

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule  
Fernsprecher: C1 Steinplatz 0011  
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
zur Zeitschrift

## DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte  
Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

8. Jahrgang

BERLIN, 29. März 1935

Heft 7

Alle Rechte vorbehalten.

### Einfluß der Querdehnung auf die Stabilität von Stahlplatten.

Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher, Hannover.

Die Beulungsspannungen von Rechteckplatten (Größe  $a \cdot b$ , Dicke  $t$ ), die in der Längsrichtung mit Druckspannungen konstanter Größe belastet sind, können für alle Arten der Auflagerung in der Form  $\sigma_K = k \sigma_e$  dargestellt werden, analog  $\tau_K = k \sigma_e$  für Schubbeanspruchung usw. Darin ist  $k$  ein von der Randstützung, Belastungsfall und dem Seitenverhältnis der Platte  $\alpha = a/b$  abhängiger Zahlenwert.  $\sigma_e$  ist die Eulerspannung eines Streifens von der Knicklänge  $b$  nach der Querrichtung, nämlich

$$(1) \quad \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 = A \left(\frac{t}{b}\right)^2.$$

Diese Eulerspannung hängt von der Querzahl  $\mu$  ab. Für Baustahl ergeben sich mit  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  die folgenden Werte:

Querzahl $\mu$	0,25	0,3	0,5
$A = (b/t)^2 \sigma_e$	1842	1898	2303 in $\text{t/cm}^2$
Verhältnis	0,971	1	1,213.

Der Einfluß der Querzahl  $\mu$  ist also nicht unbeträchtlich. Es ist allerdings schwer, über die tatsächliche Größe von  $\sigma_e$  eine ganz bestimmte Aussage zu machen, da  $E$  und  $\mu$  in gewissen Grenzen schwanken und sich für Baustahl auch etwas mit der Höhe der Spannung verändern. Die Mittelwerte  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  und  $\mu = 0,3$  dürften in der Regel für Spannungen unter der Proportionalitätsgrenze am besten zutreffen.

Der Wert  $\mu = 0,3$  wird in neuerer Zeit für Baustahl fast allgemein bei den Rechnungen benutzt, daneben ist aber auch, vor allem in älteren Arbeiten, oft  $\mu = 0,25$  zu finden.  $\mu = 0,5$  entspricht dem Grenzwert der Formänderung ohne Raumänderung, z. B. im plastischen Bereich von dehnbarem Baustahl.

Da der Einfluß der Querzahl  $\mu$  auf die Beulung von Platten meines Wissens noch nicht näher betrachtet wurde, dürften nachstehende Bemerkungen interessieren.

In der bekannten Differentialgleichung für die Beulung von ebenen Platten<sup>1)</sup> kommt die Querzahl  $\mu$  außer in der Plattensteifigkeit  $D = Et^3/12(1-\mu^2)$  bzw. in  $\sigma_e$  nicht vor, und zwar auch nicht bei Belastung durch Schubspannungen oder gleichzeitiger Wirkung von Schub- und Normalspannungen. Aus diesem Grunde sind die Zahlen  $k$  von  $\mu$  unabhängig, solange die Randbedingungen nicht von  $\mu$  abhängen.  $k$  hängt somit für alle kritischen Spannungszustände nur von  $\alpha = a/b$  ab, nicht aber von  $\mu$ , wenn die Rechteckplatte an allen vier Rändern gelenkig gelagert oder eingespannt ist.

Für das Beispiel des unendlich langen Plattenstreifens ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) sind die Zahlen  $k$  und die zugehörigen kritischen Spannungen  $\sigma_K$  unter gleichmäßigem Druck (in  $\text{t/cm}^2$ ) bzw. unter reinem Schub für einige Werte der Querzahl  $\mu$  in der nebenstehenden Tabelle 2 zusammengestellt.

Solange die Durchbiegung  $w$  überall längs eines Randes Null ist, verschwindet die mit  $\mu$  behaftete Ableitung von  $w$  längs des Randes. Folglich ist die Knickbedingung wie bei obigen Beispielen (für gelenkig gelagerte und starr eingespannte Ränder) von  $\mu$  unabhängig. Wenn dagegen ein Rand ganz oder teilweise frei ist, ist dem nicht mehr so. Dann ist  $\mu$  sowohl in den Bedingungen für das Verschwinden des Einspannungsmomentes wie der Querkraft enthalten, und damit auch in der transzendenten Knickbedingung. Die Wurzeln der Knickbedingung und folglich auch die Koeffizienten  $k$  sind dann mit der Querzahl  $\mu$  veränderlich.

Ein Beispiel dafür ist die Rechteckplatte unter gleichmäßigem Druck mit einem freien Längsrand und zwei gelenkig gestützten Querrändern.

<sup>1)</sup> F. Schleicher, Stabilitätsprobleme vollwandiger Stahltragwerke. Bauling. 15, 1934, S. 505.

Tabelle 2.

Plattenstreifen $\alpha = \infty$		Beide Längsränder gelenkig gelagert			Beide Längsränder eingespannt			
		$\mu$	0,25	0,3	0,5	0,25	0,3	0,5
Gleichmäßiger Druck	$k$		4,00	4,00	4,00	7,00	7,00	7,00
	$\left(\frac{b}{t}\right)^2 \sigma_K$		7368	7592	9212	12894	13286	16121
Reiner Schub	$k$		5,36	5,36	5,36	8,99	8,99	8,99
	$\left(\frac{b}{t}\right)^2 \tau_K$		9873	10173	12344	16560	17063	20704

Den Fall, daß die zweite Längsseite eingespannt ist, hat Reißner<sup>2)</sup> untersucht. Reißner setzt für die Auswertung der transzendenten Beulbedingung, abgesehen von einer kleinen Abrundung,  $\mu = 0,3$  ein. Timoschenko<sup>3)</sup> untersuchte die Fälle, daß die dem freien Rand parallele vierte Seite gelenkig gestützt oder starr eingespannt ist.

Um den Einfluß der Querzahl  $\mu$  auf die Knickspannungen auch in diesen Fällen zu untersuchen, wurden die Wurzeln der beiden transzendenten Knickbedingungen von Timoschenko<sup>4)</sup> für einige Seitenverhältnisse  $\alpha$  neu berechnet<sup>5)</sup>. Die betreffenden Werte  $k$  und die zugehörigen Knickspannungen  $\sigma_K$  sind in nachstehenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle 3 und 4.

$\mu$	0,25		0,3		0,5	
$\alpha$	$k$	$\left(\frac{b}{t}\right)^2 \sigma_K$	$k$	$\left(\frac{b}{t}\right)^2 \sigma_K$	$k$	$\left(\frac{b}{t}\right)^2 \sigma_K$
Ein Längsrand frei aufliegend, der zweite ganz frei.						
1	1,434	2641	1,402	2661	1,213	2794
2	0,698	1286	0,668	1268	0,529	1218
5	0,494	910	0,464	881	0,340	783
$\infty$	0,456	840	0,426	809	0,304	701
Ein Längsrand starr eingespannt, der zweite ganz frei.						
1	1,698	3128	1,651	3134	1,404	3233
2	1,386	2553	1,337	2538	1,112	2561
5	1,330	2450	1,281	2431	1,056	2432
$\infty$	1,329	2448	1,280	2429	1,054	2427
	—	$\text{t/cm}^2$	—	$\text{t/cm}^2$	—	$\text{t/cm}^2$

Die zu den kleinsten Beulspannungen gehörigen Beulenlängen ergaben sich beim Plattenstreifen  $\alpha = \infty$  mit eingespanntem Längsrand für alle drei Werte  $\mu$  fast genau gleich groß zu  $\lambda = \alpha/m = \text{rd. } 1,63$ .

Timoschenko<sup>4)</sup> gibt für die gleichen Seitenverhältnisse  $\alpha$  die folgenden Werte  $k$ :

	$\alpha = 1$	2	5	$\infty$
gelenkig gestützt:	$k = 1,440$	0,698	0,506	0,456 bzw.
eingespannt:	$k = 1,70$	1,38	1,33	1,33.

<sup>2)</sup> H. Reißner, Über die Knickbedingung ebener Bleche. Ztrbl. d. Bauv. 29, 1909, S. 93.

<sup>3)</sup> S. Timoschenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. Math. u. Physik 58, 1910, S. 337.

<sup>4)</sup> S. Timoschenko, Stabilitätsprobleme der Elastizität. Hdb. d. phys. u. techn. Mechanik., Bd. IV, 1. Hälfte. Leipzig 1931. S. 131 u. f.

<sup>5)</sup> Die Wurzeln sind von meinem Assistenten Herrn Dipl.-Ing. Nölke ermittelt.

Man erkennt daraus, daß die Knickspannungen Timoschenkos für diese beiden Belastungsfälle mit der Querszahl  $\mu = 0,25$  berechnet sind. In späteren Arbeiten rechnet Timoschenko allerdings teilweise auch mit  $\mu = 0,3$ .

Mit den gleichen Belastungsfällen beschäftigt sich auch ein vor kurzem erschienener Aufsatz von Hartmann<sup>6)</sup>. Darin wird eine Querszahl  $\mu = 0,3$  zugrunde gelegt. Gl. (1) von Hartmann für gelenkig gelagerten Rand ergibt Werte, die mit denen obiger Tabelle fast vollkommen übereinstimmen, nämlich

$$\begin{array}{cccc} \alpha = & 1 & 2 & 5 & \infty \\ k = & 1,406 & 0,670 & 0,463 & 0,425. \end{array}$$

Für eingespannten Rand gibt Hartmann den Kleinstwert  $k = 1,280$ .

Gl. (1) von Hartmann lautet in unseren Bezeichnungen

$$(2) \quad k = 0,425 + \frac{0,981}{\alpha^2}, \quad (\mu = 0,3).$$

Sie kann nach obigem Vergleich ohne weiteres für alle Seitenverhältnisse  $\alpha \geq 1$  Verwendung finden. Diese angenäherte Gleichung geht wie eine ähnliche von Bleich<sup>7)</sup> (ebenfalls für  $\mu = 0,3$ ) auf die allgemein gültige Gleichung von Timoschenko<sup>8)</sup> zurück, welche zugleich die Abhängigkeit von der Querszahl  $\mu$  berücksichtigt. Die betreffende, in guter Annäherung gültige Gleichung von Timoschenko lautet in unseren Bezeichnungen

$$(3) \quad k = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{6}{\pi^2} (1 - \mu).$$

Die Unterschiede zwischen den Knickspannungen nach Timoschenko und denen nach Hartmann sind also lediglich durch die verschiedenen Annahmen über die Querdehnung  $\mu$  begründet. Hartmann hat dies übersehen und deshalb den irrtümlichen Schluß gezogen, daß Timoschenkos Auswertung der transzendenten Knickbedingungen fehlerhaft sei. Das ist jedoch, wie aus obigem hervorgeht, nicht der Fall.

Hinsichtlich des unendlich langen Plattenstreifens ist noch eine Bemerkung notwendig.

Die obenerwähnte genaue transzendente Knickbedingung für Streifen mit gelenkig gestütztem Rand versagt in dem Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$ . Der Grenzwert der Knickspannung kann jedoch aus den Untersuchungen von Timoschenko<sup>9)</sup> entnommen werden.

