

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule  
Fernsprecher: C 1 Steinplatz 0011

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-  
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

6. Jahrgang

BERLIN, 15. September 1933

Heft 19

## Das „Kraftgrößenverfahren“ und das „Formänderungsgrößenverfahren“ für die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde.<sup>1)</sup>

Alle Rechte vorbehalten.

Von A. Hertwig, Berlin.

### Vorbemerkung.

In der Praxis haben hochgradig statisch unbestimmte Gebilde Bedeutung gewonnen, bei deren Berechnung Formänderungen als Unbekannte zu benutzen vorteilhaft ist. Die Arbeiten von Engeßer, Manderla, Mohr, Ostenfeld und Mann<sup>2)</sup> haben die Vorzüge bei bestimmten Aufgaben gezeigt, jedoch herrschen über die Vor- und Nachteile der beiden Verfahren noch vielfach Unklarheiten. Daher sei es erlaubt, zunächst den inneren Zusammenhang der beiden Verfahren und ihre „Dualität“ vollkommen herauszuarbeiten und dann Näherungslösungen, die an das Mohrsche Knotendrehwinkelverfahren der Nebenspannungsberechnung anknüpfen, in den allgemeinen Zusammenhang einzubeziehen.

### § 1. Die Gleichgewichtsbedingungen und die Formänderungsbedingungen.

Es sollen Gebilde betrachtet werden, in denen gerade oder gekrümmte Stäbe miteinander verbunden sind. An den Verbindungsstellen der Stäbe können eine, zwei oder drei Gegenkräfte entstehen, oder anders ausgedrückt, die verbundenen Stäbe können sich mit zwei, einem oder keinem Freiheitsgrad gegeneinander bewegen. Um die Betrachtung zu vereinfachen, soll angenommen werden, daß die Stäbe entweder vollkommen gegeneinander verspannt oder nur durch wirkliche Gelenke miteinander verbunden sind. Denn jede andere Verbindungsart kann auf reine Gelenkverbindungen zurückgeführt werden. Krümme Stäbe sollen durch vieleckige Stabzüge aus geraden Stäben mit biegesteifen Verbindungen ersetzt werden.

Die Gebilde besitzen:  $k_1$  Knotenpunkte erster Art, d. h. Punkte, in denen entweder zwei oder mehrere Stäbe in einem Gelenk zusammenstoßen (Abb. 1),  $k_2$  Knotenpunkte zweiter Art, in denen mindestens zwei Stäbe biegesteif unter einem Winkel  $\leq \pi$  verbunden sind. Die Ver-

Zu den „äußeren“ Formänderungen gehören die Verschiebungen  $\xi$  und  $\eta$  der Knotenpunkte in Richtung der  $x$ - und  $y$ -Achse und die Drehungen  $\nu$  der Knotenpunkte zweiter Art in der Richtung von der  $x$ - zur  $y$ -Achse; diese Formänderungen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\nu$  werden auch mit  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  und  $\zeta_3$  bezeichnet. Äußere Formänderungen gibt es am System:  $2k_1$  Knotenpunktverschiebungen  $\xi$ ,  $\eta$  der Knotenpunkte erster Art, durch die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{ke}$  entstehen,  $3k_2$  Knotenpunktverschiebungen und Drehungen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  der Knotenpunkte zweiter Art.

Die äußeren und inneren Formänderungen hängen durch die bekannten Gleichungen zusammen:

$$(1) \quad (\xi_e - \xi_k) \cos \alpha_{ke} + (\eta_e - \eta_k) \sin \alpha_{ke} = \Delta S_{ke}$$

$$(2) \quad \tau_{ke} + \vartheta_{ke} = \nu_k$$

$$(3) \quad \vartheta_{ke} = -\frac{\xi_e - \xi_k}{S_{ke}} \cdot \sin \alpha_{ke} + \frac{(\eta_e - \eta_k)}{S_{ke}} \cdot \cos \alpha_{ke}$$

Es gibt  $s$  Gleichungen der Form (1) und  $p$  Gleichungen der Form (2), zusammen  $s+p$  Gleichungen mit  $2k_1+3k_2$  Verschiebungen  $\zeta$ . Diesen Formänderungsgleichungen entsprechen die Gleichgewichtsbedingungen

$$(4) \quad \sum_e S_{ke} \cdot \cos \alpha_{ke} = -P_{kx} \quad \sum_e S_{ke} \cdot \sin \alpha_{ke} = -P_{ky}$$

$$(5) \quad \sum_e M_{ke} = -M_k$$

deren Zahl zusammen  $2k_1+3k_2$  beträgt mit  $s+p$  Kraftgrößen  $S_{ke}$  und  $M_{ke}$ , in denen  $P$  und  $M$  die Knotenlasten darstellen. Die Beiwerte in den beiden Gleichungssystemen der Gleichungen (1) und (2) einerseits und den Gleichungen (4) und (5) andererseits entsprechen einander so, daß die Beiwerte der Zeilen im System 1 in den Spalten des Systems 4 und die Beiwerte der Zeilen im System 2 in den Spalten des Systems 5 auftreten.

In den  $s+p$  Verschiebungsbedingungen stehen  $2k_1+3k_2$  unbekannte Verschiebungen  $\zeta$ , wenn die inneren Formänderungen  $\Delta s$  und  $\tau$  gegeben sind; in den  $2k_1+3k_2$  Gleichgewichtsbedingungen stehen  $s+p$  unbekannte Kraftgrößen  $S_{ke}$  und  $M_{ke}$ , wenn die äußeren Kräfte  $P_k$  und  $M_k$  gegeben sind.

Ist  $s+p=2k_1+3k_2$ , dann ist das betrachtete Gebilde kinematisch bestimmt und auch statisch bestimmt. Ist  $s+p>2k_1+3k_2$ , dann ist das Gebilde  $r_k$ -fach kinematisch überbestimmt und  $r_k$ -fach statisch unbestimmt, wenn  $s+p-2k_1-3k_2=r_k$ ,  $s+p-r_k=r_d$ ,  $r_k+r_d=n$  gesetzt werden.

Ist  $s+p<2k_1+3k_2$ , dann ist das Gebilde  $r_k$ -fach kinematisch unbestimmt oder beweglich mit  $r_k$  Freiheitsgraden.

Wir wollen hier weiter nur den Fall der statischen Unbestimmtheit oder kinematischen Überbestimmtheit vom Grade  $r_k$  näher untersuchen.

Es gibt also:  $2k_1+3k_2$  Gleichgewichtsbedingungen mit  $s+p=2k_1+3k_2+r_k$  unbekanntem Kraftgrößen und  $s+p$  Verschiebungsbedingungen mit  $2k_1+3k_2=s+p-r_k=r_d$  unbekanntem Verschiebungsgrößen. Die aufgestellten beiden Gleichungssysteme weisen auf zwei verschiedene Lösungswege, wenn zwischen den Kraftgrößen  $S$  und den Verschiebungsgrößen  $\zeta$  nur lineare Beziehungen vorhanden sind von der Form

$$(6) \quad S_m = S_{m0} - \sum_{i=1}^{2k_1+3k_2} S_{mi} \zeta_i$$

$$(7) \quad \zeta_m = \zeta_{m0} - \sum_{i=1}^{s+p} \zeta_{mi} S_i$$

Setzt man in die  $s+p$  Verschiebungsgleichungen (1) und (2) die  $\zeta$  nach Gleichung (7) ein, so entstehen  $s+p$  Gleichungen für  $s+p$  unbekannte

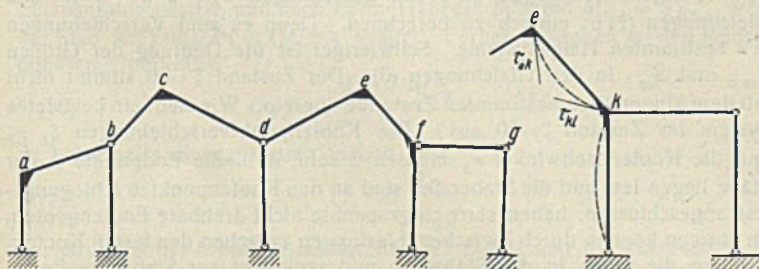


Abb. 1.

Abb. 2.

bindungsstellen der Knotenpunkte  $k-e$  sind die Achsen der Stäbe  $k-e$ , ihre Anzahl ist  $s$ . Zu den „inneren“ Formänderungen gehören die Längenänderungen  $\Delta s_{ke}$  der Stäbe und die Verdrehungen  $\tau_{ke}$  der Endtangentialen an ihren Einspannungen am Ende  $k$  des Stabes gegen die Stabsehne und die Verdrehungen  $\tau_{ek}$  am Stabende  $e$  (Abb. 2). Innere Formänderungen gibt es:  $s$  Längenänderungen  $\Delta s$  der Stäbe,  $p$  Tangentialdrehwinkel  $\tau$  bei  $p$  eingespannten Stabenden.

<sup>1)</sup> Die Arbeit ist mit freundlicher Erlaubnis des Verfassers und der Firma J. Gollnow & Sohn, Stettin, aus deren 100 Jahres-Festschrift entnommen.

<sup>2)</sup> Engeßer, Über die Durchbiegung von Fachwerkträgern und die hierbei auftretenden zusätzlichen Spannungen, Zeitschrift für Baukunde 1879. — Manderla, Die Berechnung der Sekundärspannungen im einfachen Fachwerk infolge starrer Knotenverbindungen, Allgemeine Bauzeitung 1880. — Mohr, Die Berechnung des Fachwerks mit starren Knotenverbindungen, Zivilingenieur 1892. — Ostenfeld, Die Deformationsmethode, Berlin 1926 (Springer). — Mann, Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage, Berlin 1926 (Springer).

Kraftgrößen. Teilt man die unbekannt Kraftgrößen in zwei Gruppen, nämlich in die Gruppe der zu einem statisch bestimmten Gebilde notwendigen  $S_0$  und in eine Gruppe der statisch überzähligen  $X$ , so kann man  $r_d$  Gleichungen

$$(8) \quad S_m = S_{m0} - \sum_{i=1}^{r_d} S_{mi} X_i$$

zu einer Substitution benutzen und dann die weiteren  $r_k$ -Gleichungen mit  $r_k$  unbekannt  $X_i$  auflösen. Das ist das Kraftgrößenverfahren.

Auf dem anderen Wege führt man in die  $2k_1 + 3k_2$  Gleichgewichtsbedingungen (4) und (5) durch die Gleichung (6) die  $2k_1 + 3k_2$  unbekannt Formveränderungen  $\zeta_i$  ein, so daß  $r_d$  Gleichungen mit  $r_d$  unbekannt  $\zeta$

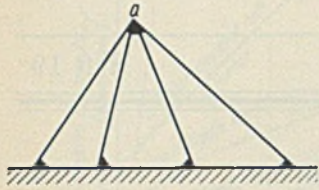


Abb. 3.

