

ALFRED WIERUSZ KOWALSKI

Ośrodek Maszyn Matematycznych
"Prosynchem" GliwiceOKREŚLENIE CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNEJ
UKŁADÓW ZE SPRZEŻENIEM ZWROTNYM, METODĄ
ANALIZY KORELACYJNEJ LUB WIDMOWEJ(Dynamics of Feedback Systems
by Correlation and Spectral Analysis)

Streszczenie: Wyprowadzono zasadniczy związek korelacyjny pozwalający obliczyć charakterystykę obiektu z zapisów wielkości wyjściowej i wejściowej zdjętych w czasie normalnego ruchu obiektu. W przypadku pomiaru układów ze sprzężeniem zwrotnym, zależność ta może prowadzić do błędnych wyników. Podano sposób analizy układów zamkniętych, polegających na rejestracji trzeciej zmiennej niekorelowanej.

1. WSTĘP

Często zdarza się, że pomiar charakterystyk dynamicznych pracującego obiektu, za pomocą sztucznie wprowadzonych zaburzeń skokowych lub sinusoidalnych, jest trudny do urzeczywistnienia. Naruszenie normalnej pracy dużego obiektu przemysłowego, w rodzaju walcarki czy pieca martenowskiego, może być niedopuszczalne ze względów bezpieczeństwa lub z powodu wysokiego kosztu produktu. Brak aparatury pomiarowej, trudność wprowadzenia sygnału pomiarowego, wysoki poziom szumów, powodujący nieczytelność wykresów, mogą być dalszymi przyczynami utrudniającymi zdjęcie charakterystyk skokowych lub częstotliwościowych.

W tych wypadkach, statystyczna metoda obliczenia parametrów dynamicznych na podstawie zapisów zdjętych w czasie normalnego ruchu pozostaje jedynym praktycznym sposobem pomiaru. Metoda ta zaproponowana przez Reswicka i Goodmana (Lit.1) polega na równoczesnym zarejestrowaniu przebiegu wielkości wejściowej i wyjściowej obiektu oraz na obliczeniu na podstawie tych zapisów funkcji korelacji lub gęstości widmowych. Z funkcji tych można dalej obliczyć zależność dynamiczną między wejściem a wyjściem, bądź to w formie funkcji wagi (odpowiedzi na impuls jednostkowy), bądź też w postaci charakterystyki częstotliwości (przepustowości). Przypadkowe zaburzenia zewnętrzne i szумы wytwarzane wewnątrz układu sprawiają, że zapisy wyjścia i wejścia przybierają formę stacjonarnych przebiegów stochastycznych. Przebiegi te można opisać w dziedzinie czasowej za pomocą funkcji korelacji lub alternatywnie w dziedzinie częstotliwości za pomocą gęstości widmowych (Lit.2).

Dziś funkcje te nie są jedynie abstrakcyjnymi tworem statystyków, lecz konkretnymi wielkościami fizycznymi, które można zmierzyć na obiekcie lub obliczyć z zapisu zmiennej losowej. Funkcja korelacji charakteryzuje zaburzenie, podobnie jak funkcja wagi opisuje element pod względem dynamicznym.

Doświadczenie wykazało, że do prawidłowego zaprojektowania układu regulacyjnego potrzebna jest nie tylko znajomość anatomii obiektu tj. jego przepustowości, lecz także i patologii, czyli wielkości widna przypadkowych zaburzeń, na które obiekt jest narażony w normalnej eksploatacji. Liczne podręczniki projektowania serwomechanizmów omijają ten oczywisty i drażliwy problem przez przyjęcie w dość dowolny sposób pewnych kryteriów jakości (np. stosunek tłumienia, margines fazy) w zupełnym oderwaniu od otoczenia w jakim obiekt pracuje. Metody statystycznej oceny parametrów dostarczają danych zarówno co do obiektu, jak i co do jego warunków pracy i dlatego stanowią niezbędne narzędzie we współczesnej technice regulacyjnej. Serwomechanizmy okrętowe i samolotowe projektuje się dziś na podstawie danych doświadczalnych analizy widmowej. Okazało się bowiem, że fale morskie czy podmuchy wiatru mają nierównomierne widmo z uwydatnionymi rezonansami, wobec których tradycyjne metody syntezy zawodziły w praktyce.