Der Wert  $k$  für den unendlich langen Plattenstreifen nach Timoschenko stimmt mit dem überein, den man durch Grenzübergang aus der Arbeit von Wagner erhält<sup>10)</sup>.

Man sieht leicht ein, daß das von Wagner untersuchte „Wegdrehen“ eines Druckstabes mit dem hier betrachteten Fall der Instabilität eines Plattenstreifens mit einem freien und einem gelenkig gestützten Längsrand übereinstimmt.

Ist ein Rand auf die ganze Länge gelenkig gestützt, so erfolgt die Drehung beim Ausbeulen nicht um den Schubmittelpunkt, sondern um die gestützte Achse. (Schubmittelpunkt und Drehachse fallen genau zusammen z. B. beim symmetrischen Kreuzquerschnitt oder beim Rechteckstreifen, der in der Schwerachse gelagert ist.)

<sup>6)</sup> F. Hartmann, Die Berechnung von T-Gurten auf Ausbeulung. Stahlbau 7, 1934, S. 105.

<sup>7)</sup> F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin 1924, S. 230.

<sup>8)</sup> S. Timoschenko, Sur la stabilité des systèmes élastiques. Extrait des Annales des Ponts et Chaussées. Paris 1913, S. 159.

<sup>9)</sup> S. Timoschenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z. Math. u. Physik 58, 1910, S. 349.

<sup>10)</sup> H. Wagner, Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift: Fünfundzwanzig Jahre Technische Hochschule Danzig. Danzig 1929, S. 329.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des unendlich langen Plattenstreifens. In diesem Grenzfall verschwinden die zusätzlichen Normalspannungen, und es wird Gl. (7) von Wagner

$$F i_{SP}^2 = \int r^2 dF$$

gleich dem polaren Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich der Drehachse. Die Beulenlänge wird unendlich groß, und die kritische Druckspannung folgt aus Gl. (9) von Wagner zu ( $G J_T =$  Torsionssteifigkeit)

$$\sigma_k = \frac{G J_T}{F i_{SP}^2}.$$

Insbesondere für den schmalen Rechteckquerschnitt  $b \gg t$  gilt angenähert  $J_T = b t^3/3$ , und wenn der Stab in der Mitte der einen Quersseite  $b$  gelagert ist

$$\int r^2 dF = \frac{t b^3}{3} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \right] \approx \frac{b^2}{t^2} J_T.$$

Für die Beulspannung ergibt sich daraus mit genügender Genauigkeit der einfache Ausdruck

$$(4) \quad \sigma_k = \left( \frac{t}{b} \right)^2 G.$$

Beim Vergleich mit der üblichen Form der Gleichung für die Beulspannung  $\sigma_k = k \sigma_c$  erhält man mit  $G = E/2(1 + \mu)$  allgemein den Wert

$$(5) \quad k = \frac{6(1 - \mu)}{\pi^2},$$

d. i. genau der Wert nach Gl. (3), wenn  $\alpha \rightarrow \infty$  geht. Die betreffenden Zahlen  $k$  sind für einige Werte  $\mu$  in Tabelle 3 eingeschrieben.

Es würde hier zu weit führen, aus der Arbeit von Wagner noch weitere Vergleiche zu entnehmen. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß die Knickspannungen bei endlicher Plattenlänge erhöht werden, wenn die freie Querschnittswölbung an den Enden verhindert wird.

Zusammenfassend kann man feststellen: In allen Fällen, in denen die Randbedingungen nicht von  $\mu$  abhängen, unterscheiden sich die Knickspannungen für  $\mu = 0,25$  bzw.  $0,3$  nur um rd. 3%. Ist dagegen eine Seite der Rechteckplatte frei, so ergeben sich z. B. nach Tabelle 3 größere Unterschiede in den Zahlen  $k$ . Da sich jedoch die Einflüsse von  $\mu$  in  $k$  und  $\sigma_c$  teilweise aufheben, betragen die Unterschiede in den Knickspannungen in Tabelle 3 nur bis zu 4%, in Tabelle 4 sogar weniger als 0,5%. Größer werden die Unterschiede, wenn man auch die Werte  $\mu = 0,5$  zum Vergleich heranzieht.

Eine allgemein gültige Feststellung läßt sich nicht treffen, da der Einfluß der Querszahl in erster Linie vom Belastungsfall abhängt.

In dem Schrifttum über die Stabilität von Rechteckplatten werden die verschiedensten Werte  $\mu$  und  $E$  zugrunde gelegt, ohne daß diese Grundlagen immer ausdrücklich angegeben sind. So findet man z. B. für die Querszahl  $\mu = 0,25, 0,3, 0,316$  und für den Elastizitätsmodul die Werte  $E = 2000, 2100, 2150$  und  $2200$  t/cm<sup>2</sup>.

Die Übersicht ist weiter dadurch erschwert, daß dieselben Autoren oft mit verschiedenen Annahmen rechnen. Bei dieser Sachlage ist bei Benutzung der Literatur zur Vorsicht zu raten. Die vorstehenden Bemerkungen sollen zur Klärung der unübersichtlich gewordenen Verhältnisse dienen.

Für die praktische Stabilitätsuntersuchung von Stahlbauwerken sei der Einheitlichkeit wegen empfohlen,  $\mu = 0,3$  und  $E = 2100$  t/cm<sup>2</sup> zu benutzen, und davon nur abzuweichen, wenn ganz besondere Verhältnisse dies fordern. Der Wert  $\mu = 0,3$  für die Querszahl ist vorläufig auch für die Beulung im plastischen Bereich zu empfehlen. Eine genauere Untersuchung des Einflusses der Querdehnung auf die Beulung bei Spannungen über der Elastizitätsgrenze fehlt noch.

## Belastungs-Dehnungs-Messungen an I-Trägern mit und ohne Aussteifung.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. Hans Bühler und Dr.-Ing. Herbert Buchholtz, Dortmund.

(Mittellung aus dem Forschungsinstitut der Vereinigte Stahlwerke A.-G., Dortmund.)

Die für die Berechnung der Spannungen in Biegeträgern übliche Formel setzt voraus, daß sich die Kräfte über den Flansch eines I-Trägers in seiner Querschnittsebene gleichmäßig verteilen und daß insbesondere durch Einbau von Aussteifungen unter den Lastangriffspunkten keine Störung des Kräfteverlaufes eintritt. Nun ist durch Dehnungsmessungen beanspruchter Balken mit verschiedenartigen Querschnitten bereits der Nachweis geliefert, daß die für die üblichen Berechnungsformeln angenommene einachsige Spannungsverteilung in größeren Querschnitten auch im elastischen Bereich nicht mehr vorliegt. Für die übliche Querschnittsberechnung nach statischen Gesichtspunkten kann diese Abweichung von der einachsigen Spannungsverteilung unbedenklich vernachlässigt werden, da einerseits die statische Tragfähigkeit der Baustähle St 37 und St 52 im mehrachsigen Spannungszustand bei der hier vorliegenden Be-

hinderung der Querszusammenziehung erhöht ist, andererseits auch Spannungsspitzen, die z. B. durch Behinderung der Querszusammenziehung entstehen, bei vorwiegend ruhender Beanspruchung durch örtliches Fließen ohne Schädigung abgebaut werden. Bei dynamisch beanspruchten Teilen spielt dagegen die Kenntnis des Spannungsverlaufes, insbesondere die der örtlichen Spannungsspitzen, in den höchstbeanspruchten Zugzonen eine wichtige Rolle, da der Abbau bei wechselnden Beanspruchungen nicht oder nur in sehr geringem Umfang möglich ist. Diese Spannungsspitzen stellen daher bei entsprechend großer Schwingungswerte und Lastwechselzahl früher oder später den Ausgangspunkt für den Dauerbruch dar. Nun verlangt allerdings eine genaue Ermittlung der Spannungsspitzen die Verwendung von Dehnungsmessern mit sehr kleiner Meßlänge; schon bei nur 20 mm Meßlänge gelingt es z. B. nicht mehr, die durch den Auslauf

einer Schweißnaht — den „Einbrandgraben“ — bedingte örtliche Spannungsspitze genau zu erfassen. Die im vorliegenden Bericht mitgeteilten Dehnungsmessungen, die bei einer Meßlänge von 20 mm vorgenommen wurden, geben daher nur ein Übersichtsbild über den mehr makroskopischen Kräftefluß in verschiedenartig ausgebildeten Walz- und Schweißträgern.

Veranlaßt wurden die Untersuchungen durch Spannungsmessungen an einem auf Biegung beanspruchten 250 mm hohen geschweißten I-Blechträger aus Union-Baustahl St 52; diesem war zu entnehmen, daß in der Umgebung der eingeschweißten Aussteifungen im Flansch eine Behinderung der Quersammenziehung und infolgedessen zusätzliche Querspannungen entstehen, die, wie zunächst angenommen wurde, das Verhalten des Trägers bei Schwingungsbeanspruchungen ungünstig beeinflussen konnten. Die rechnerisch ermittelten Längsspannungen erfuhren an der Unterseite des Flansches eine Erhöhung von etwa 30%, während an der Oberseite des Flansches an dieser Stelle ein Spannungsabfall beobachtet wurde. Auf Grund der Beobachtungen mußte angenommen werden, daß die Abweichungen der Spannungsverteilung von der Rechnung nicht eine Folge des Schweißvorganges, sondern eine Wirkung der Versteifung unter den Lastangriffspunkten, also ein Einfluß der Form sei. Ziel der vorliegenden Untersuchung war in erster Linie die Nachprüfung dieser Annahme. Zu diesem Zweck wurde das Verhalten von Walzträgern einmal mit nur eingepaßter, zum anderen mit vollständig eingeschweißter Aussteifung sowie das Verhalten des geschweißten Nasenträgers der Dortmunder Union Brückenbau-A.-G., Dortmund, im Vergleich zu normalen, aus glattem Universalstahl geschweißten Blechträgern bei statischer Biegebeanspruchung geprüft.

An der Unterseite des Flansches wurden in der Längs- und Querrichtung unterhalb des Steges sowie etwa 20 mm vom Rand entfernt die Verformungen gemessen, aus denen dann die Spannungen errechnet wurden. In der Längsrichtung wurden außerdem noch zwischen Mitte und Rand in einer Ebene, die als „Mittelfaser“ bezeichnet ist, Messungen ausgeführt. Soweit möglich, wurde auch an der Oberseite des Flansches in der Längsrichtung an den entsprechenden Stellen gemessen. Gemessen wurde nur an der Zugseite des Trägers. Als Meßgerät diente der bekannte Huggenberger-Dehnungsmesser; er gestattet Längenänderungen bei einer Meßlänge von 20 mm mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,00008$  mm zu messen<sup>1)</sup>.

Da bei Belastung versteifter Träger in der Umgebung der Versteifungsrippe die lineare Verformung, wie sie die bekannte Biegegleichung voraussetzt, behindert ist, so entsteht hier an der Trägeroberfläche ein ebener Spannungszustand. Durch Bestimmung der Dehnungen in der Längs- und Querrichtung in irgendeinem Punkt lassen sich die Spannungen wie folgt berechnen:

$$\sigma_L = \frac{E}{m - 1/m} (\epsilon_q + m \epsilon_L);$$

$$\sigma_q = \frac{E}{m - 1/m} (\epsilon_L + m \epsilon_q).$$

In diesen Gleichungen ist  $\epsilon_L$  die Dehnung in der Längsrichtung,  $\epsilon_q$  die in der Querrichtung;  $\sigma_L$  ist die Spannung in der Längs-,  $\sigma_q$  die in der Querrichtung;  $E$  ist der Elastizitätsmodul und  $m$  die Poissonsche Zahl, die mit  $10/3$  angenommen wurde.