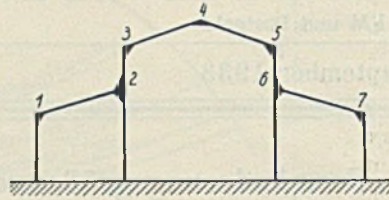


Abb. 4.

entstehen. Welchen der beiden Wege man geht, ist in bezug auf die Rechenarbeit bei strenger Lösung der Gleichungen ziemlich gleichgültig, aber nicht gleichgültig mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit und mit Rücksicht auf etwaige anzuwendende Näherungsrechnungen. Im allgemeinen kann man zunächst sagen: ist  $r_d < r_k$ , dann ist das Formänderungsverfahren vorzuziehen, ist  $r_k < r_d$ , dann das Kraftgrößenverfahren. Die Abb. 3 u. 4 zeigen Beispiele für beide Fälle.

Um die Elastizitätsgleichungen beim Kraftgrößenverfahren oder die Gleichgewichtsbedingungen beim Formänderungsverfahren ohne die eben beschriebene umständliche allgemeine Substitution zu gewinnen, kann man die verschiedensten Wege benutzen: anschauliche Ableitungen bei bestimmten Beispielen oder das Prinzip der virtuellen Verrückung oder das Minimum der Formänderungsarbeit. Ferner kann man bei der Aufstellung der Gleichungen gleich Rücksicht nehmen auf eine leichte Lösbarkeit, indem man die Unbekannten so wählt, daß die Verteilung der Unbekannt im Gleichungssystem eine einfache Lösung der homogenen Gleichungen ermöglicht, wie z. B. bei dreigliedrigen und ähnlichen Gleichungen. Zunächst sollen die Gleichungen ohne Benutzung allgemeiner Prinzipien abgeleitet werden, weil dann die Zusammenhänge am anschaulichsten erscheinen.

§ 2. Die dualen Verfahren.

Um die Merkmale der beiden Verfahren klar herauszuarbeiten, wollen wir sie an einem Beispiel erläutern, müssen dabei allerdings manches Bekannte wiederholen.

Der Werkstoff des ebenen Systems (Abb. 5), d. h. der Elastizitätsmodul, die Stabquerschnitte, der Einfachheit halber mit festen Querschnitten  $F$  und festen Trägheitsmomenten  $J$ , seien gegeben. Die Zahl

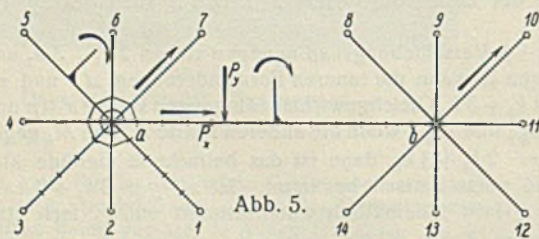


Abb. 5.

der Gleichgewichtsbedingungen von der Form (4) und (5) ist  $2k_1 + 3k_2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ , die Zahl der unbekannt Stabkräfte  $S_{ke}$  und der Einspannungsmomente  $M_{ke}$   $s + p = 15 + 8 = 23$ , der Grad der statischen Unbestimmtheit  $r_k = 23 - 5 = 18$ . Als statisch überzählige Größen  $X$  sollen gewählt werden: elf Stabkräfte und sieben Verspannungsmomente zwischen je zwei Stäben am Knotenpunkt a. Das statisch bestimmte Hauptsystem ist also das Gebilde der punktierten Stäbe mit Gelenken bei a und b und den überzähligen Stäben, die an den Knotenpunkten a und b längsbeweglich und mit frei drehbaren Endtangentialen bei a angeschlossen sind. Die im vorigen Paragraphen eingeführte Substitution bedeutet nun nichts anderes als die Forderung, daß am System die Gleichgewichtsbedingungen und die Formänderungsbedingungen miteinander verträglich sind. Aus dieser Forderung folgt die folgende Betrachtung: Belastet man das Hauptsystem mit den äußeren Belastungen, dann entstehen an den längsbeweglichen Anschlüssen Lücken zwischen den Stabenden und dem Knotenpunkt und bei a Winkeländerungen zwischen den Stäben, die lineare Funktionen der Belastungen  $P$  sind:

$$(9) \quad \Delta s^P = \sum P_m \delta_{km}$$

Belastet man weiter dieses System mit den überzähligen  $X$ , so entstehen weitere Formänderungen am Hauptsystem, die sich den ersten überlagern und ebenso lineare Funktionen der  $X$  sind:

$$(10) \quad \Delta s_k^X = \sum_k X_i \delta_{ki}$$

d. h. es entstehen auch Änderungen der Lücken und der Winkel zwischen den Stabenden bei a. Im gegebenen System sind die Lücken nicht vorhanden und die Stabenden gegeneinander starr verspannt. Man gewinnt aus den beiden genannten Belastungszuständen den Formänderungszustand des gegebenen Systems, wenn man

$$(11a) \quad \Delta s^X = \Delta s^P$$

setzt, und es entsteht ein Gleichungssystem

$$(11b) \quad \sum_i X_i \delta_{ri} = \sum_m P_m \delta_{rm} \quad (r = 1, 2 \dots r_k)$$

unter Benutzung der Gleichungen (9) und (10), zur Berechnung der überzähligen  $X$ , wenn man zugleich noch nach dem Maxwellschen Satz  $\delta_{rm} = \delta_{mr}$  schreibt. Jede weitere statische Größe  $S_m$  wird durch die überzähligen  $X$  ausgedrückt in der Form

$$(12) \quad S_m = S_{m0} - \sum S_{mi} X_i$$

in denen die Werte  $S_{m0}$  und  $S_{mi}$  die statischen Größen  $S_m$  im Hauptsystem bei einem Belastungszustand  $X=0$  und im Belastungszustand  $X_i = -1$  sind.

Wie verläuft das duale Formänderungsverfahren?

Es gibt  $2k_1 + 3k_2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$  unbekannt Formänderungen  $\xi_a \eta_a \xi_b \eta_b$ , das sind die Komponenten der Knotenpunktverschiebungen bei a und b, und der Knotendrehwinkel  $\gamma_a$ , die alle zusammen mit  $\zeta$  bezeichnet werden sollen. Die Zahl der Formänderungsbeziehungen ist  $s + p = 15 + 8 = 23$  und enthält  $s = 15$  Gleichungen von der Form (1) und  $p = 8$  von der Form (2). Der Grad der kinematischen Überbestimmtheit  $r_k$  ist  $r_k = 23 - 5 = 18$ . In den Gleichungen fehlen also 18 Unbekannte. Die fehlenden Unbekannt werden wieder aus der Forderung gewonnen, daß die Formänderungsbeziehungen und die Gleichgewichtsbedingungen verträglich sein müssen. Es müssen also außer den  $r_d = 2k_1 + 3k_2 = 5$  unbekannt Formänderungen  $r_k = 18$  weitere Unbekannt in das Gleichungssystem eingeführt werden. Die notwendige Zahl weiterer Unbekannt stellen die  $r_k$  Kraftgrößen in den Verbindungen, welche die kinematische Überbestimmtheit erzeugen. Die Kraftgrößen im kinematisch bestimmten System, das ja auch statisch bestimmt ist, und die Kraftgrößen in den Überbestimmtheiten müssen im Gleichgewicht stehen. Drückt man nun alle unbekannt Kraftgrößen als lineare Funktion der unbekannt Formänderungen nach Gleichung (6) aus, dann stimmt die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Kraftgrößen des kinematisch bestimmten Systems und den Kraftgrößen in den Überbestimmtheiten gerade mit der Zahl  $r_d$  der erscheinenden unbekannt Formänderungen  $\zeta_i$  überein. Denn die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen entspricht der Zahl der Verschiebungskomponenten, also der Zahl der unbekannt  $\zeta_i$ . Dieser Gang entspricht wieder der oben beschriebenen rein formalen Substitution. In dem Kraftgrößenverfahren sind die Beziehungen  $\delta_{mi}$  und  $\delta_{ji}$  in den Gleichungen (11b) einfach zu berechnen. Denn es sind Verschiebungen des bestimmten Hauptsystems. Schwieriger ist die Deutung der Größen  $S_{m0}$  und  $S_{mi}$  in den Gleichungen (6). Der Zustand  $\zeta = 0$  stimmt nicht mit dem kinematisch bestimmten Zustande überein. Wie sieht ein belastetes System im Zustand  $\zeta = 0$  aus? Die Knotenpunktverschiebungen  $\xi_k \eta_k$  und die Knotendrehwinkel  $\gamma_k$  müssen 0 sein, d. h. die Endpunkte k der Stäbe liegen fest und die Stabenden sind an den Knotenpunkten k biegeunflexibel angeschlossen, haben starr eingespannte nicht drehbare Endtangentialen. Im übrigen können durch Zwischenbelastungen zwischen den festen Knotenpunkten die Stäbe in der Stabachse und senkrecht zur Stabachse Formänderungen erleiden. Belastungen in den Knotenpunkten werden an den festen Knotenpunkten unmittelbar aufgenommen, erzeugen also in den die Knotenpunkte verbindenden Teilen keine Spannung. Ein Zustand  $\zeta_i = -1$  mit  $\zeta_i = -1$  und den übrigen  $\zeta = 0$  entspricht einem System, das unbelastet ist und einen Freiheitsgrad besitzt mit der Verschiebung  $\zeta_i = -1$ . Ist  $\zeta_i$  eine Verschiebung  $\xi_k$  oder  $\eta_k$  des Punktes k, so entstehen nach der Formel (1) in den Stabrichtungen ke Längenänderungen  $\Delta s_{ke} = \cos \alpha_{ke}$  oder  $= \sin \alpha_{ke}$  gleich der Projektion der Verschiebung  $\zeta_i = -1$  in der Stabrichtung, und ferner nach Formel (3) Verdrehungen der Stäbe  $\mathcal{P}_{ke} = \sin \alpha_{ke} \cdot s_{ke}$  oder  $\cos \alpha_{ke} \cdot s_{ke}$ . Den Längenänderungen  $\Delta s_{ke}$  entsprechen Stabkräfte  $S_{ke}$  und den Stabdrehungen  $\mathcal{P}_{ke}$  Momente  $M_{ke}$ .

