DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule
Fernsprecher: C 1 Steinplatz 0011
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

8. Jahrgang | BERLIN, 7. Juni 1935 | Heft 12

Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Privatdozent Ing. Dr. Karl Ježek, Wien.

Die wirtschaftliche Querschnittsbemessung exzentrisch gedrückter Stäbe gehört zu den wichtigsten Aufgaben des Stahlbaues. Die früher vielfach vertretene Meinung, daß die größte Randspannung als Maß für das Tragvermögen derart belasteter Stäbe anzusehen sei, berücksichtigt nicht deren eigenartiges Tragverhalten. Die Tragkraft axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe ist nämlich nicht durch eine bestimmte Randspannung, sondern durch das Eintreten eines zufolge der Werkstoffeigenschaften bedingten instabilen Gleichgewichtszustandes nach oben hin begrenzt. Der Nachweis der größten Randspannung verbürgt daher, wie später noch gezeigt wird, keineswegs die Einhaltung eines vorgeschriebenen Sicherheitsgrades und schließt damit eine rationelle Querschnittsbemessung aus. Kármán wies als erster darauf hin[1]), daß die Ermittlung der Tragfähigkeit exzentrisch gedrückter Stahlstäbe ein Gleichgewichtsproblem darstelle, und gab in seiner Untersuchung die theoretischen Grundlagen für die strenge Lösung dieser Aufgabe. Er entwickelte ein Verfahren zur zeichnerischen Lösung der in Betracht kommenden Differentialgleichungen, beschränkte seine Untersuchung jedoch nur auf kleine Exzentrizitäten. Viel später wurde Kármáns Methode in entsprechend erweiterter Form verwendet, um den Einfluß beliebiger Exzentrizitäten für ein bestimmtes Formänderungsgesetz zahlenmäßig festzulegen[2]). Von den zahlreichen Abhandlungen, in welchen die vorliegende Aufgabe als Gleichgewichtsproblem unter Zugrundelegung der Arbeitslinie eines bestimmten Baustahls näherungsweise gelöst wurde, seien die Arbeiten von Krohn[3]), Roš-Brunner[4]) und Hartmann[5]) genannt. Alle diese Untersuchungen beschränken sich auf Stäbe mit Rechteckquerschnitt, gelenkiger Lagerung der Stabenden, gerade Stabachse, beiderseits gleich große Angriffshebel und setzen Biegung um eine Hauptträgheitsachse voraus.

Eine rechnerische Behandlung der vorliegenden Aufgabe ist, da die Untersuchung sich auf elastisch-plastische Verzerrungszustände erstreckt, im Hinblick auf das analytisch kaum erfaßbare Formänderungsgesetz des Baustahls nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, z. B. unter der Annahme eines „ideal-plastischen" Werkstoffes[6]) und im Falle der Biegung unter der Annahme eben bleibender Querschnitte möglich[7]). Diese beiden Voraussetzungen sind beim Baustahl bis zu Dehnungen und Stauchungen von etwa 10‰ weitgehend erfüllt bzw. durch Versuchsergebnisse gerechtfertigt[8]). Auf dieser Grundlage entwickelte der Verfasser die strenge analytische Lösung des Gleichgewichtsproblems exzentrisch gedrückter Stäbe[9]) und behandelte ferner die strenge Berechnung der Tragfähigkeit des durch eine Einzelkraft[9]) und des gleichmäßig querbelasteten Druckstabes[10]). Diese Untersuchungen beschränken sich auf Stäbe mit Rechteckquerschnitt, beiderseits gelenkige Lagerung der Stabenden und auf den Fall der Biegung um eine Hauptträgheitsachse. Zunächst sei kurz besprochen, in welchem Maße diese unter der Annahme einer idealisierten Arbeitslinie gewonnenen Ergebnisse dem wirklichen Tragverhalten eines Baustahlstabes entsprechen. Die Untersuchung zeigt, daß die Vernachlässigung des Verfestigungsbereiches in allen praktisch vorkommenden Fällen (ausgenommen sind sehr gedrungene Stäbe) keinen Einfluß auf die Größe der Traglast besitzt, da der instabile Gleichgewichtszustand und damit die Grenze des Tragvermögens eines exzentrisch gedrückten Stabes erreicht wird, bevor eine Verfestigung eintreten könnte. Die aus der Annahme des Hookeschen Gesetzes bis zur Fließgrenze resultierenden Abweichungen in der Tragkraft erreichen ihren Größtwert für vollkommen zentrischen Kraftangriff (Knickung) und nehmen mit zunehmender Exzentrizität des Kraftangriffes rasch ab. Der hierdurch begangene Fehler ist aber besonders bei Stahlsorten, deren Arbeitslinie in dem angegebenen Bereich nur wenig von der Hookeschen Geraden abweicht[11]), sehr klein und mit Rücksicht auf den bei derselben Stahlgattung schwankenden Wert der Fließgrenze und keineswegs eindeutig festliegenden Verlauf der Arbeitslinie selbst praktisch unerheblich. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß der durch die Annahme einer idealisierten Arbeitslinie („Ideal"-Stahl) begangene Fehler in der Tragkraft in allen praktisch vorkommenden Fällen jedenfalls innerhalb des Streuungsbereiches von Versuchsergebnissen liegt und daher nur theoretisches Interesse besitzt.

