

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:  
 Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule  
 Fernsprecher: C I Steinplatz 0011  
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
 zur Zeitschrift

## DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

8. Jahrgang

BERLIN, 1. März 1935

Heft 5

### Die Tragfähigkeit des gleichmäßig querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahl.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Priv.-Doz. Ing. Dr. Karl Ježek, Wien.

Die Sicherheit eines Bauwerkes kann in verlässlicher Weise nur nach seiner Tragfähigkeit beurteilt werden. Die Kenntnis der Festigkeit einer Konstruktion ist daher von größter Bedeutung für eine wirtschaftliche Bemessung. Die Festigkeit eines auf Biegung beanspruchten Bauwerkstückes ist vom plastischen Formänderungsvermögen des Werkstoffes abhängig und kann nur bei Kenntnis seines Tragverhaltens für elastisch-plastische Verzerrungszustände ermittelt werden. Die rechnerische Behandlung dieser Aufgabe ist nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, z. B. unter der Annahme eines „ideal-plastischen“ Werkstoffes<sup>1)</sup> und unter der Annahme ebenbleibender Querschnitte möglich. Unter diesen Voraussetzungen, welche beim Baustahl bis zu Dehnungen von 10% weitgehend erfüllt<sup>2)</sup> beziehungsweise durch Versuche gut bestätigt<sup>3)</sup> sind, entwickelte Fritsche<sup>4)</sup> eine Theorie zur Berechnung der Tragfähigkeit von Balkenträgern und Girkmann<sup>5)</sup> ein Bemessungsverfahren für Rahmentragwerke. Unter den Untersuchungen über das Tragvermögen von Baustahlstäben nehmen die auf axialen Druck und Biegung beanspruchten Stäbe eine Sonderstellung ein, da die Ermittlung ihrer Tragfähigkeit eine durch die Werkstoffeigenschaften bedingte Gleichgewichtsaufgabe darstellt. Auf Grund der obenerwähnten Annahmen wurde vom Verfasser die exakte Berechnung der Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des durch eine Einzelkraft querbelasteten Druckstabes durchgeführt<sup>6)</sup>. Die vorliegende Arbeit behandelt einen weiteren für den Stahlbau wichtigen Sonderfall dieser Aufgabengruppe und enthält die strenge analytische Lösung des Gleichgewichtproblems zentrisch beanspruchter und gleichmäßig querbelasteter Druckstäbe aus einem ideal-plastischen Stahl, wobei die Untersuchung sich auf Stäbe mit Rechteckquerschnitt beschränkt.

#### I. Die einzelnen Äste der Biegelinie.

Ein zentrisch gedrückter und querbelasteter Stab von der Länge  $2l$  hat in einem Querschnitt  $x$  außer der Axialkraft  $P$  ein Biegemoment  $M$  aufzunehmen (Bild 1). Ist die gleichmäßig verteilte Querbelastung durch die Beziehung

$$(1) \quad q = \frac{nP}{l}$$

gegeben, dann erhält man das Biegemoment an der Stelle  $x$  in der Form

$$(2) \quad M = P \left( y + nx - \frac{nx^2}{2l} \right).$$

Die Spannungsverteilung in einem beliebigen Stabquerschnitt ist aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen äußeren und inneren Kräften unter der Annahme eines ideal-plastischen Werkstoffes und ebenbleibender Querschnitte zu ermitteln. Die Arbeitslinie des Werkstoffes, die den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt wird, ist in Bild 2 dargestellt.

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Über die Eindringfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. Z. ang. Math. 1921.

<sup>2)</sup> M. Moser, Grundsätzliches zur Streckgrenze. V.D.I.-Forschungsheft 295.

<sup>3)</sup> E. Meyer, Die Berechnung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetz nicht folgt. Z. d. VdI 1908.

<sup>4)</sup> J. Fritsche, Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Bauing. 1930. — Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung. Z. ang. Math. 1931.

<sup>5)</sup> K. Girkmann, Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal-plastischen Stahles. Sitzungsberichte der Wiener Akad. d. Wissensch., Math. naturw. Kl., Abt. IIa, 1931, Bd. 140., H. 9. u. 10.

<sup>6)</sup> K. Ježek, Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahl. Sitzungsberichte der Wiener Akad. d. Wissensch., Abt. IIa, 1934, Bd. 143, H. 7.

Bis zur Stauchgrenze beziehungsweise bis zur Streckgrenze, welche Spannungen dem Absolutwerte nach gleich groß angenommen werden, gilt das Hookesche Gesetz; für größere Dehnungen wird vollkommene Plastizität vorausgesetzt, d. h. die Spannung bleibt trotz zunehmender Dehnung konstant. Da unter dieser Annahme die wirkliche Arbeitslinie eines Baustahles nur bis zu einer

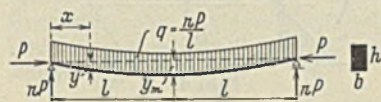


Bild 1.

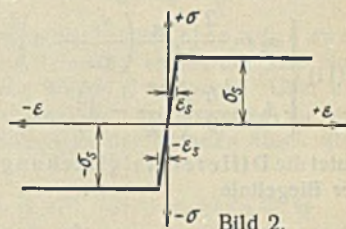


Bild 2.

bestimmten Dehnung beziehungsweise Stauchung genügend genau wiedergegeben wird, ist später zu prüfen, wieweit die gewonnenen Ergebnisse dem wirklichen Verhalten eines zentrisch gedrückten und gleichmäßig querbelasteten Baustahlstabes entsprechen.

In einem durch eine Axialkraft und ein Biegemoment beanspruchten Rechteckquerschnitt sind mit Rücksicht auf die Größe der Randfaserstauchung beziehungsweise Randfaserdehnung drei Spannungszustände beziehungsweise Verzerrungszustände möglich. Da bei der vorliegenden Aufgabe die Gleichgewichtsbedingungen zwischen äußeren und inneren Kräften für den verformten Stab aufzustellen sind (Theorie II Ordnung), ist es nötig, den Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften und den Formänderungen der Stabachse analytisch festzulegen; dies führt zur Aufstellung der den einzelnen Verzerrungszuständen entsprechenden Gleichungen für die Äste der Biegelinie. In den nachfolgenden Rechnungen werden Druckspannungen positiv, Zugspannungen negativ bezeichnet, und es bedeuten  $\pm \sigma_s$  die Stauchgrenze beziehungsweise die Streckgrenze,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\sigma_i, \sigma_a$  die Spannungen und  $\epsilon_i, \epsilon_a$  die spezifischen Längenänderungen am Innenrand (Druckseite) beziehungsweise am Außenrand (Zugseite) des Stabes.

Ast I (Spannungszustand I):

$$\epsilon_i \leq \epsilon_s, \epsilon_a < -\epsilon_s, \sigma_i \leq \sigma_s, \sigma_a < -\sigma_s \text{ (Bild 3)}.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen äußeren und inneren Kräften erhält man mit  $P = bh \sigma_m$ :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{c_1}{h} = \frac{bh^2 \sigma_i}{12M} \\ \frac{d_1}{h} = 1 - \frac{c_1}{h} \end{cases}$$

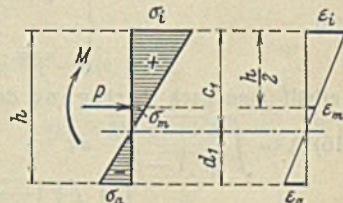


Bild 3.

Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet daher

$$(4) \quad \frac{1}{\rho_1} \cdot y_1'' = -\frac{\epsilon_i}{c_1} = -\frac{12M}{Ebh^3}$$

Mit den Abkürzungen

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = \frac{12\sigma_m}{Eh^2} \\ u = \alpha_1 \left( y_1 + nx_1 - \frac{nx_1^2}{2l} \right) + \frac{n}{\alpha_1 l} \end{cases}$$

erhält man durch zweimalige Integration der Gl. (4) zunächst die Neigung der Biegelinie

$$(6) \quad y_1' = \sqrt{A^2 - u^2} - \frac{n}{l}(l - x_1)$$



und schließlich die Gleichung der Biegelinie

$$(7) \quad x_1 = \frac{1}{\alpha_1} \arcsin \frac{u}{A} + B,$$

wobei  $A^2$  und  $B$  die Integrationskonstanten bedeuten. Für jenen Querschnitt  $0 \leq \xi_1 \leq l$ , in welchem am Innenrand in Stabmitte gerade die Stauchgrenze  $\sigma_s$  erreicht wird, besteht für die Durchbiegung die Gleichung

$$(8) \quad \eta_1 = \frac{h}{6} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) - n \xi_1 + \frac{n \xi_1^2}{2l}.$$