Sind die Stäbe zwischen den starren Knotenpunkten gerade, dann gelten die folgenden Formeln:

a) An einem beiderseits elastisch eingespannten Balken entstehen bei Verdrehungen  $\tau_{ke} = -1$  die Momente

$$(12a) \quad M_{ke} = \frac{4 E J_{ke}}{s_{ke}}, \quad M_{ek} = \frac{2 E J_{ke}}{s_{ke}} \quad (\text{Abb. 6a}).$$

An einem nur auf einer Seite elastisch eingespannten Balken entsteht bei  $\tau_{ke} = -1$

$$(13) \quad M_{ke} = \frac{3 E J_{ke}}{s_{ke}} \quad (\text{Abb. 6b}).$$

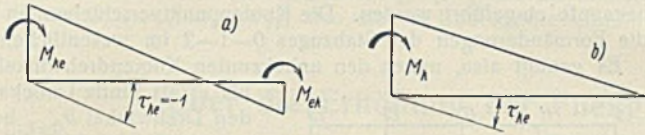


Abb. 6a u. b.

b) An einem Balken, der an beiden Enden starr eingespannt und mit einer Last  $P_y$  und einem Lastmoment  $M$  belastet ist, sind die Spannungsmomente

$$(14a) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{ke} &= -P_y l \xi (\xi')^2 \\ M_{ek} &= +P_y l \xi^2 \xi' \end{aligned} \right\} \text{ infolge } P_y$$

$$(14b) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{ke} &= M 3 \xi' [2 - 3 \xi'] \\ M_{ek} &= +M 3 \xi [2 - 3 \xi] \end{aligned} \right\} \text{ infolge } M \quad (\text{Abb. 7a}).$$

Ist der Balken nur an einem Ende eingespannt, so ist

$$(15a) \quad M_{ke} = -\frac{P_y l}{2} [\xi' - (\xi')^3] \text{ infolge } P_y$$

$$(15b) \quad M_{ke} = +\frac{M}{2} [1 - 3(\xi')^2] \text{ infolge } M \quad (\text{Abb. 7b}).$$

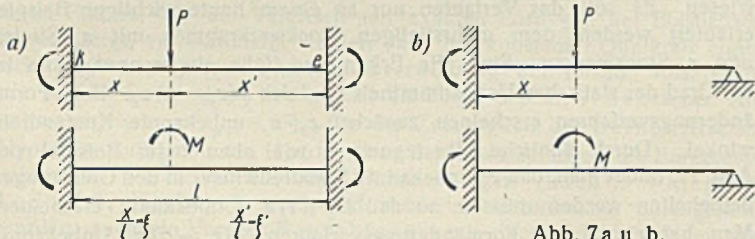


Abb. 7a u. b.

c) Die Beziehungen zwischen den Kraftgrößen und Formänderungen sind:

$$(16) \quad S_{ke} = \frac{\Delta S_{ke}}{s_{ke}} \cdot E F_{ke}, \quad \varrho_{ke} = \frac{E J_{ke}}{s_{ke}}$$

$$(17) \quad M_{ke} = \varrho_{ke} (4 \nu_k + 2 \nu_e - 6 \vartheta_{ke}), \quad M_{ek} = \varrho_{ke} (2 \nu_k + 4 \nu_e - 6 \vartheta_{ke}),$$

wenn beide Stabenden an Knoten mit Knotendrehwinkeln, also an Knotenpunkte zweiter Art anschließen,

$$(18) \quad M_{ke} = \varrho_{ke} (3 \nu_k - 3 \vartheta_{ke}),$$

wenn am Ende  $k$  ein Knotenpunkt zweiter Art, am Knotenpunkt  $e$  ein Knotenpunkt erster Art liegt.

Ist  $\zeta = -1$  ein Knotendrehwinkel, dann entstehen nach Formel (17) Momente  $M_{ke} = 4 \varrho_{ke}$  und  $M_{ek} = 2 \varrho_{ke}$ , wenn das Ende  $e$  auch eine Einspannung besitzt, und nach Formel (18) ein Moment  $M_{ke} = 3 \varrho_{ke}$ , wenn der Stab am Ende  $e$  ein Gelenk besitzt. Ferner entstehen an den Knotenpunkten Querkräfte

$$(19) \quad Q_{ke} = \frac{M_{ke} + M_{ek}}{s_{ke}} = \frac{6 \varrho_{ke}}{s_{ke}}$$

an beiderseits eingespannten Stäben und

$$(20) \quad Q_{ke} = \frac{3 \varrho_{ke}}{s_{ke}}$$

bei einseitig bei  $k$  eingespannten Stäben. Damit sind die Zustände  $\zeta = 0$  und  $\zeta_i = -1$  vollständig beschrieben.

An jedem Knotenpunkt mit Beweglichkeiten gibt es also entsprechend der Zahl der  $\zeta$  Gleichgewichtsbedingungen der Form (4) und (5)

$$\sum_e S_{ke} \cdot \cos \alpha_{ke} + P_x = 0, \quad \sum_e S_{ke} \cdot \sin \alpha_{ke} + P_y = 0, \quad \sum_e M_{ke} + M_k = 0.$$

Setzt man in diese Gleichungen die  $S_{ke}$  und die  $M_{ke}$  als Funktion der  $\zeta_i$  ein, dann entstehen  $r_d$  Gleichungen der Form

$$(21a) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_i \zeta_i \sum_e S_{ke} \zeta_i \cdot \cos \alpha_{ke} + \sum_e S_{ke}^0 \cdot \cos \alpha_{ke} + P_x &= 0, \\ \sum_i \zeta_i \sum_e S_{ke} \zeta_i \cdot \sin \alpha_{ke} + \sum_e S_{ke}^0 \cdot \sin \alpha_{ke} + P_y &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(21b) \quad \sum_i \zeta_i \sum_e M_{ke} \zeta_i + \sum_e M_{ke}^0 + M_k = 0.$$

Die Summenausdrücke über die Größen  $S_{ke}$ ,  $M_{ke}$  und die  $S_{ke}^0$  und  $M_{ke}^0$  sind Komponenten der im Knotenpunkt  $k$  angreifenden Kraftgrößen bei den Zuständen  $\zeta_i = -1$  und  $\zeta = 0$  in den Richtungen  $\zeta_j$ . Werden sie mit  $Z$  bezeichnet, dann lauten die Gleichungen:

$$(21c) \quad \sum \zeta_i Z_{ij} = Z_{mi}.$$

Für die Beiwerte  $Z_{ij}$  gilt auch der Satz von der Gegenseitigkeit, denn das ganze duale Verfahren der Formänderungsgrößen folgt aus den Sätzen über die Formänderungsarbeit, daß eine Verschiebung  $\delta = \frac{\partial A}{\partial P}$

und eine Knotenlast  $P = \frac{\partial A}{\partial \delta}$  ist. Den Satz über die Gegenseitigkeit  $Z_{ji} = Z_{ij}$  kann man auch mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückung ebenso beweisen wie den Satz über die Gegenseitigkeit der  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Die Elastizitätsgleichungen (11 b) des Kraftgrößenverfahrens kann man, wie schon angedeutet, auch mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ableiten, indem man die Arbeitsgleichungen für den wirklichen Formänderungszustand des gegebenen belasteten Systems und die Belastungszustände  $\zeta_i = -1$  ansetzt. Die Gleichungen (21) des Formänderungsverfahrens kann man gewinnen, indem man die Arbeitsgleichung für den wirklichen Kräfte- und Spannungszustand des gegebenen Systems und die Verschiebungszustände  $\zeta_i = -1$  anschreibt.

Den Ordinaten der Biegelinie  $\delta_{mi}$  beim Kraftgrößenverfahren entsprechen die Größen  $Z_{mi}$ . Wirkt eine Kraft  $P_m$  am Starrsystem, dann entstehen am Punkt  $i$  in Richtung von  $\zeta_i$  Komponenten  $Z_{mi}$ . Nach dem Satz der Gegenseitigkeit kann man  $Z_{mi} = Z_{im}$  setzen.  $Z_{im}$  wäre eine Kraft  $P_m$  im Punkte  $m$ , die beim Zustand  $\zeta_i = -1$  diese Verschiebung erzeugt. Trägt man diese Kräfte auf den Wirkungslinien der parallelen Kraft  $P_m$  auf, so hat man eine der Biegelinie entsprechende Belastungslinie. Aus den Ordinaten dieser Belastungslinien lassen sich Einflußlinien der  $\zeta$  zusammensetzen. Die Einflußlinie einer statischen Größe  $S_m$  setzt sich zusammen nach der Gleichung (6)  $S_m = S_{m0} - \sum S_{mi} \zeta_i$  aus der Einflußlinie  $S_{m0}$  des Starrsystems und den Einflußlinien der  $\zeta_i$ . Natürlich kann man auch diese Einflußlinien als eine einzige Belastungslinie zusammengesetzter Verschiebungszustände  $\zeta_i$  deuten.

Außerdem kann man auch im Formänderungsverfahren die Einflußlinien als Biegelinien deuten. Das oben gegebene Beispiel gehört in die Aufgabenklasse, bei der  $r_d < r_k$  ist, denn das System ist 18fach statisch unbestimmt, es sind aber nur fünf Gleichungen mit unbekanntem  $\zeta_i$  zu lösen.

Nun gibt es aber in der Praxis wenigstens unter ebenen Gebilden wenige Aufgaben mit  $r_d < r_k$ . Es wäre also das Formänderungsverfahren gar nicht bedeutungsvoll, wenn es nicht bei manchen Gebilden einen anderen großen Vorzug vor dem Kraftgrößenverfahren hätte. Bei Aufgaben mit  $r_d > r_k$ , bei denen also die Zahl der unbekanntem  $\zeta_i$  größer ist als der Grad der statischen Unbestimmtheit, kann es trotzdem mit Vorteil verwendet werden, weil man unter den unbekanntem  $\zeta_i$  leicht diejenigen ausschalten kann, die einen geringen Einfluß auf das Endergebnis haben. Von diesen Fällen soll der nächste Abschnitt handeln.

### § 3. Näherungslösungen beim Formänderungsverfahren.

Die Bedeutung derartiger Näherungslösungen ist am klassischen Beispiel für das Formänderungsverfahren, nämlich an der Nebenspannungsberechnung eines Dreieckfachwerks, am besten zu erläutern. Im Dreieckfachwerk hängen die Knotenpunktverschiebungen  $\xi$  und  $\eta$  nur von den Längenänderungen  $\Delta s$  der Stäbe ab. Sind nun die Ausbiegungen der Stabachsenpunkte senkrecht zu den Stabachsen von derselben Größenordnung wie die Längenänderung infolge der gleichmäßig über den Stabquerschnitt verteilten Längsstabkräfte, dann sind die Beiträge der Verbiegungen zu den Längenänderungen  $\Delta s$  nur klein gegen die  $\Delta s$ , können also vernachlässigt werden. So führt diese einfache Überlegung zu dem wichtigen Ergebnis, daß man die Knotenpunktverschiebungen  $\xi$  und  $\eta$  aus dem Fachwerk mit Gelenken, also ohne Nebenspannungen genügend genau errechnen kann. Dann gehören die  $\xi$  und  $\eta$  und die aus ihnen nach der Formel (3) bestimmbar Stabdrehwinkel zu den schon bekannten Größen, und unter den  $\zeta$  sind nur noch die Knotendrehwinkel  $\nu$  unbekannt. Bei  $k$  Knotenpunkten zweiter Art genügen zur Berechnung der  $k$  unbekanntem Knotendrehwinkel die  $k$  Momentengleichungen.

Auf Grund der obigen Überlegung von Engeßer hat Manderla zuerst die Nebenspannungen berechnet und Mohr diese Rechnung durch Einführung der Knoten- und Stabdrehwinkel übersichtlicher gemacht. Führt man in die Gleichung

$$\sum_i \zeta_i \sum_e M_{ke} + \sum_e M_{ke}^0 + M_k = 0$$

die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{ke}$  ein, dann entstehen die bekannten Gleichungen von Mohr:

$$(22) \quad \nu_k \sum_e 4 \varrho_{ke} + \sum_e 2 \varrho_{ke} \nu_e = \sum_e 6 \varrho_{ke} \vartheta_{ke} - \sum_e M_{ke}^0 - M_k \quad (k = 1, 2, \dots, k).$$

Das Wesentliche dieser Nebenspannungsberechnung ist die Engeßersche Betrachtung, ob man die Stabdrehwinkel des Hauptsystems für die Stabdrehwinkel des biegezugfesten Gebildes einsetzen darf. Das ist für das Dreieckfachwerk nachgewiesen worden. Natürlich darf man dieses Ergebnis nicht ohne weiteres auf andere Fachwerke, z. B. auf ein Rhombenfachwerk übertragen.

