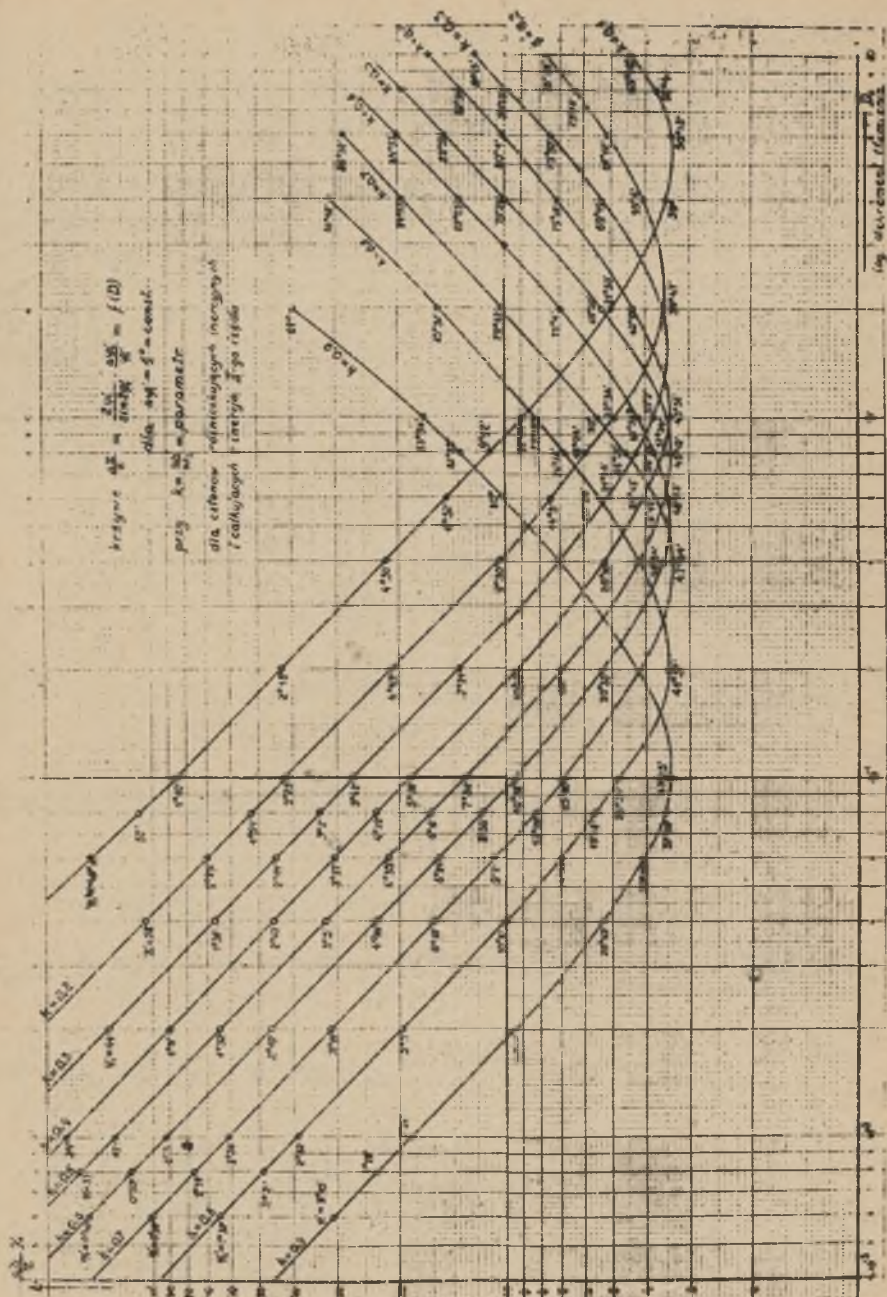
\* Po przekonstruowaniu układu firmy Solartron tak by możliwy był pomiar  $T_1$  w myśl zależności (3.9).





Rys.1. Wykres błędu względnego  $T_1/T_1 = f_1(D)$  dla członu z inercją drugiego rzędu, oraz krzywe  $z/z = f(D)$  dla członów z inercją drugiego rzędu





Rys.2. Krzywe  $\Delta z/z = f(D)$  dla  $\Delta \varphi_1 = 1^\circ = \text{const.}$  dla członów z inercją drugiego rzędu





### 3. POMIAR WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH CZŁONÓW O FUNKCJI PRZEJŚCIA POSIADAJĄCEJ JEDNO MIEJSCE ZEROWE

Opisana poprzednio metoda wyznaczania współczynników operatorowej funkcji przejścia mającej jednonian  $p$  w liczniku zawodzi w odniesieniu do członów, mających w liczniku ich operatorowej funkcji przejścia wielomian  $p$ , gdyż prowadzi ona do konieczności rozwiązywania równań algebraicznych wyższego stopnia już dla stosunkowo prostych członów. Poniżej opisany zostanie sposób postępowania, pozwalający wyznaczyć współczynniki operatorowych funkcji przejścia typu:

$$K_X(p) = \frac{V_n(1 + pT_n)}{1 + pT_1 + \dots + p^{\frac{m}{T_m}} T_m} \quad (3.1)$$