Bei der vorliegenden Meß- und Ablesegenauigkeit ergibt sich für die gemessenen Spannungen eine Genauigkeit von ungefähr  $\pm 0,2$  kg/mm<sup>2</sup>.

Bild 1 gibt Form und Abmessungen des untersuchten unversteiften Breitflanschträgers I 22 aus St 37 sowie die Lage der Meßstellen wieder. Der Träger, dessen Widerstandsmoment  $W_x$  732 cm<sup>3</sup> betrug, wurde als Biegeträger auf zwei Stützen mit zwei gleichmäßig verteilten Einzellasten

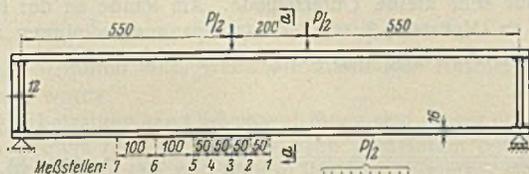


Bild 1. Belastungsschema und Meßstellen des gewalzten Breitflanschträgers.

bei Gesamtbelastungen von 15 000, 30 000 und 45 000 kg geprüft. In Bild 2 ist der Verlauf der aus den gemessenen Formänderungen sich ergebenden Spannungen für die Meßstellen 1 bis 7 bei einer Belastung von 45 000 kg und die aus dem jeweiligen Biege- und dem Widerstandsmoment des Trägerprofils ermittelten — rechnerischen — Spannungen wiedergegeben. In der Mitte der Flanschunterseite, also unter dem Steg (Bild 2a) liegen die Spannungen in der Umgebung der Belastungsstellen fast durch-

weg über den rechnerischen Werten; bei den Meßstellen 1 bis 3 beträgt bei allen Belastungsstufen die Erhöhung etwa 20%, sie wird dann — nach dem Ende des Trägers zu — geringer, in Meßstelle 7 stimmen festgestellte und berechnete Spannung praktisch überein. Die gemessenen Quer-

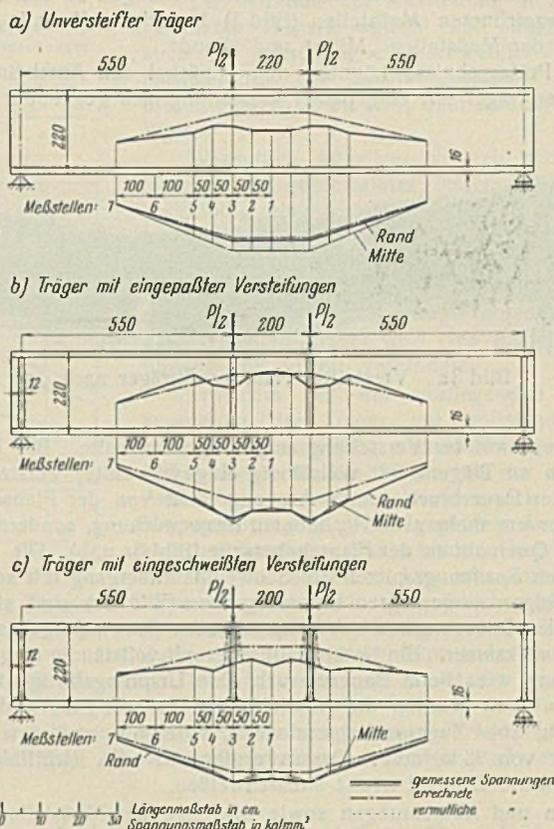


Bild 2. Spannungsverteilung in Breitflanschträgern mit und ohne Aussteifung bei einer Gesamtbelastung von 45 000 kg.

spannungen waren äußerst gering. Am Rande der Flanschunterseite deckte sich der Verlauf der gemessenen praktisch mit dem der rechnerischen Spannungen. Auch hier waren die Querspannungen äußerst gering.

Am Rande der Oberseite des Flansches liegen die gemessenen Spannungen fast durchweg unter den rechnerischen. Die Längsspannungen steigen vom Meßpunkt 7 bis etwa zum Lastangriffspunkt — Meßstelle 3 — stetig an und werden dann nach Meßpunkt 1 unwesentlich kleiner. Die gemessenen Spannungen liegen an den Meßstellen 1 bis 3 etwa 35% unter den rechnerischen Werten.

In dem gleichen Breitflanschträger wurden nun die in Bild 2b eingezeichneten Rippen eingesetzt, und zwar einmal nur eingepaßt, zum anderen eingepaßt und vollständig eingeschweißt. Die eingepaßten Rippen wurden lediglich am Druckgurt und an der oberen Hälfte des Steges angeheftet, am Zuggurt wurde nicht geschweißt.

Um einen ungefähren Anhalt über die Größe der Spannung am Rande der Flanschoberseite in Meßpunkt 3 zu erhalten, wurde an der Seitenkante des unteren Flansches kurz neben dem Rippenansatz die Dehnung gemessen und hieraus die Spannung unter Annahme eines einachsigen Spannungszustandes errechnet.

Bild 2b läßt erkennen, daß eine eingepaßte Aussteifungsrippe grundsätzlich die gleiche Wirkung hat wie eine vollständig eingeschweißte, worüber eingangs kurz berichtet wurde. In der Mitte und am Rande der Unterseite des Flansches entstehen an der Meßstelle 3 — also an der Stelle der eingesetzten Rippen — ausgeprägte Spannungsspitzen, deren Werte etwa 35% über den rechnerischen liegen.

Am Rande der Flanschoberseite ergab sich an der Rippe ein Spannungsminimum; die gemessenen Spannungen lagen etwa 25% unter den rechnerischen. In der Umgebung der Meßstelle 5 wurde ein weiteres Spannungsmaximum mit einer Erhöhung um etwa 20% festgestellt. Die den Kräftefluß beeinträchtigende Wirkung der Aussteifungsbleche ist also noch mindestens 100 mm außerhalb der Lastpunkte zu beobachten.

Die Ergebnisse für den Träger mit vollständig eingeschweißter Aussteifung sind in Bild 2c wiedergegeben. Die Kurven zeigen bei diesem Träger grundsätzlich den gleichen Verlauf wie bei dem mit eingepaßter Versteifung, unterscheiden sich jedoch von diesem durch ihre Höhe. Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt, daß der Kräftefluß im Träger mit vollständig eingeschweißter Versteifung sich mehr dem rechnerischen nähert als im Träger mit nur eingepaßter Rippe. An der Flanschunterseite

<sup>1)</sup> Weitere Einzelheiten vgl. H. Bühler und H. Buchholtz, Mitt. a. d. Forsch.-Inst. d. Ver. Stahlwerke A.-G., Dortmund, 4, 1934, S. 189 bis 196.

liegen in der Mitte und am Rande die Spannungen am Lastangriffspunkt beim Träger mit eingeschweißter Rippe etwa 20%, beim Träger mit eingepaßter Rippe 35% über dem rechnerischen Wert. An der Flanschobersseite bleiben bei dem Träger mit eingeschweißter Rippe die Werte durchweg unter den rechnerischen. Die Messungen an den mit „Mittelfaser“ bezeichneten Meßstellen (Bild 1) bestätigen für alle Träger das Ergebnis der Meßstellen „Mitte“ und „Rand“.

Die Prüfergebnisse könnten nun zunächst den Anschein erwecken, als ob der Träger mit eingepaßter Versteifung sich gegenüber dem Träger

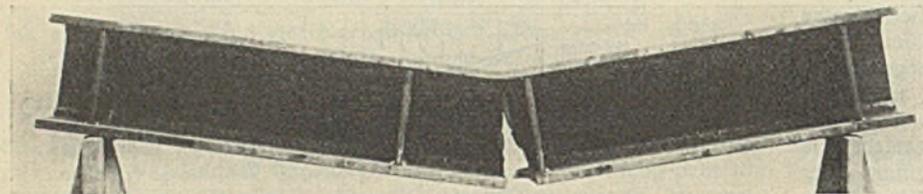


Bild 3a. Versteifter Nasenprofilträger nach dem Dauerversuch.

mit eingeschweißter Versteifung ungünstiger verhalte. Bei Dauerbiegeversuchen an Trägern mit vollständig eingeschweißter Versteifung nahm jedoch der Dauerbruch seinen Ausgang nicht von der Flanschunterseite mit seiner um mehr als 35% höheren Beanspruchung, sondern vom Übergang der Quernaht an der Flanschobersseite (Bild 3a u. b). Die örtlich engbegrenzten Spannungsspitzen am Schweißnahtübergang mit seinem mehr oder weniger ausgeprägten Einbrandgraben (Bild 2c) sind also für den Eintritt des Dauerbruches bei entsprechender Schwingungsbeanspruchung sehr viel wirksamer. Ein Nasenprofilträger mit vollständig eingeschweißter Aussteifung wies beim Dauerversuch eine Ursprungsfestigkeit von etwa 18 kg/mm<sup>2</sup> auf; wurden die Aussteifungen nur am Steg und am Druckgurt, nicht aber Zuggurt festgeschweißt, so ergab sich<sup>2)</sup> eine Ursprungsfestigkeit von 23 kg/mm<sup>2</sup>. Daraus ergibt sich die Richtlinie, die Aussteifungen am Zuggurt nicht anzuschweißen.

Form und Abmessungen sowie die Lage der Meßstellen des schon eingangs erwähnten geschweißten Blechträgers aus Union-Baustahl St 52,

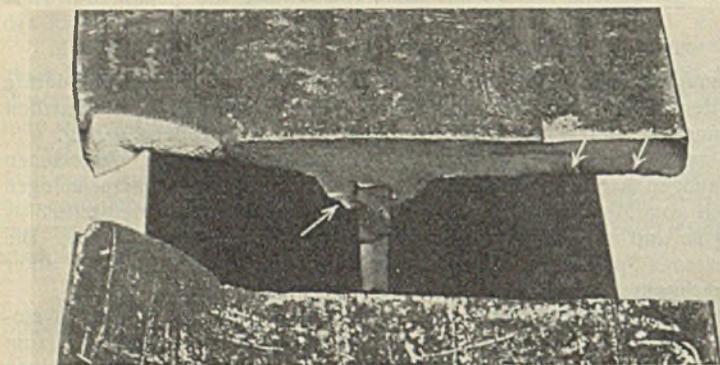


Bild 3b. Bruchbeginn von der Quernaht.

dessen Widerstandsmoment  $W_x$  569,4 cm<sup>3</sup> betrug, sind in Bild 4 wiedergegeben. Die Aussteifungsbleche waren vollständig eingeschweißt. Die Messungen wurden bei den Laststufen 8000, 17000, 25000 und 35000 kg ausgeführt.