Der Gültigkeitsbereich des Astes I ergibt sich daher aus

$$(9) \quad 0 \leq \left( y_1 + n x_1 - \frac{n x_1^2}{2l} \right) \leq \left( \eta_1 + n \xi_1 - \frac{n \xi_1^2}{2l} \right).$$

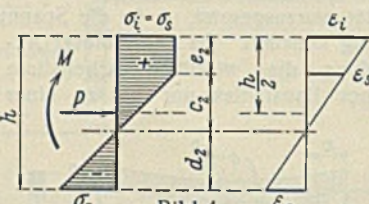
Ast II (Spannungszustand II):

$$\varepsilon_i \geq \varepsilon_s, \quad \varepsilon_a \leq -\varepsilon_s, \quad \sigma_i = \sigma_s, \quad \sigma_a \leq -\sigma_s \quad (\text{Bild 4}).$$

Man erhält aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{e_2}{h} = \frac{3M}{b h^2 (\sigma_s - \sigma_m)} - \frac{1}{2} \\ \frac{c_2}{h} = \frac{9 \left[ (\sigma_s - \sigma_m) - \frac{2M}{b h^2} \right]^2}{8 (\sigma_s - \sigma_m)^3} \sigma_s \\ \varepsilon_i = \frac{e_2 + c_2}{c_2} \varepsilon_s. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{2 h \sigma_m}{9 E} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^3 \\ \beta_2 = \frac{h}{2} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \end{cases}$$


lautet die Differentialgleichung der Biegelinie

$$(12) \quad \frac{1}{\rho_2} \ddot{y}_2'' = -\frac{\varepsilon_s}{c_2} = -\frac{\alpha_2}{\left[ \beta_2 - \left( y_2 + n x_2 - \frac{n x_2^2}{2l} \right) \right]^2}.$$

Bezeichnet man mit  $C$  und  $D$  die Integrationskonstanten und führt man die Ausdrücke

$$(13) \quad \begin{cases} p = \frac{C}{4n} \\ r^2 = p^2 + \frac{\alpha_2}{nl} \\ v^2 = \frac{2r}{p+r} \\ t^2 = \frac{1}{2rl} \left[ \beta_2 - \left( y_2 + n x_2 - \frac{n x_2^2}{2l} \right) \right] + \frac{1}{v^2} \end{cases}$$

in die Rechnung ein, so erhält man durch zweimalige Integration der Gl. (12) die Gleichung der Biegelinie in der Form

$$(14) \quad x = -l \sqrt{\frac{2(p+r)}{n}} \int \frac{\sqrt{1-v^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt + D.$$

Das in Gl. (14) vorhandene Integral ist ein elliptisches Integral II. Gattung, in welchem allerdings sowohl das Argument  $t$  als auch der Modul  $v$  größer als Eins sind. Für diesen Fall sind m. W. keine Tafelwerte vorhanden. Setzt man

$$(15) \quad \begin{cases} v = \frac{1}{t} < 1 \\ x = \frac{1}{v} < 1, \end{cases}$$

so erhält man nach Zerlegung des Integrals in Gl. (14)

$$(16) \quad \mathfrak{S} = \int \frac{\sqrt{1-x^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{x} \left\{ \int \frac{\sqrt{1-x^2 v^2}}{\sqrt{1-v^2}} dv + \int \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2 v^2)}}{v^2} dv \right\}$$

und nach partieller Integration des letzten Integrals

$$(17) \quad \mathfrak{S} = -\frac{1}{x} \left\{ (1-x^2) \mathfrak{F}(x, v) - \mathfrak{G}(x, v) - \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2 v^2)}}{v} \right\}.$$

In Gl. (17) bedeuten

$$(18) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}(x, v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2 v^2)}} \\ \mathfrak{G}(x, v) = \int_0^v \frac{\sqrt{1-x^2 v^2}}{\sqrt{1-v^2}} dv \end{cases}$$

die elliptischen Normalintegrale I. und II. Gattung, für deren Auswertung vorhandene Funktionentafeln benutzt werden können<sup>7)</sup>. Man erhält daher die Neigung der Biegelinie zu

$$(19) \quad y_2' = \frac{2 \sqrt{n r (1-v^2)}}{v \sqrt{1-x^2 v^2}} - \frac{n}{l} (l-x_2)$$

und die Gleichung der Biegelinie besitzt die Form

$$(20) \quad x_2 = 2l \sqrt{\frac{r}{n}} \left\{ (1-x^2) \mathfrak{F}(x, v) - \mathfrak{G}(x, v) - \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2 v^2)}}{v} \right\} + D.$$

Die Durchbiegung jenes Stabquerschnittes  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq l$ , in welchem am Außenrand (Zugseite) gerade die Streckgrenze erreicht wird, ergibt sich zu

$$(21) \quad \eta_2 = \frac{h}{6} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left( 1 + 2 \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) - n \xi_2 + \frac{n \xi_2^2}{2l}.$$

Der Gültigkeitsbereich des Astes II liegt daher innerhalb der Grenzen

$$(22) \quad \left( \eta_1 + n \xi_1 - \frac{n \xi_1^2}{2l} \right) \leq \left( y_2 + n x_2 - \frac{n x_2^2}{2l} \right) \leq \left( \eta_2 + n \xi_2 - \frac{n \xi_2^2}{2l} \right).$$

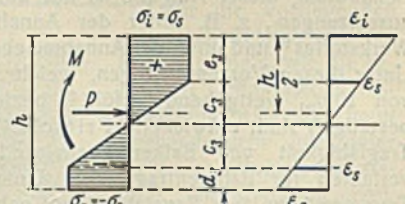
Ast III (Spannungszustand III):

$$\varepsilon_i > \varepsilon_s, \quad \varepsilon_a \geq -\varepsilon_s, \quad \sigma_i = \sigma_s, \quad \sigma_a = -\sigma_s \quad (\text{Bild 5}).$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{e_3}{h}, \frac{d_3}{h} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) - \sqrt{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2} \right) - \frac{3M}{b h^2 \sigma_s}} \\ \frac{c_3}{h} = \sqrt{\frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2} \right) - \frac{3M}{b h^2 \sigma_s}} \\ \varepsilon_i = \frac{e_3 + c_3}{c_3} \varepsilon_s. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha_3 = \frac{\sigma_s^3}{3 h E^2 \sigma_m} \\ \beta_3 = \frac{h \sigma_s}{4 \sigma_m} \left( 1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2} \right) \end{cases}$$


erhält man die Differentialgleichung der Biegelinie in der Form

$$(25) \quad \frac{1}{\rho_3} \ddot{y}_3'' = -\frac{\varepsilon_s}{c_3} = -\frac{\alpha_3}{\left[ \beta_3 - \left( y_3 + n x_3 - \frac{n x_3^2}{2l} \right) \right]^2}.$$

Setzt man ferner

$$(26) \quad \begin{cases} w^2 = \frac{2n}{l} \left[ \beta_3 - \left( y_3 + n x_3 - \frac{n x_3^2}{2l} \right) \right] \\ g = 2 \alpha_3 \sqrt{\frac{l}{2n}}, \end{cases}$$

so erhält man nach zweimaliger Integration der Differentialgleichung (25) zunächst die Neigung der Biegelinie

$$(27) \quad y_3' = \sqrt{w^2 + 2 g w + F} - \frac{n}{l} (l-x_3)$$

und schließlich die Gleichung der Biegelinie zu

$$(28) \quad x_3 = \frac{l}{n} \left\{ \sqrt{w^2 + 2 g w + F} - g \log \text{nat} \left[ g + w + \sqrt{w^2 + 2 g w + F} \right] \right\} + G,$$

wobei  $F$  und  $G$  die Integrationskonstanten bedeuten. Die größtmögliche Durchbiegung des Astes III, bei welcher das Tragvermögen des Querschnittes erschöpft ist ( $y_3'' = \infty$ ), errechnet sich zu

$$(29) \quad \eta_3 = \max y_m = \frac{h \sigma_s}{4 \sigma_m} \left( 1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2} \right) - \frac{n l}{2}.$$

Für die abgeleiteten Beziehungen gelten die Grenzen

$$(30) \quad \left( \eta_2 + n \xi_2 - \frac{n \xi_2^2}{2l} \right) \leq \left( y_3 + n x_3 - \frac{n x_3^2}{2l} \right) \leq \left( \eta_3 + \frac{n l}{2} \right).$$

## II. Die Gleichgewichtsformen der Biegelinie.

Der Stab hat an seinen Enden ( $x=0, x=2l$ ) nur die Axialkraft  $P$  aufzunehmen ( $\sigma_m \leq \sigma_s$ ) und erfährt daher an diesen Stellen rein elastische Formänderungen. Die größte Beanspruchung tritt im Mittelquerschnitt ( $x=l$ ) auf und es herrscht in diesem Querschnitt je nach der Größe der äußeren Belastung einer der oben beschriebenen Spannungszustände. Die vollständige Biegelinie des Stabes wird daher mit zunehmender Belastung aus einem Ast (Ast I) gebildet oder sie setzt sich aus zwei bzw. drei Ästen zusammen. Diese unter Berücksichtigung des Spannungsverlaufes im Mittelquerschnitt des Stabes möglichen Formen der Biegelinie werden,

<sup>7)</sup> E. Jahnke, F. Emde, Funktionentafeln. Teubner, Leipzig 1923.



da die Gleichgewichtslagen der ausgebogenen Stabachse entsprechen, als Gleichgewichtsformen bezeichnet. Die für den vorgegebenen Belastungsfall möglichen drei Gleichgewichtsformen der Biegelinie werden nachstehend entwickelt.