Eine weitere Gruppe von Aufgaben liefern die Rahmensysteme. Sind hier die Stabdrehwinkel wenigstens teilweise leicht bestimmbar? Solange das statisch bestimmte Hauptsystem nur gerade Stäbe enthält, gelten natürlich dieselben Betrachtungen über die Knotenverschiebungen  $\xi$  und  $\eta$  und die Stabdrehwinkel  $\vartheta$ , so im nebenstehenden Beispiel Abb. 8. Hier gibt es nur drei Gleichungen von der Form (22) für die drei unbekanntes  $\nu$ . Enthält aber das statisch bestimmte Hauptsystem noch erheblich gekrümmte Stäbe oder Stabzüge, dann können im allgemeinen die Stabdrehwinkel nicht als bekannt vorausgesetzt werden. Andererseits brauchen aber bei vielen Aufgaben nicht alle Stabdrehwinkel des statisch bestimmten Hauptsystems als Unbekannte eingeführt zu werden, sondern nur je nach der

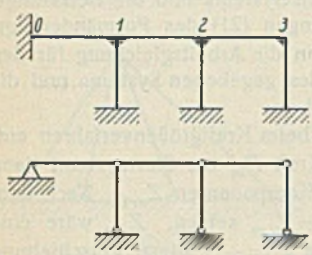


Abb. 8.

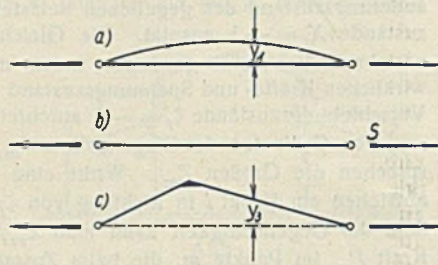


Abb. 9a bis c.

geforderten Genauigkeit der Rechnung eine kleinere Zahl. Um die Mindestzahl einzuführender Stabdrehwinkel festzustellen, sind von Fall zu Fall Abschätzungen notwendig. Um sie durchführen zu können, seien die Formänderungen einfacher Grundelemente der Rahmengebilde hier nebeneinandergestellt, Abb. 9a, b, c.

$$a) \delta_1 = \int y_1^2 \cdot \frac{ds}{EJ}, \quad b) \delta_2 = S \cdot \frac{s}{EF}, \quad c) \delta_3 = \int y_3^2 \cdot \frac{ds}{EJ}.$$

Ist  $y_1$  von derselben Größenordnung wie  $\delta_2$ , dann ist  $\delta_1$  um eine Größenordnung kleiner als  $\delta_2$ . Ist  $y_3$  groß gegen  $\delta_2$ , dann ist  $\delta_3$  groß gegen  $\delta_1$  und  $\delta_2$ . Enthält nun ein Hauptsystem krumme Stäbe und Stabzüge der Form c), dann sind die Sehnänderungen dieser Gebilde und die Knotenpunktverschiebungen ihrer beweglichen Endpunkte groß gegen die Formänderungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  der Stabformen a) und b). Die Formänderungen  $\delta_3$  hängen aber ab von der Momentenfläche dieser Gebilde, erzeugt durch die Belastung und die Überzähligen. Sicher sind also die  $\delta_3$  des statisch bestimmten Hauptsystems und des statisch unbestimmten Systems nicht annähernd gleich. Daher können in der Untersuchung von Rahmengebilden, deren Hauptsysteme krumme Stäbe und Stabzüge ent-

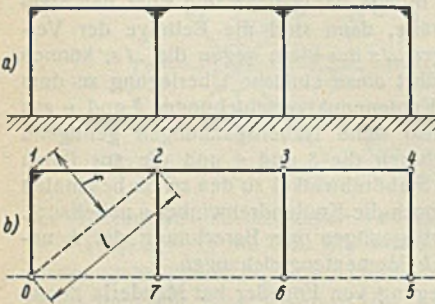


Abb. 10a u. b.

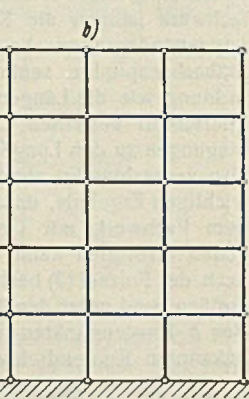
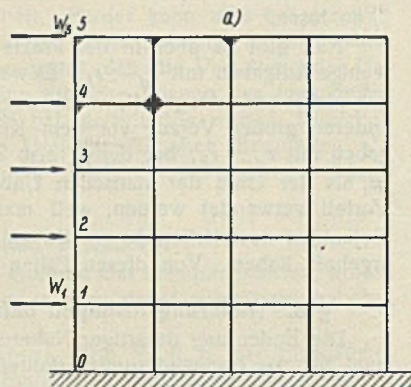


Abb. 11a u. b.

halten mit Pfeilhöhen  $f$ , die groß sind gegenüber den Abmessungen der Stäbe, die Knotenpunktverschiebungen und die Stabdrehwinkel der Stabsehn im gegebenen System nicht mehr den entsprechenden Verschiebungen des statisch bestimmten Hauptsystems gleichgesetzt werden. Noch übersichtlicher kann die Mindestzahl der Unbekannten festgestellt werden, wenn man auf das sogenannte von Ostenfeld und Mann benutzte Grundsystem zurückgeht, das alle Stabzüge mit steifen Ecken in solche mit Gelenken auflöst und  $p$  Beweglichkeiten besitzt. Als unbekanntes Formänderungen erscheinen dann  $k$  Knotendrehwinkel  $\nu$ ,  $p$  Stabdrehwinkel und  $s$  Längenänderungen der Stäbe, die auch gekrümmt sein können. Nun sollen nur kleine Größen erster Ordnung unter den Formänderungen berücksichtigt werden. Dann lassen sich  $s'$  Längenänderungen gerader Stäbe im statisch unbestimmten System denen des statisch be-

stimmten Hauptsystems gleichsetzen, und es bleiben nur  $k + p$  Unbekannte, d. h. im Beispiel der Abb. 10 fünf Unbekannte.

Im Rahmengebilde der Abb. 10b entspricht der Stabzug 0—1—2 des statisch bestimmten Hauptsystems dem Fall c) der Abb. 9. Der Stabdrehwinkel der Sehne 0—2 ist abhängig von den Momenten, muß also als Unbekannte eingeführt werden. Die Knotenpunktverschiebungen sind durch die Formänderungen des Stabzuges 0—1—2 im wesentlichen bestimmt. Es genügt also, neben den unbekanntes Knotendrehwinkeln  $\nu_1$  bis  $\nu_4$  als fünfte Unbekannte den Drehwinkel  $\vartheta_{0-1}$  beizubehalten und die übrigen Stabdrehwinkel durch  $\vartheta_{0-1}$  auszudrücken. Neben den Gleichungen der Form (22) ist also noch eine weitere Gleichung aus denen der Form (21a) auszuwählen. Wie dies am einfachsten möglich ist, wird weiter unten an einem allgemeineren Beispiel gezeigt.

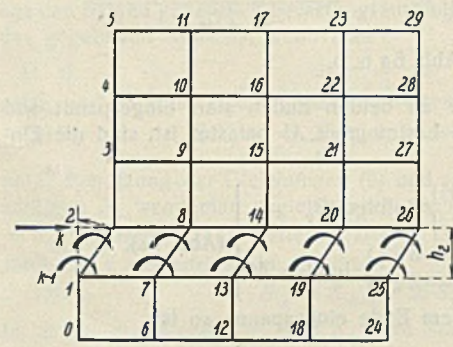


Abb. 12.

Eine möglichst allgemeine Regel für die bei Rahmengebilden einzuführende Mindestzahl unbekannter Stabdrehwinkel soll hier nicht gegeben werden, es sei auf die Untersuchungen von Ostenfeld und Mann verwiesen. Es soll das Verfahren nur an einem heute wichtigen Beispiel erläutert werden, dem mehrstieligen Stockwerkrahmen mit  $z_s$  Stielen und  $z_e$  Stockwerken. Sind alle Ecken und Füße eingespannt, dann ist der Grad der statischen Unbestimmtheit  $r_k$  gleich  $3(z_s - 1)z_e$ . Beim Formänderungsverfahren erscheinen zunächst  $z_s \cdot z_e$  unbekanntes Knotendrehwinkel. Durch ähnliche Überlegungen, wie oben beim Beispiel der Abb. 11, findet man, daß  $z_e$  unbekanntes Stabdrehwinkel in den Gleichungen beibehalten werden müssen, so daß  $(z_s + 1)z_e$  Unbekannte erscheinen. Man hat also beim Formänderungsverfahren  $2(z_s - 2)z_e$  Unbekannte weniger als beim Kraftgrößenverfahren.

Zur Berechnung der Unbekanntes stehen zunächst die Momentengleichungen der Form (22) zur Verfügung. Die Auswahl weiterer notwendiger Gleichungen für die Unbekanntes  $\vartheta$  aus den Gleichungen der Form (21a) ist unbequem. Man stellt am einfachsten nach dem Vorschlag von Domke<sup>3)</sup> die erforderlichen unabhängigen Gleichungen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückung auf.

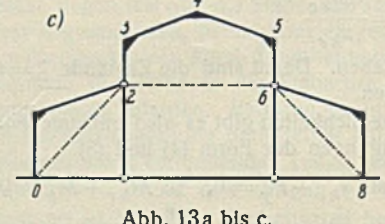
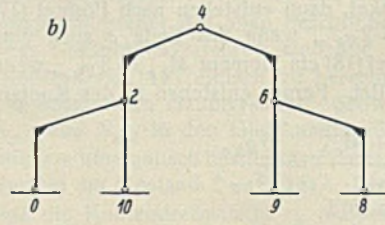
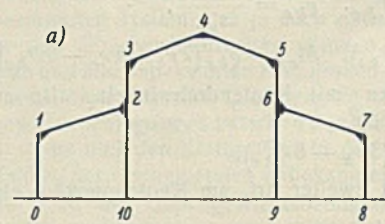


Abb. 13a bis c.

$$(23) \quad W_2 h_2 \vartheta_2 + \vartheta_2 (M_{12} + M_{21} + M_{78} + M_{87} + \dots) = 0.$$

Mit Formel (17) werden die Momente ausgedrückt

$$M_{12} + M_{21} = 6 \varrho_{12} (\nu_1 + \nu_2 - 2 \vartheta_{12})$$

usw. und eingesetzt. Dann entsteht für jedes Stockwerk eine Gleichung

$$(23a) \quad W_k h_k + 6^k \sum_i (\nu_{(k-1)i} + \nu_{ki}) \vartheta_{(k-1)k}^i - 12 \sum_i \vartheta_{(k-1)k}^i \varrho_{(k-1)k}^i = 0,$$

in der die Summen über alle Knotenpunkte  $i$  der Deckenlage  $k$  auszudehnen sind. Schreibt man erst die Gleichungen der Form (22) und dann die eben entwickelten

(23a) an, dann entsteht ein Raster, das sich durch fortgesetzte Auflösung dreigliedriger Gleichungen lösen läßt, das zu zeigen hier zu weit führen würde. Natürlich kann man auch Iterationen oder Vernachlässigungen mannigfacher Art einführen.

