

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule  
Fernsprecher: C1 Steinplatz 0011  
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
zur Zeitschrift

## DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Prels des Jahrganges 10 RM und Postgeld

6. Jahrgang

BERLIN, 1. September 1933

Heft 18

Alle Rechte vorbehalten.

### Näherungslösungen für besondere Fälle von Knickbelastung.

Von Dr.-Ing. K. Pohl, VDI, a. o. Professor in Berlin-Charlottenburg.

In der Praxis des Stahlbauingenieurs kommen nicht selten solche Fälle auf Druck beanspruchter Stäbe vor, auf welche die Eulersche Formel in ihren verschiedenen Abwandlungen nicht ohne weiteres anwendbar ist, ganz abgesehen vom mehrteiligen Stabe. Solche Fälle sind z. B. der Stab mit sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment, der unterteilte Stab mit verschiedenen großen Druckkräften in seinen Abschnitten und viele andere. Durch den Ansatz der Gleichung der elastischen Linie ist es zwar möglich, Knickbedingungen abzuleiten; aus diesen Bedingungen indessen durch Probieren die Knicklast zu finden, ist praktisch nur dann gut durchführbar, wenn diese wenigstens annähernd bekannt ist. In solchen unbequemen Fällen bietet ein von Vianello herrührendes und von ihm in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 1898 veröffentlichtes Verfahren die Möglichkeit, einen einfachen und recht genauen Näherungswert für die Knicklast abzuleiten. Vianello hat sein Verfahren nur zeichnerisch durchgeführt, während es für die Benutzung bequemer ist, über Formeln zu verfügen. Es mag dies der Grund sein, daß diese Arbeit nicht die gebührende Beachtung gefunden hat, auch das recht vollständige Werk von Mayer, „Die Knickfestigkeit“ geht nur ganz kurz darauf ein.

Das Verfahren von Vianello zur Berechnung der Knicksicherheit von Druckstäben läßt sich etwa durch nachstehenden Gedankengang wiedergeben.

Der Stab habe eine Biegelinie  $y_1$  angenommen (Abb. 1), wodurch Biegemomente  $M_1 = S y_1$  entstehen. Nach dem Mohrschen Satz läßt sich dann aus dieser Momentenfläche eine zweite Biegelinie  $y_2$  zeichnerisch oder rechnerisch bestimmen. Bei der rechnerischen Durchführung bestimmt man zunächst die Auflagerkräfte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  der als Belastung aufgefaßten Momentenfläche

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{l} \int_0^l M_1 dx (l-x)$$

und hieraus

$$EJ y_2 = \mathfrak{A} x - \int_0^x M_1 d\xi (x-\xi).$$

War  $y_1$  richtig, so müßte sich jetzt  $y_2 = y_1$  ergeben. Nimmt man z. B.  $y_1$  nach einer Parabel mit dem Pfeil  $f$  an

$$y_1 = \frac{4fx(l-x)}{l^2},$$

so erhält man  $y_2$  als Momentenordinate eines Balkens, der eine parabol-förmige Belastung trägt

$$y_2 = Sf \cdot \frac{l^2}{3} \cdot \frac{\omega''_p}{EJ},$$

wenn man nach Müller-Breslau die Zahlen  $\omega''_p$  als Abkürzung einführt:

$$\omega''_p = \frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} = \frac{1}{l^4} \cdot x(l-x)(l^2 + lx - x^2).$$

Der Vergleich  $y_2 = y_1$  ergibt dann

$$\frac{Sf}{3EJl^2} \cdot x(l-x)(l^2 + lx - x^2) = \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x)$$

oder

$$S = \frac{12EJ}{l^2 + lx - x^2}.$$

Dieser Wert ist aber nicht konstant, sondern abhängig von der Abszisse  $x$  der beiden miteinander verglichenen Ordinaten  $y_1$  und  $y_2$ . Vergleicht man z. B.  $y_1$  und  $y_2$  für  $x = \frac{l}{4}$ , so ergibt sich:

$$S = \frac{192}{19} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 10,1 \cdot \frac{EJ}{l^2}$$

und für  $x = \frac{l}{2}$ :

$$S = \frac{48}{5} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 9,6 \cdot \frac{EJ}{l^2}.$$

Es liegt daher der Gedanke nahe, nicht einzelne Ordinaten, sondern den Mittelwert von allen oder, was dasselbe ist, die Flächeninhalte der Kurven 1 und 2 miteinander zu vergleichen. Diese sind

$$F_1 = \frac{2}{3} \cdot fl, \quad F_2 = Sf \cdot \frac{l^2}{3EJ} \int_0^l \omega''_p dx = \frac{Sfl^3}{15EJ}.$$

Für einen beliebigen Wert von  $S$  ist  $F_1$  nicht gleich  $F_2$ , sondern nur für

$$S = S_K = \frac{10EJ}{l^2},$$

d. i. ungefähr die Eulersche Knicklast.

Ein Stab mit einer Längskraft  $S < S_K$  bleibt gerade. Nur wenn  $S = S_K$  ist, d. h. wenn sich der Stab an der Grenze der Instabilität befindet, ist es möglich, die Mohrsche Bedingung zu erfüllen. Ist  $\nu$  die Knicksicherheit, so ist  $\nu S = S_K$ . Man muß also die Kraft  $S$  und damit die Ordinaten  $y_2$  und die Fläche  $F_2$  auf das  $\nu$ -fache vergrößern, um Flächen-gleichheit zu erzielen, d. h.

$$\nu F_2 = F_1, \quad \nu = F_1 : F_2,$$

d. h. die Knicksicherheit  $\nu$  ist gleich dem Verhältnis der angenommenen Biegungsfläche  $F_1$  zu der daraus abgeleiteten Biegungsfläche  $F_2$ , die Knicklast ist  $= \nu S$ .

Geht man nun von der zweiten Kurve aus und wiederholt das Verfahren, so kommt man zu einer dritten Biegelinie  $y_3$  mit der Fläche  $F_3$ , erhält einen verbesserten Wert von  $\nu$  und kann in dieser Weise nach Belieben fortfahren. Es ist also

$$\nu_1 = \frac{F_1}{F_2}, \quad \nu_2 = \frac{F_2}{F_3} \text{ usw.}$$

Bei Vianello geschieht die Wiederholung des Verfahrens auf zeichnerischem Wege durch Aufzeichnen von Selpolygonen, unser Beispiel soll rechnerisch durchgeführt werden, um geschlossene Formeln für  $\nu$  zu gewinnen.

Wählt man als erste Biegelinie eine der wirklichen möglichst ähnliche Kurve, so genügt in den meisten Fällen schon der erste Näherungswert  $\nu_1$ .

Die Fälle mit statisch unbestimmter Stützung des Stabes lassen sich ebenso behandeln, wobei aber darauf zu achten ist, daß jede Biegelinie die vorgeschriebenen Auflager- oder Formänderungsbedingungen erfüllen muß, weil der Flächenvergleich sonst nicht zum Ziele führt. Bei einseitiger Einspannung des Stabes muß z. B. die statisch unbestimmte Größe  $X$  so berechnet werden, daß der Auflagerdruck  $\mathfrak{B}$  an der Einspannungsstelle infolge der ge-

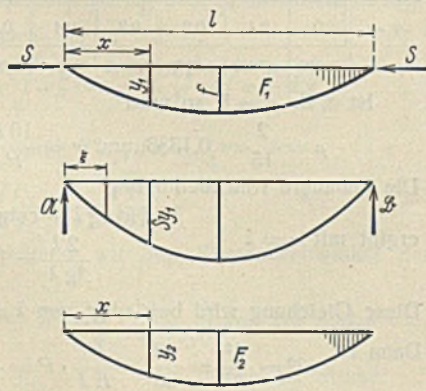


Abb. 1.

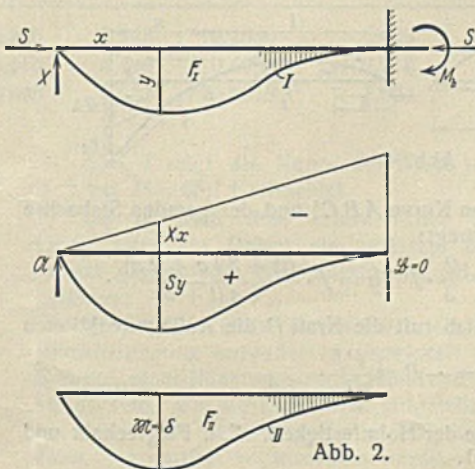


Abb. 2.

dachten Belastung durch die Momente  $+Sy - Xx$  gleich Null wird (Abb. 2).

Die mathematische Deutung des beschriebenen Verfahrens ist folgende. Die Differentialgleichung der elastischen Linie des Stabes mit Längsbelastung ohne Nebenbedingungen (Exzentrizität, Querbelastung, Anfangskrümmung) lautet

$$y'' + \frac{y}{k^2} = 0; \quad k^2 = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$$

Nimmt man für  $y$  eine beliebige Funktion von  $x$  an, welche die Auflagerbedingungen befriedigt, so kann man aus

$$y'' = -\frac{f(x)}{k^2}$$

$y$  durch zweimalige Integration genauer bestimmen und von neuem in die Ausgangsgleichung einsetzen. Dies läßt sich beliebig oft wiederholen. Der Faktor  $k$  erscheint hierin als Parameter, der sich bestimmen läßt, wenn man einen beliebigen Funktionswert in je zwei aufeinander folgenden Rechnungsgängen miteinander vergleicht, z. B.

$$y_1\left(x = \frac{l}{2}\right) = y_2\left(x = \frac{l}{2}\right); \quad y_2\left(x = \frac{l}{2}\right) = y_3\left(x = \frac{l}{2}\right) \text{ usw.}$$

Nach dem Picardschen Satze nähert sich dann  $k$  bei dieser „successiven Approximation“ einem Festwert<sup>1)</sup>.