Es sei jedoch ausdrücklich bemerkt, daß diese strenge analytische Lösung — und dies gilt auch für alle anderen bekanntgewordenen Lösungsmethoden — infolge des erforderlichen großen Rechenaufwandes für die Praxis kaum geeignet ist. Nachfolgend wird nun zunächst unter der Voraussetzung einer idealisierten Arbeitslinie, deren Annahme nach den obenstehenden Ausführungen praktisch recht brauchbare Ergebnisse liefert, ein einfaches, für Ingenieurzwecke geeignetes analytisches Näherungsverfahren zur Berechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe mit Rechteckquerschnitt angegeben, dessen Endergebnisse weitgehend mit den Resultaten der strengen analytischen Lösung übereinstimmen. Schließlich wird noch gezeigt, in welcher Weise man — ausgehend von den Ergebnissen dieses Näherungsverfahrens für einen bestimmten „Ideal"-Stahl — den bei derselben Stahlsorte (diese ist gekennzeichnet durch die Höhe der Fließgrenze) schwankenden Verlauf der Arbeitslinie zwischen Proportionalitäts- und Fließgrenze nach praktischen Gesichtspunkten berücksichtigen könnte.

---

[1]) Th. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitt. über Forschungsarbeiten, VDI-Heft 81, 1910.

[2]) E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie d. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 137. Bd., 8. H., 1928. — Bericht d. II. Int. Tag. f. Brückenbau u. Hochbau, Wien 1928. — Schlußbericht d. I. Int. Kongr. f. Brückenbau u. Hochbau, Paris 1932. — Eine zusammenfassende Darstellung findet sich in: Die Theorie des außermittig gedrückten Stabes aus Baustahl, Stahlbau 1934, H. 21, 22, 23

[3]) R. Krohn, Knickfestigkeit. Bautechn. 1923.

[4]) M. Roš u. J. Brunner, Die Knickfestigkeit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Bericht der Gruppe IV d. techn. Komm. d. Verb. schweiz. Brücken- u. Eisenhochbaufabriken, Zürich 1926. — Vgl. ferner d. Berichte d. II. Int. Tag. f. Brückenbau u. Hochbau in Wien, 1928 und d. I. Int. Kongr. f. Brückenbau u. Hochbau in Paris, 1932.

[5]) F. Hartmann, Der einseitige (exzentrische) Druck bei Stäben aus Baustahl. Z. d. OeIAV 1933, H. 11/12.

[6]) L. Prandtl, Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. Z. ang. Math. 1921.

[7]) Über die Anwendung dieser Voraussetzungen bei der Berechnung von Stahlkonstruktionen s. auch: J. Fritsche, Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Bauing. 1930. — Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung. Z. ang. Math. 1931. — Ferner: K. Girkmann, Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundelegung eines ideal-plastischen Stahls. Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wissensch., Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 140. Bd., 9. u. 10. H., 1931.

[8]) M. Moser, Grundsätzliches zur Streckgrenze. VDI-Forschungsheft 295. — E. Meyer, Die Berechnung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetz nicht folgt. Z. d. VdI 1908. — Über die Zulässigkeit der Bernoullischen Hypothese bei nichtlinearer Spannungsverteilung vgl. die Ausführungen von O. Domke, Handb. f. Eisenbetonbau, 4. Aufl., I. Bd., S. 269.

[9]) K. Ježek, Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischen Stahl. Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wissensch., Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 143. Bd., 7. H., 1934.

[10]) K. Ježek, Die Tragfähigkeit des gleichmäßig querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahl. Stahlbau 1935, H. 5.

[11]) Bei den Versuchen des Deutschen Stahlbau-Verbandes wurden beispielsweise Baustähle verwendet, deren Arbeitslinie nahezu bis zur Stauchgrenze dem Hookeschen Gesetz folgt oder nur wenig davon abweicht. Vgl. W. Rein, Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Heft 4 der Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Berlin 1930, J. Springer.