1. Gleichgewichtsform (Ast I):  $\dots y_m \leq \eta_1$ .

Aus den Randbedingungen

$$(31) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \dots y_1 = 0 \\ x_1 = l \dots y_1' = 0 \end{cases}$$

werden die Integrationskonstanten ermittelt und man erhält

$$(32) \quad \begin{cases} A = u_m = \alpha_1 \left( y_m + \frac{nl}{2} \right) + \frac{n}{\alpha_1 l} \\ B = l - \frac{\pi}{2\alpha_1} \end{cases}$$

Die mittlere Durchbiegung  $y_m$  ergibt sich dann zu

$$(33) \quad y_m = \frac{nl}{2} \left[ \frac{2(1 - \cos \alpha_1 l)}{\alpha_1^2 l^2 \cos \alpha_1 l} - 1 \right].$$

Jene Axialspannung, bei welcher am Innenrand in Stabmitte gerade die Stauchgrenze erreicht wird (dann gilt  $y_m = \eta_1$ ), soll als „gefährliche“ Spannung  $\sigma_{ge1}$  bezeichnet werden, da deren Überschreitung bleibende Formänderungen des Stabes bedingt<sup>8)</sup>. Bezeichnet man mit

$$(34) \quad \lambda = \frac{2l}{i} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{l}{h}$$

das Schlankheitsverhältnis ( $i$  ist der Trägheitshalbmesser) des Stabes, so ist die gefährliche Spannung aus der nachstehenden Gleichung zu ermitteln.

$$(35) \quad \left[ 1 + \frac{\lambda\sqrt{3}}{6nE} (\sigma_s - \sigma_{ge1}) \right] \cos \left( \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{ge1}}{E}} \right) - 1 = 0.$$

2. Gleichgewichtsform (Äste I und II):  $\dots \eta_1 \leq y_m \leq \eta_2$ .

Zur Ermittlung der vier Integrationskonstanten stehen die nachfolgenden Randbedingungen zur Verfügung:

$$(36) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \dots y_1 = 0 \\ x_1 = x_2 = \xi_1 \dots y_1 = y_2 = \eta_1 \\ x_1 = x_2 = \xi_1 \dots y_1' = y_2' \\ x_2 = l \dots y_2 = 0 \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(37) \quad \begin{cases} r^2 = \frac{C^2}{16n^2} + \frac{8\sqrt{3}\sigma_m}{9n\lambda E} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^3 \\ x^2 = \frac{C}{8nr} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{v_1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3r\lambda} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) + x^2 \\ u_0 = \frac{2n}{\lambda\sqrt{\epsilon_m}} \\ u_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{3}} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) + u_0 \end{cases}$$

erhält man aus den Randbedingungen (36) zunächst

$$(38) \quad \begin{cases} A^2 = u_1^2 + \frac{4nr(1-v_1^2)}{v_1^2(1-x^2v_1^2)} \\ B = -\frac{1}{\alpha_1} \arcsin \frac{u_0}{A} \\ D = l \left\{ 1 - 2\sqrt{\frac{r}{n}} \left[ (1-x^2)\mathfrak{F}(x) - \mathfrak{E}(x) \right] \right\}, \end{cases}$$

wobei

$$(39) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}(x) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \\ \mathfrak{E}(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}} dv \end{cases}$$

die vollständigen elliptischen Normalintegrale I. und II. Gattung bedeuten. Diese vollständigen elliptischen Integrale sind nur mehr Funktionen des Moduls  $x$  und können aus dem oben angegebenen Tafel-

<sup>8)</sup> Vgl. hierzu den Diskussionsbeitrag von M. T. Huber zum Referat M. Roš auf der II. Intern. Tagung für Brückenbau und Hochbau in Wien 1928 (Bericht, S. 310 ff.).

werk entnommen werden. Für die Integrationskonstante  $C$  erhält man die nachfolgende Bestimmungsgleichung

$$(40) \quad \phi_2 = \left( \arcsin \frac{u_1}{A} - \arcsin \frac{u_0}{A} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\epsilon_m} \right) - \lambda \sqrt{\frac{\epsilon_m r}{n}} \left\{ (1-x^2) [\mathfrak{F}(x, v_1) - \mathfrak{F}(x)] - [\mathfrak{E}(x, v_1) - \mathfrak{E}(x)] - \frac{\sqrt{(1-v_1^2)(1-x^2v_1^2)}}{v_1} \right\} = 0.$$

Die mittlere Durchbiegung ergibt sich als Funktion der Axialspannung und der Integrationskonstanten  $C$  in der Form

$$(41) \quad \frac{y_m}{h} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) - \frac{\lambda}{4\sqrt{3}} \left[ \frac{n}{2} - \frac{C}{4n} + \sqrt{\frac{C^2}{16n^2} + \frac{8\sqrt{3}\epsilon_m}{9n\lambda} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^3} \right].$$

Führt man für die mittlere Durchbiegung die Grenzwerte  $\eta_1$  bzw.  $\eta_2$  ein, so erhält man die entsprechenden Grenzwerte für die Integrationskonstante  $C$  und somit den Gültigkeitsbereich der Gl. (40) in der Form

$$(42) \quad \frac{4}{3} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left[ \epsilon_m \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) - \frac{2\sqrt{3}n}{\lambda} \right] \leq C \leq \frac{4}{3} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left[ \epsilon_s - \frac{2\sqrt{3}n}{\lambda} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \right].$$

Gl. (40) besitzt innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches eine oder zwei reelle Wurzeln. Mit zunehmender Belastung erfährt der Stab eine mittlere Durchbiegung, die der kleineren Wurzel  $C$  entspricht. Über die Bedeutung des eventuell vorhandenen zweiten Lösungswertes für die Integrationskonstante  $C$  geben die Ausführungen des nächsten Abschnittes Aufschluß.

3. Gleichgewichtsform (Äste I, II und III):  $\dots \eta_2 \leq y_m \leq \eta_3$ .

Zur Berechnung der sechs Integrationskonstanten sind die nachfolgenden Randbedingungen zu verwenden:

$$(43) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \dots y_1 = 0 \\ x_1 = x_2 = \xi_1 \dots y_1 = y_2 = \eta_1 \\ x_1 = x_2 = \xi_1 \dots y_1' = y_2' \\ x_2 = x_3 = \xi_2 \dots y_2 = y_3 = \eta_2 \\ x_2 = x_3 = \xi_2 \dots y_2' = y_3' \\ x_3 = l \dots y_3 = 0 \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(44) \quad \begin{cases} g = \frac{\epsilon_s}{3} \sqrt{\frac{3\lambda\sigma_s}{2\sqrt{3}n\sigma_m}} \\ w_2^2 = \frac{2\sqrt{3}n\sigma_m}{3\lambda\sigma_s} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^2 \\ \frac{1}{v_2^2} = \frac{w_2^2}{nr} + x^2 \\ W = \sqrt{w_2^2 + 2g w_2 + F} \end{cases}$$

und den Werten der Gl. (37) erhält man aus den Randbedingungen (43) zunächst

$$(45) \quad \begin{cases} A^2 = u_1^2 + \frac{4nr(1-v_1^2)}{v_1^2(1-x^2v_1^2)} \\ B = -\frac{1}{\alpha_1} \arcsin \frac{u_0}{A} \\ D = -2l \sqrt{\frac{r}{n}} \left\{ (1-x^2)\mathfrak{F}(x, v_2) - \mathfrak{E}(x, v_2) - \frac{\sqrt{(1-v_2^2)(1-x^2v_2^2)}}{v_2} \right\} - \frac{l}{n} [W - g \log \text{nat} (g + w_2 + W) - n + g \sqrt{g^2 - F}] \\ F = C - 2 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left[ \epsilon_s - \frac{n\sqrt{3}}{\lambda} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \right] \\ G = \frac{l}{n} (n - g \sqrt{g^2 - F}) \end{cases}$$

und schließlich eine Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstante  $C$  in der Form