Metody korelacyjne i widmowe mimo oczywistych zalet kryją w sobie sporo pułapek, wskutek przyjętych założeń, upraszczających dość skomplikowaną procedurę przekształcania danych pomiarowych. Zbyt liberalna interpretacja tych

uproszczeń prowadzić może do zasadniczych błędów pomiaru i obliczeń, dyskwalifikujących nie tyle metodę, ile nieostrożnego eksperymentatora. Należy pamiętać, że w praktyce ma się zazwyczaj do czynienia z procesami niestacjonarnymi, obiektami nieliniowymi, krótkim czasem pomiaru, ograniczoną szerokością pasma itd.

Pomiar przepustowości obiektu współpracującego z regulatorem z zamkniętym obwodzie dostarcza typowego przykładu niebezpieczeństw wynikających z bezkrytycznej interpretacji pozornie poprawnych wyników. Przy niesprzyjających warunkach można zamiast przepustowości obiektu zmierzyć funkcję bez znaczenia, zbliżoną nieco do przepustowości regulatora. Przydarzyło się to autorowi tej pracy.

Publikacja niniejsza, pierwsza z serii poświęconej pomiarom funkcji stochastycznych, omawia możliwe błędy występujące przy pomiarze układów ze sprzężeniem wzrotnym i podaje środki zaradcze dla ich uniknięcia.

2. PODSTAWOWA ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY FUNKCJAMI KORELACJI NA WEJŚCIU I WYJŚCIU ELEMENTU LINIOWEGO

Sygnał wyjściowy elementu liniowego $y(t)$ związany jest z sygnałem wejściowym $x(t)$ za pomocą operatora splotu.
(Rys.1a)

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(u) \cdot x(t - u) du \quad (2.1)$$

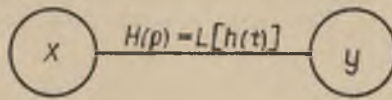
lub symbolicznie:

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (2.1a)$$

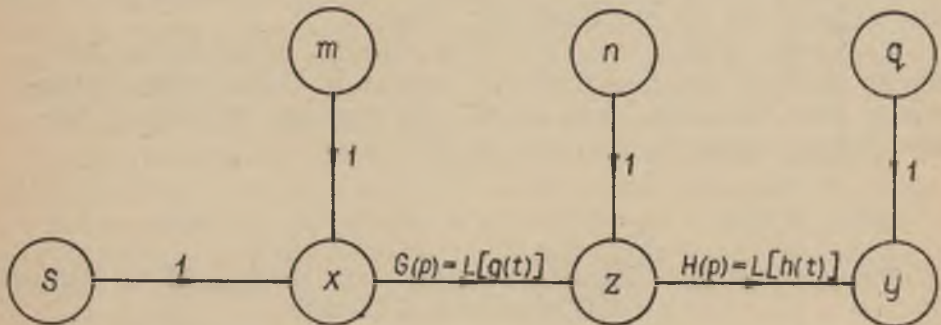
gdzie u jest zmienną pozorną, a $h(t)$ jest funkcją wagi czyli odpowiedzią elementu na impuls jednostkowy.

Pomnożmy obie strony równania 2.1 przez $x(t + \tau)$ i przeprowadźmy uśrednienie w czasie.

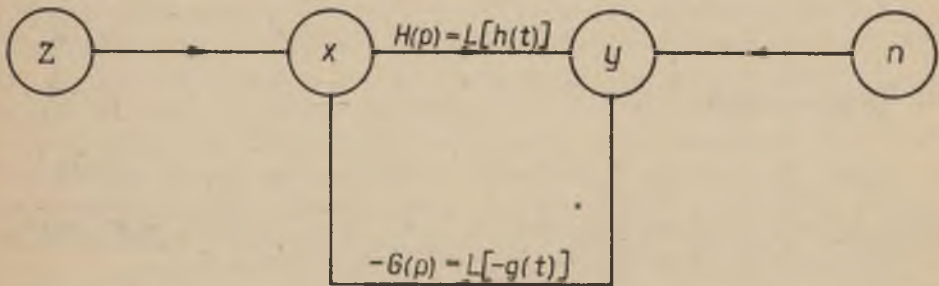
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) \int_0^{\infty} h(u) x(t - u) dt du \quad (2.2)$$



a)



b)



c)