I. Die kritischen Spannungszustände im Rechteckquerschnitt.

Ein exzentrisch gedrückter Stab von der Länge $2\,l$ (Bild 1) hat in einem Querschnitt x die Axialkraft P und — da die Gleichgewichtsbedingungen zwischen äußeren und inneren Kräften für den verformten Zustand des Stabes aufzustellen sind (Theorie II. Ordnung) — ein Biegemoment $M = P\,y$ aufzunehmen. Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Hebelarm a der Kraft P in den beiden Endquerschnitten während der Belastungssteigerung unverändert bleibt. Die Arbeitslinie des Werkstoffes ist in Bild 2 dargestellt. Bis zur Stauchgrenze bzw. bis zur Streckgrenze, welche Spannungen dem Absolutwert nach gleich groß angenommen werden, gilt das Hookesche Gesetz (Elastizitätsmodul E), mit weiter zunehmender Längenänderung wird die Spannung konstant angenommen, d. h. es wird vollkommene Plastizität vorausgesetzt. Bei der Ermittlung von Formänderungen wird ferner vorausgesetzt, daß die Stabquerschnitte bei der Biegung eben bleiben.

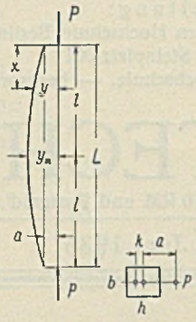

Bild 1.

Ein exzentrisch gedrückter Stab aus einem Werkstoff, der unbeschränkt dem Hookeschen Gesetz folgt, besitzt nur eine mögliche Gleichgewichtslage. Daher scheidet der rein elastische Spannungs- und Verzerrungszustand für die weitere Untersuchung aus. Die Möglichkeit des Eintritts eines instabilen Gleichgewichtszustandes ist an das Auftreten bleibender Formänderungen gebunden. In einem exzentrisch gedrückten rechteckigen Stahlstab wird mit zunehmender Belastung zunächst im mittleren Querschnitt ($x = l$) die Stauchgrenze σ_s erreicht. Bei weiter gesteigerter Belastung bildet sich daher am Innenrand (Biegedruckseite) in Stabmitte ein Fließgebiet aus. Mit Rücksicht auf die Größe der Längenänderung am Außenrand (Biegezugseite) des Stabes sind dann zwei Spannungszustände möglich, welche der weiteren Untersuchung zugrunde zu legen sind. Beim Eintritt des instabilen Gleichgewichtszustandes ist die Spannungsverteilung im Mittelquerschnitt des Stabes durch einen der beiden nachfolgend beschriebenen Spannungszustände, die weiterhin als „kritische" Spannungszustände bezeichnet werden, gekennzeichnet. In den folgenden Rechnungen werden Druckspannungen positiv, Zugspannungen negativ bezeichnet, und es bedeuten $\pm\sigma_s$ die Stauchgrenze bzw. die Streckgrenze, σ_i bzw. σ_a die Spannungen und ε_i bzw. ε_a die spezifischen Längenänderungen am Innenrand bzw. am Außenrand des Stabes.

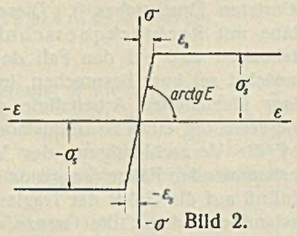

Bild 2.

Spannungszustand I:

$$\varepsilon_i \geqq \varepsilon_s, \qquad \varepsilon_a \leqq -\varepsilon_s,$$
$$\sigma_i = \sigma_s, \qquad \sigma_a \leqq -\sigma_s \quad \text{(Bild 3).}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$(1) \qquad \int_F \sigma\, df = P, \qquad \int_F \sigma\, \zeta\, df = M = P\,y$$

erhält man mit $P = b\,h\,\sigma_m$ (σ_m bedeutet die Axialspannung)

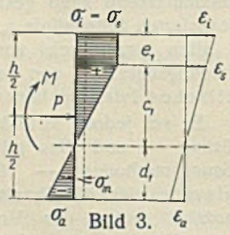

Bild 3.

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{e_1}{h} = \dfrac{3\,\sigma_m}{(\sigma_s - \sigma_m)} \cdot \dfrac{y}{h} - \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{c_1}{h} = \dfrac{9\left[(\sigma_s - \sigma_m) - \dfrac{2\,y}{h} \cdot \sigma_m\right]^2}{8\,(\sigma_s - \sigma_m)^3} \cdot \sigma_s \\[2ex] \varepsilon_i = \left(1 + \dfrac{e_1}{c_1}\right)\varepsilon_s, \qquad \sigma_a = -\dfrac{d_1}{c_1} \cdot \sigma_s. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2\,h\,\sigma_m}{9\,E}\left(\dfrac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1\right)^3 \\[2ex] \beta_1 = \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1\right) \end{cases}$$

ergibt sich die Krümmung des Stabes im Querschnitt (x, y) zu

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} = y'' = -\frac{\varepsilon_s}{c_1} = -\frac{\alpha_1}{(\beta_1 - y)^2}.$$