Bild 5 gibt ein zusammenfassendes Bild der am geschweißten Blechträger festgestellten Spannungen bei einer Belastung von 35000 kg. In der oberen Hälfte des Bildes sind auf der rechten Seite die Längsspannungen an der Ober- und Unterseite des Flansches eingetragen. Die linke Seite gibt einen Einblick in den Verlauf der Spannungen in der Querrichtung am Rande des Flansches, während die untere Hälfte einen Einblick in den Verlauf der Spannungen in der Querrichtung an der Unterseite des Flansches gibt. Das Bild zeigt deutlich die Wirkung der Versteifung auf die bei der Belastung entstehenden Längsspannungen, eine Herabsetzung an der Oberseite und ein ausgeprägtes Maximum an der Unterseite des Zuggurtes. Die Spannungen sind naturgemäß an der Unterseite größer als an der Oberseite. An der Unterseite sind die Spannungen am Rande größer als in der Mitte.

Die Messungen an der Seitenkante des oberen Flansches kurz unter dem Rippenansatz sind in Meßpunkt 3 eingetragen und bestätigten, daß das Spannungsminimum am Rande der Flanschobersseite am Rippenansatz — Meßstelle 3 — liegt. Die für die höchste Belastung errechnete

<sup>2)</sup> E. H. Schulz und H. Buchholtz, St. u. E. 53 (1933), S. 545 bis 553.

Spannung zeigt, daß der versuchsmäßig ermittelte Wert unter der Versteifung ungefähr 60% unter den rechnerischen Spannungswerten liegt.

Die durch die Versteifung hervorgerufenen Spannungen in der Querrichtung sind auf der Unterseite unter der Rippe am größten. Die Entlastung der Oberseite des Flansches durch die Versteifungsrippe äußert sich hier durch eine Umkehr der zu erwartenden Zugspannungen in Druckspannungen, die naturgemäß unter der Versteifung ihren Höchstwert

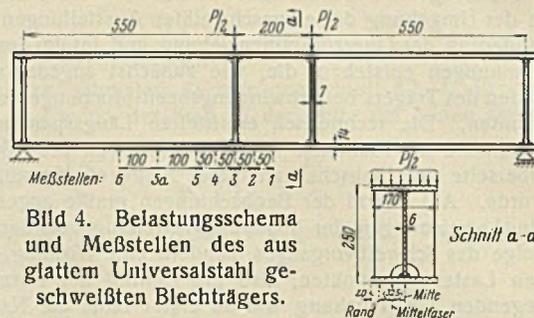


Bild 4. Belastungsschema und Meßstellen des aus glattem Universalstahl geschweißten Blechträgers.

erreichen. Unter dem Stehblech treten an der Flanschunterseite in der Querrichtung Druckspannungen auf, am Rande werden Zugspannungen beobachtet. In gewisser Entfernung von der Versteifungsrippe verschwinden die Querspannungen unter dem Steg, der ebene Spannungszustand geht hier in den vornehmlich einachsigen über.

Auch in dem aus glattem Universalstahl geschweißten Blechträger stimmen also die rechnerisch ermittelten Spannungen nicht mit den tatsächlich vorhandenen überein. Die Wirkung der Aussteifung ist praktisch gleich der in Walzträgern.

Abmessungen und Meßstellen des geschweißten Nasenprofilträgers aus Union-Baustahl St 52 mit vollständig eingeschweißten Aussteifungsrippen, dessen Widerstandsmoment  $W_x$  623 cm<sup>3</sup> betrug, zeigt Bild 6. Die für den Rand der Flanschunterseite errechneten und gemessenen Spannungen bei einer Gesamtbelastung von 60 000, 40 000 und 20 000 kg

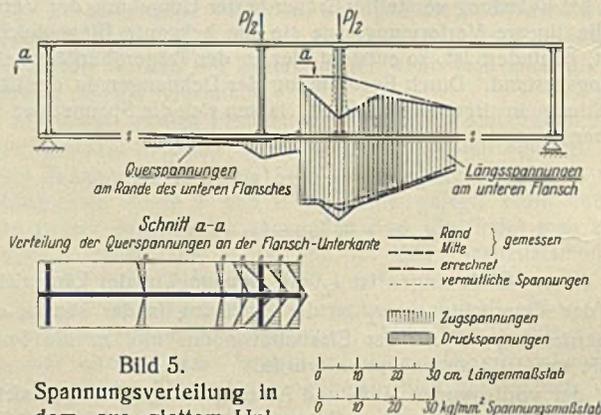


Bild 5. Spannungsverteilung in dem aus glattem Universalstahl geschweißten Blechträger bei 35 000 kg Gesamtbelastung.

gibt Bild 7 wieder. Zwischen den gemessenen und errechneten Spannungen bestehen nur sehr kleine Unterschiede. Am Rande an der Flanschobersseite tritt an Meßstelle 3 wieder ein Spannungsminimum auf (Bild 8); bei der Höchstbelastung liegt der gemessene Wert hier etwa 50% unter

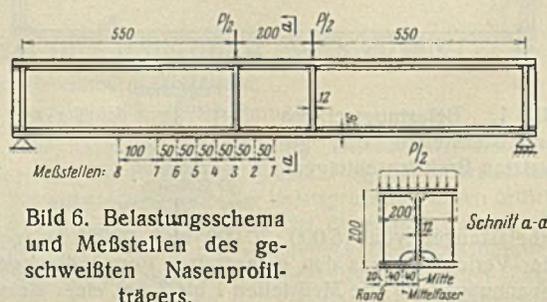


Bild 6. Belastungsschema und Meßstellen des geschweißten Nasenprofilträgers.

dem errechneten. Durch die Aussteifung entsteht ferner auch hier an der Flanschobersseite in der Nähe des Meßpunktes 5 eine Spannungsspitze, ohne daß aber die gemessene Spannung die rechnerische erreicht. Im Nasenprofilträger wirkt sich also die Versteifung nicht so ungünstig aus wie bei den übrigen untersuchten Trägern.

**Zusammenfassung.**

Dehnungsmessungen an einem gewalzten Breitflanschträger unter Belastung auf zwei Stützen ohne Aussteifung ergaben an der Unterseite des Flansches unter dem Steg um etwa 20% höhere Spannungen, als

eine ausgeprägte Spannungsspitze, an der Flanschoberseite ein Spannungsminimum auf. Außerhalb der Versteifung trat an der Flanschoberseite eine Spannungsspitze auf, deren Höchstwert unter gewissen Umständen den rechnerischen Wert übertraf.

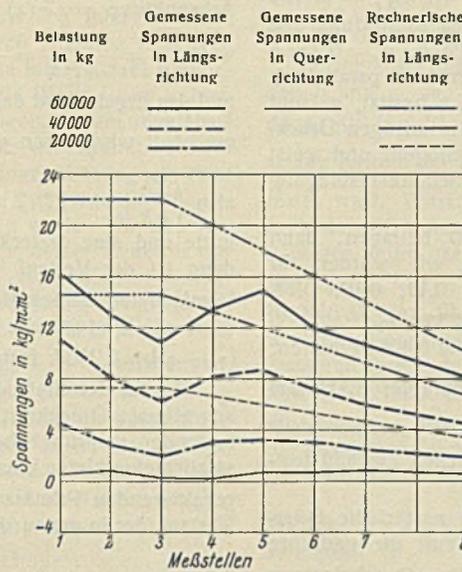
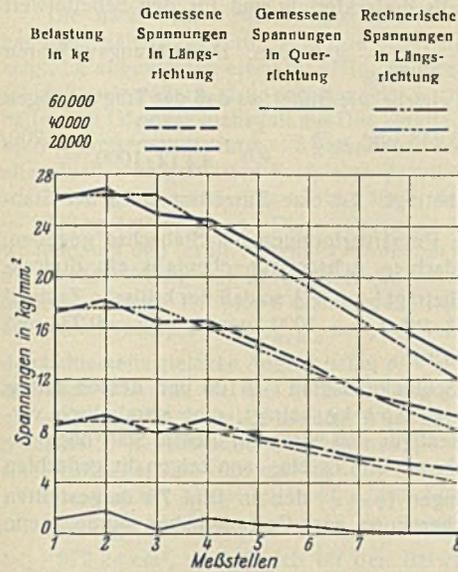


Bild 7. Spannungen am Rande der Flanschunterseite des geschweißten Nasenprofilträgers.

Bild 8. Spannungen am Rande der Flanschoberseite des geschweißten Nasenprofilträgers.

der Rechnung zu entnehmen ist. An der Oberseite des Flansches lagen die Meßwerte unter den errechneten Spannungen.

Der ausgesteifte Träger wies in der Umgebung der Aussteifungen eine Störung des Kräfteverlaufes, und zwar an der Flanschunterseite

wirksamer als die durch Dehnungsmessungen ermittelten mehr makroskopischen Störungen des Kräfteflusses.

Es gilt daher die durch Versuche und praktische Erfahrungen gerechtfertigte Richtlinie, Aussteifungen am Zuggurt nicht anzuschweißen.

**Das Tragvermögen gedrückter Baustahlstäbe mit krummer Achse und zusätzlicher Querbelastrung.**

Alle Rechte vorbehalten.

Von Prof. Dr.-Ing. E. Chwalla, Brünn.

(Schluß aus Heft 6.)

Ist der Verlauf der Querbelastrung oder der primären Achsenfigur ein unsymmetrischer oder sind die Angriffshebel der Druckkraft nicht beiderseits gleich groß, dann ist die gesuchte Gleichgewichtsfigur nicht mehr zur Mitte symmetrisch, so daß wir die Untersuchung auf die ganze Stablänge erstrecken müssen. Wir unterteilen diese Stablänge in  $n$  gleiche Intervalle der Länge  $a = l/n$ , zählen die Unterteilungsorte  $\zeta = 0, 1, 2, \dots, n$  vom linken Stabende (Bild 6b) und legen die gesuchte Gleichgewichtsfigur nicht durch die Scheitelausbiegung, sondern durch die Ordinate am Orte  $\zeta = 1$  fest. Für einen probeweise angenommenen Wert  $y_1$  können wir das Biegemoment  $M_1 = -P(p_1 + \eta_1 + \eta_1 + y_1)$  bestimmen und, da auch das Biegemoment am Stabende  $M_0 = -Pp_0$  und die Querschnittsflächen bekannt sind, die beiden Krümmungsmaße  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  aus den entsprechenden „Kurven des inneren Widerstandes“ entnehmen. Nach Bild 6b ist dann die zusätzliche Ausbiegung

$$y_2 = y_1 + a^2 \left( \frac{y_1}{a^2} - \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2} \right) = y_1 + a^2 k_1$$

und daher  $M_2 = \dots$  usw.; allgemein gilt hier die Rekursionsformel

$$y_{\zeta+1} = y_{\zeta} + a^2 \left( \frac{y_{\zeta}}{a^2} - \frac{\kappa_{\zeta-1} + \kappa_{\zeta}}{2} \right) = y_{\zeta} + a^2 k_{\zeta}, \quad \zeta = 2, 3, 4, \dots, n,$$

die auf  $y_n = 0$  führen muß, wenn die zusätzliche Ausbiegung  $y_1$  richtig angenommen wurde.