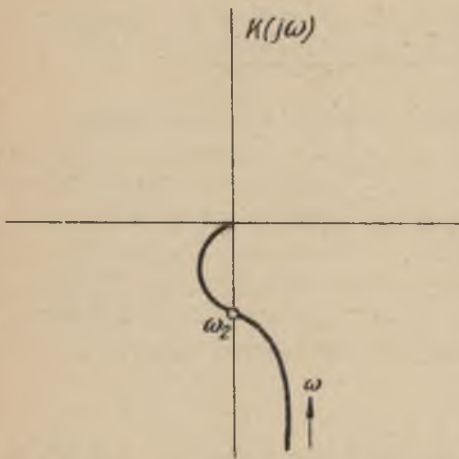
$$K_X(p) = \frac{V_n(1 + pT_n)}{pT_n(1 + pT_1 + \dots + p^{\frac{m}{T_m}} T_m)} \quad (3.2)$$

Założmy, że badany człon ma funkcję przejścia:

$$K_X(p) = \frac{V(1 + \frac{1}{pT_n})}{1 + pT_1 + p^2 T_2^2} = \frac{V(1 + pT_n)}{pT_n(1 + pT_1 + \dots + p^{\frac{m}{T_m}} T_m)} \quad (3.3)$$

Widmowa funkcja przejścia:

$$K_X(j\omega) = \frac{V(1 + j\omega T_n)}{j\omega T_n(1 + j\omega T_1 - \omega^2 T_2^2)}$$



Rys.3. Charakterystyka widmowa członu P-I

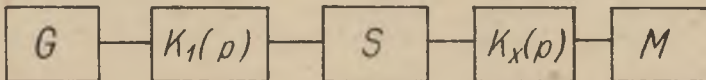
Charakterystykę widmową przedstawia rys.3. W celu wyznaczenia wszystkich współczynników funkcji przejścia (3.3) połączymy łańcuchowo z badanym członem (rys.4) człon różniczkujący pierwszego rzędu z inercją pierwszego rzędu o funkcji przejścia:

$$K_1(p) = \frac{pT_i}{1 + pT_i} \quad (3.4)$$

przy czym zakładamy, że stała czasowa  $T_i$  tego członu jest znana. Przy założeniu, że człony

$K_1(p)$  i  $K_x(p)$  nie obciążają się wzajemnie, otrzymamy wypadkową funkcję przejścia:

$$K_{1x}(p) = K_1(p) \cdot K_x(p) = \frac{Q(1 + pT_n)}{1 + pT_a + pT_b^2 + pT_c^3} \quad (3.5)$$



Rys.4. Blokowy schemat układu do pomiaru współczynników funkcji przejścia członu P-I. Oznaczenia: G - generator sygnału sinusoid.;  $K_1(p)$  - człon pomocniczy o funkcji przejścia danej wyrażeniem (3.4); S - separator;  $K_x(p)$  - badany człon; M - miernik przesunięcia fazowego i stosunku amplitud;

gdzie:

$$Q = \frac{T_i V}{T_n}; \quad T_a = T_1 + T_i; \quad T_b^2 = T_2^2 + T_1 T_i; \quad T_c^3 = T_2^2 T_i$$

..... (3.5b)

Widmowa funkcja przejścia:

$$K_{1x}(j\omega) = Q \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_n^2}{(1 - \omega^2 T_b^2)^2 + \omega^2 (T_a^2 - \omega^2 T_c^3)^2}} e^{j \varphi_{x1}}$$

gdzie:

$$\varphi_{x1} = \varphi_1 - \varphi_2$$

zaś

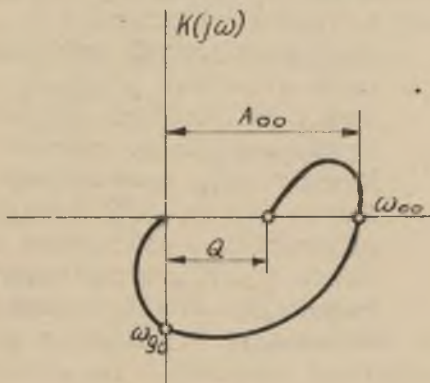
$$\varphi_1 = \arctg \omega T_n; \quad \varphi_2 = \arctg \frac{\omega (T_a - \omega^2 T_c^3)}{1 - \omega^2 T_b^2}$$

Charakterystykę widmową odpowiadającą funkcji  $K_{1x}(p)$  przedstawia rys.5.

Należy wykonać pomiary:

- 1) w stanie ustalonym przy  $\varphi_{x1} = 0$  mierzymy  $Q$ ,
- 2) przy  $\varphi_{x1} = 0$  mierzymy częstotliwość  $\omega_{00}$  i amplitudę  $A_{00}$ . Wówczas obowiązują zależności:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \operatorname{tg} \varphi_2 \\ \omega_{00} T_n &= \frac{\omega_{00} (T_a - \omega_{00}^2 T_c^3)}{1 - \omega_{00}^2 T_b^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$



Rys.5. Charakterystyka widmowa członu o funkcji przejścia  $K_{1x}(p)$  danej wyrażeniem (3.5).