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & \phi_3 = \left( \arcsin \frac{u_1}{A} - \arcsin \frac{u_0}{A} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\epsilon_m} \right) - \lambda \sqrt{\frac{\epsilon_m r}{n}} \\ & \left\{ (1-x^2) [\mathfrak{F}(x, v_1) - \mathfrak{F}(x, v_2)] - [\mathfrak{E}(x, v_1) - \mathfrak{E}(x, v_2)] - \frac{\sqrt{(1-v_1^2)(1-x^2v_1^2)}}{v_1} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{(1-v_2^2)(1-x^2v_2^2)}}{v_2} \right\} + \frac{\lambda\sqrt{\epsilon_m}}{2n} \left( W - g \log \text{nat} \frac{g + w_2 + W}{\sqrt{g^2 - F}} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$



Die Durchbiegung in Stabmitte ergibt sich als Funktion der Axialspannung  $\sigma_m$  und der Integrationskonstanten  $F$  zu

$$(47) \quad \frac{y_m}{h} = \frac{\sigma_s}{4\sigma_m} \left(1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2}\right) - \frac{\lambda}{4\sqrt{3}} \left[ \frac{n}{2} + \frac{g}{n} (g - \sqrt{g^2 - F}) - \frac{F}{2n} \right].$$

Führt man für die mittlere Durchbiegung  $y_m$  den oberen und unteren Grenzwert in Gl. (47) ein, so erhält man die entsprechenden Grenzwerte für die Integrationskonstante  $F$  zu

$$(48) \quad -\frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left[ \varepsilon_s + \frac{n\sqrt{3}}{\lambda} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \right] \leq F \leq 0.$$

Der Gültigkeitsbereich der Gl. (46) ist daher laut Gl. (45) und (48) durch

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{3} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left[ \varepsilon_s - \frac{2\sqrt{3}n}{\lambda} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \right] &\leq C \\ &\leq 2 \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left[ \varepsilon_s - \frac{n\sqrt{3}}{\lambda} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

gegeben. Innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches besitzt die Gl. (46) zwei reelle Lösungswerte für die Integrationskonstante  $C$ . Mit zunehmender Belastung nimmt die ausgebogene Stabachse jene Lage ein, welche der kleineren Durchbiegung entspricht. Die Bedeutung des zweiten Lösungswertes der Gl. (46) wird im folgenden Abschnitt besprochen.

### III. Die kritische Belastung des Stabes.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung bildet die Ermittlung der Tragfähigkeit des zentrisch gedrückten und gleichmäßig querbelasteten Stabes aus einem ideal-plastischen Werkstoff. Die Untersuchung seines Tragverhaltens für unterhalb dieser Höchstlast liegende axiale Beanspruchungen ergibt, daß der Stab zwei mögliche Gleichgewichtslagen mit den mittleren Durchbiegungen  $y_m^{(1)}$  und  $y_m^{(2)}$  besitzt. Im Verlaufe einer stetig gesteigerten Belastung (die Wirkung einer Entlastung und Wiederbelastung wird hier nicht berücksichtigt) nimmt der Stab die erste Gleichgewichtslage, welche der kleineren mittleren Durchbiegung  $y_m^{(1)}$  entspricht, ein. (Vgl. hierzu die Ausführungen des Abschn. II). Die zweite Gleichgewichtslage mit der größeren Durchbiegung in Stabmitte  $y_m^{(2)}$  entspricht jener Grenzlage der ausgebogenen Stabachse, in welcher zwischen inneren und äußeren Kräften gerade noch Gleichgewicht besteht. Diese beiden möglichen Gleichgewichtslagen können, müssen aber nicht derselben Gleichgewichtsform der ausgebogenen Stabachse entsprechen. So kann z. B. die primäre Gleichgewichtslage der 1. oder 2. Gleichgewichtsform, die sekundäre Gleichgewichtslage der 2. oder 3. Gleichgewichtsform der Biegelinie entsprechen. Gehört dagegen bereits die primäre Gleichgewichtslage der 3. Gleichgewichtsform an, so entspricht auch die sekundäre Gleichgewichtslage derselben Form der ausgebogenen Stabachse. Daher ergibt die Gl. (40) je nach dem Schlankheitsverhältnis und Querbelastungsverhältnis des Stabes einen oder zwei Lösungswerte, die Gl. (46) dagegen immer zwei Lösungswerte für die Integrationskonstante bzw. für die mittlere Durchbiegung. Zur Erläuterung ist in Bild 6 die Funktion  $\sigma_m = f(y_m)$  für einen Stab von gegebener Schlankheit  $\lambda$  und gegebenem Querbelastungsverhältnis  $n$  graphisch dargestellt. Diese Kurve besteht aus zwei Ästen: Der aufsteigende Ast  $[0, 1, 2, M]$  ist der geometrische Ort der mittleren Durchbiegungen  $y_m^{(1)}$  aller primären Gleichgewichtslagen, die Abszissen des abfallenden Astes  $[M, 2', 1']$  entsprechen den mittleren Durchbiegungen  $y_m^{(2)}$  der sekundären Gleichgewichtslagen. Der belastete Stab kann durch eine zusätzliche Ausbiegungsvergrößerung aus der ersten in die zweite Gleichgewichtslage gebracht werden, ohne sein Tragvermögen einzubüßen, vermag jedoch einer darüber hinausgehenden Ausbiegungsverstärkung keinen inneren Widerstand entgegenzusetzen. Die primäre bzw. die sekundäre Gleichgewichtslage ist daher bezüglich einer unendlich kleinen Vergrößerung der mittleren Ausbiegung des Stabes als stabil bzw. labil zu bezeichnen. Als Stabilitätsmaß der primären Gleichgewichtslage kann die Differenz aus den den beiden Gleichgewichtslagen zugeordneten mittleren Durchbiegungen, also

$$(50) \quad \Delta = y_m^{(2)} - y_m^{(1)}$$

angesehen werden. Dieses Stabilitätsmaß nimmt mit zunehmender Belastung ab und erreicht schließlich bei der Höchstspannung, die als „kritische“ Spannung  $\sigma_{kr}$  bezeichnet werden soll, den Wert Null. Die kritische Belastung (Traglast des Stabes) ist größer als die gefährliche Belastung und kleiner als die einem zentrischen Kraftangriff ohne Querbelastung ( $n=0$ ) entsprechende Knicklast ( $P_{gef} < P_{kr} < P_k$ ). Die Aufgabe, die Tragfähigkeit eines zentrisch gedrückten und gleichmäßig quer-

belasteten Druckstabes aus einem elastisch-plastischen Werkstoff zu ermitteln, stellt daher ein Gleichgewichtsproblem dar. Dieses Tragverhalten ist charakteristisch für alle auf axialen Druck und Biegung beanspruchten Stäbe<sup>9)</sup>. In Bild 6 entspricht die Ordinate des Punktes  $M$

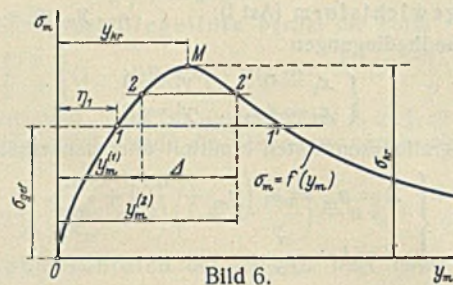


Bild 6.

der kritischen Spannung  $\max \sigma_m = \sigma_{kr}$ , seine Abszisse der kritischen Durchbiegung  $y_{kr}$ , und die Kurve  $\sigma_m = f(y_m)$  besitzt in diesem Punkte eine zur Abszissenachse parallele Tangente. Zur Bestimmung der kritischen Spannung und der kritischen Durchbiegung stehen daher die beiden nachfolgenden Gleichungen zur Verfügung:

$$(51) \quad \begin{cases} \sigma_m = f(y_m) \\ \frac{d\sigma_m}{dy_m} = f_1(y_m) = 0. \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle ist die Axialspannung nicht explizit als Funktion der mittleren Durchbiegung darstellbar, daher lauten die beiden zur Bestimmung dieser Extremwerte erforderlichen Gleichungen:

$$(52) \quad \begin{cases} \Phi(\sigma_m, y_m) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_m} \Phi(\sigma_m, y_m) = 0. \end{cases}$$

Der funktionelle Zusammenhang zwischen der Axialspannung und der mittleren Durchbiegung wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt für die einzelnen Gleichgewichtsformen der Biegelinie bestimmt. Nachfolgend wird die zweite der Gl. (52) angegeben. Hierbei kommen nur die 2. und die 3. Gleichgewichtsform in Betracht, da die kritische Spannung immer größer ist als die „gefährliche“ Spannung.