Die Querbelastrung kann schon vorhanden sein, bevor die Druckkraft  $P$  zu wirken beginnt (Fall A), oder sie kann gemeinsam mit  $P$  anwachsen (Fall B), oder sie kann erst zur Geltung kommen, nachdem  $P$  seinen vollen Wert erreicht hat (Fall C). Liegt  $\sigma_0$  im unelastischen Bereich, greift  $P$  mittig an und ist die Stabachse im spannungslosen Anfangszustand gerade, dann unterliegen die im Stab auftretenden Normalspannungsverteilungen im Fall C dem linearen „Entlastungsgesetz“; die von uns zugrunde gelegten „Kurven des inneren Widerstandes“ (Fußnote 2, Bild 4) wurden jedoch für entlastungsfreie Spannungsbilder ermittelt und besitzen daher nur im Fall A oder B, sofern die Querbelastrung nicht sehr klein (etwa  $M_0/P > k/8$  bzw.  $M_0/P > k/4$ ) ist, volle Gültigkeit. Bei der Bemessung gedrückter und gleichzeitig querbelastrter Baustahlstäbe muß auch erwogen werden, ob die Druckkraft  $P$  allein, oder die Querlast  $Q$  allein, oder die Druckkraft und die Querlast gemeinsam mit der Sicherheitszahl  $\nu$  multipliziert werden müssen, um den kritischen Gleichgewichtszustand und damit die obere Traggrenze zu erreichen.

Wir wollen nunmehr einen Stab vom Schlankheitsgrad  $\lambda = 100$  untersuchen, der einen unveränderlichen, rechteckigen Querschnitt  $F = bh$  besitzt,

aus dem einleitend geschilderten Baustahl besteht und die mittig angreifende Druckkraft  $P = \sigma_0 b h = -1000 b h$  kg zu tragen hat; die Achse des Stabes möge im spannungslosen Anfangszustand nach der quadratischen Parabel  $\eta = 4 \eta_0 x(l-x)/l^2$  (Bild 7a) geformt sein und wir fragen nach dem größten Wert der primären Scheitelausbiegung  $\eta_0$ , der noch ein Gleichgewicht zuläßt. Wir unterteilen die halbe Stablänge  $\frac{l}{2} = \frac{h}{2\sqrt{12}} \cdot \lambda$

in  $n = 8$  Intervalle der Länge  $a = 1,804 h$ , nehmen eine zusätzliche Scheitelausbiegung  $y_0$  an und suchen mit Hilfe des geschilderten Verfahrens jenen Wert  $(\eta_0)_{G1}$ , den der Stab im spannungslosen Zustand aufweisen muß, um ein Gleichgewicht unter der gegebenen Belastung zuzulassen; wir gelangen auf diese Weise zu der Kurve  $\left(\frac{\eta_0}{h}\right)_{G1} = f\left(\frac{y_0}{h}\right)$ , deren Extremstelle die gesuchten Koordinaten  $\left(\frac{\eta_0}{h}\right)_{kr}$

und  $\left(\frac{y_0}{h}\right)_{kr}$  aufweist. Ist beispielsweise  $y_0/h = 0,22$  ein gegebener, fester Wert und wählen wir probeweise  $\eta_0/h = 0,172$ , dann können wir für das Biegemoment im Scheitelquerschnitt die Beziehung  $\frac{M_0}{bh^2}$

$$= -\sigma_0 \left( \frac{\eta_0}{h} + \frac{y_0}{h} \right) = +1000 \cdot 0,392 = 392,00 \text{ kg/cm}^2$$

anschreiben und aus der (für den zugrunde liegenden Baustahl, den Rechteckquerschnitt und die mittlere Druckspannung  $\sigma_0 = -1000 \text{ kg/cm}^2$  geltenden) „Kurve des inneren Widerstandes“ das Krümmungsmaß  $h\kappa_0 = 0,00261$  entnehmen.

Es ist dann  $\frac{y_1}{h} = \frac{y_0}{h} - \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{h\kappa_0}{2} = 0,22 - 1,804^2 \cdot \frac{0,00261}{2} = 0,21576$ ,

so daß wir, da auch die Parabelordinate  $\frac{\eta}{h} = \frac{\eta_0}{h} \left(1 - \frac{\zeta^2}{64}\right)$  an der Stelle  $\zeta = 1$  bekannt ist, das Biegemoment  $\frac{M_1}{bh^2} = -\sigma_0 \left(\frac{\eta_1}{h} + \frac{y_1}{h}\right) = +1000$

$\cdot (0,16920 + 0,21576) = 384,96 \text{ kg/cm}^2$  ermitteln, hierzu das Krümmungsmaß  $h\kappa_1 = 0,00254$  bestimmen und die Größe  $y_2/h$  mit Hilfe unserer Rekursionsformel berechnen können. Wir gelangen auf diese Weise schließlich zum Wert  $y_n/h = y_8/h$  und erhalten hierfür an Stelle von Null einen kleinen negativen Betrag, was uns veranlaßt, die Rechnung mit der verbesserten Annahme  $\eta_0/h = 0,168$  zu wiederholen; wir gelangen nunmehr auf einen kleinen positiven Wert für  $y_8/h$  und finden schließlich die Lösung  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,1688$  durch einfache Interpolation. Nach dem

gleichen Verfahren ergeben sich für die gewählten „zusätzlichen“ Scheitelausbiegungen  $y_0/h = 0,24, 0,25, 0,26, 0,27$  und  $0,30$  der Reihe nach die den Gleichgewichtszuständen zugeordneten „primären“ Scheitelausbiegungen  $(\eta_0/h)_{01} = 0,1718, 0,1726, 0,1722, 0,1715$  und  $0,1666$ , deren Verlauf ein Extrem an der Stelle  $(y_0/h)_{kr} = 0,252, (y_0/h)_{kr} = 0,1726$  aufweist; der gesuchte kritische Gleichgewichtszustand ist somit durch die Wertegruppe  $P/F = -1000 \text{ kg/cm}^2, \lambda = 100, \eta_0 = 0,1726 h, y_0 = 0,252 h$  festgelegt. Ein Stab, der im spannungslosen Anfangszustand parabolisch gekrümmt ist und die Scheitelausbiegung  $\eta_0 = 0,1726 h$  besitzt, gelangt demnach im Rahmen unserer Voraussetzungen unter der mittigen Druckkraft  $P = -1000 b h \text{ kg}$  an die Grenze seines Tragvermögens und weist in diesem kritischen Gleichgewichtszustand die Scheitelausbiegung  $\eta_0 + y_0 = 0,1726 h + 0,252 h = 0,4246 h$  auf.

Würde der Schlankheitsgrad des Stabes  $\lambda = 50$  betragen, dann wäre die Intervall-Länge bloß  $a = 0,9021 h$  und wir würden für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,08, 0,09, 0,10, 0,11, 0,12, 0,13, 0,14, 0,15$  und  $0,16$  der Reihe nach die Größen  $(\eta_0/h)_{01} = 0,4176, 0,4202, 0,4219, 0,4226, 0,4216, 0,4193, 0,4163, 0,4117$  und  $0,4061$  erhalten; auch hier zeigt der Verlauf  $(\eta_0/h)_{01} = f\left(\frac{y_0}{h}\right)$  ein ausgeprägtes Maximum mit den Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,109, (\eta_0/h)_{kr} = 0,4226$ , die zusammen mit den Werten  $\lambda = 50$  und  $P/F = -1000 \text{ kg/cm}^2$  den kritischen Zustand festlegen.

Besitzt der Stab eine gerade Achse und ist eine zusätzliche Querbelastung „ $q = \text{const}$ “ vorhanden (Bild 7b), dann verläuft die gedachte primäre Achsenfigur  $\eta = \varphi(x)$ , deren Einfluß dem der Querbelastung gleichkommt, gleichfalls nach einer quadratischen Parabel, für deren Pfeilhöhe sich im Falle rechteckiger Stabquerschnitte die Beziehung

$$\frac{\eta_0}{h} = \frac{\mathfrak{M}_0}{-Ph} = \frac{q}{b} \cdot \frac{l^2}{-8 h^2 \sigma_0} = \frac{q}{b} \cdot \frac{\lambda^2}{-96 \sigma_0}$$

ergibt. Das Lösungsverfahren und das Ergebnis ist hier genau das gleiche wie früher, so daß wir für den kritischen Gleichgewichtszustand im Fall  $\lambda = 100$  die

$$\text{Wertegruppe } P/b h = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,252 \text{ und } \eta_0/h \equiv \frac{q}{b} \cdot \frac{100^2}{96 \cdot 1000}$$

$$= 0,1726, \text{ also } \left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = 1,657 \text{ kg/cm}^2, \text{ und im Fall } \lambda = 50 \text{ die Wertegruppe}$$

$$P/b h = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,109 \text{ und } \eta_0/h \equiv \frac{q}{b} \cdot \frac{50^2}{96 \cdot 1000} = 0,4226,$$

also  $\left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = 16,23 \text{ kg/cm}^2$  erhalten. Auch wenn die Stabachse primär nach einer Parabel gekrümmt und außerdem eine gleichmäßige Querbelastung „ $q = \text{const}$ “ vorhanden ist, ergibt sich ein parabolischer Verlauf der gedachten Primärausbiegungen  $(\eta + \bar{\eta})$  mit der Pfeilhöhe  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0)$ , deren kritischer Wert im Fall  $\lambda = 100$  mit  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0)_{kr} = 0,1726 h$  und im Fall  $\lambda = 50$  mit  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0)_{kr} = 0,4226 h$  gefunden wurde.

Gilt für den Stab  $\lambda = 100, P/b h = -1000 \text{ kg/cm}^2$  und für seine ursprüngliche Achsenkurve das Gesetz  $\eta = \eta_0 \sin \frac{\pi x}{l}$  (Bild 7c), dann erhalten wir nach unserem Krümmungskreisverfahren für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,23, 0,24, 0,25, 0,26$  und  $0,27$  der Reihe nach die Größen  $(\eta_0/h)_{01} = 0,1741, 0,1753, 0,1756, 0,1747$  und  $0,1737$ , so daß die Koordinaten

der Extremstelle des Verlaufes  $\left(\frac{\eta_0}{h}\right)_{01} = f\left(\frac{y_0}{h}\right)$  offenbar  $(y_0/h)_{kr} = 0,245$  und  $(\eta_0/h)_{kr} = 0,1758$  betragen. Würde der Stab eine gerade Achse und eine sinusförmig verteilte Querbelastung mit dem Scheitelwert  $q_0 \text{ kg/cm}$  aufweisen (Bild 7d), dann würde die gedachte Achsenkurve  $\eta = \varphi(x)$

gleichfalls sinusförmig verlaufen und die Scheitelausbildung  $\frac{\eta_0}{h} = \frac{\mathfrak{M}_0}{-Ph}$

$$= \frac{q_0}{b} \cdot \frac{\lambda^2}{-12 \pi^2 \sigma_0}$$

besitzen; das Lösungsverfahren und das Ergebnis ist hier das gleiche wie früher, so daß das Tragvermögen des Stabes erschöpft wird, wenn  $(y_0/h) = 0,245$  und  $\eta_0/h \equiv \frac{q_0}{b} \cdot \frac{100^2}{118,44 \cdot 1000} = 0,1758$ , also

$$\left(\frac{q_0}{b}\right)_{kr} = 2,082 \text{ kg/cm}^2 \text{ beträgt. Ist eine sinusförmige Primärverformung}$$

und eine sinusförmig verteilte Querbelastung vorhanden, dann besitzt die gedachte Achsenkurve die Ausbiegungen  $(\eta + \bar{\eta})$  mit dem Scheitelwert  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0)$  und der kritische Zustand wird durch die Wertegruppe  $\lambda = 100, P/b h = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,245$  und  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0) = 0,1758 h$  festgelegt.