Jene Durchbiegung, bei welcher am Innenrand gerade die Stauchgrenze erreicht wird ($\sigma_i = \sigma_s$, $\varepsilon_i = \varepsilon_s$), ergibt sich zu

$$(5) \qquad \eta_1 = \frac{h}{6}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1\right).$$

Die größte Durchbiegung dieses Bereiches, bei welcher am Außenrand gerade die Streckgrenze erreicht wird ($\sigma_a = -\sigma_s$, $\varepsilon_a = -\varepsilon_s$), erhält man zu

$$(6) \qquad \eta_2 = \frac{h}{6}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_m} - 1\right)\left(1 + \frac{2\,\sigma_m}{\sigma_s}\right) = \eta_1\left(1 + \frac{2\,\sigma_m}{\sigma_s}\right).$$

Der Gültigkeitsbereich der Differentialgleichung (4) ist daher durch die Beziehung

$$(7) \qquad \eta_1 \leqq y \leqq \eta_2$$

gegeben.

Spannungszustand II:

$$\varepsilon_i > \varepsilon_s, \quad \varepsilon_a \geqq -\varepsilon_s, \quad \sigma_i = \sigma_s, \quad \sigma_a = -\sigma_s \quad \text{(Bild 4).}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (1) erhält man

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{e_2}{h}, \dfrac{d_2}{h} = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \dfrac{\sigma_m}{\sigma_s}\right) - \sqrt{\dfrac{3}{4}\left(1 - \dfrac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2}\right) - \dfrac{3\,\sigma_m}{\sigma_s} \cdot \dfrac{y}{h}} \\[2ex] \dfrac{c_2}{h} = \sqrt{\dfrac{3}{4}\left(1 - \dfrac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2}\right) - \dfrac{3\,\sigma_m}{\sigma_s} \cdot \dfrac{y}{h}} \\[2ex] \varepsilon_i = \left(1 + \dfrac{e_2}{c_2}\right)\varepsilon_s, \qquad \varepsilon_a = -\left(1 + \dfrac{d_2}{c_2}\right)\varepsilon_s. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_2^2 = \dfrac{\sigma_s^3}{3\,h\,E^2\,\sigma_m} \\[2ex] \beta_2 = \dfrac{h\,\sigma_s}{4\,\sigma_m}\left(1 - \dfrac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2}\right) \end{cases}$$

erhält man die Krümmung des Stabes im Querschnitt (x, y) zu

$$(10) \qquad \frac{1}{\varrho} = y'' = -\frac{\varepsilon_s}{c_2} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta_2 - y}}.$$

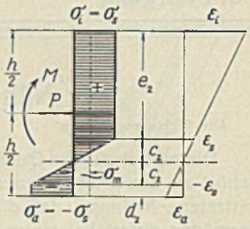

Bild 4.

Die größtmögliche Durchbiegung, bei welcher der Querschnitt vollständig plastiziert ist ($c_2 = 0$), ergibt sich zu

$$(11) \qquad \eta_3 = \beta_2 = \frac{h\,\sigma_s}{4\,\sigma_m}\left(1 - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_s^2}\right).$$

Der Gültigkeitsbereich der Differentialgleichung (10) ist dann durch die Beziehung

$$(12) \qquad \eta_2 \leqq y \leqq \eta_3$$

gegeben.

II. Ermittlung der kritischen Belastung (Tragkraft) des Stabes.

Die Frage nach der Tragfähigkeit eines exentrisch gedrückten Stabes aus einem ideal-plastischen Werkstoff (Bild 2) führt notwendigerweise zur Untersuchung seines Tragverhaltens für unterhalb dieser Höchstlast liegende Beanspruchungen. Die strenge Untersuchung[9]) ergibt, daß der Stab zwei mögliche Gleichgewichtslagen mit den mittleren Durchbiegungen $y_m^{(1)}$ und $y_m^{(2)}$ besitzt. Im Verlaufe einer stetig gesteigerten Belastung (von einer Entlastung und Wiederbelastung sei hier abgesehen) nimmt der Stab die erste Gleichgewichtslage, welche der kleineren Durchbiegung $y_m^{(1)}$ entspricht, ein. Doch ist bei derselben Axialkraft noch eine zweite, stärker ausgebogene Gleichgewichtslage mit der mittleren Durchbiegung $y_m^{(2)} > y_m^{(1)}$ möglich; diese zweite Gleichgewichtslage entspricht jener Grenzlage der ausgebogenen Stabachse, in welcher zwischen äußeren und inneren Kräften gerade noch Gleichgewicht herrscht. Die Bedeutung dieser beiden Gleichgewichtslagen sei anhand des Bildes 5 näher erörtert. Bild 5 zeigt für einen Stab, dessen Querschnittsabmessungen, Länge und Exzentrizität des Kraftangriffes bekannt sind, die aus der strengen analytischen Untersuchung gefundene Beziehung zwischen der Axialspannung σ_m und der mittleren Durchbiegung y_m in Form der Kurve $\sigma_m = f(y_m)$. Diese Kurve besteht aus zwei Ästen: Der aufsteigende Ast (A, G, 1, M) ist der geometrische Ort der mittleren Durchbiegungen $y_m^{(1)}$ aller primären Gleichgewichtslagen, die Abszissen des abfallenden Astes (M, 1', G') entsprechen den mittleren Durchbiegungen $y_m^{(2)}$ aller sekundären Gleichgewichtslagen. Bezüglich der Bedeutung dieser beiden Gleichgewichtslagen gilt folgendes: Der Stab kann durch eine zusätzliche Ausbiegungsverstärkung bei gleichbleibender Axialkraft aus der ersten Gleichgewichtslage (Punkt 1) in die zweite Gleichgewichtslage (Punkt 1') gebracht werden, ohne sein Tragvermögen einzubüßen, vermag jedoch einer darüber hinausgehenden Ausbiegungsverstärkung keinen inneren Widerstand entgegenzusetzen. Die primäre bzw. sekundäre Gleichgewichtslage ist daher bezüglich einer unendlich kleinen Vergrößerung der Ausbiegung als stabil bzw. als labil zu bezeichnen. Als Stabilitätsmaß der ersten Gleichgewichtslage kann die Differenz aus den den beiden Lagen zugeordneten mittleren Durchbiegungen, also