2. Gleichgewichtsform  $\eta_1 \leq y_{kr} \leq \eta_2$ .

Durch Differentiation der Gl. (40) erhält man nach Umformung

$$(53) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_m} = 0 = C \left( \arcsin \frac{u_1}{A} - \arcsin \frac{u_0}{A} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\varepsilon_m} \right) + \frac{16n^2r^2}{A^2} \left( \frac{u_1}{\sqrt{A^2 - u_1^2}} - \frac{u_0}{\sqrt{A^2 - u_0^2}} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{nr}} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left\{ \left[ C - \frac{8}{3} \varepsilon_m \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^2 \right] \frac{v_1 \sqrt{1 - x^2} v_1^2}{\sqrt{1 - v_1^2}} + \frac{8}{3} \varepsilon_m \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^2 \mathfrak{F}(x) \right\}.$$

Aus den Gl. (40) und (53) ist  $C = C_{kr}$  und  $\sigma_m = \sigma_{kr}$  zu bestimmen. Die kritische Durchbiegung in Stabmitte ist aus Gl. (41) zu berechnen.

3. Gleichgewichtsform  $\eta_2 \leq y_{kr} \leq \eta_3$ .

Durch Differentiation der Gl. (46) ergibt sich

$$(54) \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m} = 0 = C \arcsin \left[ \frac{u_1}{A} - \arcsin \frac{u_0}{A} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\varepsilon_m} \right] + \frac{\lambda \sqrt{\varepsilon_m}}{2n} \left( W - g \log \operatorname{nat} \frac{g + w_2 + W}{\sqrt{g^2 - F}} \right) + \frac{16n^2r^2}{A^2} \left( \frac{u_1}{\sqrt{A^2 - u_1^2}} - \frac{u_0}{\sqrt{A^2 - u_0^2}} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{nr}} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left\{ \left[ C - \frac{8}{3} \varepsilon_m \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^2 \right] \frac{v_1 \sqrt{1 - x^2} v_1^2}{\sqrt{1 - v_1^2}} - \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \left[ C - \frac{8}{3} \varepsilon_s \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \right] \frac{v_2 \sqrt{1 - x^2} v_2^2}{\sqrt{1 - v_2^2}} \right\} - 8nr^2 \lambda \sqrt{\varepsilon_m} \left[ \frac{w_2 + W}{(g + w_2 + W)W} - \frac{g}{(g^2 - F)} \right].$$

Aus den Gl. (46) und (54) ist  $C = C_{kr}$  bzw.  $F = F_{kr}$  und  $\sigma_m = \sigma_{kr}$  zu bestimmen und schließlich aus Gl. (47) die kritische Durchbiegung in Stabmitte zu berechnen.

<sup>9)</sup> Die erste zu dieser Aufgabengruppe gehörende theoretische Untersuchung des Gleichgewichtsproblems exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl stammt von Th. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit, V. D. I., Forschungsheft 81.



Bei der Ermittlung der kritischen Belastung eines zentrisch gedrückten Stabes mit dem Querbelastungsverhältnis  $n$  und dem Schlankheitsverhältnis  $\lambda$  ist zunächst festzustellen, ob die ausgebogene Stabachse im kritischen Belastungszustande der 2. oder der 3. Gleichgewichtsform angehört; hierbei führt das nachstehend geschilderte Verfahren rasch zum Ziele. Man trägt in einem Koordinatensystem (Bild 7) mit den Abszissen  $\left(\frac{y_m + n\lambda}{h} + \frac{n\lambda}{8\sqrt{3}}\right)$  und den Ordinaten  $\sigma_m$  die Kurven

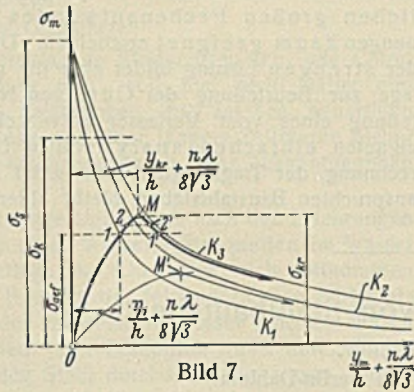


Bild 7.

$$(55) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{\eta_1}{h} + \frac{n\lambda}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \\ K_2 = \frac{\eta_2}{h} + \frac{n\lambda}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right) \left( 1 + \frac{2\sigma_m}{\sigma_s} \right) \\ K_3 = \frac{\eta_3}{h} + \frac{n\lambda}{8\sqrt{3}} = \frac{\sigma_s}{4\sigma_m} \left( 1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2} \right) \end{cases}$$

ein (diese Kurven bleiben bei gegebener Fließgrenze  $\sigma_s$  unverändert) und berechnet aus Gl. (35) die „gefährliche“ Spannung  $\sigma_{gef}$  und die Knickspannung  $\sigma_k$ , da die kritische Spannung zwischen diesen beiden Werten liegt. Nun wird zunächst für Spannungswerte  $\theta \leq \sigma_m \leq \sigma_{gef}$  nach Gl. (33) der Kurvenast [0, 1] ermittelt. Dann berechnet man die der gefährlichen Spannung  $\sigma_{gef}$  zugeordnete sekundäre Gleichgewichtslage (Punkt 1'), die im dargestellten Falle (Bild 7) der 3. Gleichgewichtsform angehört. Da der den sekundären Gleichgewichtslagen entsprechende Ast der Kurve  $\sigma_m = f(y_m)$  mit abnehmender Axialspannung  $\sigma_m \rightarrow \theta$  sich immer mehr der Kurve  $K_3$  nähert, kann der für das Endergebnis dieser Untersuchung maßgebende, über der Ordinate  $\sigma_{gef}$  gelegene Kurventeil [1, M, 1'] bereits verhältnismäßig genau (die Genauigkeit kann natürlich durch Berechnung weiterer Punkte, z. B. 2, und 2' gesteigert werden) eingezeichnet werden.

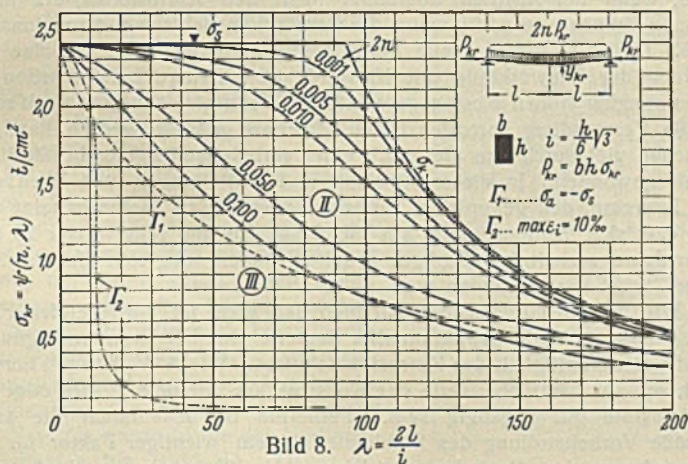


Bild 8.  $\lambda = \frac{2l}{i}$

Damit findet man auch die ungefähre Lage des höchsten Punktes M und kann beurteilen, welche Gleichgewichtsform die ausgebogene Stabachse im kritischen Gleichgewichtszustande besitzt. Im gegebenen Falle liegt der Punkt M zwischen den Kurven  $K_2$  und  $K_3$ , so daß die kritische Gleichgewichtslage der 3. Gleichgewichtsform angehört. In dem zweiten in Bild 7 dargestellten Beispiel (Kurve 0, M') handelt es sich um einen Stab größerer Schlankheit, dessen kritische Gleichgewichtslage der 2. Gleichgewichtsform angehört (der höchste Punkt M' liegt zwischen den Kurven  $K_1$  und  $K_2$ ).