Beim Kraftgrößenverfahren benutzt man mit Erfolg statisch unbestimmte Hauptsysteme, um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten. Beim Formänderungsverfahren gibt es entsprechende Maßnahmen. Sie seien auch an einem Beispiel erläutert (Abb. 13).

Die Zahl der unbekanntes Formänderungen ist  $7 \cdot 3 = 21$ , die Zahl  $s$  der geraden Stäbe ist  $s = 10$  und die Zahl  $p$  der Tangenteneinspannungen ist  $p = 20$ .

<sup>3)</sup> Domke, Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. 10.

Das System ist neunfach kinematisch überbestimmt und vom gleichen Grade statisch unbestimmt. Da man aber nicht alle Formänderungen als Unbekannte einzuführen braucht, kann das Formänderungsverfahren trotzdem brauchbar sein.

Man könnte die Knotendrehwinkel  $\nu_2, \nu_4, \nu_6$  und die Stabdrehwinkel der Sehne  $\vartheta_{02}, \vartheta_{24}, \vartheta_{46}, \vartheta_{68}$ , also sieben Unbekannte einführen, oder

man kann die Knotendrehwinkel  $\nu_2$  und  $\nu_6$  und die Stabdrehwinkel  $\vartheta_{02}, \vartheta_{68}$  oder einen Stabdrehwinkel und die Längenänderungen  $\Delta_{26}$ , also im ganzen fünf Unbekannte benutzen, dann müssen die Stabzüge 0—1—2 und 2—3—4—5—6 als Starrsystem für sich betrachtet und ihre Formänderungen berechnet werden. Das entspricht der Benutzung statisch unbestimmter Hauptsysteme beim Kraftgrößenverfahren.

## Über die Erhöhung der Fließgrenze in prismatischen Balken aus Baustahl.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Prof. Dr.-Ing. E. Chwalla, Brünn.

Den Untersuchungen der auf Biegung beanspruchten Stäbe aus Baustahl liegen sowohl innerhalb als auch außerhalb des Hooke'schen Bereiches die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

I. Die Querschnitte bleiben eben und senkrecht auf der Stabachse (Bernoulli'sche Hypothese)<sup>1)</sup>. II. Die Querschnittsfigur des Stabes erfährt während der Belastung keine merkbare Veränderung. III. In jenen Fasern, in denen die spezifische Längenänderung monoton anwächst, gehorchen die Faserspannungen dem für gleichmäßigen Zug oder Druck geltenden Spannungs-Dehnungs-Gesetz. IV. In jenen Fasern, in denen die spezifische Längenänderung nach Erreichen eines endlich großen Wertes einen Abbau erfährt, gilt das lineare Elastizitätsgesetz der Entlastung.

Zu Voraussetzung I. Innerhalb des Geltungsbereiches des Hooke'schen Gesetzes ist die Berechtigung dieser Voraussetzung für den Fall der querkraftfreien Biegung exakt nachgewiesen. Bei Vorhandensein von Querkraften treten geringfügige Verwölbungen der Querschnitte auf, deren Einfluß, wie der Vergleich mit exakten Lösungen der Elastizitätstheorie zeigt, vernachlässigt werden darf; bei konstanter Querkraft ergibt sich ungeachtet dieser Querschnittsverwölbung ein linearer Ansatz für die axiale Dehnung  $\epsilon_x$  unmittelbar als Folge der St. Venant'schen Annahme  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ <sup>2)</sup>. Für die Zulässigkeit der Bernoulli'schen Hypothese außerhalb des Hooke'schen Bereiches sprechen die Ergebnisse zahlreicher Versuche, die mit Gußeisenbalken (Bach<sup>3)</sup>, Pinegin<sup>4)</sup>, Ludwik<sup>5)</sup>, Herbert<sup>6)</sup> u. a.) und armierten Betonbalken durchgeführt wurden; auch ein Versuch Bauschingers mit einem Flußstahlbalken und die experimentelle Bestätigung der unter Voraussetzung II. bleibender Querschnitte berechneten Knicklasten gedrungener Baustahlstäbe darf zur Stützung der Hypothese angeführt werden. Eine theoretische Begründung der Zulässigkeit eines linearen Ansatzes für die axiale Dehnung  $\epsilon_x$  bei beliebigem Formänderungsgesetz wurde von Grüning<sup>7)</sup> und Domke<sup>8)</sup> gegeben. Grüning setzt lineare Momentenverteilung und Verhältnissgleichheit der Längs- und Querdehnung voraus und zeigt, daß dann die Verträglichkeitsgleichungen auch bei nicht linearen Formänderungsgesetzen durch einen linearen Ansatz für die axiale Dehnung  $\epsilon_x$  befriedigt werden. Domke untersucht die Gleichgewichtslage eines auf Biegung beanspruchten Stabes vom Formänderungsgesetz  $\sigma = \varphi(\epsilon)$  und schreibt für die im Querschnitt „F“ vorhandene Normalspannungsverteilung die Bedingungen  $N = \int \sigma \cdot dF$ ,  $M = \int \sigma \cdot \xi \cdot dF$  an, wobei „ $\xi$ “ den Normalabstand der Flächenelemente von der Nulllinie (die als Hauptachse vorausgesetzt wird) bedeutet. Er läßt den Fall zu, daß die Längenänderungen  $\epsilon_x \cdot dx$  der einzelnen Fasern und die Verdrehungen  $d\omega$  der einzelnen Flächenelemente während der Belastung beliebige Werte annehmen, definiert die Größen  $\epsilon_0 \cdot dx$  und  $d\omega_0$  als Durchschnittswerte aller im Querschnitt „F“ vorkommenden  $\epsilon_x \cdot dx$  bzw.  $d\omega$  und variiert den vorhandenen Spannungszustand. Die Schnittgrößen leisten hierbei die virtuelle Arbeit

$$\epsilon_0 \cdot dx \cdot dN + d\omega_0 \cdot \delta M = \epsilon_0 \cdot dx \int \delta \sigma \cdot dF + d\omega_0 \int \delta \sigma \cdot \xi \cdot dF,$$

während die innere Arbeit  $\int \epsilon_x \cdot dx \cdot \delta \sigma \cdot dF$  beträgt. Für den Gleichgewichtszustand gilt dann die Bedingung

$$\int [\int \epsilon_x \cdot dx \cdot \delta \sigma \cdot dF - \epsilon_0 \cdot dx \int \delta \sigma \cdot dF - d\omega_0 \int \delta \sigma \cdot \xi \cdot dF] = 0$$

oder 
$$\int dx \int \delta \sigma \left[ \epsilon_x - \epsilon_0 - \frac{d\omega_0}{dx} \cdot \xi \right] dF = 0,$$

die allgemein nur mit  $\epsilon_x = \epsilon_0 + \frac{d\omega_0}{dx} \cdot \xi = C_1 + C_2 \cdot \xi$ , also bei einer linear über den Querschnitt verteilten Dehnung  $\epsilon_x$  erfüllt werden kann.

Zu Voraussetzung II. Bei Balken mit Vollquerschnitten ist diese Voraussetzung praktisch immer erfüllt. Vom exakten Standpunkt tritt allerdings eine Änderung der Querschnittsfigur zufolge der Querdehnung ein, so daß sich das Querschnittsträgheitsmoment während der Belastung etwas ändert und der funktionale Zusammenhang zwischen dem Spannungsmoment  $M$  und der örtlichen Krümmung  $k$  nur mit (allerdings weitestgehender) Annäherung ein linearer ist. Bei Stäben mit dünnwandigen Hohlquerschnitten kann die Querpressung, die im Zuge der Ausbiegung auftritt, eine merkbare Abplattung der Querschnittsfigur und damit eine merkbare Änderung der Biegesteifigkeit zur Folge haben, wodurch der Zusammenhang zwischen „ $M$ “ und „ $k$ “ auch nicht näherungsweise linear wird. Bei Stäben mit Querschnitten, die eine starke Abplattung zulassen (wie z. B. bei dünnwandigen Rohren), kann die Kurve  $M = f(k)$  sogar ein ausgeprägtes Maximum aufweisen; das Spannungsmoment und die auftretende größte Normalspannung ist dann an einen Größtwert gebunden, der auch bei beliebig großer Krümmung nicht überschritten werden kann<sup>9)</sup>.

Zu Voraussetzung III und IV. Sind die Voraussetzungen I und II erfüllt und die Spannungs-Dehnungs-Kurven für die Biegezug- und Biegedruckspannungen bekannt, dann kann jedem Wert „ $k$ “ der örtlichen Achsenkrümmung im Rahmen der „technischen Biegelehre“ eindeutig ein Wert des inneren Spannungsmomentes zugeordnet und damit die Funktion  $M = f(k)$  analytisch oder graphisch festgelegt werden. Nach Voraussetzung III und IV werden hierbei die Spannungs-Dehnungs-Linien der Biegespannungen einfach durch die Formänderungskurven für gleichmäßigen Zug und Druck ersetzt. Schon Considère<sup>10)</sup> und Ritter<sup>11)</sup>, der die Biegespannungsverteilung in einer überlasteten Eisenbahnschiene graphisch bestimmte, war dieser Lösungsweg bekannt und Engeßer<sup>12)</sup>, Schüle, Bach<sup>3)</sup>, Pinegin<sup>4)</sup>, Meyer<sup>13)</sup>, Herbert<sup>6)</sup> und Petermann<sup>14)</sup> bedienten sich dieses Verfahrens bei der Untersuchung des auf Biegung beanspruchten Gußeisenbalkens; bei der genauen Spannungsermittlung in armierten Betonbalken wurde es von Mörsch<sup>15)</sup> und Heintzel<sup>16)</sup> eingeführt und seither vielfach angewendet.