Es wird nun an zwei Beispielen die Aufstellung einer Knickformel nach Vianello durchgeführt, davon das zweite mit statisch unbestimmter Stützung. Die genaueren Knickbedingungen, auf deren Ableitung der Raumersparnis wegen verzichtet wird, werden dann dazu benutzt, um die Brauchbarkeit unserer Näherungsformeln zu prüfen. Von einer weiteren Folge von Knickfällen werden dann ebenso nur die Endformeln mitgeteilt, endlich am Schlusse die Ergebnisse eines Zahlenbeispiels wiedergegeben.

**1. Fall. Stütze mit Kragarm,**

In zwei Punkten  $A$  und  $B$  gelenkig gestützt, mit Axialkraft  $P$  und Querkraft  $Q$  am freien Ende  $C$  des Kragarms (Abb. 3).

$$k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}, \quad \frac{l}{k} = \lambda, \quad \frac{a}{k} = \alpha.$$

Das größte Biegemoment ist

$$M_B = \frac{Ql}{\lambda(\cotg \lambda + \cotg \alpha) - 1},$$

die Knickbedingung lautet

$$\lambda(\cotg \lambda + \cotg \alpha) = 1.$$

Die Querbelastung hat auf die Knicklast (im Eulerschen Sinne) keinen Einfluß. Eine bequemere Formel für die Knicksicherheit soll nun nach dem Verfahren von Vianello aufgestellt werden.

Als erste Biegelinie wird eine Kurve möglichst einfacher Gestalt angenommen, und zwar eine Parabel, deren Scheitel in der Mitte zwischen  $AB$  liegt. Bezeichnet man die Ausbiegung bei  $C$  mit  $f$  und denkt sich die Parabel über  $A$  hinaus bis  $D$  zur symmetrischen Gestalt ergänzt, so ist es leicht, die Pfeilhöhen  $f'$  und  $f''$  der Kurvenabschnitte  $AB$  und  $BC$  durch  $f$  auszudrücken (Abb. 4). Man erhält

$$f' = \frac{fl^2}{4a(l+a)}, \quad f'' = \frac{fa}{4(l+a)}.$$

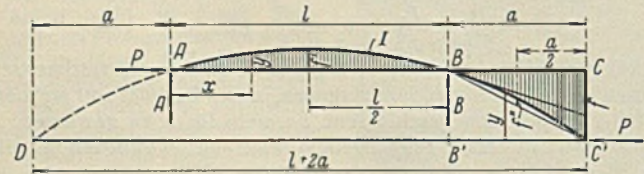


Abb. 3.

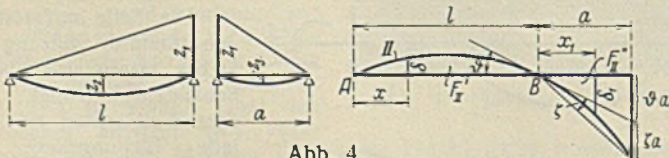


Abb. 4.

Der Inhalt der Fläche zwischen Kurve  $ABC'$  und der geraden Stabachse  $ABC$ , absolut genommen, beträgt:

$$F_1 = \frac{2}{3} \cdot f' \cdot l + f \cdot \frac{a}{2} - \frac{2}{3} \cdot f'' \cdot a = f \cdot \frac{(l^3 + 3la + 2a^2)}{6a(l+a)}.$$

An dem derart deformierten Stab ruft die Kraft  $P$  die Auflagerreaktionen hervor:

$$A = -B = \frac{Pf}{l}.$$

Damit ergibt sich das Moment im Stababschnitt  $AB$  an der Stelle  $x$ :

$$M = Ax + Py = P \cdot \frac{fx}{l} + Pf \cdot \frac{x(l-x)}{a(l+a)}.$$

Die Momentenfläche über  $AB$  setzt sich demnach zusammen aus einem Dreieck von der Höhe  $z_1 = Pf$  und einer Parabel von der Pfeilhöhe

$$z_2 = \frac{Pfl^2}{4a(l+a)}.$$

Im Kragarm ist  $M = Py$ , die Momentenfläche also gleich der  $P$ -fachen Fläche  $BB'C'$ , d. h. aus einem Dreieck von der Höhe  $z_1 = Pf$  und einer Parabel vom Pfeil

$$z_3 = Pf'' = \frac{Pfa}{4(l+a)}$$

zusammengesetzt.

Wir bestimmen nun Durchbiegung, Tangentenwinkel über  $B$  und Flächeninhalt der Biegelinie mit Hilfe der  $\omega$ -Werte.

Für die Kurve  $AB$  ist

$$EJ\delta = Pf \cdot \frac{l^2}{6} \cdot \omega_D + \frac{Pfl^2}{4a(l+a)} \cdot \frac{l^2}{3} \cdot \omega_P''$$

$$EJ\vartheta = Pf \cdot \frac{l}{3} + \frac{Pfl^2}{4a(l+a)} \cdot \frac{l}{3}$$

$$EJF_{II}' = Pf \cdot \frac{l^3}{24} + \frac{Pfl^2}{4a(l+a)} \cdot \frac{l^3}{15}$$

Für das Kurvenstück des Kragarms ergibt sich

$$EJ\zeta = Pf \cdot \frac{a}{3} + \frac{Pfa}{4(l+a)} \cdot \frac{a}{3},$$

$$EJ\delta_1 = EJ(\vartheta + \zeta)x_1 - Pf \cdot \frac{a^2}{6} \cdot \omega_D' - \frac{Pfa}{4(l+a)} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \omega_P''.$$

$$EJF_{II}'' = aEJ(\vartheta + \zeta) \frac{a}{2} - Pf \cdot \frac{a^3}{24} - \frac{Pfa}{4(l+a)} \cdot \frac{a^3}{15}.$$

Der ganze Inhalt der zweiten Biegelingsfläche ergibt sich nach dem Einsetzen von  $\vartheta$  und  $\zeta$  zu

$$EJF_{II} = EJ(F_{II}' + F_{II}'') = \frac{Pfl}{120a(l+a)} (2l^5 + 5l^4a + 10l^3a^2 + 20l^2a^3 + 35la^4 + 18a^5).$$

Bildet man hiermit das Verhältnis  $F_1:F_{II}$ , so erhält man die Knicksicherheit

$$\nu = \frac{10EJ}{Pl^2} \cdot \mu, \quad \mu = \frac{1 + 3\varphi^2 + 2\varphi^3}{1 + \frac{5}{2} \cdot \varphi + 5\varphi^2 + 10\varphi^3 + \frac{35}{2} \cdot \varphi^4 + 9\varphi^5},$$

hierin ist  $\varphi = a:l$ .

**Tafel der Werte  $\mu$ .**

$\varphi =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\mu =$	1,000	0,7867	0,6273	0,5027	0,4040	0,3265	0,2664	0,2200	0,1840	0,1557	0,1333

Ist z. B.  $\varphi = 1$ , so wird

$$\mu = \frac{2}{15} = 0,1333 \text{ und } \nu = \frac{10EJ}{Pl^2} \cdot \frac{48}{360} = \frac{P_E}{P} \cdot \frac{48}{360}.$$

Die genauere Knickbedingung

$$\lambda(\cotg \lambda + \cotg \alpha) = 1 \text{ ergibt mit } \alpha = \lambda \quad \frac{2\lambda}{\text{tg } \lambda} = 1.$$

Diese Gleichung wird befriedigt von  $\lambda = 1,166 = \frac{7}{6}$ .

$$\text{Dann ist } \lambda^2 = \frac{l^2}{k^2} = \frac{49}{36}, \quad \frac{l^2}{EJ} \cdot P = \frac{49}{36} \text{ und } P = \frac{49EJ}{36l^2}.$$

Mit  $P_E = \frac{360EJ}{36l^2}$  erhält man dann an der Stabilitätsgrenze

$$P = P_E \cdot \frac{49}{360}$$

und die Knicksicherheit

$$\nu = \frac{P_E}{P} \cdot \frac{49}{360},$$

fast genau wie oben.

Für  $\varphi = \frac{1}{2}$  wird  $\mu = 0,3265$ ,  $\nu = \frac{P_E}{P} \cdot 0,3265$ .

Die genauere Knickformel lautet

$$\lambda \left( \cotg \lambda + \cotg \frac{\lambda}{2} \right) = 1$$

und mit

$$\cotg \frac{\lambda}{2} = \frac{1 + \cos \lambda}{\sin \lambda} \quad \frac{\lambda(1 + 2 \cdot \cos \lambda)}{\sin \lambda} = 1.$$

Diese Bedingung wird erfüllt für  $\lambda = 1,803$ .

$$\lambda^2 = \frac{l^2}{k^2} = 3,25, \quad \frac{l^2P}{EJ} = 3,25, \quad P = 3,25 \cdot \frac{EJ}{l^2}.$$

$$P = P_E \cdot 0,325 \text{ und } \nu = \frac{P_E}{P} \cdot 0,325, \text{ fast genau wie vor.}$$

<sup>1)</sup> Vgl. Trefftz, Zur Frage der Holmfestigkeit. Z. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1918, S. 101.

II. Fall (mit statisch unbestimmter Stützung).

Stütze mit steif verbundener Strebe (Abb. 5).

Die Länge der Stütze sei  $l$ ,  
das Trägheitsmoment  $J_1$ ,  
der Strebe sei  $s$ ,  
das Trägheitsmoment  $J_2$ .

Beim Ausbiegen nach links wird die Strebe wegen der steifen Knotenverbindung  $c$  mitgenommen, ihre Biegelinie setzt das Auftreten einer statisch unbestimmten Horizontalkraft  $X$  im Fußgelenk  $b$  voraus. Das durch den Kräfteplan ausgedrückte Gleichgewicht erfordert dann bei  $a$  die gleiche Querkraft  $X$ , die mit  $P$  eine Resultierende  $R$  bildet. Die Last  $P$  und die Reaktionen  $X$  in  $b$  und  $R$  in  $a$  schneiden sich im Punkte  $a$ .