Unter der kritischen Belastung ist der Stab bereits bleibend verformt. Die Spannungsverteilung im Mittelquerschnitt des Stabes entspricht also entweder dem Spannungsbild 4 oder 5 und kann aus den Gl. (10) oder (23) berechnet werden. Die der vorliegenden Untersuchung zugrunde liegende idealisierte Spannungs-Dehnungslinie gibt mit ziemlicher Genauigkeit die Arbeitslinie eines Baustahls im elastischen und im Fließbereich wieder, schließt jedoch die Berücksichtigung des für diesen Werkstoff charakteristischen Verfestigungsbereiches aus. Die unter dieser Annahme gewonnenen Ergebnisse können daher das wirkliche Verhalten zentrisch gedrückter und gleichmäßig querbelasteter Baustahlstäbe nur bis zu gewissen Formänderungen einigermaßen genau

beschreiben. Es soll daher noch anschließend untersucht werden, welche Höchstwerte die mittlere Durchbiegung annehmen darf, damit am Innenrand in Stabmitte eine bestimmte Stauchung (dies entspricht der größten Formänderung eines derart belasteten Stabes)

$$(56) \quad \max \epsilon_l = k \epsilon_s$$

nicht überschritten wird. Man erhält dann die dieser Bedingung entsprechenden Höchstwerte der in den Gl. (41) und (47) — aus einer dieser Gleichungen ist die mittlere Durchbiegung zu berechnen — auftretenden Integrationskonstanten zu

$$(57) \quad \begin{cases} C_{\max} = \frac{8\sqrt{3} n \sigma_m}{3(k-1)\lambda\sigma_s} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1 \right)^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{2(k-1)}{\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s}\right)}} \right\} \\ F_{\max} = -\frac{2}{3k} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_m} + 1 \right) \left[ \epsilon_s + \frac{n\sqrt{3}}{k\lambda} \left( 1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right) \right] \end{cases}$$

#### IV. Diagramm der kritischen Spannungen für $\sigma_s = 2,4 \text{ t/cm}^2$ .

Der Einfluß des Querbelastungsverhältnisses  $n$  und des Schlankheitsverhältnisses  $\lambda$  auf die Tragfähigkeit gleichmäßig querbelasteter Druckstäbe läßt sich aus der hier gegebenen strengen analytischen Lösung dieses Gleichgewichtsproblems keineswegs leicht beurteilen. Es scheint daher zweckmäßig, diese Zusammenhänge für ein bestimmtes Formänderungsgesetz übersichtlich darzustellen. Für den Elastizitätsmodul und die Fließgrenze werden die dem normmäßigen Baustahl St 37 entsprechenden Werte  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ ,  $\sigma_s = 2,4 \text{ t/cm}^2$  gewählt. Ferner wird angenommen, daß die Verfestigung des Baustahls St 37 bei einer spezifischen Längenänderung von 10% (dieser Wert dürfte kaum zu hoch eingeschätzt sein) beginnt. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Abb. 8 graphisch dargestellt. Die kritische Spannung  $\sigma_{kr} = \psi(n, \lambda)$  wurde für Querbelastungsverhältnisse  $2n = 0,001$  bis 0,10 und für Schlankheitsverhältnisse  $\lambda = 0$  bis 200 berechnet. Für  $2n = 0$  erhält man die Linie der Knickspannungen  $\sigma_k$ , die gemäß dem angenommenen Formänderungsgesetz aus der Euler-Hyperbel und der Geraden  $\sigma_k = \sigma_s$  gebildet wird. Die Gültigkeitsbereiche der beiden möglichen kritischen Gleichgewichtsformen der Biegelinie sind durch die Kurve  $\Gamma_1$  ( $\sigma_a = -\sigma_s$ ) voneinander getrennt und in Abb. 8 durch eingeringelte römische Ziffern gekennzeichnet.

Es ist noch zu untersuchen, wie weit durch diese Rechenergebnisse das wirkliche Verhalten von Stäben aus einem Baustahl St 37 im kritischen Gleichgewichtszustande gekennzeichnet ist. Die Punkte der Kurve  $\Gamma_2$  entsprechen jenen kritischen Gleichgewichtslagen, bei welchen die spezifische Stauchung am Innenrand in Stabmitte gerade 10% (bei dieser Stauchung wurde der Beginn des Verfestigungsbereiches des Baustahls St 37 angenommen) beträgt. Man erkennt aus dem Verlaufe der Kurve  $\Gamma_2$ , daß derartige bleibende Formänderungen selbst bei großen Querbelastungsverhältnissen nur in sehr gedrunghenen Stäben ( $\lambda < 15$ ) auftreten, so daß in allen praktisch vorkommenden Fällen die kritische Belastung erreicht wird, bevor eine Verfestigung eintreten könnte. Die Vernachlässigung des Verfestigungsbereiches hat daher auf die Größe der kritischen Spannung von Baustahlstäben mit  $\lambda < 15$  und  $n < 1$  keinen Einfluß. Dagegen hat die Annahme der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes bis zur Fließgrenze an Stelle des wirklichen Verlaufes der Arbeitslinie einen mit abnehmendem Querbelastungsverhältnis wachsenden Einfluß auf die Größe der kritischen Spannung. Der Einfluß des Verlaufes der Spannungs-Dehnungslinie zwischen Proportionalitäts- und Fließgrenze zeigt sich am deutlichsten im Verlauf der Knickspannungen.

Die größte Differenz  $\max \Delta \sigma_k$  in den Knickspannungen ergibt sich bei  $\lambda_s^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_s}$ , und dieser Wert stellt zugleich die größte zu erwartende Abweichung in den kritischen Spannungen dar, die mit zunehmendem Querbelastungsverhältnis rasch abnimmt. Die Ergebnisse der Untersuchung für einen Baustahl St 37, dessen Arbeitslinie zwischen Proportionalitäts- und Stauchgrenze nur wenig von der Hooke'schen Geraden abweicht<sup>10)</sup>, würden gegenüber den vorliegenden Spannungswerten des Diagramms

<sup>10)</sup> W. Rein: „Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle.“ (Heft 4 der „Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau.“) Berlin 1930, Springer.



Bild 8 nur kleine Unterschiede aufweisen, die im Hinblick auf den bei derselben Stahlsorte schwankenden Wert der Fließgrenze praktisch bedeutungslos sind.

Die Werte des Diagramms (Bild 8) stellen daher innerhalb des angegebenen Bereiches ( $\lambda < 15$ ) obere Grenzwerte für die kritische Spannung eines gleichmäßig querbelasteten und zentrisch gedrückten Stabes aus einem normengemäßen Baustahl St 37 dar.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sowohl die vorliegende als auch die vom Verfasser a. a. O. (s. Fußnote 6) angegebene strenge analytische Lösung im Falle des exzentrisch bzw. des zentrisch

beanspruchten und durch eine Einzelkraft in Stabmitte querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahl infolge des erforderlichen großen Rechenaufwandes für ingenieurmäßige Berechnungen kaum geeignet erscheinen. Die Kenntnis der genauen Werte der strengen Lösung bildet aber die unumgänglich notwendige Grundlage zur Beurteilung der Güte von Näherungslösungen. Die Mitteilung eines vom Verfasser entwickelten, für Ingenieurzwecke geeigneten einfachen analytischen Näherungsverfahrens zur Berechnung der Tragfähigkeit von axial gedrückten und auf Biegung beanspruchten Baustahlstäben bleibt einem weiteren Aufsätze vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten.

## Unterwasseranstrich von Stahlbauteilen.

Von E. Kindscher.

(Staatl. Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem.)

Der Korrosionsschutz der ständig oder zeitweilig unter Wasser liegenden Stahlteile ortsfester Bauwerke, wie Schleusen, Wehre usw., gehört zu den schwierigsten Aufgaben, welche der Anstrichtechnik gestellt sind. Einmal müssen solche Anstriche häufig ganz außerordentlich hohen Beanspruchungen chemischer und mechanischer Natur gewachsen sein und sollen dazu noch möglichst große Dauerhaftigkeit besitzen; zum anderen sind die Verhältnisse, unter denen Anstrich-Erneuerungsarbeiten an derartigen Bauwerken meist nur vorgenommen werden können, vom Standpunkt der Anstrichtechnik als denkbar ungünstig zu bezeichnen.

Bei Schleusen, Wehren usw. ergibt sich, daß wesentliche Unterschiede bestehen müssen, je nachdem, ob der Anstrich dauernd im Wasser oder dauernd oberhalb des Wasserspiegels liegt, oder ob er schließlich abwechselnd der Wirkung des Wassers und dem Einfluß von Licht, Luft und Wärme ausgesetzt ist, wie dies z. B. bei Schleusenhubtoren und in der Zone des regelmäßigen Wasserwechsels am Meere zutrifft.

Unter Wasser sind die Anstriche zunächst einmal Wirkungen chemischer Natur unterworfen, die in innigem Zusammenhange mit der chemischen Zusammensetzung des Wassers stehen. Schäden werden an den Anstrichen um so eher auftreten können, je größer die Menge der anstrichschädigenden Stoffe ist, die das Wasser mit sich führt. Solche gefährlichen Verunreinigungen stellen in vielen Fällen die städtischen und gewerblichen Abwässer dar. So berichtete z. B. Wedler<sup>1)</sup>, daß städtische Abwässer im Bereich der Neckarbaudirektion Gasc entwickelten, welche den Anstrich der Wehrverschlüsse ernstlich beschädigten. Weiterhin stellt eine starke Verunreinigung der Gewässer mit Öl, wie sie durch regen Schiffsverkehr oder durch andere Umstände veranlaßt sein kann, einen Faktor dar, der die Lebensdauer solcher Anstriche ungünstig zu beeinflussen vermag. Schließlich muß mit recht kräftigen mechanischen Beanspruchungen der Anstriche gerechnet werden, wenn z. B. das Wasser die Bauteile nicht ruhig, sondern zeitweilig oder dauernd mit hoher Geschwindigkeit umspült oder überströmt und hierbei sogar noch feste Körper, wie Sand oder Eis, mit sich führt. In gleicher Richtung wirkt auch dauernd starker Wellenschlag.