Ist der Stab mit  $\lambda = 100$  und  $P/b h = -1000 \text{ kg/cm}^2$  dreieckförmig gestaltet (Bild 7e), dann gilt  $\eta = \eta_0 \cdot \frac{2x}{l}$  und wir erhalten nach dem

Krümmungskreisverfahren für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,22, 0,23, 0,24, 0,25$  und  $0,26$  der Reihe nach die für das Gleichgewicht erforderlichen

Scheitelausbiegungen  $(\eta_0/h)_{01} = 0,1982, 0,1998, 0,1999, 0,1997$  und  $0,1992$ , deren Verlauf an der Stelle  $(y_0/h)_{kr} = 0,238, (\eta_0/h)_{kr} = 0,200$  ein Extrem aufweist. Besitzt der Stab eine gerade Achse und ist in der Stabmitte eine Querlast  $Q$  vorhanden (Bild 7f), dann verläuft die gedachte primäre Achsenkurve  $\eta = \varphi(x)$  gleichfalls dreieckförmig und für den Scheitelwert

$$\text{wird } \frac{\eta_0}{h} = \frac{\mathfrak{M}_0}{-Ph} = \frac{Q}{b h} \cdot \frac{\lambda}{-4 \sqrt{12} \sigma_0}$$

gefunden. Das Lösungsverfahren und das Ergebnis ist daher das gleiche wie früher, so daß das Tragvermögen erschöpft wird, wenn  $y_0/h = 0,238$  und  $\eta_0/h \equiv \frac{Q}{b h} \cdot \frac{100}{4 \sqrt{12} \cdot 1000} = 0,200$ ,

$$\text{also } \left(\frac{Q}{b h}\right)_{kr} = 27,72 \text{ kg/cm}^2 \text{ beträgt. Ist eine Einzellast } Q \text{ in der Stabmitte}$$

und eine dreieckförmige Primärverformung der Stabachse gegeben, dann ist der Verlauf der gedachten Achsenfigur ebenfalls ein dreieckförmiger und die Scheitelhöhe beträgt  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0)$ , so daß der kritische Zustand durch die Wertegruppe  $\lambda = 100, P/b h = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,238$  und  $(\eta + \bar{\eta}_0) = 0,200 h$  festgelegt wird.

Besitzt der Stab, dessen Schlankheitsgrad  $\lambda = 100$  und dessen mittig angreifende Druckkraft  $P = -1000 b h \text{ kg}$  beträgt, eine parabolisch verlaufende „ursprüngliche“ Achsenfigur und wirkt auf diesen Stab noch zusätzlich eine kleine Einzellast  $Q$  nach Bild 7g ein, dann zeigen die gedachten resultierenden Primärausbiegungen  $(\eta + \bar{\eta})$  den in Bild 7h dargestellten Verlauf (der in genau der gleichen Form auch Geltung haben würde, wenn

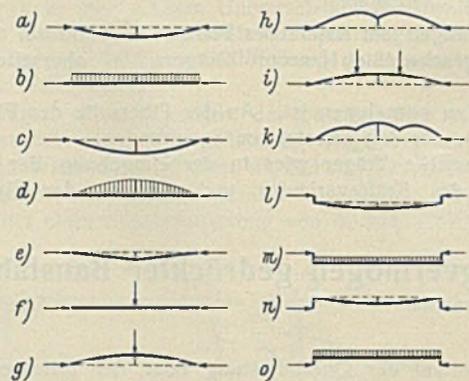


Bild 7.

die Stabachse gerade wäre und eine gleichmäßige Querbelastung sowie eine entgegengesetzt wirkende Einzelkraft  $Q$  vorhanden sein würde). Nehmen wir z. B. an, daß die Querlast die Größe  $Q/b h = \frac{-2 \sqrt{12} \sigma_0 \cdot \eta_0}{\lambda \cdot h}$  besitzt,

dann ist die Pfeilhöhe der gedachten dreieckigen Achsenkurve  $\eta = \varphi(x)$  einfach  $\frac{\eta_0}{h} = \frac{Q}{b h} \cdot \frac{\lambda}{-4 \sqrt{12} \sigma_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta_0}{h}$ , also genau halb so groß wie

die vorhandene primäre Scheitelausbiegung  $\frac{\eta_0}{h}$ , so daß die resultierende

Achsenfigur das Gesetz  $\frac{\eta + \bar{\eta}}{h} = \frac{\eta_0}{h} \left[ \frac{4x(l-x)}{l^2} - \frac{x}{l} \right]$  befolgt. Nach dem Krümmungskreisverfahren ergeben sich dann in der geschilderten Weise für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,24, 0,25, 0,26$  und  $0,27$  der Reihe nach die für das Gleichgewicht erforderlichen Größen  $(\eta_0/h)_{01} = 0,2972, 0,2980, 0,2988$  und  $0,2972$ , deren Verlauf eine Extremstelle mit den Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,260, (\eta_0/h)_{kr} = 0,2988$  aufweist.

Wirkt auf denselben Stab nicht eine Einzellast in der Mitte, sondern je eine kleine Einzellast  $Q$  in den Drittelpunkten (Bild 7i), dann zeigen die gedachten Primärausbiegungen  $(\eta + \bar{\eta})$  den in Bild 7k dargestellten Verlauf, der in gleicher Form auch auftreten würde, wenn die Stabachse gerade wäre und außer den beiden Querlasten  $Q$  noch eine entgegengesetzt wirkende, gleichmäßig verteilte Querbelastung vorhanden sein würde.

Nehmen wir z. B. an, daß  $Q/b h = \frac{-1,5 \sqrt{12} \sigma_0 \cdot \eta_0}{\lambda}$  beträgt, dann ist die

Höhe der gedachten trapezförmigen Achsenfigur  $\eta = \varphi(x)$  offenbar

$$\frac{\eta_0}{h} = \frac{\mathfrak{M}_0}{-Ph} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta_0}{h}, \text{ so daß sich die gedachten resultierenden Primär-}$$

ausbiegungen  $(\eta + \bar{\eta})$  als Differenzen der Parabelordinaten  $\frac{4 \eta_0 x(l-x)}{l^2}$

und der Ordinaten eines Trapezes mit der Höhe  $\frac{1}{2} \cdot \eta_0$  ergeben. Für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,24, 0,25, 0,26, 0,27$  erhalten wir nach dem Krümmungskreisverfahren der Reihe nach die für das Gleichgewicht

erforderlichen Größen  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,3519, 0,3521, 0,3518$  und  $0,3496$ , deren Verlauf ein Extrem mit den Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,248, (\eta_0/h)_{kr} = 0,3521$  besitzt, so daß die Wertegruppe  $\lambda = 100, P/bh = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,248, \eta_0/h = 0,3521$  den gesuchten kritischen Gleichgewichtszustand und damit die obere Grenze des Tragvermögens festlegt.

Die nach dem Krümmungskreisverfahren mit  $n = 8$  Intervallen erhaltenen Näherungswerte sind, wie ein Vergleich mit strengen Lösungen zeigt, im allgemeinen etwas zu klein. Würden wir die Intervallzahl  $n$  unbeschränkt vergrößern, dann würden wir, wenn wir die Werte  $\lambda$  und  $\eta_0$  festhalten, im Gleichgewichtsfall auf Druckkräfte  $P$  gelangen, die um ungefähr 2 bis 3% größer als die für  $n = 8$  gefundenen Werte sind; wir erhalten somit in allen bisher vorgeführten Beispielen praktisch „strenge“ Lösungen, wenn wir  $\lambda$  und  $\eta_0$  unverändert lassen und für  $\sigma_0$  den um 2% erhöhten Wert  $\sigma_0 = -1020 \text{ kg/cm}^2$  angeben. Diese „strengen“ Lösungen wollen wir nun verwenden, um den im III. Abschnitt erwähnten Beiwert  $c$ , dessen Kenntnis uns die Zurückführung der Lösung auf die Lösung des „Normalfalles“ ermöglicht, in unseren Beispielen festzulegen; bei der Ermittlung der kritischen mittleren Druckspannung  $(\sigma_{kr})_{ex}$  der „Vergleichsstäbe“, deren Druckkraft mit den beiderseits gleichen Angriffshebel  $p = \eta_0$  bzw.  $p = \eta_0 + \bar{\eta}_0$  wirksam ist, bedienen wir uns, da das Formänderungsgesetz das gleiche ist und  $\sigma_Q = -2700 \text{ kg/cm}^2$  bekannt ist, des in der einleitend erwähnten Abhandlung (Fußnote 2, X. Abschnitt) angegebenen „ $\alpha$ -Verfahrens“. Im ersten Beispiel (Bild 7a,  $\lambda = 100$  bzw.  $\lambda = 50$ ) gilt im kritischen Zustand für den „Vergleichsstab“  $p/k = 6p/h = 6\eta_0/h = 1,04, \lambda = 100, \alpha = 0,365, (\sigma_{kr})_{ex} = -985 \text{ kg/cm}^2$ , bzw.  $p/k = 6\eta_0/h = 2,54, \lambda = 50, \alpha = 0,360, (\sigma_{kr})_{ex} = -972 \text{ kg/cm}^2$ , so daß sich für den Beiwert die Größe  $c = \sigma_{kr}/(\sigma_{kr})_{ex} = -1020/-985 = 1,035$  bzw.  $c = 1,05$  ergibt. Im zweiten Beispiel (Bild 7c) wird  $p/k = 6\eta_0/h = 1,055, \alpha = 0,3625, (\sigma_{kr})_{ex} = -979 \text{ kg/cm}^2$  und daher  $c = 1,042$  gefunden. Im dritten Beispiel (Bild 7e) ist ein etwas größerer Wert  $c$  zu erwarten und es wird  $p/k = 6\eta_0/h = 1,200, \alpha = 0,348, (\sigma_{kr})_{ex} = -940 \text{ kg/cm}^2, c = 1,086$  erhalten. Im vierten Beispiel (Bild 7h) sind die Primärausbiegungen außerhalb des Scheitels zum Teil größer als  $(\eta_0 + \bar{\eta}_0)$ , so daß hier die Tragfähigkeit etwas kleiner als die des „Vergleichsstabes“ sein wird; es gilt  $p/k = 6(\eta_0 + \bar{\eta}_0)/h = 0,8964, \alpha = 0,3821, (\sigma_{kr})_{ex} = -1032 \text{ kg/cm}^2$  und der Beiwert  $c = -1020/-1032 = 0,988$  wird tatsächlich kleiner als Eins. Im letzten Beispiel (Bild 7k) wird  $p/k = 6(\eta_0 + \bar{\eta}_0)/h = 1,06, \alpha = 0,3624, (\sigma_{kr})_{ex} = -978 \text{ kg/cm}^2, c = 1,042$  gefunden, wie mit Rücksicht auf den durchschnittlich parabolischen Verlauf von  $(\eta + \bar{\eta})$  auch zu erwarten war. Wir sehen somit, daß wir die Berechnung mittig gedrückter Stäbe, die im spannungslosen Anfangszustand nach einer zur Mitte symmetrischen Kurve verformt sind und symmetrisch verteilte Querlasten zu tragen haben, mit Hilfe der Beziehung  $\sigma_{kr} = c(\sigma_{kr})_{ex}$  praktisch auf den „Normalfall“ zurückführen können, was eine einfache, nur bei einer von „P“ unabhängigen Querbelastung indirekte Bemessung ermöglicht. Der Beiwert  $c$  hängt hierbei von der effektiven oder gedachten Achsenkurve ab und darf angenähert als unabhängig von  $\eta_0$  und  $\lambda$  angesehen werden; als Anhaltspunkt mag dienen, daß für ein dreieckförmiges, ein parabolisches und ein rechteckiges Achsenbild der Reihe nach angenähert  $c = 1,08, 1,04$  und  $1,00$  gesetzt werden darf.