Die Knickbedingung lautet, wenn man

$$k_1^2 = \frac{E J_1}{P} \quad \text{und} \quad k_2^2 = \frac{E J_2}{P} \quad \text{einführt:}$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{k_1} \cdot \frac{s}{k_2} + \frac{l}{k_1} \cdot \cotg \frac{l}{k_1} = 1.$$

Um einen Näherungswert für  $P$  zu bekommen, der sich bequemer als aus vorstehender Gleichung berechnen läßt, nehmen wir als erste Biegelinie in der Stütze eine Parabel vom Pfeil  $f$  an. In der Stütze ist dann  $M = +Py - Xx$ , die Momentenfläche besteht also aus einer Parabel vom Pfeil  $+Pf$  und einem Dreieck von der Endhöhe  $-Xl$  (Abb. 6). Dann lautet die Gleichung der neuen Biegelinie

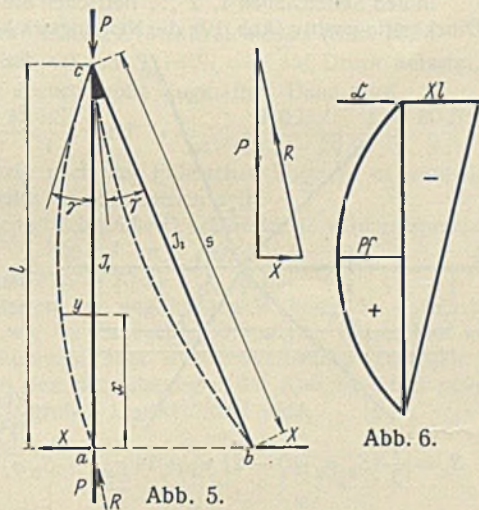


Abb. 5.

$$y_2 = + \frac{P f l^2}{E J_1 \cdot 3} \cdot \omega_p'' - \frac{X l}{E J_1} \cdot \frac{l^2}{6} \cdot \omega_D,$$

wenn man die  $\omega$ -Zahlen

$$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \quad \text{und} \quad \omega_p'' = \frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \quad \text{einführt.}$$

Der Inhalt der neuen Biegungsfläche ist

$$F_2 = \int_0^l y_2 dx = \frac{P f l^2}{3 E J_1} \int_0^l \omega_p'' \cdot dx - \frac{X l^3}{6 E J_1} \int_0^l \omega_D \cdot dx,$$

und mit

$$\int \omega_p'' dx = \frac{l}{5} \quad \text{und} \quad \int \omega_D dx = \frac{l}{4}$$

wird

$$F_2 = \frac{P f l^3}{15 E J_1} - \frac{X l^4}{24 E J_1}.$$

Um  $X$  zu berechnen, bestimmen wir den Knotendrehwinkel des Punktes  $c$

$$\frac{\mathcal{C}}{E J_1} = \gamma = - \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{P f l}{2 E J_1} - X l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3 E J_1} \right) \quad \text{von der Stütze}$$

$$\text{und} \quad \gamma = - \frac{X l s}{3 E J_2} \quad \text{von der Strebe}$$

$P$	$\frac{E J_1}{P}$	$\frac{E J_2}{P}$	$k_1$	$k_2$	$\frac{l}{k_1}$	$\frac{s}{k_2}$	$A$	$\left( \frac{l}{k_1} - \pi \right)$	$\cotg \frac{l}{k_1}$	$B$	$-A + B$
60	12,277	6,627	3,504	2,574	3,4246	5,206	5,943	0,2830	+ 3,439	+ 11,777	+ 5,834
65	11,332	6,117	3,366	2,473	3,5651	5,419	6,440	0,4235	+ 2,218	+ 7,907	+ 1,467
70	10,523	5,680	3,244	2,383	3,6991	5,623	6,933	0,5575	+ 1,604	+ 5,933	- 1,000

und erhalten durch Gleichsetzen

$$X = \frac{P f}{J_1 \left( \frac{l}{J_1} + \frac{s}{J_2} \right)}$$

und mit  $\frac{s}{l} \cdot \frac{J_1}{J_2} = x$ ,

$$X = \frac{P f}{l} \cdot \frac{1}{(1+x)}.$$

Dann wird

$$F_2 = \frac{P f l^3}{15 E J_1} - \frac{X l^4}{24 E J_1} = \frac{P f l^3}{15 E J_1} - \frac{P f l^4}{l(1+x) 24 E J_1}$$

$$F_2 = \frac{P f l^3}{15 E J_1} \left[ 1 - \frac{15}{24} \cdot \frac{1}{(1+x)} \right] = \frac{P f l^3}{8 \cdot 15 E J_1} \cdot \frac{(3+8x)}{(1+x)}.$$

Der erste Näherungswert für die Knicksicherheit ist dann

$$\nu_1 = \frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{3} \cdot f l : \frac{P f l^3}{8 \cdot 15 E J_1} \cdot \frac{(3+8x)}{(1+x)},$$

$$\nu_1 = \frac{10 E J_1}{P l^2} \cdot \frac{(8+8x)}{3+8x}$$

oder

$$\nu_1 = \frac{P_E}{P} \cdot \mu_1, \quad \text{worin} \quad \mu_1 = \frac{8+8x}{3+8x}.$$

Diese Formel zeigt sehr anschaulich die Vergrößerung der Knicksicherheit durch die Mitwirkung der Strebe. Ist der Strebenanschluß gelenkig, so heißt dies, daß dann ein gewöhnlicher Fachwerkstab genügt, es wird  $J_2 = 0$ ,  $x = \infty$ ,  $\mu_1 = 1$  und  $\nu_1 = P_E : P$ .

Die Wiederholung des Verfahrens mit der neuen Biegelinie als Grundlinie liefert

$$\nu_2 = \frac{10 E J_1}{P l^2} \cdot \mu_2, \quad \mu_2 = \frac{2,1(1+x)(3+8x)}{3+13x+17x^2}.$$

Die Annahme einer Sinuslinie als erste Biegelinie hätte ergeben

$$\nu_1 = \frac{\pi^2 E J_1}{P l^2} \cdot \mu,$$

$$\mu = \frac{1+x}{1+x - \frac{\pi^2}{16}} = \frac{1+x}{0,383+x} = \frac{8+8x}{3,07+8x}.$$

Zahlenbeispiel.

Die Stütze bestehe aus einem Pfahl von 12 m Länge und 35 cm mittlerem Durchmesser, die Strebe habe 30 cm mittleren Durchmesser, mit  $a \cdot b = 6$  m wird  $s = \sqrt{12^2 + 6^2} = 13,4$  m.

$$J_1 = 73\,662 \text{ cm}^4, \quad J_2 = 39\,761 \text{ cm}^4, \quad x = \frac{13,4 \cdot 73\,662}{12,0 \cdot 39\,761} = 2,07.$$

Der Multiplikator der Eulerschen Knicklast nach der 1. Näherungslösung war

$$\mu_1 = \frac{8+8x}{3+8x} = \frac{24,56}{19,56} = 1,25.$$

Die 2. Näherung ergab

$$\mu_2 = \frac{2,1(1+x)(3+8x)}{3+13x+17x^2} = \frac{2,1 \cdot 3,07 \cdot 19,56}{3+26,91+72,84} = \frac{126,10}{102,75} = 1,23$$

und die Annahme einer Sinuslinie

$$\mu_1 = \frac{1+x}{0,383+x} = \frac{3,07}{2,453} = 1,25 \text{ wie vor.}$$

Die Eulersche Knicklast  $P_E$  beträgt

$$P_E = \frac{10 \cdot 100\,000 \cdot 73\,662}{1200^2} = 51\,200 \text{ kg.}$$

Die Knicklast der Stabverbindung wäre hiernach

$$P_K = 1,25 \cdot 51,2 = 64 \text{ t.}$$

Prüfung mittels der Knickbedingung.

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{k_1} \cdot \frac{s}{k_2} + \frac{l}{k_1} \cdot \cotg \frac{l}{k_1} = 1, \quad \text{abgekürzt} \quad -A + B = 1.$$

Wir setzen auf Grund unserer Näherungsberechnung

$$P = 60, 65, 70 \text{ t}$$

ein und berechnen in nachfolgender Zahlentafel den Zahlenwert der auf der linken Seite stehenden Funktion von  $P$ . Mit den Einheiten t und m ist

$$E J_1 = 1\,000\,000 \cdot 0,000\,736\,6 = 736,6 \text{ tm}^2,$$

$$E J_2 = 1\,000\,000 \cdot 0,000\,397\,6 = 397,6 \text{ tm}^2.$$

Abb. 7 zeigt die Kurve der Werte  $-A + B$ , welche die Ordinate  $+1$  bei  $P = 65,7$  t schneidet.

Da je nach dem erforderlichen Sicherheitsgrad nur etwa die Hälfte oder ein Drittel als zulässige Belastung in Betracht kommt, so hat die einfache Näherungsformel mit  $\mu_1$  praktisch dasselbe Ergebnis geliefert.

In derselben Weise lassen sich viele andere Fälle behandeln, wo die Knickbedingung entweder zu verwickelt wird oder ihre Auswertung die Kenntnis eines Näherungswertes erforderlich macht. Von den nachfolgenden Fällen seien nur die Ergebnisse mitgeteilt. Es handelt sich hierbei stets um den ersten Näherungswert  $\nu_1 = F_1 : F_2$ , wobei als erste Biegelinie stets eine Parabel angenommen wurde.

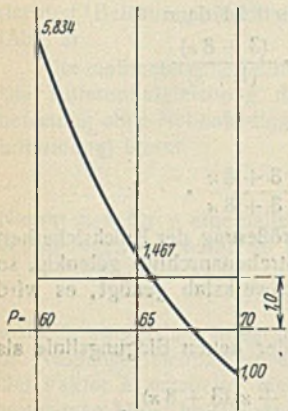


Abb. 7.

Die Näherungsrechnung ergibt mit

$$\frac{a}{l} = \varphi, \quad \frac{J_1}{J} = \kappa, \quad \nu = \frac{10 E J_1}{P l^2} \cdot \mu,$$

$$\mu = \frac{1}{1 + (\kappa - 1) 2 \varphi^3 (10 - 15 \varphi + 6 \varphi^2)}$$

Zahlentafel der Werte  $\mu$ .