Anforderungen besonderer Art stellt wiederum das Meer an die Anstriche. Hier treten neben die Wirkungen des Wassers noch Gefahren des Bewuchses, insbesondere der Seepocken. Diese Krebstiere durchbohren selbst mehrere Millimeter dicke Anstriche und heben sie von der Unterlage ab. Sie ermöglichen so den freien Zutritt des Meerwassers zum Stahl und erhöhen die Korrosionsgefahr in ganz besonders hohem Maße.

Von den Anstrichen der Hubtore von Schleusen oder von Bauteilen im Bereiche des ständigen Wasserwechsels muß verlangt werden, daß sie neben den genannten Wirkungen des Wassers auch dem Einfluß von Licht und Luft widerstehen. Sie dürfen außerhalb des Wassers keine Risse bekommen, dürfen nicht abblättern und an heißen Tagen selbst in der prallen Sonne nicht zum Fließen neigen. Außerdem müssen sie auch schroffem Temperaturwechsel gewachsen sein. Dunkel gestrichene Hubtore von Schleusen können nämlich im Sommer bei längerer Sonnenbestrahlung Temperaturen von 50 bis 60° C annehmen und werden dann plötzlich in Wasser von 18 bis 20° C eingesenkt, so daß Temperaturunterschiede von 30 bis 40° C ohne weiteres gegeben sind.

Befindet sich der Anstrich eines Bauteils dauernd oberhalb des Wasserspiegels, so unterliegt er im allgemeinen solchen Bedingungen, wie sie von der Anstrichtechnik als normal bezeichnet werden. Bei Flächen aber, deren eine Seite zwar dauernd in Luft, deren andere hingegen dauernd unter Wasser gelegen ist, treten wiederum Beanspruchungen besonderer Art auf. In der warmen Jahreszeit ist bei solchen Flächen mit starker Schwitzwasserbildung zu rechnen und im Winter mit dicken Vereisungen. Ein Abplatzen von Eisschollen stellt dann an die mechanischen Eigenschaften des Anstrichs sehr hohe Anforderungen.

Verlangt also die Praxis schon Außergewöhnliches von den Anstrichen derartiger Stahlbauteile, so kommt noch hinzu, daß auch eine besonders

lange Lebensdauer dieser Schutzschichten gefordert werden muß. Die Erneuerung dieser Anstriche ist nämlich in vielen Fällen nur schwierig und unter Aufwendung hoher Kosten, z. B. für die Trockenlegung von Schleusen oder für das Docken von Schleusentoren usw., durchführbar. Gewisse Stahlbauteile, wie stählerne Uferwände, sind sogar unter Wasser überhaupt nicht mehr zugänglich. Eine häufigere Wiederholung der Anstricherneuerungsarbeiten verbietet sich also, selbst wenn sie möglich ist, von selbst. Außerdem können die Anstricharbeiten, um den Betrieb der in Frage stehenden Anlagen nicht lahmzulegen, meist nur im Winter vorgenommen werden, wenn nämlich die Schifffahrt ruht oder der Stau aufgehoben ist. Dies sind die Gründe, die zu hohen Anforderungen an die Lebensdauer der Unterwasseranstriche zwingen, und zwar muß die Haltbarkeit um so größer sein, je schwieriger und kostspieliger die Trockenlegung der Bauteile ist. Eine Lebensdauer von 4 Jahren muß heute häufiger noch in Kauf genommen werden, doch ist anzustreben, daß 6 und mehr Jahre überdauernde Anstriche in Zukunft die Regel bilden.

Fragt man sich nun, wie der dauerhafte Korrosionsschutz solcher ständig oder zeitweilig unter Wasser liegender Bauteile durch Anstrich am besten gesichert werden kann, so darf das Konstruktionsmaterial — der Baustahl — nicht außer acht gelassen werden. Einleuchtend ist, daß ein Anstrich auf einem an sich schon wenig zum Rosten neigenden Stahl besser halten kann als im entgegengesetzten Falle. Der Idealzustand wäre, wenn der Anstrich überhaupt nicht den Korrosionsschutz übernehmen brauchte, sondern wenn der Baustahl an sich schon korrosionsfest wäre. Leider sind bisher alle derartigen Vorschläge, die z. B. eine Beplattung der Bauwerkteile mit Nirosta-Stahl ins Auge faßten, schon an den untragbar hohen Kosten gescheitert. Wenn also zunächst noch nicht an die Verwendung korrosionsfesten Materials gedacht werden kann, so ist schon viel durch den Gebrauch eines verhältnismäßig rostbeständigen Stahls gewonnen. In dieser Hinsicht sind Mitteilungen von Wedler<sup>1)</sup> von Interesse, daß gekupferter Flußstahl Vorteile zu bieten scheint und und daß sich Schleusentore aus Schweißseisen im Meerwasser 25 und mehr Jahre verhältnismäßig gut gehalten haben, obgleich der Anstrich schon längst verschwunden war.

Wie bei allen Rostschutzanstrichen ist auch im vorliegenden Falle eine zweckmäßige Konstruktion aller Bauteile eine der Grundbedingungen für die Dauerhaftigkeit des Korrosionsschutzes. Wie A. V. Blom<sup>2)</sup> hervorhebt, müssen sämtliche Teile der Konstruktion mit dem Pinsel oder der Spritzpistole gut zugänglich sein. Fernerhin ist bekanntlich die sachgemäße Vorbehandlung des Stahlmaterials ein wichtiger Faktor für die Lebensdauer der Rostschutzanstriche. Als Entrostungsmethode wird vielfach für den Erstanstrich jenes Verfahren bevorzugt, bei dem die einzelnen Konstruktionsteile des Bauwerks vor dem Einbau längere Zeit ungeschützt den Witterungseinflüssen ausgesetzt bleiben; die Entfernung des Rostes mit der Walzhaut erfolgt dann durch Abschaben und Bürsten. Natürlich findet auch das Sandstrahlgebläse Verwendung. Bei Anstricherneuerungsarbeiten von Stahlbauten, die mit Maschinenanlagen verbunden sind, besteht allerdings bei der Sandstrahlentrostung die Gefahr einer Schädigung der Maschinenteile durch Staubeentwicklung. Auch wird bei solchen Erneuerungsarbeiten häufig darauf Wert gelegt, daß nur die verrotteten, nicht mehr festhaftenden Teile, jedoch nicht die noch guten und feststehenden Teile des alten Anstrichs entfernt werden, was bei Gebrauch des Sandstrahlgebläses kaum durchzuführen ist.

Hinsichtlich des Anstrichs dürfte nach den bisherigen Ausführungen Klarheit darüber herrschen, daß ein einzelnes Material der Vielheit und Verschiedenartigkeit der Beanspruchungen, wie sie unter oder über Wasser sowie bei Wasserwechsel in Süß- und Seewasser auftreten, unmöglich gewachsen sein kann. Ein Universalmittel, wie sich Blom<sup>2)</sup> ausdrückt, gibt es nicht. In jedem einzelnen Falle muß die Auswahl des Anstrichmaterials unter Berücksichtigung der zu erwartenden Beanspruchungen

<sup>1)</sup> Bautechn. 1934, S. 232.

<sup>2)</sup> Bulletin des Schweizer elektrotechnischen Vereins, 1934, S. 365.



getroffen werden. Von Anstrichmaterialien kommen für den in Frage stehenden Zweck zwei Gruppen in Betracht:

1. Anstriche auf Leinölbasis und
2. Anstriche auf bituminöser Grundlage.

Auf andere, in neuerer Zeit vorgeschlagene Bindemittelarten, wie Chlorkautschuk, Duprene, Benzylzellulose usw., soll hier nicht näher eingegangen werden, da praktische Erfahrungen mit solchen neuartigen Anstrichmitteln in größerem Umfange und über längere Zeiträume bisher offenbar noch nicht vorliegen oder wenigstens noch nicht bekanntgegeben wurden.

Anstriche auf reiner Leinölgrundlage eignen sich nach den Erfahrungen der Praxis nicht für den Gebrauch unter Wasser. Sie quellen im Wasser und heben sich bald von der Unterlage ab. Dies deckt sich vollkommen mit den Versuchsergebnissen von Blom<sup>3)</sup>, der folgendermaßen berichtet: „Konstruktionsteile, die dauernd oder zeitweise in Wasser tauchen, dürfen mit Ölfarbe nicht gestrichen werden. Der Leinölfilm quillt unter diesen Umständen, läßt Wasser bis auf den Stahl durchdiffundieren und schützt dann nicht mehr vor Rost. Hiergegen half auch nicht ein dreifacher Anstrich einer als besonders wasserfest bezeichneten Farbe“.