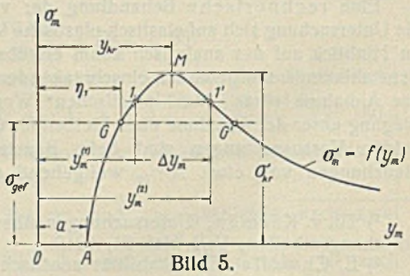

Bild 5.

$$(13) \qquad \Delta y_m = y_m^{(2)} - y_m^{(1)}$$

angesehen werden. Dieses Stabilitätsmaß ist für den unbelasteten bzw. den nicht vorbelasteten Stab unendlich groß, nimmt mit zunehmender Belastung ab und erreicht schließlich bei einer bestimmten Höchstspannung, die als „kritische Spannung" σ_{kr} bezeichnet werden soll, den Wert Null. Die kritische Belastung entspricht der Tragkraft des Stabes, da für größere Axiallasten kein Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften möglich ist. Die Funktion $\sigma_m = f(y_m)$ besitzt im Punkte M, dessen Koordinaten der kritischen mittleren Durchbiegung y_{kr} und der kritischen Axialspannung σ_{kr} entsprechen, ein analytisches Maximum. Zur Ermittlung dieser beiden Größen stehen daher die nachfolgenden Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases} \sigma_m = f(y_m), \\ \dfrac{d\sigma_m}{dy_m} = 0 \end{cases} \qquad \text{zur Verfügung.}$$

Die Grenze jenes Lastbereiches, in welchem die primären Gleichgewichtslagen rein elastischen Verzerrungszuständen des Stabes entsprechen (die zugehörigen sekundären Gleichgewichtslagen sind jedoch durch das Auftreten bleibender Formänderungen im mittleren Stabquerschnitt gekennzeichnet!), ist durch die sogenannte „gefährliche" Spannung σ_{gef} (Punkt G) gegeben[12]. Unter der „gefährlichen" Belastung $P_{gef} = b\,h\,\sigma_{gef}$ wird am Innenrand in Stabmitte gerade die Stauchgrenze σ_s erreicht, und die mittlere Durchbiegung beträgt η_1 [s. Gl. (5)]. Zur Berechnung der „gefährlichen" Spannung dient die nachfolgende, aus der genauen Biegelinie abgeleitete Gleichung

$$(15)\qquad \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{gef}} - 1\right) \cos\left(\frac{2\,l}{h}\sqrt{\frac{3\,\sigma_{gef}}{E}}\right) - \frac{6\,a}{h} = 0.$$

Die „gefährliche" Belastung stellt für die „kritische" Last (Tragkraft) die untere Grenze, die Knicklast dagegen die obere Grenze dar ($P_{gef} \leqq P_{kr} \leqq P_k$).

Die Berechnung der kritischen Belastung setzt die Kenntnis der Funktion $\sigma_m = f(y_m)$ voraus. Diese Funktion wird bei der strengen analytischen Lösung unter Berücksichtigung des Spannungsverlaufes im ganzen Stab, also unter Berücksichtigung der genauen Biegelinie, berechnet, kann allerdings nicht in der durch Gl. (14) angedeuteten expliziten Form dargestellt werden; hierbei kann die ausgebogene Stabachse unter der kritischen Axiallast je nach dem Spannungszustand im End- und Mittelquerschnitt (dies hängt von den Querschnittsabmessungen, der Stablänge und der Exzentrizität des Kraftangriffes ab) fünf verschiedene Gleichgewichtsformen annehmen, die getrennt betrachtet werden müssen. Die weitere Rechnung nach Gl. (14) führt dann zu zwei im allgemeinen transzendenten Gleichungen mit den Unbekannten σ_{kr} und y_{kr}, deren Auflösung sich recht zeitraubend gestaltet.