$\varphi$	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
0,05	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,996	0,995
0,10	0,996	0,991	0,987	0,983	0,979	0,975	0,971	0,967
0,15	0,987	0,974	0,962	0,949	0,938	0,926	0,915	0,904
0,20	0,972	0,945	0,920	0,896	0,874	0,852	0,831	0,812
0,25	0,951	0,906	0,866	0,828	0,794	0,763	0,734	0,707
0,30	0,925	0,860	0,803	0,754	0,710	0,671	0,637	0,605
0,35	0,895	0,810	0,739	0,680	0,630	0,586	0,548	0,515
0,40	0,863	0,759	0,677	0,612	0,557	0,512	0,474	0,441
0,45	0,831	0,711	0,621	0,551	0,496	0,450	0,412	0,381
0,50	0,800	0,667	0,571	0,500	0,444	0,400	0,364	0,333

Für  $\varphi = \frac{1}{2}$  ist keine Verstärkung mehr vorhanden, es wird

$$\mu = \frac{1}{\kappa} = \frac{J}{J_1} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{10 E J}{P l^2}$$

IV. Fall. Stab, bestehend aus zwei Abschnitten mit verschiedenen Trägheitsmomenten und Längskräften (Abb. 9).

$$\frac{J_c}{J_a} = \kappa_a, \quad \frac{J_c}{J_b} = \kappa_b, \quad \frac{P_a}{P_c} = \sigma_a, \quad \frac{P_b}{P_c} = \sigma_b, \quad \frac{a}{l} = \varphi_a, \quad \frac{b}{l} = \varphi_b.$$

Das Trägheitsmoment  $J_c$  und die Längskraft  $P_c$  können beliebig gewählt werden.

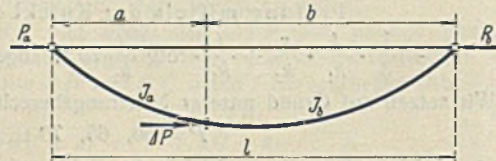


Abb. 9.

$$\nu = \frac{10 E J_c}{l^2 P_c} \cdot \mu,$$

$$\mu = 2: \left\{ \begin{aligned} &\sigma_a \varphi_a \{ \kappa_a \varphi_a^2 [5(1 - \varphi_a \varphi_b)(\varphi_a + 4 \varphi_b) - 3 \varphi_a(\varphi_a + 5 \varphi_b)] \right. \\ &\quad \left. + \kappa_b 5 \varphi_b^4 (\varphi_b + 4 \varphi_a) \right\} \\ &+ \sigma_b \varphi_b \{ \kappa_b \varphi_b^2 [5(1 - \varphi_a \varphi_b)(\varphi_b + 4 \varphi_a) - 3 \varphi_b(\varphi_b + 5 \varphi_a)] \right. \\ &\quad \left. + \kappa_a 5 \varphi_a^4 (\varphi_a + 4 \varphi_b) \right\}. \end{aligned} \right.$$

In besonderen Fällen ergeben sich bedeutende Vereinfachungen.

a)  $\angle P = 0, P_a = P_b = P_c = P, \sigma_a = \sigma_b = 1.$

$$\mu = \frac{1}{\kappa_a \varphi_a^3 (1 + 3 \varphi_b + 6 \varphi_b^2) + \kappa_b \varphi_b^3 (1 + 3 \varphi_a + 6 \varphi_a^2)}$$

Für diesen Fall läßt sich auch leicht die Knickbedingung aufstellen. Wir setzen

$$k_a = \sqrt{\frac{E J_a}{P}}, \quad k_b = \sqrt{\frac{E J_b}{P}}, \quad \frac{a}{k_a} = \alpha, \quad \frac{b}{k_b} = \beta,$$

dann muß sein  $k_a \cdot \text{tg } \alpha + k_b \cdot \text{tg } \beta = 0.$

Nimmt man noch  $J_a = J_b = J_c$  an, so erhält man für diesen Fall mit  $\kappa_a = \kappa_b = 1, \mu = 1$ , d. h. den Eulerschen Grundfall.

b)  $a = b = \frac{l}{2}, \varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{2}.$

$$\mu = \frac{128}{\sigma_a (39 \kappa_a + 25 \kappa_b) + \sigma_b (39 \kappa_b + 25 \kappa_a)}$$

<sup>2)</sup> Vgl. Elwitz, Knickfestigkeit, S. 232, Gl. 26.

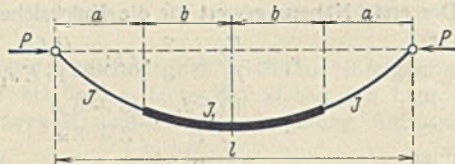


Abb. 8.

III. Fall. Stab mit verstärktem Mittelstück (Abb. 8).

$$k = \sqrt{\frac{E J}{P}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{E J_1}{P}},$$

$$\alpha = \frac{a}{k}, \quad \beta = \frac{b}{k}.$$

Die Knickbedingung lautet:<sup>2)</sup>

$$\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta = \frac{k_1}{k} = \sqrt{\frac{J_1}{J}}.$$

Ist außerdem  $J_a = J_b = J_c, \kappa_a = \kappa_b = 1$ , so wird

$$\mu = \frac{2}{\sigma_a + \sigma_b} = \frac{2 P_c}{P_a + P_b} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{10 E J_c}{l^2 \cdot \frac{1}{2} (P_a + P_b)},$$

d. h. man darf nach der Eulerschen Formel mit dem arithmetischen Mittel der Kräfte rechnen.

c) Weitere interessante und praktisch wichtige Fälle seien hier nur angedeutet:

setzt man  $\sigma_a = 0$ , so ist der Stabteil  $a$  spannungslos,

setzt man  $\kappa_a = 0$ , so ist der Stabteil  $a$  starr,

d. h. sein Trägheitsmoment  $J_a$  ist im Vergleich zu  $J_b$  so groß, daß man seine Formänderungen vernachlässigen kann. In allen Fällen führt die allgemeine Formel für  $\mu$  zu einem brauchbaren Näherungswert für die Knicklast.

V. Fall. Durchlaufender Stab mit gelenkig angeschlossenen seitlichen Stäben in derselben Ebene.

In den Seitenstäben 1, 2 ... herrschen die Spannkkräfte  $S_1, S_2 \dots$  als Druckkräfte positiv (Abb. 10), die Neigungswinkel mit dem Hauptstabe seien

$$\psi_1, \psi_2 \dots, \text{ dann ist}$$

$$\sum S \cdot \cos \psi = S_a - S_b.$$

Es sei

$$\varphi_a = \frac{a}{l}, \quad \varphi_b = \frac{b}{l},$$

weiter

$$\frac{S_1}{S_a} = \kappa_1, \quad \frac{S_2}{S_b} = \kappa_2 \dots,$$

dann beträgt die Knicksicherheit senkrecht zur Bildebene

$$\nu = \frac{10 E J}{S_c l^2},$$

wenn man eine einheitliche Stabkraft

$$S_c = \frac{1}{3} [S_a \varphi_a (10 - 21 \varphi_a + 14 \varphi_a^2) + S_b \varphi_b (10 - 21 \varphi_b + 14 \varphi_b^2) + 10 \varphi_a^2 \varphi_b^2 l \Sigma \kappa]$$

eingführt. Seitenstäbe, die auf Zug beansprucht werden, gehen in  $\Sigma \kappa$  mit dem negativen Vorzeichen ein.

In besonderen Fällen ergibt sich eine weitgehende Vereinfachung.

a) Die Komponenten der Seitenkräfte  $\parallel$  zur Achse des Hauptstabes heben sich auf,  $S_a = S_b = S$ , dann ist

$$\nu = \frac{30 E J}{l^2 (3 S + 10 l \varphi_a^2 \varphi_b^2 \Sigma \kappa)}$$

Schreibt man dies

$$E J = \nu \left( \frac{S l^2}{10} + \frac{l^3}{3} \cdot \varphi_a^2 \varphi_b^2 \Sigma \kappa \right),$$

so hat man das erforderliche Trägheitsmoment für  $\nu$ -fache Knicksicherheit.

b) Der Knotenpunkt liegt in Stabmitte,  $\varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{2}.$

$$\nu = \frac{240 E J}{l^2 [12 (S_a + S_b) + 5 l \Sigma \kappa]}$$

Ist außerdem  $S_a = S_b$  wie im Falle a, so wird das erforderliche

$$E J = \nu \left( \frac{S l^2}{10} + \frac{l^3}{48} \Sigma \kappa \right)^3.$$

c)  $S_a = 0, S_b = 0$ , d. h. der Hauptstab ist spannungslos, die Seitenstäbe sind in ihrer Ebene untereinander im Gleichgewicht (Abb. 11). Damit der Knotenpunkt gegen das Ausweichen  $\perp$  Bildfläche eine  $\nu$ -fache Sicherheit besitzt, muß der Hauptstab eine Steifigkeit

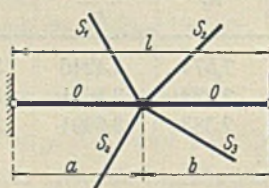


Abb. 11.

$$E J = \nu \cdot \frac{a^2 b^2}{3 l} \Sigma \kappa$$

besitzen. Voraussetzung in allen Fällen ist natürlich, daß die äußeren Enden aller Stäbe in ihrer Ebene bleiben.

d) Knotenpunkt eines K-Fachwerks (Abb. 12).

Der durchlaufende Stab  $ACB$  stellt den Pfosten eines Fachwerks dar, die Seitenstäbe die Diagonalen. Wirken alle äußeren Kräfte  $\parallel AB$ ,

so ist mit  $AC = CB = \frac{l}{2}$ :

$$S_{\frac{1}{2}} = \mp \frac{Q}{2 \cdot \cos \psi}, \quad \Sigma \kappa = 0 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{20 E J}{l^2 (S_a + S_b)},$$

vgl. Fall b).

<sup>3)</sup> Vgl. Vianello-David, Der Eisenbau 1927, S. 98/99.