Rys.1. Schematy przepływu sygnałów: a) prosty element jednokierunkowy; b) układ otwarty z szumami; c) układ ze sprzężeniem zwrotnym i szumami na wyjściu

Zmiana kolejności całkowania prowadzi do wzoru

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)y(t)dt = \int_0^{\infty} h(u) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t+\tau)x(t-u) dt du \quad (2.3)$$

lub symbolicznie:

$$\overline{x(t+\tau)y(t)} = h(\tau) * \overline{x(t+\tau)x(t)} \quad (2.3a)$$

Wyrażenia pod znakiem granicy w równaniu 2.3 lub pod kreską uśredniającą w równaniu (2.3a) odpowiadają definicjom funkcji korelacji własnej i wzajemnej między zmiennymi wejścia i wyjścia.

$$\varphi_{xx}(\tau) = \overline{x(t+\tau)x(t)} \quad (2.4a)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t+\tau)y(t)} \quad (2.4b)$$

Wynika stąd podstawowy związek korelacyjny.

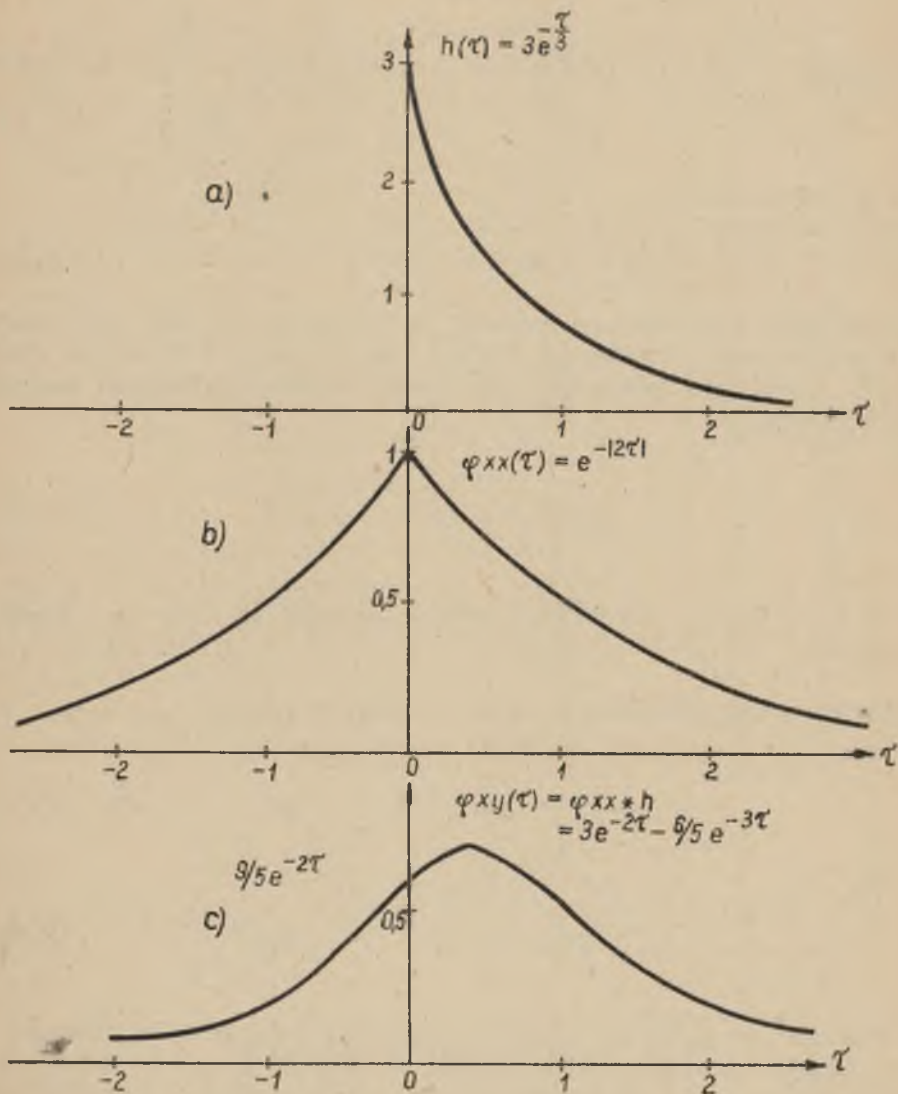
$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) \varphi_{xx}(\tau - u) du \quad (2.5a)$$