Ähnlich unbefriedigende Ergebnisse wurden mit Ölfarben geringen Harzgehaltes erzielt. Wo aber von der Praxis über günstige Erfahrungen mit „Ölfarben“ berichtet wurde, dürfte es sich um harzreiche Produkte

gehandelt haben. Hierzu äußerte sich Egon Meier<sup>3)</sup> folgendermaßen: „Unter Wasser sind Öl- und Lackfarben nur brauchbar, wenn der Ölantell verhältnismäßig gering und der Harzanteil recht groß ist. Unter diesen Bedingungen können solche Farben unter Wasser hervorragende Anstriche abgeben“. Diese Auffassung steht in Einklang mit Versuchsergebnissen von Blom<sup>3)</sup>, der berichtet, daß „mit einem wasserfesten Kunstharzlack unter den verschiedensten Beanspruchungen gute Ergebnisse erzielt wurden. Die Anstriche sind von bemerkenswerter Härte, ohne spröde zu werden. Da die Schichtdicke gering ist, kommt dieser Anstrichstoff auch für Fachwerkkonstruktionen in Frage. Er muß aber bei gutem Wetter aufgetragen werden und braucht mehr als 8 Tage zur völligen Durchtrocknung“. Gerade diese Voraussetzungen — gutes Wetter beim Auftrag und ausreichende Zeit für gutes Durchtrocknen des Anstrichs — sind aber bei Anstricherneuerungsarbeiten stählerner Schleusen- und Wehrbauteile häufig nicht gegeben, und dies dürfte einer der Gründe sein, warum sich die Praxis in den letzten Jahren vielerorts von den Anstrichen auf Leinölbasis mehr und mehr abgewandt hat. Es erscheint aber doch angebracht, dieser Anstrichart bei den vom Fachausschuß für Anstrichtechnik in Aussicht genommenen umfangreichen Versuchen unter Berücksichtigung der Anregungen von Meier und Blom Beachtung zu schenken. (Schluß folgt.)

<sup>3)</sup> Bautechn. 1934, S. 577.

## Beitrag über die Stahlkonstruktionen der Wettbewerbsentwürfe um die Kongreßhalle in Hamburg.

Von Dr.-Ing. Alfred Junge, Hamburg.  
(Schluß aus Heft 4.)

Alle Rechte vorbehalten.

### 4. Entwurfsverfasser Architekt Hermann Distel.

Mitarbeiter: a) Architekt Hillmer, Hamburg; b) Architekt E. Koch; c) Reg.-Bauführer Walter Schlempp, Berlin (für den Aufmarsch); d) Siemens-Bauunion, Berlin (Konstruktion); e) Siemens-Schuckert-Werke, Hamburg (ein 1. Preis).

Hier mögen zunächst die Hauptleitgedanken der Entwurfsverfasser folgen:

Das neue Deutschland mit der ganz andersartigen Gliederung deutschen Volkstums braucht neue Arten der Vereinigung aller Volksgenossen. Die Einfügung des Einzelnen in das Ganze und der organische Aufbau des Führertums wirkt nirgends so sinnfällig und so erhebend wie im Aufmarsch der Massen, sei es in Freiluftäumen oder in eingeschlossenen Hallen.

Festern, wie das „Fest der Arbeit“, stellen Höhepunkte dar. Sie erfordern aber neue bauliche Großanlagen mit neuer Programmstellung und drängen zur Lösung der damit verbundenen neuen Aufgaben. Wie eine Lösung möglich ist, zeigen die Bilder 15 bis 21, die einen Ausschnitt aus der Großanlage geben, und zwar gerade den Angelpunkt des Ganzen: Eine einzige Halle zieht sich über die ganze Länge des Heiligen-Gelst-Feldes hin (Bild 15). Davor in gleicher Länge liegt der Aufmarschplatz. Die Halle stuft sich in zwei Terrassen von oben nach dem Platze hinab. In der Mitte ist die große Führerhalle mit dem Rednerpult im Zentrum. Auf den Stufen des Hochstraßensystems, die als langgezogene breite Galerien wirken, stehen Menschenmassen, Standarten und Ehrenzeichen und verbinden Hoch und Nieder (Bild 16).

Diese innige Kombination zwischen den großen Innenhallen und den äußeren Freiluftäumen durch die abgestufte Formung des Hallenkörpers ist wohl erstmalig auf der Welt. Sie kann als brauchbare Idee und als Anfang großer Zukunftsmöglichkeiten bewertet werden.

Die Hallenkonstruktion. Die Halle (Bild 17 bis 21) ist durch eine Decke ohne Zwischen-

stützen geschlossen, die durch Binder von 91 m Stützweite und 17 m Abstand getragen wird. Die Binder (Bild 21) sind Zweigelenrahmen aus Stahl in Fachwerkkonstruktion und stützen sich auf Betonfundamenten. Über jedem Binder ist ein über die ganze Hallenbreite durchlaufendes Oberlicht von 6 m Breite mit beiderseitiger senkrechter Verglasung angeordnet, das nach Innen durch eine waagerechte Staublicht-Glasdecke abgeschlossen wird. Als Dach der Oberlichter dient eine Plattenabdeckung, die sich auf den Obergurt des Binders stützt. Die Pfetten des Hallendaches liegen in etwa 4 m Abstand und werden aus Fachwerkträgern von 17 m Stützweite gebildet, die sich an die Gitterstäbe der Binder anschließen. Auf dem Obergurt der Pfetten liegen Walzträgersparren, die sowohl die senkrechte Verglasung der Oberlichter als auch die Plattenabdeckung der Dachhaut tragen. Eine zweite Reihe von Walzträgersparren ist an den Untergurt der Pfetten angeschlossen und dient einerseits als Auflager für die Sprossen der waagerechten Staublicht-Glasdecke und andererseits zur Befestigung der inneren Verkleidung des Hallendaches. In den Längswänden werden die Binder außen und innen verkleidet. Die durch diese Doppelwände entstehenden Zwischenräume sollen als Montagegang für Entlüftungs- und Heizrohre sowie für die Beleuchtungsanlage, Einschub der be-

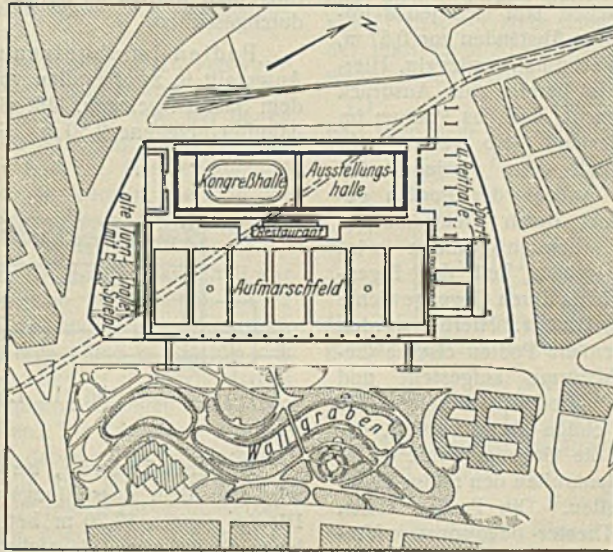


Bild 15. Entwurf Distel. Lageplan.

weglichen Wände usw. dienen. Im Zuge der Oberlichter erhalten die Längswände äußere und innere Verglasung, die vom Dach bis etwa 10 m über Gelände herabreicht. Den Fußboden der Messehalle trägt eine Eisenbetonkonstruktion, die als Pilzdecke mit einer Stützweite von 8,5 m ausgebildet ist. Die auf die Längswände wirkenden Windkräfte werden durch die Wandkonstruktion auf die Binder und von diesen auf die Fundamente übertragen.

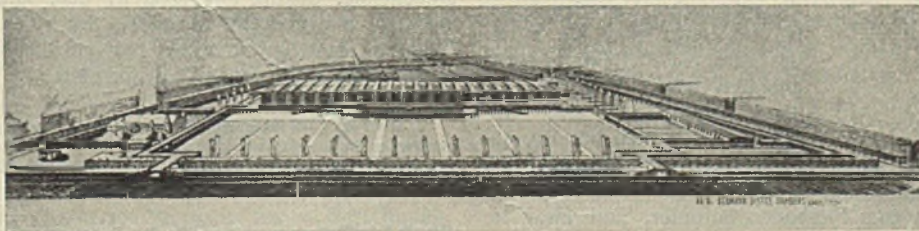


Bild 16. Entwurf Distel. Schaubild.

Konstruktion der Podien, Bühne und beweglichen Wände. Hier werden sechs Podien (Gassen) in Eisenbetonkonstruktion gefertigt. Jedes Podium hat eine Länge von 30 m und eine Breite