Hierbei ist  $S_a + S_b$  gleich der Knotenlast  $P_m$ ,  $\nu$  wird also sehr groß, es wird  $\infty$ , wenn der Knoten B überhaupt keine Last trägt, d. h. es kommt nur die Knicksicherheit der Einzelstäbe in Betracht.

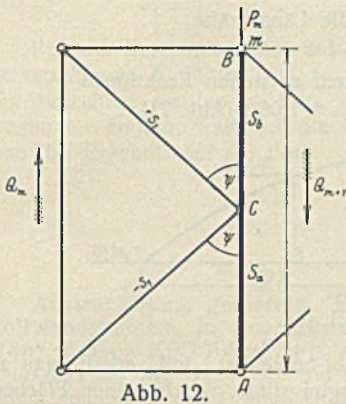


Abb. 12.

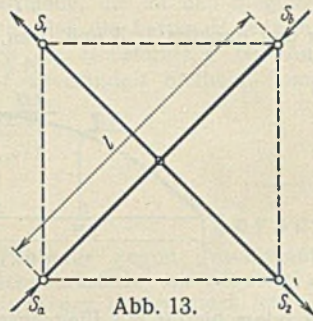


Abb. 13.

e) Knotenpunkt eines Kreuzfachwerks (Abb. 13).

Der durchlaufende Stab sei mit  $S_a = S_b = S$  auf Druck belastet, in den Seitenstäben wirken ebenso große Zugkräfte. Dann wird

$$\Sigma x = -\frac{S_1}{s_1} - \frac{S_2}{s_2} = -\frac{4S}{l} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{240 EJ}{l^2(24S - 20S)} = \frac{60 EJ}{S l^2}$$

also sechsmal so groß wie nach der Eulerschen Formel; es wird dann auch hier nur die Stabhälfte zu untersuchen sein.

Wirken in allen Stäben gleich große Druckkräfte, so wird entsprechend

$$\nu = \frac{240 EJ}{l^2(24S + 20S)} = \frac{5,45 EJ}{S l^2}$$

die Knicksicherheit ist wegen der ungünstigen Wirkung der Seitenstäbe nur etwa halb so groß wie im Eulerschen Grundfall. Dieser Fall kann in Fachwerkstützen vorkommen oder in Windverbänden zwischen gedrückten Gurtungen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 14 erhält man in den Diagonalen die gleich großen Druckkräfte

$$D = \frac{(S_1 + S_2)}{2} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{x_g}{x_g + \left(\frac{e}{a}\right)^2 x_q + \left(\frac{d}{a}\right)^2 x_d}$$

worn  $x_g = \frac{F_c}{F_g}, \quad x_d = \frac{F_c}{F_d}, \quad x_q = \frac{F_c}{F_q}$

Sind die Seitenstäbe nicht gelenkartig angeschlossen, sondern ebenfalls steif durchgeführt, so erhalten wir den nächsten Fall.

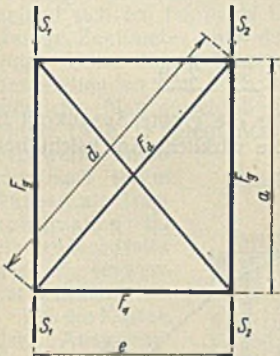


Abb. 14.

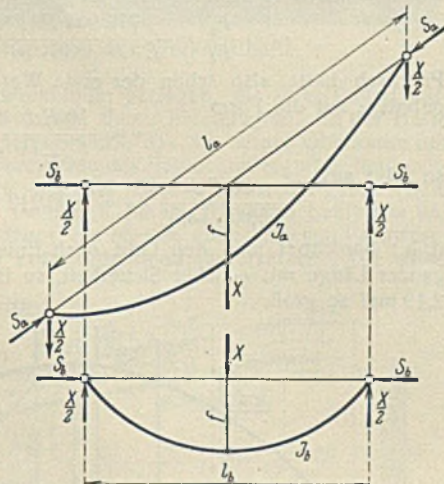


Abb. 15.

VI. Fall. Kreuzung von zwei steifen Stäben.

Zwei Stäbe von der Länge  $l_a$  und  $l_b$  mit den Trägheitsmomenten  $J_a$  und  $J_b$  sind in ihren Mittelpunkten biegefest miteinander verbunden, der Kreuzungswinkel braucht kein rechter zu sein (Abb. 15). Die Längskräfte sind  $S_a$  und  $S_b$ . Diese Aufgabe ist ebenso wie die zweite einfach statisch unbestimmt, weil an der Kreuzungsstelle eine Unbekannte  $X$  auftritt, welche die Gemeinsamkeit der Durchbiegungen erzwingt. Nimmt man als erstes Paar von Biegelinien Parabeln vom Pfeil  $f$  an, so läßt sich leicht ableiten

$$X = 5f \cdot \frac{(S_a l_a^2 J_b - S_b l_b^2 J_a)}{l_a^3 J_b + l_b^3 J_a}$$

Nach Berechnung der neuen Biegelinie erhält man die Knicksicherheit  $\nu$  durch Vergleich der Flächenpaare beider Stäbe:

$$\nu_1 = \frac{F_{Ia} + F_{Ib}}{F_{IIa} + F_{IIb}}$$

$$\nu = \frac{1280 E (l_a + l_b) (l_a^3 J_b + l_b^3 J_a)}{l_a^3 l_b^3 \left\{ 128 (S_a + S_b) + 3 \left[ S_a \left( \frac{l_a}{l_b} \right)^3 \frac{J_b}{J_a} + S_b \left( \frac{l_b}{l_a} \right)^3 \frac{J_a}{J_b} \right] + 125 \left( S_a \frac{l_b}{l_a} + S_b \frac{l_a}{l_b} \right) \right\}}$$

Sonderfälle.  $l_a = l_b = l$ , d. h. die Enden der Stäbe liegen in den Ecken eines Rechtecks.

$$\nu = \frac{2560 E (J_a + J_b)}{l^2 \left[ 253 (S_a + S_b) + 3 \left( S_a \cdot \frac{J_b}{J_a} + S_b \cdot \frac{J_a}{J_b} \right) \right]}$$

Hierfür wird man meist schreiben dürfen

$$\nu = \frac{10 E (J_a + J_b)}{l^2 (S_a + S_b)}$$

oder wenn man die Knicklasten der Einzelstäbe einführt:

$$S_{Ea} = 10 \cdot \frac{E J_a}{l^2} \quad \text{und} \quad S_{Eb} = 10 \cdot \frac{E J_b}{l^2}$$

$$\nu = \frac{S_{Ea} + S_{Eb}}{S_a + S_b}$$

Ist z. B.  $S_a$  gegeben, so folgt hieraus die zulässige Belastung des andern Stabes bei  $\nu$ -facher Sicherheit der Stabverbindung:

$$S_b = \frac{S_{Ea} + S_{Eb}}{\nu} - S_a$$

Sind auch die Trägheitsmomente gleich, so wird

$$\nu = \frac{10 EJ}{l^2 \cdot \frac{1}{2} (S_a + S_b)}$$

d. h. man rechnet wie für einen einzelnen Stab, aber mit dem arithmetischen Mittel der Kräfte.

Für  $S_a = S_b$  wird  $\nu = \nu_E$ , d. h. die Verbindung der Stäbe ist für die Knicksicherheit  $\perp$  Bildebene unwirksam, für  $S_b = 0$  wird  $\nu = 2\nu_E$ , die Tragkraft verdoppelt sich, für  $S_b = -S_a$ , d. h. mit einer gleich großen Zugkraft im Stabe  $b$  wird  $\nu = \infty$ , d. h. es kommt jetzt nur die Knicksicherheit der Stabhälften in der Bildebene in Betracht.

Setzt man

$$k_a = \sqrt{\frac{E J_a}{S_a}}, \quad k_b = \sqrt{\frac{E J_b}{S_b}}, \quad l_a = \frac{l_a}{2 k_a}, \quad l_b = \frac{l_b}{2 k_b}$$

so lautet die genaue Knickbedingung

$$\frac{S_a}{S_b} = -\frac{2 k_a \cdot \text{tg } l_a - l_a}{2 k_b \cdot \text{tg } l_b - l_b}$$

Man kann hieraus  $S_b$  berechnen, wenn  $S_a$  angenommen wird, das Wertepaar  $S_a$  und  $S_b$  bringt dann die Stabverbindung an die Grenze der Instabilität, ( $\nu = 1$ ), es gibt natürlich unendlich viele solcher Wertepaare. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der viel einfacher zu handhabenden Näherungsformeln ist sehr gut, besonders wenn man in letzteren 10 durch  $\pi^2$  ersetzt oder die Ergebnisse mit 0,987 multipliziert.

VII. Fall. Stab mit geradlinig zunehmender Längskraft.

In dieser Lage befindet sich z. B. die Druckgurtung eines Konsolfachwerks (Abb. 16), wenn man die Komponenten der Diagonalstäbe parallel zur Gurtung stetig auf die Länge der Gurtung verteilt, was um so richtiger ist, je größer die Felderzahl ist. Dann ist

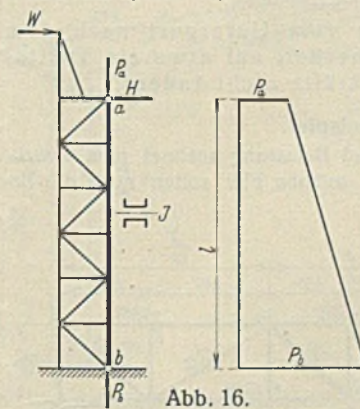


Abb. 16.

$$\nu = \frac{10 EJ}{l^2 \cdot \frac{1}{2} (P_a + P_b)}$$

d. h. man darf das arithmetische Mittel der Kräfte an den Enden einführen. Punkt  $a$  wird hierbei durch einen Horizontalverband oder den Kranbahnträger  $c$ 's festgehalten angenommen, beide Punkte  $a$  und  $b$  als feste Gelenke, welche Drehbewegungen  $\perp$  Bildfläche zulassen.