lub

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \quad (2.5b)$$

Związek ten może być również wyprowadzony metodą Wienera z warunku minimum kwadratu błędu (Lit 3) i w tej interpretacji może służyć do statystycznego linearyzowania elementów nieliniowych.

Formalnie równanie (2.5) jest identyczne z równaniem (2.1). Oznacza to, że jeśli na wejście elementu podamy symetryczny impuls o kształcie funkcji auto-korelacji φ_{xx} , na wyjściu pojawi się asymetryczny impuls o kształcie funkcji korelacji wzajemnej φ_{xy} . Rys(2 a,b,c) podaje liczbowy przykład i geometryczną interpretację zależności korelacyjnej



Rys.2. Funkcje korelacji na wyjściu i wejściu układu inercyjnego pierwszego rzędu pobudzonego kolorowym szumem

dla kolorowego szumu podanego na wejście układu inercyjnego pierwszego rzędu.

Posługiwanie się korelogramami zamiast oryginalnych funkcji jest celowe w wypadku, gdy te ostatnie są "wekńiste" i nieregularne tj. mogą być uważane za stacjonarne procesy stochastyczne.

Funkcje korelacji mają przebieg regularny, są gładkie i nadają się do analizy techniką analogową lub cyfrową. Ponadto przy pewnych założeniach (Lit 4), co do możliwości realizacji $h(t)$, można obliczyć transformatę Fouriera równania (2.5) i znaleźć explicite przepustowość badanego elementu $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{\Phi_{xy}(j\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)} \quad (2.5c)$$

gdzie $\Phi_{xy}(j\omega)$ jest wzajemną gęstością widmową wyjścia i wejścia, a $\Phi_{xx}(\omega)$ jest gęstością widmową wejścia.

Trzecią cenną zaletą jest zdolność eliminowania szumów zewnętrznych i wewnętrznych. Rozważmy układ dany na rys.1b, w którym $s(t)$ jest sygnałem użytecznym wejściowym, $z(t)$ - sygnałem pośrednim a m , n , q szumami niezależnymi od siebie i od wejścia. $\varphi_{xx} = \varphi_{xq} = 0$. Sygnały $s(t)$ i $z(t)$ nie mogą być bezpośrednio zmierzone; dostępne są jedynie wejście i wyjście układu $x(t)$ i $y(t)$, i na ich podstawie chcemy obliczyć wypadkową funkcję wagi

$$g(t) * h(t) = L^{-1} (G(p) \cdot H(p)) \quad (2.6)$$

Szum na wejściu, $m(t)$, jest traktowany na równi z sygnałem użytecznym jako wspólny sygnał wejściowy $x(t) = s(t) + m(t)$ i jest zjawiskiem pożądanym dla celów pomiarowych, gdyż powoduje wzbogacenie sygnału w harmoniczne i zwiększa ilość informacji przy wyższych częstotliwościach. Szerokość widma sygnału wejściowego winna być większa niż pasmo przepuszczania układu. Idealnym wejściem byłby biały szum, wtedy korelogram wzajemny byłby identyczny z funkcją wagi i nie wymagałby rozplatania.

Natomiast szum generowany wewnątrz układu $n(t)$ i szum na wyjściu $q(t)$ są niepożądane, gdyż powodują nieczytelność zapisu. Ponieważ jednak z założenia szumy te są niezależne od wejścia, mogą więc zostać skutecznie wyfiltrowane przez proces korelacji.