Die Zulässigkeit dieses Lösungsverfahrens ist für Balken aus spröden Werkstoffen durch die Bestätigung der zahlreichen experimentellen Ergebnisse nachgewiesen; bei Balken aus Baustahl, einem zähen Werkstoff mit ausgeprägtem plastischen Bereich, pflegt man sie vornehmlich aus zwei Versuchen abzuleiten, die Meyer<sup>13)</sup> vor 25 Jahren mit prismatischen Balken durchführte. Die Balken hatten die Abmessungen 50 · 100 · 1300 mm und wurden in der Mitte durch eine Einzellast belastet. Meyer hat für verschiedene Laststufen die Durchbiegung und die Endverdrehung des Balkens gemessen und mit den Werten verglichen, die in der geschilderten Weise aus der Formänderungskurve für gleichmäßigen Zug und Druck entwickelt werden konnten. Die so gewonnenen Lösungskurven zeigen im allgemeinen eine gute Übereinstimmung, lassen jedoch erkennen, daß die gemessenen Durchbiegungen und Verdrehungen viel länger dem Hooke'schen Gesetze folgen, als nach der geschilderten Theorie zu erwarten wäre. Dies bedeutet, daß die Grenze des Hooke'schen Bereiches im Balken höher als beim einachsigen Versuch gelegen ist; die Durchbiegungen und Endverdrehungen waren aber als einzig beobachtete Größen nicht geeignet, derartige Änderungen in der Biegespannungsverteilung mit auffallender Deutlichkeit zu zeigen, und daher ging auch Meyer auf diese Erscheinung nicht näher ein. Viele Jahre später fand Eiselin<sup>17)</sup> bei der Durchführung von Zugversuchen mit gelochten Stäben, daß die Elastizitäts- und die Fließgrenze am Lochrand erheblich über den üblichen Wert gehoben werden kann, und auch Bierett<sup>18)</sup> konnte bei seinen in großem Maßstab durchgeführten Untersuchungen von Bolzenverbindungen eine überraschend starke Erhöhung der Elastizitätsgrenze nachweisen. Die örtliche Behinderung der Formänderung schien von wesentlichem Einfluß auf die Höhenlage der Elastizitäts- und Fließgrenze zu sein und es war daher zu erwarten, daß sich ähnliche Erscheinungen auch bei der Biegung von Baustahlbalken bemerkbar

<sup>9)</sup> Vgl. E. Chwalla, Wiener Berichte, IIa, 1931, S. 163, und Z. f. ang. Math. 1933, S. 48.  
<sup>10)</sup> A. Considère, Ann. ponts chaussées, 1886.  
<sup>11)</sup> W. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, I. Band, Zürich 1888.  
<sup>12)</sup> F. Engeßer, Z. d. VdI 1898, S. 903.  
<sup>13)</sup> E. Meyer, Z. d. VdI 1908, S. 167.  
<sup>14)</sup> J. Petermann, Dissertation, Berlin 1914.  
<sup>15)</sup> E. Mörsch, Der Eisenbetonbau, 3. Aufl., Stuttgart 1908.  
<sup>16)</sup> K. Heintzel, Berechnung der Einsenkung von Eisenbetonplatten und Plattenbalken, Berlin 1909.  
<sup>17)</sup> O. Eiselin, Bauing. 1924, S. 250.  
<sup>18)</sup> G. Bierett, Mitt. d. deutschen Materialprüfungsanst., Sonderheft XV, 1931.

<sup>1)</sup> J. Bernoulli, Mém. de Paris, 1705.  
<sup>2)</sup> E. Winkler, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867.  
<sup>3)</sup> C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 4. Aufl., Berlin 1901.  
<sup>4)</sup> W. Pinegin, VDI-Forschungsheft Nr. 48 (1907).  
<sup>5)</sup> P. Ludwik, Technische Blätter, 1905.  
<sup>6)</sup> H. Herbert, VDI-Forschungsheft Nr. 89 (1910).  
<sup>7)</sup> M. Grüning, Die Statik des ebenen Tragwerkes, Berlin 1925, S. 153.  
<sup>8)</sup> O. Domke, Handb. f. Eisenbetonbau, 4. Aufl., I. Band, S. 269.

machen müssen. Thum und Wunderlich<sup>19)</sup> stellten den Beginn des Fließens in derartigen Balken mit Hilfe der Fließfiguren fest und konnten tatsächlich einen starken Einfluß der Querschnittsform auf die Fließgrenzenlage aufzeigen; für Balken mit quadratischem Querschnitt ergaben sich Fließgrenzenerhöhungen von 36 bis 45%, bei Biegung um die Diagonale solche bis zu 83% und bei Profilen, die aus schmalen Rechtecken zusammengesetzt sind, bloß solche von etwa 6%. Kuntze<sup>20)</sup> veröffentlichte hierauf eine einfache Beziehung für das zu erwartende Maß der Fließgrenzenerhöhung, indem er das „Widerstandsmittel“ der Streckgrenze gleichsetzte, und Prager<sup>21)</sup> skizzierte eine auf Nakanishi<sup>22)</sup>

Theorie des Stahlbaues, sondern kann auch bei der Auswertung verschiedener Versuche mit Modellstäben eine Rolle spielen. Die Versuche erfolgten in Anlehnung an die Untersuchungen, die Herbert im Rahmen seiner Göttinger Dissertation<sup>6)</sup> mit Gußeisenbalken vornahm. Die Probekörper hatten die Abmessungen 66 · 40 · 800 mm und waren an den Schmalseiten abgehobelt; das Material war ein weicher Elektrostaht der Marke „Poldi T 8“. Der

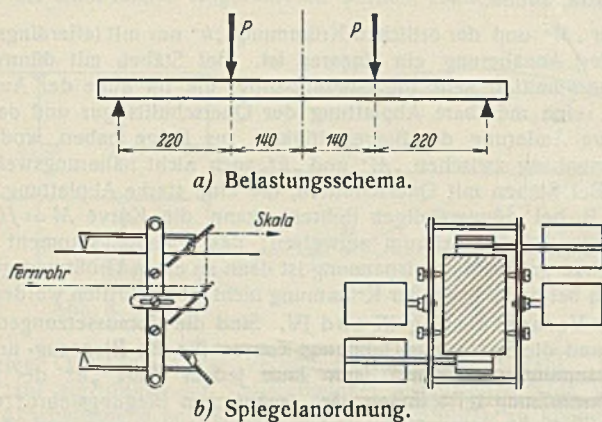


Abb. 1 a u. b.

zurückgehende und aus dem Vergleich mit dem Siedeverzug von Flüssigkeiten entwickelbare Theorie der Fließgrenzenerhöhung, die sich den Versuchsergebnissen Thum-Wunderlichs anpaßt.

Im folgenden soll nun über zwei Versuche berichtet werden, deren Ziel die Ermittlung des gesamten Verlaufes der Spannungs-Dehnungs-

Tafel I.

M	$\epsilon_u$	$\epsilon_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u'$	$\sigma_o'$
kgcm	%	%	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
			+	-	+	-
5 500	0,080	0,080	188	202		
22 000	0,340	0,324	750	806		
44 000	0,692	0,648	1506	1618		
55 000	0,864	0,804	1892	2032		
60 500	0,948	0,884	2080	2234		
66 000	1,036	0,964	2268	2435		
71 500	1,120	1,040	2455	2635		
77 000	1,200	1,120	2648	2845		
82 500	1,284	1,196	2840	3052		
88 000	1,364	1,276	3030	3253		
93 500	1,452	1,356	3215	3455		
99 000	1,536	1,436	3388	3640		
101 750	1,576	1,472	3460	3715		
104 500	1,620	1,516	3535	3795		
107 250	1,664	1,556	3600	3870		
110 000	1,712	1,600	3665	3935		
112 750	1,756	1,644	3720	4000	3865	3865
115 500	1,804	1,708	3750	4025	4050	3735
118 250	1,852	1,756	3770	4050	4250	3612
121 000	1,912	1,820	3760	4040	4430	3480
123 750	1,984	1,920	3720	4000	4540	3350
126 500	2,044	1,996	3614	3880	4410	3255
129 250	2,144	2,200	3505	3765	4220	3190
132 000	2,512	2,480	3370	3620	3970	3115
134 750	2,784	2,872	3290	3535	3628	3220
137 500	5,076	5,164	3240	3480	3428	3290
138 600	5,348	5,472	3260	3505	3415	3350
139 700	5,644	5,760	3265	3508	3420	3354
140 800	8,484	8,756	3275	3520	3465	3325
141 900	10,392	12,160	3778	3525	3690	3145

Kurve der in prismatischen Baustahlbalken auftretenden Biegespannungen war<sup>23)</sup>; dieses Problem ist nicht nur von grundsätzlicher Bedeutung für die

<sup>19)</sup> A. Thum und F. Wunderlich, Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung, Forschung auf dem Gebiete d. Ingenieurwesens 1932, S. 261.

<sup>20)</sup> W. Kuntze, Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze, Stahlbau 1933, S. 49.

<sup>21)</sup> W. Prager, Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung, Forschung auf dem Gebiete d. Ingenieurwesens 1933, S. 95.

<sup>22)</sup> F. Nakanishi, Rep. Aeron. Res. Inst., Tokio 1931, S. 83.

<sup>23)</sup> Die Versuche wurden im Laboratorium für Elastizität und Festigkeit an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn vorgenommen. Für die freundliche Überlassung des Laboratoriums bin ich Herrn Prof. Dr. R. Girtler und für die Mitarbeit den Herren Ing. Weinhold und

Tafel II.

M	$\epsilon_u$	$\epsilon_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\sigma_u'$	$\sigma_o'$
kgcm	%	%	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
			+	-	+	-
5 500	0,100	0,100	190	190		
22 000	0,404	0,424	760	760		
44 000	0,792	0,820	1537	1537		
55 000	0,968	0,984	1925	1925		
60 500	1,056	1,068	2120	2120		
66 000	1,144	1,172	2315	2315		
71 500	1,236	1,256	2512	2512		
77 000	1,328	1,340	2705	2705		
82 500	1,416	1,424	2895	2895		
88 000	1,496	1,512	3100	3100		
93 500	1,584	1,600	3280	3280		
99 000	1,680	1,688	3460	3460		
101 750	1,728	1,732	3545	3545		
104 500	1,776	1,776	3620	3620		
107 250	1,816	1,816	3700	3700	3775	3625
110 000	1,872	1,900	3765	3765	4010	3555
112 750	1,928	1,956	3820	3820	4450	3355
115 500	1,980	2,064	3875	3875	4730	3285
118 250	2,024	2,128	3920	3920	4900	3272
121 000	2,072	2,200	3955	3955	4935	3300
123 750	2,124	2,268	3960	3960	4715	3415
126 500	2,164	2,360	3910	3910	3910	3910
129 250	2,232	2,384	3890	3890	3245	4860
132 000	2,624	2,560	3380	3380	3072	3755
134 750	3,900	4,080	3240	3240		
137 500	5,988	5,980	3250	3250		
140 250	11,136	10,724	3295	3295		

statische Zugversuch, der mit Normalstäben aus derselben Charge durchgeführt wurde, ergab im Mittel die Streckgrenze  $\sigma_s = 2,47$  t/cm<sup>2</sup>, die Zugfestigkeit  $\sigma_z = 3,75$  t/cm<sup>2</sup>, die Bruchdehnung  $\delta_{10} = 26\%$  und die Einschnürung  $\psi = 69\%$ . Die Balken wurden in einer Losenhäuser-Universalprüfmaschine (Typ UHP, 15 t Meßbereich) durch zwei gleich große Kräfte P

Tafel III.