VIII. Fall. Stab mit parabelförmig zunehmender Längskraft.

In dieser Lage befindet sich die unverstelte Druckgurtung eines Fachwerkparallelträgers mit gleich großen Knotenlasten (Abb. 17). Die Untergurtung sei durch einen Verband am Ausweichen aus der lotrechten Ebene verhindert, von der Obergurtung seien nur die Endpunkte festgehalten. Auch hier sei angenommen, daß die Komponenten der Diagonalspannkkräfte parallel zur Gurtung eine stetige Längsbelastung bilden, d. h. es wird mit unendlich vielen Feldern gerechnet.

a) Die Lasten  $P$  wirken nur am Untergurt.  
Wir ersetzen  $P$  durch  $p a$  und führen als größte Stabkraft ein

$$S_{\max} = \frac{p l^2}{8 h}$$

Mit  $J$  konstant erhält man nach Vianello als zweiten Näherungswert

$$v_2 = \frac{EJ}{S_{\max} l^2} \cdot \frac{3^3 \cdot 11}{43} = \frac{EJ}{S_{\max} l^2} \cdot 20,72, \mu = 2,10.$$

Ändert sich das Trägheitsmoment ebenfalls nach einer Parabel, so wird

$$v_2 = \frac{EJ_{\max}}{S_{\max} l^2} \cdot \frac{2^3 \cdot 7}{3} = \frac{EJ_{\max}}{S_{\max} l^2} \cdot 18,67, \mu = 1,89.$$

Dondorf<sup>4)</sup> erhält durch die Auswertung der Knickbedingung mit der Felderzahl  $n = \infty$  die genauen Zahlen 20,48 und 18,48, also nur wenig verschieden. Für geringe Felderzahlen gehen diese Zahlen allerdings schnell herunter, was einleuchtend ist, da für  $n = 2$ ,  $S$  konstant und  $v = v_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  wird, d. h.  $\mu = 1$  (s. Abb. 18).

Die Abhandlung von Dondorf enthält die Zahlenwerte von  $\mu$  für alle geraden Zahlen von  $n = 2$  bis 20.

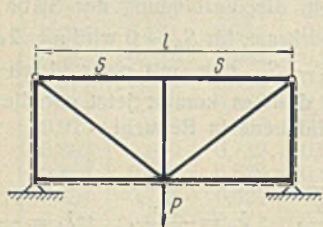


Abb. 18.

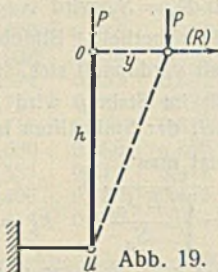


Abb. 19.

b) Die Lasten wirken nur am Obergurt.

Dieser Fall ist weit ungünstiger, weil die aus ihrer Ebene herausgeführten Kräfte  $P$  nach außen drängende Kräfte

$$R = \frac{P y}{h}$$

hervorrufen, welche die Ausbiegung zu vergrößern bestrebt sind und die Knicksicherheit vermindern (Abb. 19). Mit  $J$  konstant erhält man als zweiten Näherungswert:

$$v_2 = \frac{EJ}{S_{\max} l^2} \cdot \frac{13 \cdot 60}{101} = \frac{EJ}{S_{\max} l^2} \cdot 7,72, \mu = 0,78,$$

und mit parabolisch veränderlichem  $J$ :

$$v_2 = \frac{EJ_{\max}}{S_{\max} l^2} \cdot \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7}{5 \cdot 23} = \frac{EJ_{\max}}{S_{\max} l^2} \cdot 6,667, \mu = 0,67.$$

Bringt man also die Lasten vom Untergurt nach dem Obergurt, so geht die Knicksicherheit auf etwa ein Drittel herunter, trotzdem sich die Gurtkräfte nicht ändern.

### IX. Zahlenbeispiel.

Bei unregelmäßiger Gliederung und Belastung rechnet man zweckmäßig gleich mit Zahlen. Für einen solchen Fall sollen noch die Ergebnisse mitgeteilt werden.

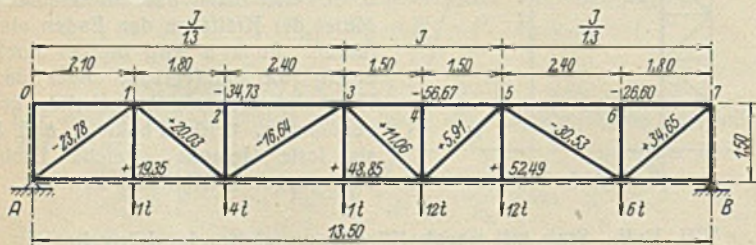


Abb. 20.

Die Abb. 20 zeigt das System, die Belastung und die Spannkraft. Das Trägheitsmoment des Obergurts in bezug auf die lotrechte Schwerachse sei von Knoten 3 bis 5  $= J$ , in den Seitenfeldern  $J : 1,3$ . Die erste

<sup>4)</sup> J. Dondorf, Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt und veränderlichem Druck, ohne und mit Querstützung. Diss. Düsseldorf 1907.

Biegungslinie sei eine Parabel vom Pfeil  $l$  m. Als Flächeninhalt nehmen wir der Einfachheit halber nur das einbeschriebene Polygon, dieses ist  $F_1 = 8,80 \text{ m}^2$ .

Am ausgebogenen Stabe greifen die Längskräfte

$$T = \Sigma D \cdot \cos \varphi$$

in den Punkten 1, 3 und 5 an, hierdurch entstehen Reaktionen

$$A = -B = \pm 1,06 \text{ t (Abb. 21)}.$$

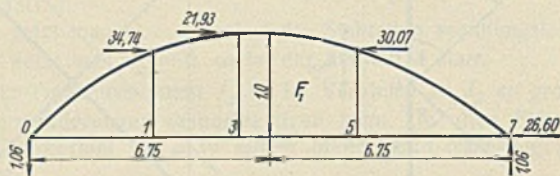


Abb. 21.

Nachdem hierfür die Biegemomente berechnet sind, erhält man als zweite Momentenfläche die zweite Biegungslinie, welche einen Flächeninhalt

$$EJ F_2 = 3778 \text{ einschließt.}$$

Dann ist

$$v_1 = \frac{F_1}{F_2} = \frac{8,80 EJ}{3778} = 0,00233 EJ.$$

Wir lassen nun die  $T$ -Belastung an der zweiten Biegungslinie angreifen, erhalten

$$A = -B = \pm 376,4,$$

hieraus die Biegemomente und als zweite Momentenfläche die dritte Biegungslinie mit  $E^2 J^2 F_3 = 1772900$  (Abb. 22). Dann ist

$$v_2 = \frac{F_2}{F_3} = \frac{3778 E^2 J^2}{EJ \cdot 1772900} = 0,00213 EJ.$$

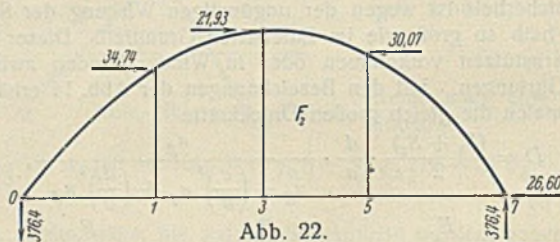


Abb. 22.

Die nächste Wiederholung ergibt mit  $F^3 J^3 F_4 = 836 \cdot 10^6$ :

$$v_3 = \frac{F_3}{F_4} = \frac{1772900 E^3 J^3}{E^2 J^2 \cdot 836 \cdot 10^6} = 0,00212 EJ.$$

Praktisch hätte also schon der erste Wert genügt. Bringen wir die Ergebnisse auf die Form

$$v = \frac{10 EJ}{S_{\max} l^2} \cdot \mu,$$

so folgt aus

$$\frac{10 EJ}{56,67 \cdot 13,5^2} \cdot \mu = 0,00212 EJ, \mu = 2,19,$$

d. h.: berechnet man den Gurt nach Euler für die größte Spannkraft in ganzer Länge mit  $v$ -facher Sicherheit, so ist die wirkliche Knicksicherheit 2,19 mal so groß.

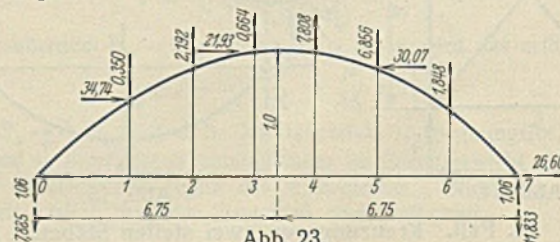


Abb. 23.

Dieselbe Lastgruppe möge nun am Obergurt angreifen. An der ersten Biegungslinie mit  $f = l$  m greifen nun außer den  $T$ -Kräften noch die Kräfte

$$R = \frac{P y}{h}$$

quer zur Stabachse an, wie Abb. 23 zeigt. Hierdurch entsteht eine neue Momentenfläche

$$M = M_T + M_R$$

und eine zweite Biegungslinie mit dem Flächeninhalt

$$EJ F_2 = 12034,$$

so daß

$$v_1 = \frac{F_1}{F_2} = \frac{8,80 EJ}{12034} = 0,000731 EJ.$$

Die Wiederholung des Verfahrens liefert

$$E^2 J^2 F_3 = 1714 \cdot 10^4,$$

$$v_2 = \frac{F_2}{F_3} = \frac{12034 E^2 J^2}{EJ \cdot 1714 \cdot 10^4} = 0,000702 EJ,$$

eine dritte Wiederholung ergibt

$$E^3 J^3 F_4 = 2405 \cdot 10^7,$$

$$\nu_3 = \frac{F_3}{F_4} = \frac{1710 \cdot 10^4 E^3 J^3}{E^2 J^2 \cdot 2405 \cdot 10^7} = 0,000713 EJ.$$

Bei der Berechnung der Belastungszustände, die zu den Biegungsflächen  $F_3$  und  $F_4$  führen, ist zu beachten, daß die Lasten  $R$  jedesmal neu berechnet werden müssen, weil sich die Hebelarme  $y$  der Ausbiegungen ändern, während die Lasten  $T$  unverändert bleiben. Bringt man das Ergebnis auf die Form

$$\nu = \frac{10 EJ}{S_{\max} l^2} \cdot \mu,$$

so folgt aus

$$\frac{10 EJ}{56,67 \cdot 13,5^2} \cdot \mu = 0,00070 EJ, \quad \mu = 0,97,$$

d. h.: berechnet man den Gurt nach Euler für die größte Spannkraft in ganzer Länge mit  $\nu$ -facher Sicherheit, so ist die wirkliche Sicherheit nur 0,97  $\nu$ .