Związek opisujący układ z rys.1b może być określony równaniem splotu w dziedzinie czasowej

$$y = x * g * h + n * h + q \quad (2.7)$$

Korelacja równania (2.7) z $x(t + \tau)$, podobnie jak przy wprowadzeniu równania (2.5b), prowadzi do następującej zależności korelacyjnej:

$$\psi_{xy} = g * h * \psi_{xx} + h * \psi_{xn} + \psi_{xq} \quad (2.8)$$

Ponieważ założono niezależność sygnałów i szumów, dwa ostatnie człony równania (2.8) znikają i pozostaje wyrażenie analogiczne do równania (2.5b), z którego można obliczyć $g * h$ przez transformację Fouriera lub przez rozwiązanie całkowitego równania splotu metodami przybliżonymi. Zdolność eliminowania szumu spowodowana jest faktem, że funkcja korelacji wzajemnej podaje zależność y od x i tylko od x z pominięciem innych sygnałów (zasada watomierza przy pomiarze harmonicznym).

Podstawowy związek korelacyjny i wynikająca z niego zdolność eliminowania szumów zachodzą tylko dla układów o jednokierunkowym przepływie sygnałów i tracą ważność, gdy sygnał wejściowy skorelowany jest z szumem na wyjściu ($\psi_{xn} \neq 0$). To ostatnie zjawisko ma miejsce w zamkniętych układach regulacji lub w obiektach z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym. Szum na wyjściu zostaje wtedy zawrócony do wejścia i sumuje się ze zmianą znaku z sygnałem wejściowym. Ta cyrkulacja szumu wokół pętli przyczynia się do zniekształcenia funkcji korelacji wzajemnej ψ_{xy} . W następnym paragrafie rozważono konsekwencję zafałszowania pomiaru funkcji wagi skorelowanym szumem w układach ze sprzężeniem zwrotnym.

3. CYRKULACJA SZUMÓW W UKŁADACH ZE SPRZEŻENIEM ZWROTNYM

Rozważmy prosty układ zamknięty (rys.1c), w którym $z(t)$ jest zewnętrznym zaburzeniem lub sygnałem odniesienia, a $n(t)$ jest zastępczym szumem wewnętrznym przyłożonym do wyjścia układu. $H(p) = L(h(t))$ można interpretować jako przepustowość obiektu, zaś $G(p) = L(g(t))$ jako przepustowość regulatora $x(t)$ i $y(t)$ są sygnałami na wyjściu i wejściu obiektu.

Przypadek podobny może się też zdarzyć przy badaniu nieregulowanego obiektu z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym (np. walcarka wielostopniowa lub wzmacniacz półprzewodnikowy). Obiekt taki przenosi sygnały w dwóch kierunkach.

Układ z rys.1 c opisuje się równaniem

$$y(t) = h(t) * x(t) + n(t) \quad (3.1)$$

które po skorelowaniu z $x(t+\tau)$ daje

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) + \varphi_{xn}(\tau) \quad (3.2)$$

Ostatni człon równania (3.2) jest niepożądanym zniekształceniem, które utrudnia obliczenie funkcji wagi obiektu z funkcji wejścia i wyjścia. Można wykazać jednak, że φ_{xn} leży głównie w zakresie ujemnych τ . W tym celu wyraźny sygnał wyjściowy w zależności od zaburzenia zewnętrznego i szumu wewnętrznego, które w większości przypadków są niekorelowane ($\varphi_{zn} = 0$).

$$x(t) = k(t) * z(t) - g(t) * k(t) + n(t) \quad (3.3)$$

gdzie $k(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{1 + G(p) H(p)} \right]$ jest funkcją wagi

dla odchyłki.

Koleracja równania (3.3) z $n(t + \tau)$ daje w wyniku

$$\varphi_{nx}(\tau) = \varphi_{xn}(-\tau) = k(\tau) * \varphi_{nz}(\tau) - g(\tau) * k(\tau) * \varphi_{nn}(\tau) \quad (3.4)$$

Ponieważ z założenia $\varphi_{nz}(\tau) = 0$

$$\varphi_{xn}(-\tau) = -g(\tau) * k(\tau) * \varphi_{nn}(\tau) \quad (3.5)$$

Znak ujemny argumentu φ_{xn} wskazuje, że funkcja ta leży przeważnie w zakresie ujemnych opóźnień τ , ponieważ $-g(\tau) * k(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$ jako funkcja wagi układu realnego. Jeżeli szum wewnętrzny ma bardzo szerokie widmo, tj. zbliżony jest do białego szumu: $\varphi_{nn}(\tau) = \delta(\tau)$, to φ_{xn} le-