Beschränkt man sich hingegen auf eine näherungsweise Bestimmung der kritischen Belastung, so kann zur Vereinfachung der Lösung die Gleichgewichtsform der ausgebogenen Stabachse durch eine Sinushalbwelle, welche für den Grenzfall des rein zentrischen Kraftangriffes (Knickung) streng richtige Ergebnisse liefert, ersetzt werden. Der Annahme einer Sinushalbwelle als Biegelinie entspricht zwar an den Stabenden — im Gegensatz zu den wirklichen Verhältnissen — die Krümmung Null, doch stehen die nach dieser Näherungsberechnung ermittelten kritischen Lasten — wie später noch nachgewiesen wird — in sehr guter Übereinstimmung mit den entsprechenden Werten der strengen Lösung. An dieser Stelle sei übrigens bemerkt, daß die allen Grenzbedingungen besser entsprechende Annahme eines Teiles der Sinushalbwelle als Biegelinie zwar eine zeichnerische Lösung des Problems (z. B. für Stäbe aus Baustahl) wesentlich erleichtert[5], jedoch für die rechnerische Behandlung — wie hier nicht näher ausgeführt werden kann — keine wesentlichen Vorteile birgt.

Die Gleichung der Sinuslinie lautet entsprechend dem angenommenen Koordinatensystem (Bild 1)

$$(15)\qquad y = (y_m - a)\cdot \sin\frac{\pi\,x}{2\,l} + a.$$

Die Krümmung ergibt sich daher zu

$$(16)\qquad \frac{1}{\varrho} = y'' = -\frac{\pi^2}{4\,l^2}(y_m - a)\cdot \sin\frac{\pi\,x}{2\,l}.$$

Mittels dieses Näherungswertes für die Krümmung und der bereits abgeleiteten Zusammenhänge zwischen Krümmung, Axialspannung und Durchbiegung kann nun — ohne Rücksicht auf die Spannungsverhältnisse in allen Stabquerschnitten — im mittleren, meist beanspruchten Querschnitt ($x = l$) für die beiden möglichen kritischen Spannungszustände eine funktionale Beziehung zwischen der Axialspannung σ_m und der mittleren Durchbiegung y_m gefunden werden.

Spannungszustand I:

Die Krümmung in Stabmitte erhält man einerseits aus Gl. (4), anderseits aus Gl. (16). Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke ergibt sich die nachfolgende Gleichung:

$$(17)\qquad \frac{1}{\varrho_m} = -\frac{\alpha_1}{(\beta_1 - y_m)^2} = -\frac{\pi^2}{4\,l^2}(y_m - a).$$

[12] Vgl. hierzu den Diskussionsbeitrag von M. T. Huber zum Referat Roš auf der II. Int. Tagung f. Brückenbau u. Hochbau in Wien 1928 (Bericht S. 310 ff.).

Man erhält demnach für die mittlere Durchbiegung y_m eine Gleichung 3. Grades:

$$(18)\qquad \Phi_1 = (y_m - a)(\beta_1 - y_m)^2 - \frac{4\,\alpha_1\,l^2}{\pi^2} = 0.$$

Die zur Berechnung der kritischen Spannung erforderliche zweite Gleichung erhält man nach Gl. (14) zu

$$(19)\qquad \frac{d\sigma_m}{dy_m} = 0 = \frac{\partial\,\Phi_1}{\partial\,y_m} = (\beta_1 - y_m)\left[(\beta_1 - y_m) - 2\,(y_m - a)\right].$$

Da $y_m \neq \beta_1$ ist, kann die kritische Durchbiegung explizit als Funktion der kritischen Spannung dargestellt werden:

$$(20)\qquad y_m = y_{kr} = \frac{\beta_1}{3} + \frac{2\,a}{3}.$$

Bezeichnet man mit $k = \frac{h}{6}$ die Kernweite des Querschnittes und führt man für das Verhältnis aus Exzentrizität zu Kernweite die Bezeichnung

$$(21)\qquad m = \frac{a}{k}$$

ein, so ergibt sich aus Gl. (20) u. (3), wobei $\sigma_m = \sigma_{kr}$ zu setzen ist:

$$(22)\qquad \frac{y_{kr}}{h} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right) + \frac{m}{9}.$$