Durch den Angriff der Lasten am Obergurt hat sich die Knicksicherheit auf den  $2,19 : 0,97 = 2,3^{\text{ten}}$  Teil vermindert.

Praktisch hätte in beiden Fällen der erste Näherungswert genügt.

### Verschiedenes.

Auswechslung genietet Fachwerkbinder gegen geschweißte Vollwandrahmen. In einer älteren Betriebswerkstätte des Eisenwerk Gebr. Frisch K. G., Augsburg, machte sich das Fehlen eines leichten Laufkrans auf die Dauer störend bemerkbar. Besonders seit die Halle einem anderen Zwecke dienen und künftighin größere Werkstücke in ihr befördert werden sollten. Sowohl das Dach als auch die Wände der Halle

an der Rahmenecke. Der Rahmenfuß besteht aus einer 15 mm starken Platte mit zwei Rippen. Die Rahmenecken sind, wie schon erwähnt, durch Zusammenschweißen der aufeinandergelegten Träger gebildet. Um das erforderliche Widerstandsmoment zu erhalten, sind die Ecken durch einen dreieckförmigen, 15 mm starken Zwickel und zwei Platten 150/8 mm verstärkt worden. Die in Abb. 3 sichtbaren kleinen Rippen dienen dem



Abb. 1. Alter Zustand der Werkstatthalle.

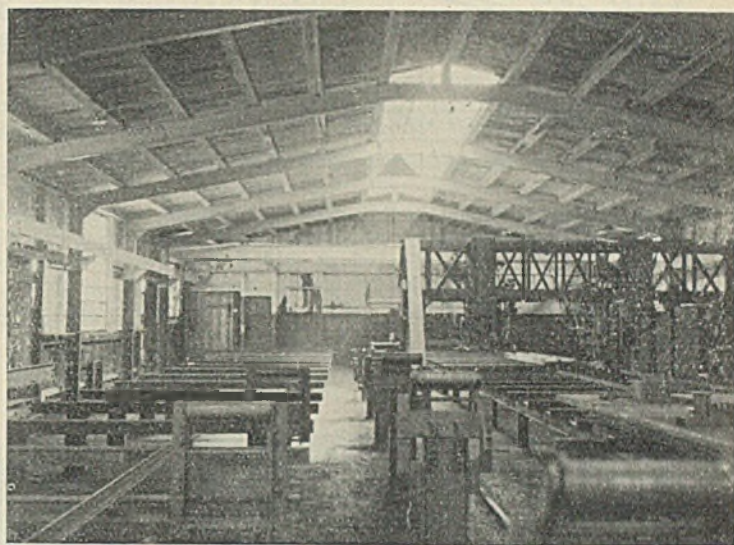


Abb. 2. Werkstatthalle mit neuen geschweißten Rahmen.

wurden von Zweigelenk-Fachwerkbinder getragen, die ihrer Bauart entsprechend verhältnismäßig weit in den Raum hineinragten. In der Halle befand sich ein fahrbares Doppelbohrwerk, das mit seiner Oberkante nur wenige Zentimeter unter der Unterkante des Rahmenuntergurt hindurchging. Unter diesen Umständen war der Einbau eines die ganze Halle bestreichenden und über dem Bohrwerk hinweggehenden Laufkrans unmöglich. Man entschloß sich daher, die an sich gut erhaltenen Fachwerkbinder (Abb. 1) durch niedrige Vollwandrahmen zu ersetzen. Die alten Fachwerke konnten nach ihrem Ausbau als Tragkonstruktion für eine andere Halle wieder verwendet werden.

Um die Kosten der Auswechslung möglichst niedrig zu halten, sollten die neuen Tragglieder nach Möglichkeit aus I 24 bestehen, die in mehr oder weniger großen Längen im Werk lagerten. Die angestellte Berechnung zeigte, daß der aus I 24 zusammengesetzte Zweigelenkrahmen mit geknicktem Riegel und entsprechenden Eckverstärkungen den Anforderungen genüge.

Die Vorkalkulation ergab, daß sich die Ausführung des Rahmens in genieteter Konstruktion 25% schwerer und auch annähernd ebensoviel teurer gestellt hätte als in geschweißter Ausbildung. Daher wurde der geschweißten Ausführung der Vorzug gegeben (Abb. 2).

Die Rahmen sind so ausgebildet, daß die vorhandenen Träger I 24 möglichst wenig bearbeitet zu werden brauchten; außer einigen wenigen Schnitten sind die Träger vollständig un bearbeitet geblieben. Besonders charakteristisch hierfür ist das unmittelbare Auflegen des geknickten Riegels auf den Stiel und die Belassung des unteren bzw. inneren Trägerflansches

Anschluß eines senkrechten Verbandes, der in der Stielebene des Rahmens liegt. — An den Knickstellen im Riegel sind die Träger geschnitten und durch Verschweißen mit einer Durchsteckkläse miteinander verbunden. Als Auflager für die Laufbahn des 2 1/2-t-Krans wurden an die Binderstiele Konsolen angeschweißt. — Mit Rücksicht auf die Aufstellung der Binder wurden im Riegel an der Stelle ungefähr gleichen positiven und negativen Moments zwei geschraubte biegungsfeste Stöße eingefügt. So war es möglich, nach Unterbolzung des Daches und Herausnahme eines

alten Fachwerkbinders nacheinander die neuen Rahmen aufzustellen, ohne daß die Seitenwände und die Dachhaut verletzt wurden; das äußere Aussehen der Halle blieb also vollständig unverändert. — In Abb. 3 sind die gegenübergestellten genieteten und geschweißten Rahmenausbildungen dargestellt. Die Werkstoffersparnis bei der geschweißten Ausführung und die damit vorhandene geringe Zahl der Arbeitsgänge ist sinnfällig.

Als Schweißgerät wurde ein Arcos-Dreiphasen-Transformator „T. M. L.“ und vorwiegend auch Arcos-Elektroden „Reformend“ als Schweißdraht verwendet. Die Stärke der Schweißnähte betrug durchweg je nach Erfordernis 6 bis 8 mm. Nur an besonders beanspruchten Stellen, wie den Stößen im Riegel, sind die Nähte 10 mm stark bemessen worden.

Die technische Durchbildung der geschweißten Rahmen war in unserem Falle zweifellos zweckmäßig und hat den Vorzug, daß sie wirtschaftlich und ästhetisch voll befriedigt. — Außerdem hat die Halle, wie die Gegenüberstellung der Abbildungen des alten und neuen Zustandes zeigt, bezüglich ihrer Belichtungsverhältnisse durchaus gewonnen. Dr.-Ing. Fricke.

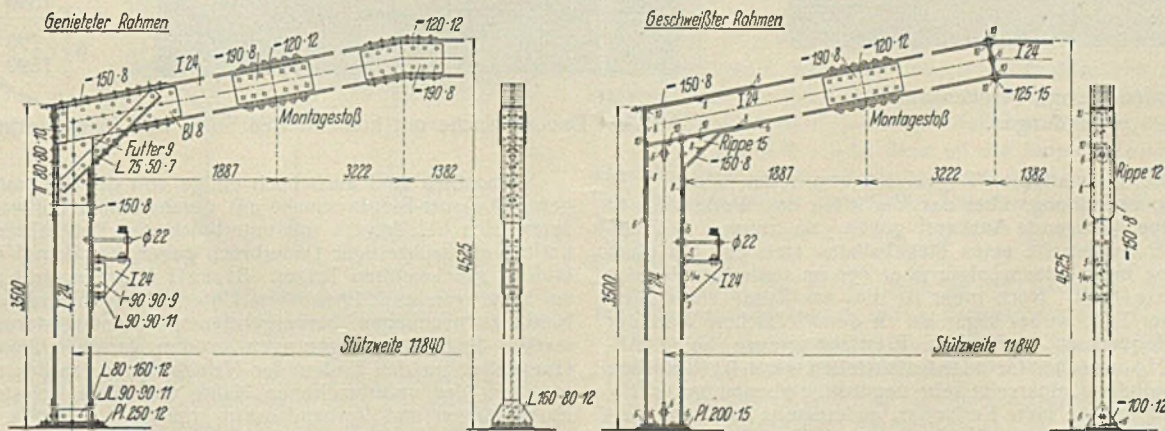


Abb. 3. Gegenüberstellung der genieteten und geschweißten Rahmenausbildung.

Über die Frage der Dauerfestigkeit geschweißter Verbindungen veröffentlicht Dr.-Ing. G. Bierett in der Zeitschrift „Elektroschweißung“ zwei interessante Aufsätze<sup>1)</sup>, aus denen hier die wichtigsten grundlegenden Erkenntnisse zusammengefaßt seien.