ży całkowicie w czwartej ćwiartce układu współrzędnych (φ , τ). Ponieważ zasadniczy związek korelacji (2.3) powinien być spełniony jedynie dla dodatnich opóźnień (gdyż $h(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$), wpływ $\varphi_{xn}(\tau)$ można pominąć. Przy szumie kolorowym i przy analizie widmowej rozdział taki jest niemożliwy.

Teoretycznie można wprawdzie odjąć graficznie φ_{xn} od φ_{xy} i obliczyć $h(\tau)$ z różnicy krzywych (Rys.3).

Sposób ten wymaga jednak znajomości funkcji φ_{xn} lub co najmniej φ_{nn} , które w praktyce są trudne do pomierzenia, ponieważ szum generowany jest głównie wewnątrz układu.

Dlatego też lepiej jest pomierzyć inną zmienną, np. zewnętrzne zaburzenie $z(t)$, niekorelowane z szumem. Metoda ta zaproponowana przez Woodrowa (Lit.6) została zastosowana w praktyce przez autora z pomyślnymi wynikami, przy badaniu przepustowości walcarki wielostopniowej, który to obiekt jest układem wieloparametrowym z wewnętrznymi sprzężeniami zwrotnymi, wywołanymi naciąganiem blachy.

W celu obliczenia funkcji wagi $g(t)$ i $h(t)$, konieczna jest rejestracja trzeciej zmiennej $z(t)$, która po skorelowaniu z równaniami obwodu

$$y = h * x + n \quad (3.5a)$$

$$x = z - g * y \quad (3.5b)$$

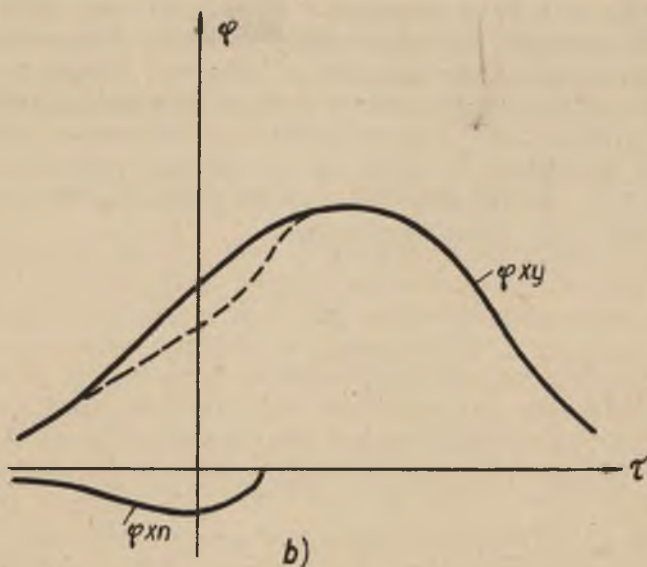
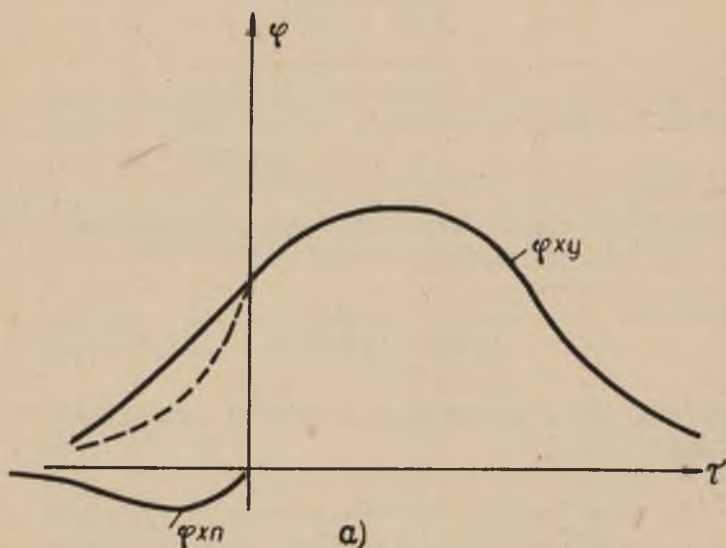
daje układ dwóch równań całkowych, wiążących ze sobą funkcje korelacji φ_{zx} , φ_{zy} , φ_{zz} , z których można obliczyć $g(t)$ i $h(t)$, przy $\varphi_{zn} = 0$