M	$\epsilon_u$	$\epsilon_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$
kgcm	%	%	kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>
140 250	11,136	10,724	+ 3295	- 3295
132 000	11,076	10,668	+ 3019	- 3019
121 000	10,944	10,564	+ 2657	- 2657
110 000	10,820	10,436	+ 2301	- 2301
99 000	10,672	10,300	+ 1944	- 1944
88 000	10,520	10,160	+ 1594	- 1594
77 000	10,352	10,000	+ 1243	- 1243
66 000	10,180	9,840	+ 900	- 900
55 000	10,000	9,660	+ 555	- 555
44 000	9,816	9,476	+ 208	- 208
33 000	9,620	9,280	+ 139	- 139
22 000	9,420	9,080	+ 490	- 490
11 000	9,216	8,876	+ 835	- 835
5 500	9,100	8,768	+ 930	- 930
11 000	9,160	8,824	+ 739	- 739
22 000	9,340	9,000	+ 376	- 376
33 000	9,524	9,176	+ 10	- 10
44 000	9,700	9,352	+ 380	- 380
55 000	9,872	9,524	+ 771	- 771
66 000	10,044	9,696	+ 1162	- 1162
77 000	10,208	9,852	+ 1560	- 1560
88 000	10,376	10,008	+ 1955	- 1955
99 000	10,532	10,160	+ 2365	- 2365
110 000	10,696	10,308	+ 2760	- 2760
121 000	10,844	10,452	+ 3150	- 3150

nach Abb. 1a belastet, so daß im Mittelfelde der Fall querkräftfreier Biegung vom Moment  $M = 22,0 P$  tcm vorlag. Die Messung der oberen und unteren Randdehnung erfolgte bis tief im plastischen Bereich mit Hilfe von Doppelspiegeln, die zu beiden Seiten des Balkens angeordnet

Dr. Scheinost zu Dank verpflichtet. Die gesamte rechnerische Auswertung der Versuche hat mein Assistent, Herr Ing. W. Joscht, durchgeführt.

waren. Der Sehstrahl ging hierbei von den beiden Fernrohren zu den beiden festen Spiegeln (die in Balkenmitte auf einem Rahmen nach Abb. 1b zu beiden Seiten des Balkens befestigt waren) und von hier über den unteren bzw. oberen beweglichen Spiegel zu den beiden Meßlatten; die Schneidenerfennung der Martensschen Spiegel betrug 50 mm, das Übersetzungsverhältnis 1:500. Durch die Anordnung der Doppelspiegel konnte der Fehler, der durch eine etwaige Verdrehung des Mittelquerschnittes entsteht, ausgeschaltet werden; ein Umstellen der Fernrohre während des Versuches war nicht erforderlich, da der Biegetisch bei der verwendeten Prüfmaschine gegen die Druckplatte bewegt wird, so daß die festen Spiegel auch bei großen Durchbiegungen des Balkens im Gesichtsfeld blieben. Zur Kontrolle der Spiegelmessungen im plastischen

Gebiete wurde eine Meßbrücke mit 190 mm Schneidenerfennung in Balkenmitte angeordnet und die relative Durchbiegung des Balkens mit Zeißuhren gemessen, um daraus die Krümmung der Balkenachse berechnen zu können. Die Last  $P$  wurde in kleinen Stufen gesteigert, so daß für eine große Zahl aufeinanderfolgender Momentenwerte die Randdehnungen  $\epsilon_u$  und  $\epsilon_o$  festgestellt werden konnten. Ein Teil der Messungsergebnisse ist in den ersten drei Spalten der Tafeln I bis III auszugsweise wiedergegeben; „ $M$ “ bedeutet das Biegemoment, „ $\epsilon_u$ “ die untere und „ $\epsilon_o$ “ die obere spezifische Randdehnung. Tafeln I und II beziehen sich auf die beiden Biegeversuche und Tafel III auf die Entlastung und Wiederbelastung, die im Rahmen des zweiten Versuches durchgeführt wurde.

(Schluß folgt.)

Alle Rechte vorbehalten.

### Kritische Betrachtungen zur Schweißnahtberechnung.<sup>\*)</sup>

Von H. Schmudde, V. D. I., Köln-Kalk.

Für den Festigkeitsnachweis einer Schweißnaht ist die Nahtdicke  $a$  maßgebend.

Durch die Festigkeitsvorschriften kann nun die Ausführung einer Konstruktion sehr beeinflusst werden, wie an einem einfachen Beispiel gezeigt werden soll.

Ein Blech von 400 mm Breite (es kann ein Stück eines Behältermantels sein) wird beansprucht mit  $Z = 48$  t. Bei  $\sigma_{zul} = 1,2$  t/cm<sup>2</sup> wäre hierfür eine Blechstärke von  $t' = 10$  mm genügend. In der folgenden Zusammenstellung sind nun verschiedene Ausführungsmöglichkeiten für die Schweißverbindung in Abb. 1 bis 6 dargestellt und daneben der Baustoffverbrauch eingetragen, unter Annahme von Behälterdurchmessern von 2,0 m, 1,0 m und 0,5 m.

Die Stumpfnahverbindung ergibt hiernach die teuerste Konstruktion. Auch wenn man die größeren Schweißarbeiten bei allen anderen Verbindungen in Rechnung setzt, ändert sich an diesem Verhältnis nicht viel.

Die in Abb. 3 dargestellte Verbindung stellt sich hinsichtlich des Baustoffverbrauchs im Durchschnitt als die günstigste dar. Ob sie aber die einwandfreieste ist, ist nicht erwiesen.

Auch die kombinierten Verbindungen von Stumpf- und Kehlnaht nach Abb. 5 u. 6 sind nicht so eindeutig wie die Verbindung nach Abb. 1. Man weiß nicht sicher, in welchem Verhältnis sich Stumpf- und Kehlnaht an der Kraftübertragung beteiligen.

Die Stumpfnah ist die natürlichste Schweißverbindung. Der Kräftefluß ist hierbei nicht nur ganz eindeutig, sondern auch vollkommen geradlinig und ungeteilt. Bei einer Flanken- oder Kehlnaht ist das nicht der Fall.

Abb. 7 zeigt z. B. die überlappte Verbindung entsprechend Abb. 2. Die Kraft  $Z$  erzeugt in der Überlappung ein Biegemoment. Die Bleche haben das Bestreben, sich so einzustellen, wie es Abb. 8 zeigt. Der Kräftefluß wird an der Naht geteilt. Es ist nicht sicher, daß sich beide Nähte gleichmäßig an der Kraftübertragung beteiligen können und daher beide Nähte ganz gleichen Kraftanteil übernehmen. Hierzu kommt noch, daß der Kräftefluß sehr schroff und fast rechtwinklig aus seiner Richtung gebogen wird, wie die - - - - - Linie andeutet. Die Flankennaht muß ebenfalls an der Übertragung des Biegemomentes teilnehmen. Sie wird daher nicht überall gleichmäßig

beansprucht und kann keilförmig aufgerissen werden, wie Abb. 8 zeigt. Wenn auch durch die etwas geringere Beanspruchung  $\rho = 0,5\sigma$  statt  $0,6\sigma$  dieser Umstand teilweise berücksichtigt ist, so ist doch die Flankennaht gegenüber einer Stumpfnah zu hoch bewertet.

Nimmt man bei dem Beispiel nach Abb. 8 gleichen Kraftanteil für beide Nähte an, so ergibt sich folgendes:

Die Zerstörung des Stoßes erfolgt bei ordnungsgemäßer Ausführung auf der Linie  $a-b-c$ . Hier steht zur Verfügung:

$$F = 2,4 \cdot 40 = 96 \text{ cm}^2$$

$$W' = \frac{40 \cdot 2,4^2}{6} = 38,4 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Aufzunehmen sind } Z = 48 \text{ t}$$

$$M = 48 \cdot 0,7 = 33,6 \text{ tcm.}$$

$$\text{Somit } \rho \text{ bzw. } \sigma = \frac{48}{96} + \frac{33,6}{38,4} = 1,38 \text{ t/cm}^2.$$

Nach der zulässigen Berechnungsweise ist  $\rho = \frac{48}{2 \cdot 1 \cdot 40} = 0,6$  t/cm<sup>2</sup>.

Das Wertverhältnis ist damit  $\frac{0,6}{1,38} = \text{rd. } 0,44$ .



Abb. 7.

Das durch die zulässigen Beanspruchungen gegebene Wertverhältnis ist aber  $\frac{0,5}{0,6} = 0,833$ , also wesentlich höher. Hieraus ergibt sich, daß die Flankennaht gegenüber einer Stumpfnah zu hoch bewertet wird. Dr.-Ing. Schaechterle kommt in seinen Untersuchungen<sup>1)</sup> zu einem ähnlichen, jedoch etwas günstigeren Ergebnis, da er als Bruchlinie nicht  $a-b-c$ , sondern  $\alpha-b-c$  annimmt.

Um die Umlenkung des Kräfteflusses weniger schroff zu gestalten, schlägt Schaechterle eine Anschärfung des anzuschweißenden Bleches entsprechend Abb. 9 vor. Eine andere Ausführung hierfür zeigt Abb. 10. Die Naht kann hierbei stärker ausgebildet werden.

Nach den Ergebnissen der Dörnenschen Dauerversuche<sup>2)</sup> an Stumpfnähten zeigt sich, daß X-Nähte, nach den Schweißvorschriften berechnet und hergestellt, wesentlich größere Sicherheit bieten als der Baustoff St 37. Wenn auch anzunehmen ist, daß bei V-Nähten die Festigkeitsverhältnisse dieselben sind, wären jedoch auch hier Beweise durch Versuche wünschenswert. Mit besonderem Interesse können die Ergebnisse der angekündigten Versuche an Flankennähten erwartet werden. Bei den Versuchen von Dörnen handelt es sich um Dauerbelastungen, wie sie der Wirklichkeit am nächsten kommen. Es wäre zweckmäßig gewesen und hätte bessere Vergleichswerte gegeben, wenn man die Versuche bis zum Bruch der Schweißnaht ausgedehnt hätte.

<sup>1)</sup> Bautechn., Jahrg. 10, S. 603.

<sup>2)</sup> Dörnen, Stahlbau, 5. Jahrg., S. 161.

Abb.	Geschweißter Stoß eines Bleches $Z=48$ t $\sigma=12$ t/cm <sup>2</sup>	$\rho_{zul}$	Nahtstärke $a$ in mm	Blechstärke $t$ in mm	Blech- und Laschengew. in kg bei		
					2,0 m $\phi$	1,0 m $\phi$	0,5 m $\phi$
1		$0,6\sigma$ $0,72$ t/cm <sup>2</sup>	$t' = 10$ $10$	$16,7 = 17$	335 100 %	168 100 %	84 100 %
2		$0,5\sigma$ $0,6$ t/cm <sup>2</sup>	$t' = t = 10$ $10$	$a\sqrt{2} = 14$	281 84 %	142 85 %	73 87 %
3		$0,5\sigma$ $0,6$ t/cm <sup>2</sup>	$t' = t = 10$ $10$	$t - a = 10$	200 60 %	101 60 %	52 62 %
4		$0,5\sigma$ $0,6$ t/cm <sup>2</sup>	$t' = t = 10$ $10$	$t - a = 10$ $t - 14$	205 61 %	107 64 %	57 68 %
5		$0,5\sigma$ $0,6$ t/cm <sup>2</sup>	$a = t = 10$ $t' = 10$ $a\sqrt{2} = 0,71t$ $a = 7$	$t = 10$ $t - a\sqrt{2} = 7$	202 60 %	104 62 %	54 64 %
6		$0,5\sigma$ $0,6$ t/cm <sup>2</sup>	$a = t = 10$ $a\sqrt{2} = 0,71t$ $a = 7$	$t = 10$ $t - a\sqrt{2} = 8$	200 60 %	101 60 %	52 62 %

Abb. 1 bis 6.

Verschiedene Ausführungsmöglichkeiten der Schweißverbindung.