Po uwzględnieniu (3.4) otrzymamy dla stosunku amplitud wyrażenie:

$$A_{\infty} = \frac{Q}{1 - \omega_{\infty}^2 T_b^2} \quad (3.5)$$

Gdybyśmy mieli do czynienia z członem proporcjonalnym z inercją, o takich samych wartościach współczynników operatorowej funkcji przejścia jak we wzorze (3.5), obowiązywałaby w myśl wzorów (2.12) przy  $\varphi'_2 = -\pi/2$  zależność:

$$T_b^2 = \frac{1}{\omega_2^2} \quad (3.6)$$

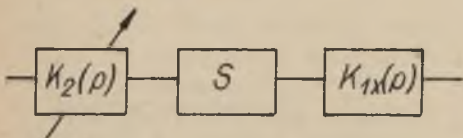
Podstawiając (3.6) do (3.5), otrzymamy:

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{\infty}^2}{1 - \frac{Q}{A_{\infty}}} \quad (3.7)$$

Ze wzoru tego można wyliczyć  $\omega_2$ , gdyż  $\omega_{\infty}$ ,  $Q$  i  $A_{\infty}$  są znane z pomiarów. Łączymy teraz z członem  $K_{1x}(p)$  łańcuchowo człon proporcjonalny z inercją I-go rzędu (rys.6) o funkcji przejścia:

$$K_2(p) = \frac{1}{1 + p T'_n}$$

Człon ten jest zbudowany w ten sposób, że wartość stałej czasowej  $T'_n$  może być zmieniana w szerokich granicach.



Rys. 6

Następny pomiar wykonujemy w układzie z rys.6. Jeśli do pomiaru użyjemy kompensacyjnego układu Kornów [6], nastawiamy kąt  $\varphi'_2 = -\pi/2$  i częstotliwość  $\omega_2$  obliczoną ze wzoru (3.7), a następnie regulując stałą czasową

$T'_n$  dostrajamy układ Kornów do równowagi. W układzie pomiarowym firmy Solartron nastawiamy generator na częstotliwość  $\omega_2$  i regulujemy  $T'_n$  dopóty, dopóki wskazówka wa-



tomierza wskazującego składową będącą w fazie z sygnałem pomiarowym nie wskaże wartości zero, wówczas mamy:

$$T'_n = T_n$$

co oznacza:

$$K_{2x}(p) = \frac{Q(1 + pT_n)}{1 + pT_a + p^2T_b^2 + p^3T_c^3} \cdot \frac{1}{1 + pT_n} =$$

$$= \frac{Q}{1 + pT_a + p^2T_b^2 + p^3T_c^3}$$

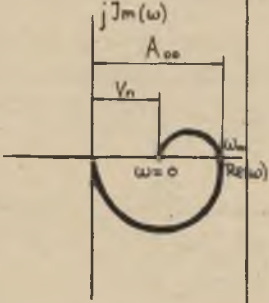
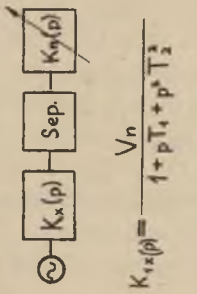
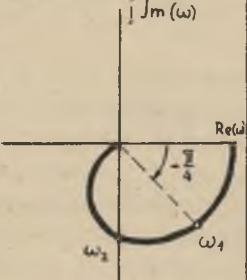
Otrzymaliśmy zatem funkcję przejścia członu proporcjonalnego z inercją III-go rzędu, przy czym znane są już współczynniki  $Q$ ,  $T_b^2$ , i  $T'_n$  tego członu. Pozostałe współczynniki, tj.  $T_a$  i  $T_c^3$  wyznaczmy według metody przedstawionej w rozdziale 2, posługując się wzorami (2.12). Uwzględniając zależności (3.5b) znajdziemy:

$$T_2 = \frac{T_c^3}{T_i}; \quad T_1 = T_a - T_i; \quad V = \frac{Q T_n}{T_i};$$

W stosunku do członów typu P - D postępowanie upraszcza się, gdyż nie zachodzi wówczas potrzeba łańcuchowego łączenia z badanym członem pomocniczego członu różniczkującego o stałej czasowej  $T_i$ . Tabele IV - IX zawierają dane dotyczące sposobów pomiaru członów proporcjonalno-różniczkujących z inercją do IV-go rzędu włącznie i członów proporcjonalno-całkujących z inercją do III-go rzędu włącznie.

T A B L I C A IV

Człony proporcjonalno-różniczkujące z inercją II-go rzędu

Opera- cja	Operatorowa funk- cja przejścia i schemat blokowy	Charakterystyka ampli- tudowo - fazowa	Wzory na współcz. oper. f. przejścia
	$K_X(p) = \frac{V_n (1 + pT_n)}{1 + pT_1 + p^2 T_2^2}$		
1	<p>Wykonuje się pomiary:</p> <p>1) dla <math>\omega = 0</math> pomiar wartości <math>V_n</math> (w stanie ustalonym)</p> <p>2) dla <math>\varphi_{oo} = 0</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_{oo}</math> i stosunki amplitud <math>A_{oo}</math></p>		
2	<p>łańcuchowe połączenie członu badanego o funkcji przejścia <math>K_X(p)</math> z członem</p> <p>o funkcji przejścia <math>K_N(p) = \frac{1}{1 + pT_n}</math> w którym stała czasowa <math>T_n</math> może być regulowa- wana</p>		
3	<p>Przy częstotliwości <math>\omega_2^2 = \frac{\omega_{oo}^2}{1 - \frac{V_n}{A_{oo}}}</math> takie nastawienie <math>T_n'</math> by <math>\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}</math></p>		
			$T_n = T_n'$ $T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2}$ $\omega_2^2 = \frac{\omega_{oo}^2}{1 - \frac{V_n}{A_{oo}}}$
4	<p>Przy kącie <math>\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_1</math></p>		
	$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)$		