In den Arbeiten wird davon ausgegangen, daß sowohl die Niet- als auch die Schweißverbindungen außer der Stumpfnah sehr ungünstige Spannungsgesetze aufweisen, daß aber die Schweißverbindungen im Dauer-versuch ein ungleich ungünstigeres Verhalten gezeigt haben. Man war deshalb zunächst geneigt, die Ursache hierfür hauptsächlich in technologischen Einflüssen zu suchen, also z. B. in dem Fehlen ausreichender plastischer Verformbarkeit der Schweiße, welche den Stahl sonst befähigt,

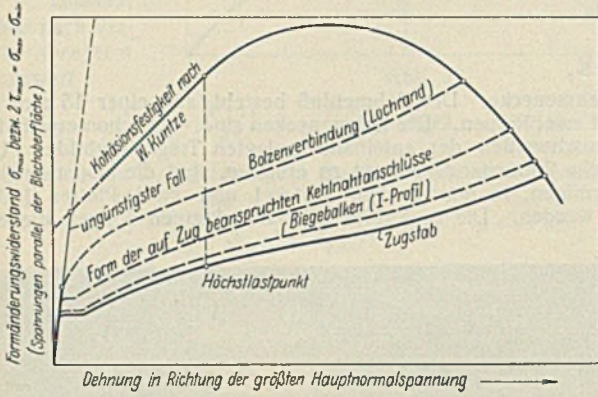


Abb. 1. Formänderungswiderstandslinien.

ungünstige Spannungszustände in höheren Belastungsstufen auszugleichen und dadurch sogar bei Dauer- und Wechselbelastungen in gewissen Grenzen unschädlich zu machen. Man kam jedoch bald zu der Vermutung, daß es sich hierbei vorwiegend um Erscheinungen mechanischer, durch die Form der Verbindungen bedingter und weniger werkstofflicher Art handelte.

Um diesen Erscheinungen näher zu kommen, muß man gewissen, noch nicht vollständig geklärten Eigenschaften des Stahles nachgehen, vor allem

Bei den meisten Schweißverbindungen haben wir nun einerseits ebenfalls eine ungefähr gleich hohe Kerbziffer, andererseits jedoch ein bedeutend niedrigeres Ansteigen des Formänderungswiderstandes gegenüber dem reinen Zugversuch. Es ist noch nicht geklärt, worauf dieses verschiedenartige Verhalten zurückzuführen ist. Die Formänderungswiderstandslinien sind in Abb. 1, welche der Abb. 6 des erstgenannten Aufsatzes von Bierett entspricht, dargestellt. Das frühere Abweichen von der Hookeschen Geraden kann eine Ursache für die niedrigere Dauerfestigkeit sein. Daß diese größere Empfindlichkeit der Schweißverbindungen gegen dynamische Beanspruchungen hauptsächlich durch die Form verursacht wird, geht auch aus Versuchen hervor, welche an einigen Stellen mit aus vollem Blech ohne Schweißung herausgearbeiteten Probekörpern, welche die Form von Schweißverbindungen hatten, an- gestellt wurden.

Aus dem Vorstehenden ist zu schließen, daß die Dauerfestigkeit der Schweißverbindungen vor allem durch eine Verbesserung der Konstruktions- formen angestrebt werden muß, um dadurch die Kerbziffer zu verkleinern. Die bisher durchgeführten Versuche weisen hierfür schon bestimmte Wege. Vor allem ist zu beachten, daß alle plötzlichen Querschnittsänderungen und Ungleichmäßigkeiten in der Spannungsverteilung den Dauerbruch begünstigen und deshalb möglichst gemildert werden müssen.

Ein Beispiel hierfür bietet Abb. 2, welche drei Laschenverbindungen mit Flanken-Kehlnähten zeigt. Die Proben unterscheiden sich nur hinsichtlich der Ausbildung der Nahte am Stoß, und zwar war bei

1. Naht am Stoß sehr scharf abgesetzt,
2. Naht über den Stoß durchgeschweißt,
3. Naht durch Fräsen zugespitzt.

Bei annähernd gleichen Belastungsgrenzen zwischen 800 und 1600 kg/cm<sup>2</sup> für das gestoßene Blech war die Zahl der ertragenen Lastwechsel im Fall 1 und 2 sehr niedrig und untereinander ziemlich gleich, stieg dann aber durch die Bearbeitung der Nähte am Stoß auf über das Vierfache, nämlich auf 2 098 000. Auch trat der Bruch jetzt nicht mehr im Stoß, sondern an den Laschenenden ein. Der z. B. bei Stabanschlüssen am Knotenblech besonders gefährdete Teil wird also durch eine solche oder ähnliche Bearbeitung ganz wesentlich verbessert.

Bei der in Abb. 3 wiedergegebenen Laschenverbindung mit Flanken- und Stirn-Kehlnähten wurde durch Abschrägen der Laschenenden eine Erhöhung der ertragenen Lastwechsel um 94% erreicht, was auf die Milderung des Querschnittsüberganges zurückzuführen ist.

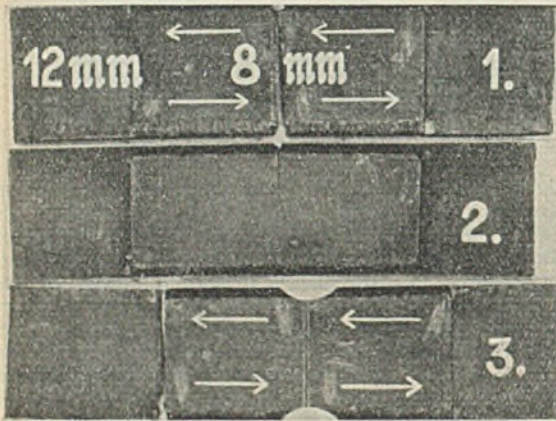


Abb. 2. Dauerversuche mit Flanken-nahtverbindungen.

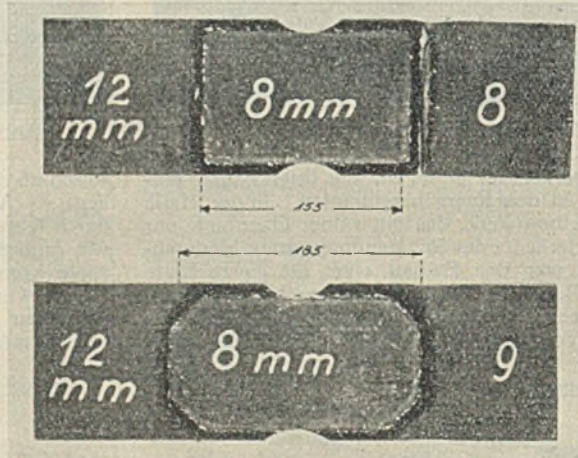


Abb. 3. Dauerversuche mit kombinierten Stirn- und Flanken-nahtverbindungen.

$\frac{\rho}{\sigma} \sim 0,5$  ohne Berücksichtigung des Nahtverlustes durch die Bearbeitung

Probe-Nr.	Spannungen in kg/cm <sup>2</sup>		Ertragene Lastwechselzahlen
	im Blech $\sigma_H$ $\sigma_0$	in den Laschen $\sigma_H$ $\sigma_0$	
8	780	780	1 634 000
	1580	1570	
9	790	780	3 169 000
	1590	1560	

der Tatsache, daß die im statischen Zugversuch ermittelten Werte, z. B. Streckgrenze und Streckdehnung, über das Verhalten des Werkstoffes in der Konstruktion keine genügende Auskunft geben. So treten z. B. Fließerscheinungen an der Außenseite eines Biegebalkens stets erst bei einer Spannung auf, welche mehr oder weniger über der im statischen Versuch ermittelten Fließgrenze liegt. Noch mehr ist dies am Rande eines Niet- oder Bolzenloches der Fall, wobei sogar bis zu dem 2,7fachen Wert der im gewöhnlichen Zugversuch ermittelten Elastizitätsgrenze keine Abweichungen von der Hookeschen Geraden festzustellen waren<sup>2)</sup>. Wir sehen also bei der Nietverbindung einerseits sehr ungünstige Spannungsverhältnisse, ausgedrückt durch eine hohe Kerbziffer, andererseits aber eine Verzögerung des Eintritts plastischer Verformungen, also Erhöhung des Formänderungswiderstandes.

<sup>1)</sup> Dr.-Ing. G. Bierett, Zur Klärung der mechanischen Grundlagen des Dauerbruches geschweißter Konstruktionen, Elektroschweißung 1933, Heft 2, S. 21. — Ders., Die Schweißverbindung bei dynamischer Beanspruchung, Elektroschweißung 1933, Heft 4, S. 61.

<sup>2)</sup> Dr.-Ing. G. Bierett, Ein Beitrag zur Frage der Spannungsstörungen in Bolzenverbindungen, Mitt. d. deutschen Mat.-Prüf.-Anst., Sonderheft XV (1931). Berlin 1931, Jul. Springer. — A. Thum und F. Wunderlich, Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung, Forschung a. d. Geb. d. Ingenieurw. 1932, Nr. 6, S. 261. — W. Kuntze, Mitt. d. deutschen Mat.-Prüf.-Anst., Sonderheft XIV (1930) und vom gleichen Verfasser „Kohäsionsfestigkeit“. Berlin 1932, Jul. Springer.

Beachtlich sind auch noch einige von der Gutehoffnungshütte durchgeführte Dauer-Biegeversuche mit geschweißten Vollwandträgern. Hierbei zeigte sich bei Trägern mit unterbrochenen Kehlnähten bei großen Querkraften ein frühzeitiger Dauerbruch gegenüber dem Verhalten der durchlaufend geschweißten Träger. Bierett führt den frühzeitigen Dauerbruch an Hand von experimentellen Untersuchungen über die durch derartige Nahtunterbrechungen hervorgerufenen Spannungsstörungen auf die sehr starken Spannungsteigerungen in den verschweißten Stiehbölen und Gurtplatten an den Enden der Nahtabschnitte zurück und warnt vor Anwendung der unterbrochenen Nähte vor allem bei starken dynamischen Einwirkungen und Vorhandensein größerer Querkraften.

Auf die weiteren in den Arbeiten behandelten Probleme und Versuche kann hier aus Raummangel nicht eingegangen werden. Aus dem gleichen Grunde wird auch von der Mitteilung des Zahlenmaterials der Versuchsergebnisse abgesehen, um so mehr, als die Arbeiten vor allem den großen Einfluß der konstruktiven Gestaltung darzustellen beabsichtigen, während die zahlenmäßigen Ergebnisse von Fall zu Fall verschieden sein können. Dipl.-Ing. Schultz, Breslau.

**INHALT:** Näherungslösungen für besondere Fälle von Knickbelastung. — Verschiedenes: Auswechslung gelenkter Fachwerkbinder gegen geschweißte Vollwandrahmen. — Über die Frage der Dauerfestigkeit geschweißter Verbindungen.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W8. Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW68.