<sup>\*)</sup> Im Grundsatz stimmt diese Kritik mit verschiedenen im Stahlbau, Heft 11 und 12/13, veröffentlichten Abänderungsvorschlägen überein und ist auch zum Teil bei der inzwischen erfolgten Erhöhung der zulässigen Beanspruchungen für Schweißnähte berücksichtigt. Bei der vorgesehenen vollständigen Neubearbeitung von DIN 4100 wird auch weitergehenden Fragen der Schweißnahtberechnung Beachtung geschenkt werden, soweit die Probleme genügend geklärt sind. Die Schriftleitung.

Die Versuche, die nach Überschreiten der kritischen Lastwechselzahl für das ungeschweißte St 37 abgebrochen wurden, ergeben noch keinen Anhalt dafür, um wieviel die Schweißnaht dauerhafter ist.

Aus den Versuchen von Dörnen ergibt sich aber doch schon, daß nicht nur die Dauerfestigkeit, sondern auch die statische Bruchfestigkeit von Schweißnähten überhaupt höher ist, als die Vorschriften voraussetzen.

Verwunderlich ist dies nicht weiter. Abgesehen von besonderen Vergütungsverfahren für Schweißnähte, wie sie z. B. Pintsch, Berlin, ausführen läßt, die aber sehr teuer sind, verfügen wir heute allgemein schon über ganz normale Schweißdrähte, mit denen hochwertige Schweißnähte hergestellt werden können. Diese Schweißnähte weisen Elastizitäts- und Festigkeitsziffern auf, welche kaum niedriger sind als die von St 37. Die Firmen, die derartige Schweißdrähte als normale und billige liefern, werden bestrebt sein, hierfür höhere zulässige Beanspruchungen zu erwirken. Man wird ihnen diese auch nicht verweigern können. Die geringwertigen Schweißdrähte scheiden damit von selber aus. Es besteht aber die Gefahr, daß man zu unklaren Beanspruchungsverhältnissen kommt.

Nimmt man die Nahtverbindung nach Abb. 3 u. 4, dann ist entsprechend Abb. 11 der Bruch auf der Linie  $a-b-c-d$  zu erwarten. Hier stehen zur Verfügung  $F = 2 \cdot 1 \cdot 40 = 80 \text{ cm}^2$  und  $W = \frac{2 \cdot 40 \cdot 1^2}{6} = 13,33 \text{ cm}^3$ . Zu übertragen sind  $Z = 48 \text{ t}$  und  $M = 2 \cdot 24 \cdot 0,35 = 16,8 \text{ tcm}$ ,  $\rho = \frac{48}{80} + \frac{16,8}{13,3} = 1,86 \text{ t/cm}^2$ .

Das Wertverhältnis ist also mit  $\frac{0,6}{1,86} = 0,32$  noch niedriger als nach dem Beispiel Abb. 2 bzw. Abb. 8.

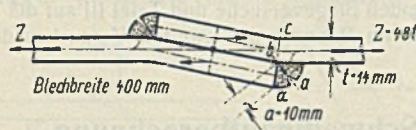


Abb. 8.

Auch hier wird man, um allzu schroffe Umlenkung des Kräfteflusses zu vermeiden, die anzuschweißenden Blechkanten nach Abb. 10 abschrägen.

Eine rechnerische Untersuchung der Verbindungen nach Abb. 5 u. 6 vorzunehmen ist wenig aussichtsreich. Hier müssen praktische Versuche vorgenommen werden.

Nach den jetzigen Vorschriften werden, wie nachgewiesen, Kehlnähte unberechtigtweise günstiger behandelt als Stumpfnähte. Dabei ist in den vorstehenden Untersuchungen der Einfluß der Kerbwirkung noch gar



Abb. 9.



Abb. 10.

nicht berücksichtigt. Hierbei soll weniger die Kerbwirkung durch den Einbrand  $\delta_b$ , als vielmehr die wirkliche Kerbe  $\delta_i$  vor der Naht gemeint sein (Abb. 12). Die Einbrennkerbe  $\delta_i$  wird sich auch bei sorgfältigster Ausführung der Schweißnaht nicht ganz vermeiden lassen. Sie ist aber bei dem Blech von 10 mm Dicke nach Abb. 3 bis 6 von viel größerem Einfluß als bei dem 14 mm dicken Blech nach Abb. 2. Bei der Verbindung nach Abb. 1 kommt sie praktisch überhaupt nicht in Betracht.

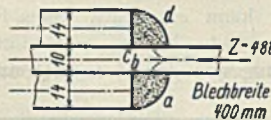


Abb. 11.

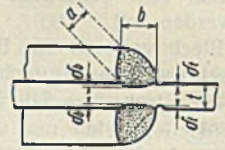


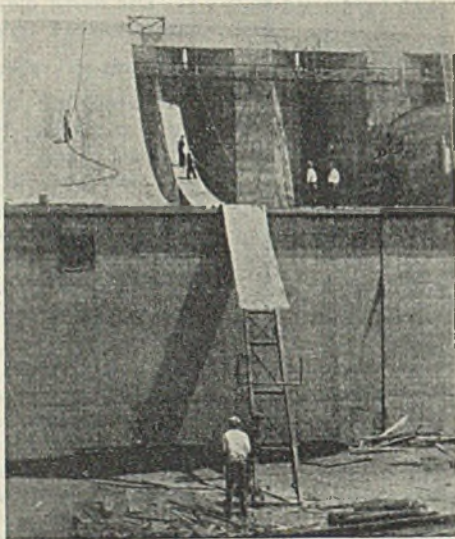
Abb. 12.

Wenn auch die Wertverhältnisse sich in Wirklichkeit noch etwas günstiger stellen, so zeigt doch schon diese angenäherte Berechnungsweise, daß die zulässigen Werte für  $\rho$  weiter nachgeprüft und geändert werden müssen.

### Verschiedenes.

**Zeltförmiges Dach aus Stahlblech.** In der Zeitschrift „The Steel Constructor“ vom April 1933 wird eine neue Form der Verwendung von Stahlblechen gleichzeitig als Dachhaut und Dachkonstruktion beschrieben, deren Eigenart auch für deutsche Verhältnisse Interesse haben wird.

Vier Flächen von je 36,6 m Breite und 82,5 m Länge einer Getreidelager- und transportanlage der Albany Port District Commission im Staate New York sollten in wirtschaftlicher Weise überdeckt werden. Wie aus der Abb. hervorgeht, wird jede dieser Dachflächen an drei Seiten von den hochragenden Silos bzw. Transportbrücken aus Eisenbeton, an der



Montage des Stahlblechdaches.

vierten Seite durch eine niedrige Eisenbetonkonstruktion eingefast. Um Stützen und Binderkonstruktionen unter diesen Flächen zu vermeiden, wurde eine zeltförmige Überdachung nur durch eine Haut aus Stahlblech von 2,77 mm Stärke gewählt.

Bleche von 1,22 m Breite, die in Längen von 9,15 m ankamen, wurden am Boden auf Spannvorrichtungen zu Streifen von 42,7 m Länge zusammengeschweißt, mittels einer Winde über ein Holzgestell hochgezogen und mit dem natürlichen Durchhang einer Kettenlinie an Ankerbolzen in der oberen und unteren Eisenbetonkonstruktion befestigt. Nachdem diese Blechstreifen in ihre Lage gebracht waren, wurden die Ränder zunächst punktgeschweißt, um die Gefahr des Würfens zu vermeiden und eine gleichmäßige Oberfläche zu erhalten. Dann wurden diese Plattenstreifen längsseitig elektrisch verschweißt, jedoch besondere Dehnungsfugen vorgesehen. In jeder Dachfläche sind drei Fugen aus einer beweglichen Blechdehnungsverbindung angeordnet. Da diese gehäuse-

artigen Verbindungen, die schindelförmig übereinanderliegen, aus kurzen Stücken bestehen, wurde dadurch eine senkrechte und waagerechte Ausdehnung der Dachhaut ermöglicht.

Der obere und untere Saum dieser Streifen war durch aufgeschweißte und gelochte Flachstahlstäbe verstärkt, um den Lochleibungsdruck an den Ankerbolzen niedrig zu halten.

A. Dürbeck.

**Max Eyth über die Entstehungsgeschichte der größten Kuppel der Welt.**<sup>1)</sup> Am 20. Juli d. J. waren 100 Jahre vergangen, seitdem Hasenauer, der Erbauer der Wiener Rotunde, geboren wurde. Die schwersten Sorgen bereitete ihm die Frage der Überspannung des Rundbaues mit einem Durchmesser von 105 m. Über die eigenartigen Umstände, die schließlich entscheidend waren für die Wahl der Kuppelkonstruktion, teilt uns Max Eyth in dem Abschnitt „Berufstragik“ seines heute noch fesselnden Werkes: „Hinter Pflug und Schraubstock“ die nachstehende, vom erkenntnistechnischen Standpunkte wissenswerte Reminiszenz mit (44. Aufl., S. 425):

„Der Plan für das Ausstellungsgebäude stand im allgemeinen fest: die riesige Haupthalle mit ihren Querbauten wie die Rippen eines Walfisches; doch fehlte dem ganzen ein eigentlicher Mittelbau. Die Österreicher haben Geschmack, das muß man ihnen lassen. Sie fühlten, daß die Sache zu einförmig aussehen würde, wußten aber nicht, wie dem abzuhelfen wäre. Da kam Scott Russel, der bekannte Zivilingenieur, auf einer Geschäftsreise durch Wien und saß bei einem kleinen Festmahl zu Ehren der kommenden Ausstellung dem künftigen Ausstellungsautokraten, Herrn von Schwarz-Senborn, gegenüber. Man sprach von der Schwierigkeit. An einen großen Kuppelbau hatte man wohl schon gedacht; aber wie sollte ein solches Werk von der erforderlichen Größe aufgeführt werden, ohne Millionen zu verschlingen, an denen kein Überfluß war? Während des Gespräches nahm Scott Russel den papierernen Lichtschirm von der benachbarten Lampe, stellte ihn auf den Tisch und sagte: „So“. — Es war ein gewaltig großer Lichtschirm und hatte nur eine Papierdicke. Trotzdem war er steif und fest, wovon sich Herr von Schwarz und die ganze Tafelrunde eigenhändig mit allen fünf Fingern und nicht ohne Staunen, denn sie hatten es ja eigentlich schon zuvor gewußt, überzeugten. „Das“, erklärte Scott, „macht die kreisförmige Form in der einen, die radiale in der anderen Richtung. Man muß nur zu beobachten wissen, lieber Herr Schwarz. Sehen Sie sich ein Ei an. Es hat keine Rippen und eine papierdünne Schale und hält alles mögliche aus.“ Für Schwarz stand jetzt das Ei des Kolumbus auf dem Tisch. Am folgenden Tage hatte Scott Russel den Auftrag in der Tasche, das Ausstellungsgebäude durch seine Idee zu krönen, und machte sich an die Arbeit.“ H.

<sup>1)</sup> Die größte Kuppel der Welt, Stahlbau 1929, Heft 10.

INHALT: Das „Kratzgrößenverfahren“ und das „Formänderungsgrößenverfahren“ für die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde. — Über die Erhöhung der Fließgrenze in prismatischen Balken aus Baustahl. — Kritische Betrachtungen zur Schweißnahtberechnung. — Verschiedenes: Zeltförmiges Dach aus Stahlblech. — Max Eyth über die Entstehungsgeschichte der größten Kuppel der Welt.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8. Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.