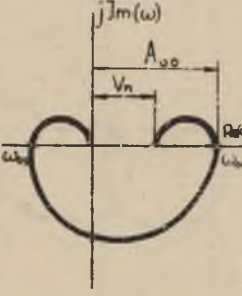
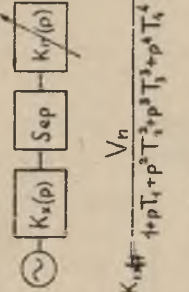
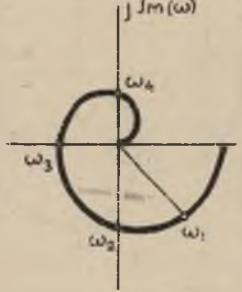
T A B I C A V

Człony proporcjonalno-różniczkujące z inercją III-go rzędu

Człony	Operatorowa funkcja przejścia i schemat blokowy	Charakterystyka amplitudowo - fazowa	Wzory na współczynniki operatorowej funkcji przejścia
	$K_X(p) = \frac{V_n(1+pT_n)}{1+pT_1+p^2T_2^2+p^3T_3^3}$		
1	<p>Wykonuje się pomiary:</p> <p>1) dla <math>\omega = 0</math> - pomiar wartości <math>V_n</math> (w stanie ustalonym)</p> <p>2) dla <math>\varphi_{00} = 0</math> - pomiar częstotliwości <math>\omega_{00}</math> i stosunku amplitud <math>A_{00}</math></p>		
2	<p>Konieczne połączenie członu badanego o funkcji przejścia <math>K_X(p)</math> z członem o funkcji przejścia <math>K_n(p) = \frac{1}{1+pT_n}</math>, w którym stała czasowa <math>T_n</math> może być regulowana</p>		
3	<p>Przy częstotliwości <math>\omega_2^2 = \frac{\omega_{00}^2}{1 - \frac{V_n}{A_{00}}}</math> takie nastawienie <math>T_n</math> by <math>\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}</math></p>		
			<p><math>T_n = T_n'</math></p> <p><math>T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2}</math></p> <p><math>\omega_2^2 = \frac{\omega_{00}^2}{1 - \frac{V_n}{A_{00}}}</math></p>
4	<p>Przy kącie <math>\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_1</math></p>		<p><math>T_1 = \frac{1}{\omega_1} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)</math></p>
5	<p>Przy kącie <math>\varphi_2 = -\pi</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_3</math></p>		<p><math>T_3^2 = \frac{1}{\omega_3^2} T_1</math></p>

T A B L I C A VI

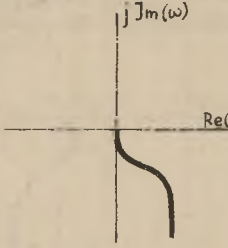
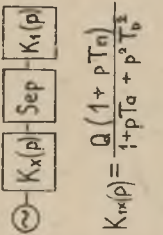
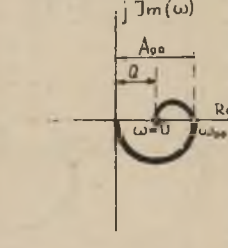
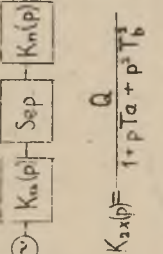
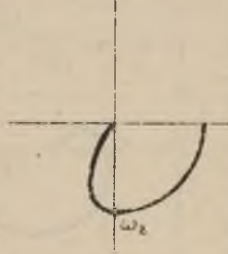
Człony proporcjonalno-różniczkujące z inercją IV-go rzędu

Opera- cja	Operatorowa funk- cja p rzejścia i schemat blokowy	Charakterystyka ampli- tudowo - fazowa	Wzory na współczyn- niki operatorowej funkcji przejścia
	$K_X(p) = \frac{V_n (1 + p T_n)}{1 + p T_1 + p^2 T_2^2 + p^3 T_3^3 + p^4 T_4^4}$		
1	<p>Wykonuje się pomiary:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>dla <math>\omega = 0</math> pomiar wartości <math>V_n</math> (w stanie ustalonym)</li> <li>dla <math>\varphi_{00} = 0</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_{00}</math> stosunku amplitud <math>A_{00}</math></li> <li>dla <math>\varphi_{02} = -\pi</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_{02}</math> i stosunku amplitud <math>A_{02}</math></li> </ol>		
2	<p>kancuchowe połączenia członu badanego o funkcji przejścia <math>K_X(p)</math> z członem o funkcji przejścia <math>K_N(p) = \frac{1}{1 + p T_n'}</math> w którym stała czasowa <math>T_n'</math> może być regulowana</p>		
3	<p>Przy częstotliwości nastawienie <math>T_n'</math></p>	$\omega_3^2 = \frac{A_{00} \omega_{00}^2 - A_{02} \omega_{02}^2}{A_{00} - A_{02}}$ <p>by <math>\varphi_3 = -\pi</math></p>	
			$T_n = T_n'$ $T_3^3 = \frac{1}{\omega_3^2} T_1$ $\omega_3^2 = \frac{A_{00} \omega_{00}^2 - A_{02} \omega_{02}^2}{A_{00} - A_{02}}$
4	<p>Pomiar częstotliwości <math>\omega_1</math> przy <math>\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}</math></p>		$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \frac{(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}) \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}}$
5	<p>Pomiar częstotliwości <math>\omega_2</math> przy <math>\varphi_2 = \frac{\pi}{2}</math></p>		$T_2^2 = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_4^2}$
6	<p>Pomiar częstotliwości <math>\omega_4</math> przy <math>\varphi_4 = -3 \frac{\pi}{2}</math></p>		$T_4^4 = \frac{1}{\omega_2^2 \omega_4^2}$