Führt man den Ausdruck für die kritische Durchbiegung in Gl. (18) ein, so erhält man für die kritische Axialspannung die nachfolgende Bestimmungsgleichung

$$(23)\qquad \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[\frac{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right) - \frac{m}{3}}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right)}\right]^3$$

wobei mit $\lambda = \frac{2\,l}{i}$ $\left(i = \frac{h}{6}\sqrt{3}\ \ldots\ \text{Trägheitshalbmesser}\right)$ das Schlankheitsverhältnis des Stabes bezeichnet wird. Gl. (23) stellt eine Gleichung 4. Grades für die kritische Spannung σ_{kr} dar und ergibt im Grenzfalle $m = 0$ (zentrischer Kraftangriff) für die Knickspannung den Euler-Wert bzw. die Stauchgrenze

$$(24)\qquad \sigma_{kr} = \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_k = \sigma_s.$$

Von einer expliziten Darstellung der kritischen Spannung soll hier Abstand genommen werden. Gl. (23) bietet jedoch die Möglichkeit, die zu einer gegebenen Axialspannung und beliebigem Exzentrizitätsmaß m gehörige Schlankheit in einfacher Form explizit als Funktion dieser beiden Größen darzustellen:

$$(25)\qquad \lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}}\left[\frac{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right) - \frac{m}{3}}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right)}\right]^3.$$

Der Gültigkeitsbereich der Gl. (23) bzw. (25) ist durch die für den vorliegenden Spannungszustand maßgebende größte Durchbiegung η_2 (Gl. 6) gegeben. Aus der Beziehung

$$(26)\qquad y_{kr} = \eta_2 = \frac{h}{6}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right)\left(1 + \frac{2\,\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right)$$

erhält man

$$(27)\qquad \frac{m}{3} = 1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}.$$

Führt man letzteren Wert in Gl. (25) ein, so erhält man die „Grenzschlankheit" des Bereiches in der Form

$$(28)\qquad \lambda_g^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}}\left(1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right)^3.$$

Spannungszustand II:

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke für die Krümmung in Stabmitte nach Gl. (10) u. (16) erhält man den funktionalen Zusammenhang zwischen der Axialspannung und der mittleren Durchbiegung:

$$(29)\qquad \frac{1}{\varrho_m} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta_2 - y_m}} = -\frac{\pi^2}{4\,l^2}(y_m - a).$$

Für die mittlere Durchbiegung ergibt sich dann die nachfolgende Gleichung 3. Grades:

$$(30)\qquad \Phi_2 = (y_m - a)\sqrt{\beta_2 - y_m} - \frac{4\,\alpha_2\,l^2}{\pi^2} = 0.$$

Die zur Ermittlung der kritischen Spannung erforderliche zweite Gl. (14) erhält man aus

$$(31)\qquad \frac{d\sigma_m}{dy_m} = 0 = \frac{\partial\,\Phi_2}{\partial\,y_m} = 2\,(\beta_2 - y_m) - (y_m - a).$$

Die kritische Durchbiegung errechnet sich aus Gl. (31) zu

$$(32)\qquad y_m = y_{kr} = \frac{2\,\beta_2}{3} + \frac{a}{3}.$$

Nach Einführung des Exzentrizitätsmaßes m erhält man

$$\frac{y_{kr}}{h} = \frac{\sigma_s}{6\,\sigma_{kr}}\left(1 - \frac{\sigma_{kr}^2}{\sigma_s^2}\right) + \frac{m}{18}. \tag{33}$$

Führt man diesen Ausdruck in Gl. (30) ein, so ergibt sich für die kritische Axialspannung σ_{kr} die nachfolgende Bestimmungsgleichung

$$\sigma_{kr} = \frac{\left(\frac{\lambda^2 \sigma_s}{\pi^2 E}\right)^2 \sigma_s}{\left[\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s} - \frac{2\,m}{3}\right]^3}. \tag{34}$$

Die kritische Spannung kann in diesem Falle [Gl. (34) ist vom 6. Grade] nicht explizit dargestellt werden. Aus Gl. (34) kann aber das einer vorgegebenen kritischen Spannung und einem gegebenen Exzentrizitätsmaß zugeordnete Schlankheitsverhältnis explizit als Funktion dieser beiden Größen dargestellt werden:

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_s}\sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s} - \frac{2\,m}{3}\right)^3}. \tag{35}$$

Der Gültigkeitsbereich der Gl. (34) bzw. (35) ist durch die für den betrachteten Spannungszustand maßgebenden Grenzen der kritischen Durchbiegung gegeben. Es gilt laut Gl. (12)

$$\eta_2 \leqq y_{kr} \leqq \eta_3. \tag{36}$$

Die untere Grenze ist identisch mit der oberen Grenze für den Spannungszustand I und führt zu Gl. (28). Setzt man

$$y_{kr} = \eta_3 = \frac{h\,\sigma_s}{4\,\sigma_{kr}}\left(1 - \frac{\sigma_{kr}^2}{\sigma_s^2}\right), \tag{37}$$

so erhält man aus Gl. (33) u. (35) zunächst $\lambda = 0$ und für die entsprechende kritische Spannung den Ausdruck

$$\sigma_{kr}^{(0)} = \frac{\sigma_s}{3}\left(\sqrt{m^2 + 9} - m\right). \tag{38}$$