**V. Näherungslösungen für krumme, querbelastete Baustahlstäbe mit außermittig angreifenden Druckkräften und elastischen Querstützungen.**

Wir untersuchen einen beiderseits gelenkig gelagerten Stab, der den Schlankheitsgrad  $\lambda = 100$  aufweist, einen Rechteckquerschnitt besitzt und aus dem einleitend gekennzeichneten Baustahl besteht. Die Achse dieses Stabes sei im spannungslosen Anfangszustand nach der Parabel  $\eta = 4\eta_0 x(l-x)/l^2$  gekrümmt und die Druckkraft  $P = -1000 F \text{ kg}$  greife außermittig mit den beiderseits gleich großen Hebelarmen  $p = 0,5 k = 0,0833 h$  an (Bild 7l); wir fragen nach der kritischen „ursprünglichen“ Scheitelausbiegung  $(\eta_0)_{kr}$ , die vorhanden sein muß, um das Tragvermögen des Stabes unter der gegebenen Belastung zu erschöpfen. Die gedachte Primärausbiegung beträgt hier offenbar  $\bar{\eta} = (p + \eta)$ , so daß für das Biegemoment einfach  $M/bh^2 = -\sigma_0 \left( \frac{\eta}{h} + \frac{y}{h} \right)$  geschrieben werden kann. Für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,24, 0,25, 0,26, 0,27$  und  $0,28$  erhalten wir nach dem Krümmungskreisverfahren der Reihe nach die zur Ausbildung eines Gleichgewichtszustandes erforderlichen Größen  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,0778, 0,0790, 0,0795, 0,0792$  und  $0,0775$ , deren Verlauf ein ausgeprägtes Extrem mit den Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,263, (\eta_0/h)_{kr} = 0,0795$  aufweist; beträgt somit die Pfeilhöhe der ursprünglichen Achsenkurve  $\eta_0 = 0,0795 h$ , dann gelangt der Stab unter der gegebenen Belastung an die Grenze seiner Tragfähigkeit, wobei im kritischen Gleichgewichtszustand die Scheitelausbiegung  $\eta_0 + y_0 = 0,3425 h$  auftritt. Ist die Stabachse gerade und ist eine gleichmäßig verteilte Querbelastung „ $q = \text{const}$ “ vorhanden (Bild 7m),

dann zeigt die gedachte Achsenfigur  $\bar{\eta} = \bar{q}(x)$  den gleichen Verlauf wie früher, so daß das Lösungsverfahren und das Ergebnis das gleiche ist; der kritische Zustand ist dann durch die Wertegruppe  $\lambda = 100, P/bh = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,263$  und  $\eta_0/h = \frac{W_0}{-Ph} = \frac{q}{b} \cdot \frac{l^2}{-96\sigma_0} = 0,0795$ , also  $\left( \frac{q}{b} \right)_{kr} = 0,764 \text{ kg/cm}^2$  gekennzeichnet.

Erfolgt der außermittige Angriff der Druckkraft  $P = -1000 b h \text{ kg}$  so, daß  $p$  und  $\eta_0$  auf derselben Seite der Stabachse gelegen sind (Bild 7n), dann gilt für die fiktive Primärausbiegung  $\bar{\eta} = (p - \eta)$ , so daß das gesuchte Extrem der Kurve  $(\eta_0/h)_{G1} = f\left(\frac{y_0}{h}\right)$  hier ausnahmsweise ein Minimum wird. Beträgt beispielsweise  $p = 1,5 k = 0,25 h$ , dann erhalten wir nach dem Krümmungskreisverfahren für  $y_0/h = 0,25, 0,26, 0,27, 0,28$  und  $0,29$  der Reihe nach die Größen  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,1100, 0,1089, 0,1086, 0,1090$  und  $0,1102$ , deren Verlauf ein ausgeprägtes Extrem (Minimum) mit den Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,268, (\eta_0/h)_{kr} = 0,1086$  aufweist; die geringste gewaltsame Verminderung des ursprünglichen Pfeils  $\eta_0 = 0,1086 h$  hat den Zusammenbruch des belasteten Stabes zur Folge. Ist die Stabachse gerade und wirkt eine kleine Querbelastung „ $q = \text{const}$ “ gemäß Bild 7o, dann zeigt die gedachte Achsenfigur  $\bar{\eta} = \bar{q}(x)$  den gleichen Verlauf wie früher, so daß das Lösungsverfahren und das Ergebnis das gleiche ist; der kritische Zustand ist dann durch die Werte  $\lambda = 100, P/bh = -1000 \text{ kg/cm}^2, y_0/h = 0,268$  und  $\eta_0/h = \frac{q}{b} \cdot \frac{l^2}{-96\sigma_0} = 0,1086$ , also  $\left( \frac{q}{b} \right)_{kr} = 1,042 \text{ kg/cm}^2$  gekennzeichnet.

Der Vergleich von Bild 7l u. 7n mit dem Belastungsfall des „Vergleichsstabes“ läßt erwarten, daß der Beiwert  $c$ , mit dessen Hilfe wir die Untersuchung auf den „Normalfall“ zurückführen können, im ersten Beispiel ein wenig größer und im zweiten Beispiel etwas kleiner als Eins sein wird; in der Tat ergibt sich im ersten Fall  $c = 1,018$  und im zweiten Fall  $c = 0,972$ .

Ist der beiderseits gelenkig gelagerte, zentrisch gedrückte Stab im spannungslosen Anfangszustand nach einer zur Mitte symmetrischen Kurve

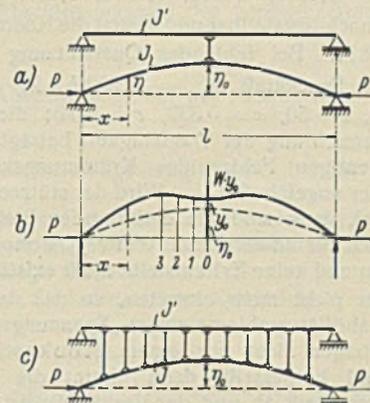


Bild 8.

$\eta = q(x)$  geformt und wird dieser Stab in seiner Mitte elastisch quer gestützt, dann tritt im Gleichgewichtszustand eine Stützkraft  $W = W y_0$  auf, deren Größe vom „spezifischen Stützwiderstand  $W \text{ kg/cm}^2$ “ und der im Gleichgewichtszustand vorhandenen zusätzlichen Scheitelausbiegung  $y_0$  abhängig ist (Bild 8b). Diese Stützkraft hat das Auftreten entlastender Biegemomente im Stab zur Folge und bewirkt eine von der Kennziffer  $W$  abhängige Veränderung des Tragverhaltens und Erhöhung der Tragfähigkeit des Stabes. Da wir im Rahmen unseres Krümmungskreisverfahrens von einer angenommenen Größe  $y_0$  ausgehen, können wir das Biegemoment im Scheitelquerschnitt angeben und die Werte  $(\eta_0/h)_{G1}$  in der geschilderten Weise ermitteln. Wir wollen annehmen, daß die elastische Querstützung des krummen Druckstabes durch einen Hilfs-träger aus Hookeschem Idealmaterial ( $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ ) bewirkt wird, der dieselbe Länge wie der untersuchte Stab besitzt, das Trägheitsmoment  $J'$  aufweist und durch starr gedachte Vertikalen mit dem Stab verbunden ist (Bild 8a); für die Kennziffer  $W$  können wir dann, wenn der Druckstab den Rechteckquerschnitt  $F = bh$  und das Trägheitsmoment  $J = bh^3/12$  besitzt, die Beziehung  $\frac{W}{b} = \frac{48 E J'}{l^3} \cdot \frac{2i^3 \sqrt{12}}{J} = \frac{48 \sqrt{12} E J'}{l^3} \cdot \frac{J'}{J}$  anschreiben. Gilt beispielsweise  $\lambda = 50, P = -1000 b h \text{ kg}, \eta = 4\eta_0 x(l-x)/l^2$  und  $J' = 0,02 J$ , dann wird  $W/b = 55,87 \text{ kg/cm}^2$  und wir erhalten für das Biegemoment an einer beliebigen Stelle der gesuchten Gleichgewichtsfigur die Beziehung

$$M/bh^2 = -\sigma_0 \left[ \frac{\eta}{h} + \frac{y}{h} - \frac{W}{b} \cdot \frac{1}{-2 \cdot \sigma_0} \cdot \frac{y_0}{h} \cdot \frac{x}{h} \right] = -\sigma_0 \left[ \frac{\eta}{h} + \frac{y}{h} \right],$$

wobei die gedachte Primärverformung  $\bar{\eta} = \frac{\eta}{h} = \frac{55,87}{2000} \cdot \frac{y_0}{h} \cdot \frac{x}{h}$  nunmehr von der Größe  $y_0$  abhängt; wählen wir  $n = 8$  Intervalle, dann gilt für die Unterteilungsorte  $\zeta = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\eta}{h} = \frac{\eta_0}{h} \left(1 - \frac{\zeta^2}{64}\right) \text{ und } \frac{x}{h} = 0,9021 (8 - \zeta).$$

Für  $y_0/h = 0,10$  und den probeweise angenommenen Wert  $\eta_0/h = 0,438$  erhalten wir beispielsweise

$M_0/bh^2 = +1000 [0,438 - 0,027934 \cdot 0,10 \cdot 7,217 + 0,10] = 517,85 \text{ kg/cm}^2$ , wofür sich aus der „Kurve des inneren Widerstandes“ das Krümmungsmaß  $\lambda \sigma_0 = 0,00516$  und daher nach unserer Rekursionsformel

$$\frac{y_1}{h} = 0,10 - 0,9021^2 \cdot \frac{0,00516}{2} = 0,09790$$

ergibt, usw.; wir gelangen auf diese Weise auf den Wert  $y_0/h = -0,00096 \pm 0$ , verbessern daher unsere Annahme, wiederholen die Rechnung und finden schließlich den Wert  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,4365$  nach einfacher Interpolation. In gleicher Weise erhalten wir für  $y_0/h = 0,11, 0,12, 0,13, 0,14$  der Reihe nach  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,4414, 0,4446, 0,4443, 0,4353$  und sehen, daß die Kurve  $(\eta_0/h)_{G1} = f(y_0/h)$  an der Stelle  $(y_0/h)_{kr} = 0,125$ ,  $(\eta_0/h)_{kr} = 0,4452$  ein ausgeprägtes Extrem besitzt. Weist daher der untersuchte Stab die ursprüngliche Scheitelausbiegung  $\eta_0 = 0,4452h$  auf, dann wird sein Tragvermögen unter der angegebenen Belastung erschöpft; der Stab zeigt hier somit trotz der elastischen Querstützung immer noch die Erscheinung des „Knickens“, d. h. die Ausbiegung wächst nach Erreichen von  $P_{kr}$  aus Eigenem immer mehr an und kann nur durch eine zusätzliche Abstützung zum Stillstand gebracht werden. Würde die elastische Querstützung nicht vorhanden sein, dann wäre die Tragfähigkeit unter der Last  $P_{kr} = -980bh \text{ kg}$  erschöpft (es ist  $p/k = 6\eta_0/h = 2,671$ ,  $\lambda = 50$ ,  $\alpha = 0,349$ ,  $c = 1,04$ ,  $\sigma_{kr} = 1,04 \cdot 0,349 \sigma_Q = -980 \text{ kg/cm}^2$ ), so daß die durch die Querstützung bewirkte Erhöhung der Traggrenze recht gering ist.