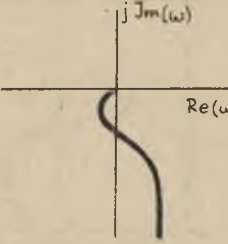
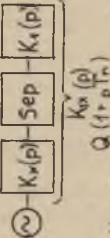
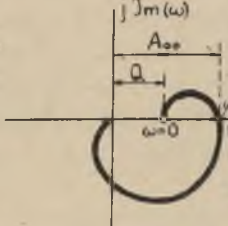
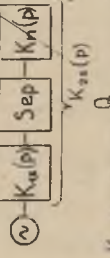
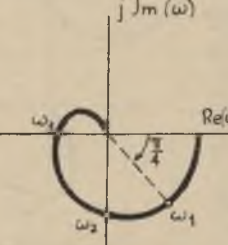
T A B L I C A VII

Człony proporcjonalno-całkujące z inercją I-go rzędu

Opera- cja	Operatorowa funk- cja przejścia i schemat blokowy	Charakterystyka ampli- tudowo - fazowa	Wzory na współczyn- niki operatorowej funkcji przejścia
	$K_x(p) = \frac{V_n(1+pT_n)}{pT_n(1+pT_1)}$		
1	<p>Łączeniowe połączenie badanego członu z członem inercyjnym I-go rzędu o funkcji przejścia:</p>	$K_1(p) = \frac{pT_i}{1+pT_i}$ <p>gdzie <math>T_i</math> - znana stała czasowa</p>	
	 $K_x(p) = \frac{Q(1+pT_n)}{1+pT_a+p^2T_b^2}$		$Q = \frac{V_n T_i}{T_n}$ $T_a = T_1 + T_i$ $T_b^2 = T_1 + T_i$
2	<p>Wykonuje się pomiary:</p> <p>1) dla <math>\omega_0 = 0</math> pomiar wartości <math>Q</math> (w stanie ustalonym)</p> <p>2) dla <math>\varphi_{00} = 0</math> pomiar częstotliwości <math>\omega_{00}</math> i <math>A_{00}</math></p>		
3	<p>Łączeniowe połączenie układu o funkcji przejścia <math>K_{1x}(p)</math> z członem o funkcji przejścia <math>K_n(p) = \frac{1}{pT_n+1}</math> w którym stała czasowa <math>T_n</math> może być regulowana</p>		
4	<p>Przy częstotliwości <math>\omega_2^2 = \frac{\omega_{00}^2}{1 - \frac{Q}{A_{00}}}</math> takie nastawienie <math>T_n</math> by <math>\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}</math></p>		
	 $K_{2x}(p) = \frac{Q}{1+pT_a+p^2T_b^2}$		$T_n = T_n$ $T_b^2 = \frac{1}{\omega_2^2}$ $\omega_2^2 = \frac{\omega_{00}^2}{1 - \frac{Q}{A_{00}}}$ $T_1 = \frac{T_b^2}{T_i}$ $V_n = \frac{Q T_n}{T_i}$

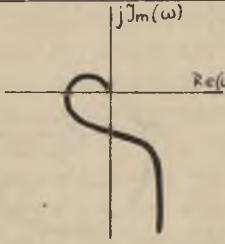
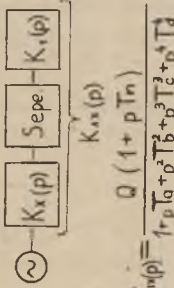
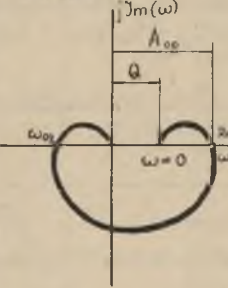
T A B L I C A VIII