$$\varphi_{zy} = h * \varphi_{zx} + \varphi_{zn} \quad (3.6a)$$

$$\varphi_{zx} = \varphi_{zz} - g * \varphi_{zy} \quad (3.6b)$$

Tę samą metodę można uogólnić na układy wieloparametrowe.

Przy pierwszej serii pomiarów pieca martenowskiego, współpracującego z hydraulicznym regulatorem temperatury typu Askania PI, (Lit.5) nie uwzględniono działania szumów wewnętrznych wywołanych pyrometrem radiacyjnym. Przepustowość pieca próbowano obliczyć z gęstości widmowych przepływu paliwa i temperatury. Tymczasem szum $N(p)$ był znacznie silniejszy niż zaburzenie $Z(p)$ pochodzące od pompy.



Rys.3. Niepożądane skutki szumu obiegającego pętlę układu zamkniętego: a) przy białym szumie na wyjściu; b) przy kolorowym szumie na wyjściu;

Na podstawie wzorów 3.5 i 3.6 można stwierdzić, że iloraz

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p) \cdot Z(p) + N(p)}{Z(p) - G(p) \cdot N(p)} \quad (3.7)$$

daje przy $Z(p) \approx 0$, odwrotność przepustowości regulatora $-\frac{1}{G(p)}$, zamiast oczekiwanego $H(p)$ ze wzoru (2.5c). Dla regulatora P I, przepustowość ta wynosi

$$\frac{-1}{G(p)} = \frac{p T}{p T + 1} \quad (3.8)$$

i może być przyjęta przez nieostrożnego eksperymentatora za przepustowość pieca.

4. WNIOSKI

Przykłady podane w poprzednich paragrafach wykazują konieczność ostrożnej interpretacji wyników pomiarów układów zamkniętych metodą korelacyjną i widmową. Nawet w pozornie prostych przypadkach pożądana jest rejestracja trzeciej zmiennej niezależnej, dla sprawdzenia czy układ nie ma wewnętrznych sprzężeń. Jeżeli ze wstępnych rozważań teoretycznych wynika, że obiekt jest dwukierunkowy, rejestracja trzeciej zmiennej jest konieczna.

5. LITERATURA

- Lit. 1. Reswick, Goodman. Determination of System Characteristics from Normal Operating Records, ASME Trans. 1958 p. 1848 vol. 80.
- Lit. 2. Blackman, Tukey. Measurement of Power Spectra. Dover Publ. 1959. New York.
- Lit. 3. Lanning Battin. Random Processes in Automatic Control. Mc. Graw-Hill 1956.
- Lit. 4. Middleton. Information Theory. Wiley. 1960. New York.
- Lit. 5. Henderson. Testing Process Performance by Correlation. Control Eng. Sept. 1959 p. 186.
- Lit. 6. Woodrow. Closed Loop Dynamics* from Normal Operating Records. vol 50. Trans. Inst. Instr. Technology 1958, p. 101.

Определение динамических характеристик систем с обратной связью по методам спектральной и корреляционной анализы

С о д е р ж а н и е

Рассмотрено принципиальную корреляционную зависимость, которая позволяет определить динамическую характеристику объекта с записов входа и выхода не нарушая нормального хода процесса.

При наличии обратных связей в системе возможные серьезные ошибки. Дано методы их устранения за посредством запису третьего некоррелированного сигнала.

Dynamics of Feedback Systems by Correlation and Spectral Analysis

S u m m a r y

A basic correlation dependence is developed, for determining the plant dynamics from the normal operating records. In the case of the feedback systems, this dependence may lead to fallacious results. A correct method of the correlation analysis is based on the record of a third uncorrelated variable.