Führen wir den Hilfsträger steifer, mit  $J' = 0,05J$  aus, dann erhalten wir in der gleichen Weise für  $y_0/h = 0,13, 0,14, 0,15, 0,16$  und  $0,17$  der Reihe nach  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,4808, 0,4812, 0,4814, 0,4809$  und  $0,4799$ ; das Extrem ist auch hier noch feststellbar und besitzt die Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,151$ ,  $(\eta_0/h)_{kr} = 0,4814$ . Bei fehlender Querstützung wäre das Tragvermögen unter der Druckkraft  $P_{kr} = -932bh \text{ kg}$  erschöpft (es ist  $p/k = 6\eta_0/h = 2,888$ ,  $\lambda = 50$ ,  $\alpha = 0,332$ ,  $c = 1,04$ ); die durch die Querstützung bewirkte Vermehrung der Tragfähigkeit beträgt daher, wenn wir den rund zweiprozentigen Fehler des Krümmungskreisverfahrens in Rechnung stellen, hier ungefähr 9,5%. Wird der stützende Hilfsträger mit  $J' = 0,10J$  ausgeführt, dann sind die entlastenden Biegemomente schon derartig groß, daß sich für anwachsende Werte  $y_0/h$  monoton ansteigende Werte  $(\eta_0/h)_{G1}$  ergeben und keine Extremstelle mehr existiert; ein „Knicken“ des Stabes kann hier nicht mehr eintreten, so daß das der Bemessung zugrunde gelegte „Stabilitätsproblem“ einem „Spannungsproblem“ weichen muß. Ist der Hilfsträger nicht aus einem Hookeschen Idealmaterial, sondern aus Baustahl hergestellt, dann nimmt die Kennzahl  $W$  bei größeren Ausbiegungen stark ab und der Verhältniswert  $J'/J$ , für den die Extremstelle der Kurve  $(\eta_0/h)_{G1} = f\left(\frac{y_0}{h}\right)$  verschwindet, liegt entsprechend höher.

Ist der krummachsige Druckstab nicht nur in der Stabmitte, sondern an unendlich vielen, unmittelbar benachbart liegenden Stellen gegen den Hilfsträger abgestützt (Bild 8c), dann liegt der Fall einer stetig verteilten Querstützung vor und an Stelle des konzentrierten Stützwiderstandes  $\mathfrak{B}$  tritt die Intensitätsverteilung  $w = \psi(x)$ , die von den im Gleichgewichtsfall auftretenden „zusätzlichen“ Ausbiegungen  $y = f(x)$  abhängig ist. Begnügen wir uns mit einer gröberen Annäherung, dann können wir für die Kurve  $y = f(x)$ , die mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Starrheit der Vertikalen gleichzeitig auch die Biegelinie des Hilfsträgers festlegt, vorerst z. B. eine biquadratische Parabel einführen; die Intensität der entstehenden Querstützung wird dann, wie leicht einzusehen ist, konstant und beträgt  $w = \frac{384}{5} \cdot \frac{EJ'}{l^4} \cdot y_0$ . Setzen wir für den Hilfsträger wieder ein Hookesches Idealmaterial ( $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ ) und das unveränderliche Trägheitsmoment  $J' = 0,02J$  voraus, dann ist, wenn die Stabschlankheit mit  $\lambda = 50$  angenommen wird,  $w = 309,7 \cdot \frac{J'}{J} \cdot \frac{by_0}{h}$  und die Verteilungskurve der entlastenden Biegemomente wird eine Parabel mit dem Scheitelwert  $\frac{w l^2}{8} = 8064 \cdot \frac{J'}{J} \cdot bh y_0$ . Besitzt der Stab im spannungslosen Anfangszustand eine parabolformige Achsenkurve mit der Pfeilhöhe  $\eta_0$  und greift die Druckkraft  $P = -1000bh \text{ kg}$  mittig an, dann gilt für das Biegemoment an einer Stelle  $x$  der Gleichgewichtsfigur

einfach  $M/bh^2 = -\sigma_0 \left(\frac{\eta}{h} + \frac{y}{h}\right) = +1000 \left(\frac{\eta}{h} + \frac{y}{h}\right)$ , wobei sich die

resultierenden Primärausbiegungen  $\frac{\eta}{h}$  nach einer Parabel mit dem Scheitel-

wert  $\frac{\eta_0}{h} = \frac{\eta_0}{h} - 8,064 \cdot \frac{J'}{J} \cdot \frac{y_0}{h}$  verändern. Für die angenommenen Werte  $y_0/h = 0,10, 0,11, 0,12, 0,13$  und  $0,14$  erhalten wir nach dem Krümmungskreisverfahren der Reihe nach die für das Gleichgewicht erforderlichen Größen  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,4348, 0,4398, 0,4420, 0,4411$  und  $0,4389$ , deren Verlauf eine ausgeprägte Extremstelle mit den Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,121$ ,  $(\eta_0/h)_{kr} = 0,442$  aufweist. Würde die Querstützung nicht vorhanden sein, dann würde das Tragvermögen des Stabes unter der Druckkraft  $P_{kr} = -986bh \text{ kg}$  erschöpft werden (es ist  $p/k = 6\eta_0/h = 2,652$ ,  $\lambda = 50$ ,  $\alpha = 0,351$ ,  $c = 1,04$ ); das Maß dieser durch die Querstützung bewirkten Erhöhung der Tragfähigkeit ist noch ein wenig kleiner als im Fall der konzentrierten Querstützung (Bild 8a), doch ist der Unterschied so gering, daß wir der Anzahl der Abstützungspunkte offenbar keinen bedeutsamen Einfluß zuzuweisen haben.

Wird der Hilfsträger mit  $J' = 0,05J$  ausgeführt, dann erhalten wir für  $y_0/h = 0,12, 0,13, 0,14$  und  $0,15$  der Reihe nach  $(\eta_0/h)_{G1} = 0,4711, 0,4730, 0,4728$  und  $0,4723$ ; das Extrem, das hier nur mehr ganz schwach ausgeprägt ist, besitzt die Koordinaten  $(y_0/h)_{kr} = 0,132$ ,  $(\eta_0/h)_{kr} = 0,473$ . Würde keine Querstützung vorhanden sein, dann würde die kritische Druckkraft  $P_{kr} = -944bh \text{ kg}$  betragen (es ist  $p/k = 6\eta_0/h = 2,838$ ,  $\alpha = 0,336$ ,  $c = 1,04$ ), so daß die Erhöhung des Tragvermögens als Folge der elastischen Querstützung, wenn wir den rund zweiprozentigen Fehler des Krümmungskreisverfahrens in Rechnung stellen, ungefähr 8,2% beträgt und nach wie vor etwas kleiner als im Fall der Einzelstützung (Bild 8a) ist. Wird der Hilfsträger mit  $J' = 0,10J$  ausgeführt, dann weist die Kurve  $(\eta_0/h)_{G1} = f(y_0/h)$  keine Extremstelle mehr auf; der Stab würde sich in diesem Falle unter der anwachsenden Druckkraft ausbiegen, ohne zu „knicken“. Die Wirkung der elastischen Querstützung des gedrückten, primär krummen Baustahlstabes äußert sich somit offenbar vor allem darin, daß bei Anwachsen der Querstützungsintensität die Ausprägung der „Knickerscheinung“ immer mehr abnimmt, so daß, von einem bestimmten Intensitätswert angefangen, kein kritischer Gleichgewichtszustand mehr ausgebildet wird und das „Stabilitätsproblem“ seine Bedeutung als Bemessungsgrundlage verliert.

Untersuchen wir einen geraden, mittig gedrückten Baustahlstab, der eine gleichmäßig verteilte Querbelastung „ $q = \text{const}$ “ zu tragen hat und in seiner Mitte oder an unendlich vielen Stellen gegen einen Hilfsträger abgestützt ist, dann zeigt die gedachte, der Querlast zugeordnete Primärverformung  $\bar{\eta} = \varphi(x)$  einen parabolischen Verlauf mit dem Scheitelwert

$$\frac{\eta_0}{h} = \frac{\mathfrak{M}_0}{Ph} = \frac{q}{b} \cdot \frac{l^2}{-96\sigma_0}$$

Das Lösungsverfahren und das Ergebnis ist dann genau das gleiche wie früher, nur treten an Stelle der kritischen Werte  $(\eta_0/h)_{kr}$  nunmehr die Werte  $(\bar{\eta}_0/h)_{kr}$ , aus denen sich die kritischen Querbelastungsintensitäten  $\left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = \frac{-96\sigma_0}{l^2} \left(\frac{\bar{\eta}_0}{h}\right)_{kr}$  unmittelbar berechnen lassen; im Fall der elastischen Einzelstützung finden wir auf diese Weise für  $\lambda = 50$ ,  $P = -1000bh \text{ kg}$  und  $J' = 0,02J$  den Wert  $\left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = 38,4 \cdot 0,4452 = 17,11 \text{ kg/cm}^2$  und für  $J' = 0,05J$  den Wert  $\left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = 38,4 \cdot 0,4814 = 18,50 \text{ kg/cm}^2$ ; im Fall der stetig verteilten Stützung erhalten wir in gleicher Weise für  $J' = 0,02J$  den Wert  $\left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = 38,4 \cdot 0,442 = 16,98 \text{ kg/cm}^2$  und für  $J' = 0,05J$  den Wert  $\left(\frac{q}{b}\right)_{kr} = 38,4 \cdot 0,473 = 18,18 \text{ kg/cm}^2$ , während sich für  $J' = 0,10J$  kein kritischer Zustand ergibt.

Bei den umfangreichen Rechenarbeiten hat mir mein Assistent, Herr Ing. A. Novak, wertvolle Dienste geleistet, wofür ich auch an dieser Stelle meinen Dank zum Ausdruck bringe.

**Druckfehlerberichtigung** zu dem Aufsatz „Die Tragfähigkeit des gleichmäßig querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahl“ von Priv.-Doz. Ing. Dr. Karl Ježek, Stahlbau 1935, Heft 5.

Auf S. 37, 2. Sp., Zie. 15 v. u. und S. 38, 1. Sp., Zie. 5 v. o. muß es, wie den vorhergehenden Ausführungen zu entnehmen ist, selbstverständlich heißen  $\lambda > 15$  anstatt  $\lambda < 15$ .

**INHALT:** Einfluß der Querdehnung auf die Stabilität von Stahlplatten. — Belastungs-Dehnungs-Messungen an I-Trägern mit und ohne Aussteifung. — Das Tragvermögen gedrückter Baustahlstäbe mit krummer Achse und zusätzlicher Querbelastung. (Schluß) — Berichtigung.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8.  
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68