Człony proporcjonalno-całkujące z inercją drugiego rzędu

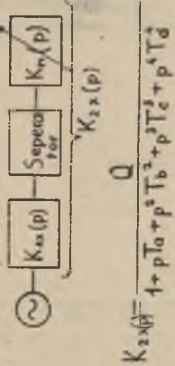
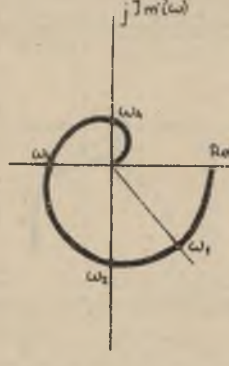
Opera- cja	Operatorowa funk- cja przejścia i schemat blokowy	Charakterystyka ampli- tudowo - fazowa	Wzory na współczyn- niki operatorowej funkcji przejścia
	$K_1(p) = \frac{V_n(1+pT_n)}{pT_n(1+pT_1+p^2T_2)}$		
1	<p>Łącuchowe połączenie <del>badanego</del> członu z członem inercyjnym I-go rzędu o funkcji przejścia</p>	$K_1(p) = \frac{pT_1}{1+pT_1}$ gdzie $T_1$ - znana stała czasowa	
	 $K_n(p) = \frac{K_n(p)}{1+pT_n}$ $K_{12}(p) = \frac{K_n(p)}{1+pT_0+p^2T_2+pT_1^2}$		$Q = \frac{V_n T_1}{T_n}$ $T_0 = T_1 + T_1$ $T_b^2 = T_2^2 + T_1 T_1$ $T_c^2 = T_2^2 T_1$
2	<p>Wykonuje się pomiary:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>dla <math>\omega_0 = 0</math> - pomiar wartości <math>Q</math> (w stanie ustalonym)</li> <li>dla <math>\gamma_{00} = 0</math> - pomiar częstotści <math>\omega_{00}</math> i <math>A_{00}</math></li> </ol>		
3	<p>Łącuchowe połączenie układu o funkcji przejścia <math>K_n(p)</math> z członem o funkcji przejścia <math>K_n(p) = \frac{1}{1+pT_n}</math> w którym stała czasowa <math>T_n</math> może być regulowana</p>		
4	<p>Przy częstotści <math>\omega_2^2 = \frac{\omega_{00}^2}{1 - \frac{Q}{A_{00}}}</math> takie postawienie <math>T_n</math> by <math>\gamma_2 = -\frac{\pi}{2}</math></p>		
	 $K_{12}(p) = \frac{K_n(p)}{1+pT_0+p^2T_2+pT_1^2}$		$T_n = T_n'$ $T_b^2 = \frac{1}{\omega_2^2}$ $T_2^2 = \frac{T_1}{T_1}$ $T_1 = \frac{T_b^2 - T_2^2}{T_1}$ $V_n = \frac{Q T_n}{T_1}$
5	<p>Przy <math>\gamma_3 = -\pi</math> - pomiar <math>\omega_3</math></p>		$T_c^3 = \frac{1}{\omega_3^2} \cdot T_0$
6	<p>Przy <math>\gamma_1 = -\frac{\pi}{4}</math> - pomiar <math>\omega_1</math></p>		$T_0 = \frac{1}{\omega_1} \frac{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}} \frac{1}{\omega_1}$

T A B L I C A IX

Człony proporcjonalno-całkujące z inercją trzeciego rzędu

Opera- cja	Operatorowa funk- cja przejścia i schemat blokowy	Charakterystyka am- plitudowo - fazowa	Wzory na współczynn- niki operatorowej funkcji przejścia
	$K_1(p) = \frac{V_n (1+pT_n)}{pT_n(1+pT_1+p^2T_2+p^3T_3)}$		
1		<p>Łanuchowe połączenie badanego członu z członem inercyjnym I-go rzędu o funkcji przejścia <math>K_1(p) = \frac{pT_i}{1+pT_i}</math> gdzie <math>T_i</math> - znana stała czasowa</p>	
	 $K_w(p) = \frac{Q(1+pT_n)}{(1+pT_1+p^2T_2+p^3T_3)}$		$Q = \frac{\sqrt{T_i}}{T_n}$ $T_0 = T_1 + T_i$ $T_b^2 = T_2^2 + T_1 T_i$ $T_c^3 = T_2^2 T_i + T_3^3$ $T_d^4 = T_3^2 T_i$
2		<p>Wykonuje się pomiary:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) dla <math>\omega_0 = 0</math> - pomiar wartości <math>Q</math> (w stanie ustalonym)</li> <li>2) dla <math>\varphi_{00} = 0</math> - pomiar częstotliwości <math>\omega_{00}</math> i <math>A_{00}</math></li> <li>3) dla <math>\varphi_{02} = -\pi</math> - pomiar częstotliwości <math>\omega_{02}</math> i amplitudy <math>A_{02}</math></li> </ol>	
3		<p>Łanuchowe połączenie układu o funkcji przejścia <math>K_{1x}(p)</math> z członem o funkcji przejścia <math>K_N(p) = \frac{1}{1+pT_n'}</math> w którym stała czasowa <math>T_n'</math> może być regulowana</p>	
4		<p>Przy częstotliwości <math>\omega_3 = \frac{A_{00}\omega_{00}^2 - A_{02}\omega_{02}^2}{A_{00} - A_{02}}</math> takie nastawienie <math>T_n'</math> by <math>\varphi_3 = -\pi</math></p>	

c.d. tabl. II

Opera- cja	Operatorowa funkcja przejścia i schemat blokowy	Charakterystyka amplitudowo - fazowa	Wzory na wpezyn- niki operatorowej funkcji przejścia
	 $K_{sz}(p) = \frac{Q}{1 + pT_0 + p^2T_b^2 + p^3T_c + p^4T_d}$		
5	Przy $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ pomiar $\omega_1$		$T_0 = \frac{1}{\omega_1} \frac{(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2})(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2})}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_4^2}}$
6	Przy $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ pomiar $\omega_2$		$T_b^2 = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_4^2}$
7	Przy $\varphi_4 = -3\frac{\pi}{4}$ pomiar $\omega_4$		$T_d^4 = \frac{1}{\omega_4^4 \omega_2^2}$



## 4. POMIAR WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH CZŁONÓW Z OPÓŹNIENIEM

Omówione poprzednio człony są typowymi członami minimalno fazowymi. Dla członów minimalno fazowych istnieje ścisły związek całkowy między charakterystyką amplitudową i fazową. W członach z opóźnieniem zmiana fazy spowodowanej istnieniem opóźnienia nie towarzyszy zmianie amplitudy. Mimo to ogólna zasada pomiaru współczynników operatorowej funkcji przejścia podana w rozdziale 2, tj. wykonywanie pomiarów stosunku amplitud i częstotliwości przy wartościach kąta przesunięcia fazowego określonych wzorami (2.13) nie traci swej ważności w odniesieniu do pewnych członów z opóźnieniem. Zachodzi jednakże potrzeba wyprowadzenia nowych wzorów dla poszczególnych współczynników operatorowej funkcji przejścia członu z opóźnieniem. Poniższe rozważania ograniczone zostaną do członów z opóźnieniem i inercją pierwszego rzędu.

Operatorowa funkcja przejścia członu z opóźnieniem i inercją pierwszego rzędu da się przedstawić w postaci:

$$K(p) = \frac{p^n v_n e^{-p\tau}}{1 + pT_1} = \frac{v_n p^n}{(1 + pT_1)e^{p\tau}} \quad (4.1)$$

Widmowa funkcja przejścia będzie zatem miała postać:

$$K(j\omega) = \frac{v_n (j\omega)^n}{(1 + j\omega T_1)(\cos \omega\tau + j\omega \sin \omega\tau)} = \frac{v_n}{\sqrt{(\cos \omega\tau - \omega T_1 \sin \omega\tau)^2 + (\omega T_1 \cos \omega\tau + \sin \omega\tau)^2}} e^{j\varphi} \quad (4.2)$$

a kąt przesunięcia fazowego:

$$\varphi = n \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \left( \frac{\omega T_1 \cos \omega T + \sin \omega T}{\cos \omega T - \omega T_1 \sin \omega T} \right) =$$

$$\text{arc tg} (-1)^{(n+1)} \left( \frac{\omega T_1 \cos \omega T + \sin \omega T}{\cos \omega T - \omega T_1 \sin \omega T} \right) (-1)^n \quad (4.3)$$

Dla stosunku amplitud znajdujemy zależność:

$$A = \frac{V_n^n}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \quad (4.4)$$

Wykonując jak podano w rozdziale 2 pomiar amplitudy i częstotliwości przy wartości kąta przesunięcia fazowego:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} (2n - 1)$$

znajdujemy na podstawie (4.4):

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{V_n^2 \omega_1^{2n}}{A_1^2} - 1} \quad (4.5)$$

Wykonując z kolei pomiar stosunku amplitud i częstotliwości przy następnej wartości kąta przesunięcia fazowego:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} (n - 1)$$

otrzymamy na podstawie (4.3):

$$\cos \omega_2 T - \omega_2 T_1 \sin \omega_2 T = 0$$

lub też:

$$\operatorname{ctg} \omega_2 T_1 = \omega_2 T_1 \quad (4.6)$$

Z (4.4) otrzymujemy natomiast:

$$\Lambda_2 = \frac{V_n \omega_2^n}{\sqrt{1 + \omega_2^2 T_1^2}} \quad (4.7)$$

Przedstawiając  $T_1$  według (4.5) otrzymamy:

$$V_n^2 = \frac{A_1^2 \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right)^2}{\omega_1^{2n} \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{A_1^2}{A_2^2}\right]}$$

i ostatecznie wszystkie wartości współczynników funkcji przejścia (4.1):

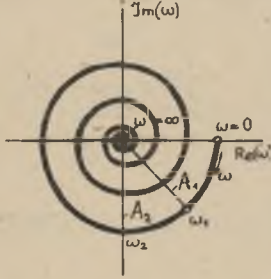


$$V_n = \frac{A_1}{\omega_1^n} \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{2(n-1)} \frac{A_1^2}{A_2^2}}} \quad (4.8)$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{\frac{A_1^2}{A_2^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{2n} - 1}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{2(n-1)} \frac{A_1^2}{A_2^2}}}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_2} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \omega_2 T_1$$

TABLICA I

Człony z opóźnieniem i inercją pierwszego rzędu

	Operatorowa funkcja przejścia	Krzywa amplitudowo fazowa	Wzory na współczynniki operatorowej funkcji przejścia
Inercyjny $n=0; m=1;$	$K(p) = \frac{V_n e^{-p\tau}}{1+pT_1}$		$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2};$ $V_n A_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \frac{A_1^2}{A_2^2}}}$ $T_1 = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \frac{A_1^2}{A_2^2}}}$ $\tau = \frac{1}{\omega_2} \text{arc ctg } \omega_2 T_1;$
Człokujący $n=-1; m=1;$	$K(p) = \frac{V_n e^{-p\tau}}{p(1+pT_1)}$		$\varphi_1 = -3\frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = -\pi;$ $V_n = A_1 \omega_2 \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}}}$ $T_1 = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{\frac{A_1^2}{A_2^2} \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}}}$ $\tau = \frac{1}{\omega_2} \text{arc ctg } \omega_2 T_1;$
Różniczkujący $n=1; m=1;$	$K(p) = \frac{V_n p e^{-p\tau}}{1+pT_1}$		$\varphi_1 = +\frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = 0;$ $V_n = \frac{A_1}{\omega_1} \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}}}$ $T = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{\frac{A_1^2}{A_2^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - 1}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}}}$ $\tau = \frac{1}{\omega_2} \text{arc ctg } \omega_2 T_1;$



## 5. PRAKTYCZNE SPRAWDZENIE METODY POMIAROWEJ

Przeprowadzone pomiary współczynników funkcji przejścia szeregu prostych liniowych członów automatyki w układzie kompensacyjnym Kornów i układzie firmy Solartron pozwoliły stwierdzić, że posługując się opisaną w 2.2 metodą można w sposób szybki i wygodny uzyskać wyniki poprawne, jeśli badany człon nie jest członem oscylacyjnym. Sposób pomiaru opisany w 2.3. (wzór 2.21) wymaga skonstruowania odpowiedniej aparatury pomiarowej. Z tego względu sprawdzenie tego sposobu pomiaru nie dokonano.

## 6. PODSUMOWANIE

Sapropozowane sposoby pomiaru mogą znaleźć zastosowanie jako punkt wyjściowy do:

- a) matematycznego modelowania układów automatyki,
- b) analizy i syntezy układów automatycznej regulacji,
- c) ilościowego stwierdzenia zgodności teorii z praktyką,
- d) określenia dynamicznych własności obiektów przemysłowych i konstruowanych elementów układu regulacyjnego.

Zamieszczona w pracy analiza uchybów pomiaru współczynników stanowi jak się wydaje pierwszą próbę tego rodzaju, gdyż we wszystkich dotychczas publikowanych pracach (np. [1] [2] [4] [5]) ocena uchybu miała charakter raczej jakościowy. Polegała ona bowiem na porównaniu charakterystyki widmowej obliczonej z charakterystyką widmową zmierzoną. Oszacowanie ilościowe uchybów pomiaru własności dynamicznych może stanowić krok w kierunku awansowania dotychczasowych metod eksperymentalnego badania własności dynamicznych do rangi pomiarów własności dynamicznych członów układu a.r. Ponadto dyskusja uchybu względnego pomiaru współczynników operatorowej funkcji przejścia prowadzi do ciekawego spostrzeżenia ogólnie ważnego dla wszystkich częstotliwościowych sposobów pomiaru, odnośnie zależności uchybu względnego od oscylacyjnych własności członu. Spostrzeżenie to i płynące z niego wnioski mogą stanowić podstawę do przyszłych konstrukcji aparatury pomiarowej, przeznaczonej do badania własności dynamicznych członów układu a.r.

Artykuł niniejszy stanowi streszczenie pracy doktorskiej wykonanej w Katedrze Elektroautomatyki Przemysłowej Politechniki Śląskiej pod kierownictwem p. Prof. dr inż. Stefana Węgrzyna, któremu autor pragnie w tym miejscu złożyć

najserdeczniejsze podziękowanie za zachętę do podjęcia tematu i okazaną pomoc w czasie pracy. Równocześnie autor składa serdeczne podziękowania za wiele cennych uwag pp. Recenzentom: p. Prof. Zygmuntowi Szparkowskiemu i p. Doc. dr inż. Władysławowi Findeisenowi.

## LITERATURA

- [1] G.I.Rabkin B.A.Mitrofanow, Ju Szterenberga: "Opriedelenije czislennych znaczenij koeficjentow pieredatocznych funkcji linearizowanych zwienijew i sistem po eksperimentalnym charakteristikam" Awtomatika i Telemechanika Nr 5. 1955 r.
- [2] K.Bopp: "Die Ermittlung der dynamischen Kennwerte eines Regelkreises aus Übergangsfunktion und Frequenzgang" Regelungstechnik H.9.1957.
- [3] A.A. Kardaszow, L.W.Karnjuszin: "Opriedelenije parametrow sistemy po eksperimentalnym (zadany) czastotnym charakteristikam" Awtomatika i Telemechanika Nr 4 1958.
- [4] E.E.Dudnilow: "Opriedelenije koeficjentow pieredatocznoj funkcji liniejnoj sistemy po naczialnomu uczastrku eksperimentalnoj amplitudo fazowej charakteristiki" Awtomatika i Telemechanika Nr 5 1959 r.
- [5] S.Ja. Berezin: "Eksperimentalnoje opriedelenije parametrow elementow sistem awtomatyczeskogo regulirowanija" Elektrichestwo Nr 4 1958 r.
- [6] G.A.Korn, T.M.Korn: "Modern servomechanism testers" - Electrical Engineering N.9. 1950/Vol.69.

## Частотные методы измерения коэффициентов передаточной функции линейных систем автоматического регулирования

### С о д е р ж а н и е

В статье разработано частотные методы измерения коэффициентов передаточной функции линейных элементов систем автоматического регулирования: а) с мономяном  $p$  в числителе передаточной функции, б) с двумямяном в числителе передаточной функции, в) с временным запаздыванием и инерцией первого порядка. Выведенные зависимости делают возможным легко и скоро определить величины коэффициентов а также позволяют проанализовать относительную ошибку измерений.

### The Frequency Response Techniques for the Determination of the Transfer Functions Coefficients

#### S u m m a r y

Measurement techniques are discussed, for the determination of the transfer function coefficients of the linear networks, by the frequency response approach. The given examples comprise: a) a differentiator ( $p$  in the numerator) b) a lead circuit ( $1+pT$  in the numerator) and c) a simple lag circuit with a time delay. The coefficients can be determined by the proposed method in a straight forward way and the errors can be easily estimated.