Da in diesem Falle der Querschnitt vollständig plastiziert ist (die Krümmung ist theoretisch unendlich groß), stellt $\sigma_{kr}^{(0)}$ die für ein vorgegebenes Exzentrizitätsmaß m absolut größte Axialspannung dar. Es sei noch bemerkt, daß dieser Spannungswert von der Form der Biegelinie unabhängig und daher mit dem bei der strengen Lösung erhaltenen Ergebnis identisch ist.

Die der vorliegenden Untersuchung zugrunde liegende Spannungs-Dehnungs-Linie (Bild 2) gibt zwar mit ziemlicher Genauigkeit die Arbeitslinie eines Baustahls im elastischen Bereich und im Fließbereich wieder, schließt aber die Berücksichtigung des Verfestigungsbereiches aus. Die Ergebnisse des vorliegenden Verfahrens können daher das wirkliche Tragverhalten exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl nur für Verzerrungszustände, bei welchen noch keine Verfestigung des Werkstoffes eingetreten ist, einigermaßen genau beschreiben. Im Falle eines rechteckigen Stabquerschnitts entspricht die Stauchung $\varepsilon_i^{(m)}$ am Innenrand in Stabmitte der größten Formänderung. Nimmt man an, daß die Verfestigung eines Baustahls bei einer Stauchung ε_V gleich einem Vielfachen p der Stauchung an der Fließgrenze beginnt, und setzt man diesen Wert gleich der Stauchung am Innenrand in Stabmitte, also

$$\varepsilon_V = p\,\varepsilon_s = \varepsilon_i^{(m)}, \tag{39}$$

so kann für die beiden kritischen Spannungszustände zunächst das der Bedingungsgleichung (39) entsprechende Exzentrizitätsmaß m und in weiterer Folge das zugehörige Schlankheitsverhältnis λ ermittelt werden.

Spannungszustand I:

Die Stauchung am Innenrand in Stabmitte ergibt sich aus Gl. (2), wobei $y = y_m$ zu setzen ist. Dann ist nach Gl. (39)

$$\varepsilon_i^{(m)} = \left(1 + \frac{e_1}{c_1}\right)\varepsilon_s = p\,\varepsilon_s. \tag{40}$$

Für den kritischen Gleichgewichtszustand ist $\sigma_m = \sigma_{kr}$ und $y_m = y_{kr}$ zu setzen, nud man erhält zunächst das Exzentrizitätsmaß zu

$$m = 3\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right)\left(1 + \frac{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}}{p - 1}\right)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}}{p - 1}\right)^2}}\right]. \tag{41}$$

Führt man diesen Wert in Gl. (25) ein, so ergibt sich das der Bedingung Gl. (40) entsprechende Schlankheitsverhältnis zu

$$\lambda_p^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}}\left[\frac{\left(1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right)}{(p - 1)}\left[\sqrt{1 + \frac{2(p - 1)}{\left(1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right)}} - 1\right]\right]^3. \tag{42}$$

Spannungszustand II:

Die Stauchung am Innenrand in Stabmitte berechnet sich nach Gl. (8), wobei $y = y_{kr}$ zu setzen ist, und nach Gl. (39) zu

$$\varepsilon_i^{(m)} = \left(1 + \frac{e_2}{c_2}\right)\varepsilon_s = p\,\varepsilon_s. \tag{43}$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich das entsprechende Exzentrizitätsmaß zu

$$m = \frac{3}{2\,p^2}\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} + 1\right)\left[p^2\left(1 - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right) - \left(1 + \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right)\right]. \tag{44}$$

Führt man diesen Ausdruck in Gl. (35) ein, so erhält man das zugeordnete Schlankheitsverhältnis λ_p in der Form

$$\lambda_p^2 = \frac{\pi^2 E}{p^3\,\sigma_{kr}}\left(1 + \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\right)^3. \tag{45}$$

Zusammenstellung der Formeln:

Die einer vorgegebenen Axialspannung σ_{kr} und einem gegebenen Exzentrizitätsmaß m zugeordnete Gleichgewichtsschlankheit eines exzentrisch gedrückten Stabes aus einem „Ideal"-Stahl (gegeben ist die Fließgrenze σ_s und der Elastizitätsmodul E) berechnet sich je nach der Größe des Exzentrizitätsmaßes aus einer der beiden nachstehend angegebenen Formeln:

Formel (I)

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}}\left[\frac{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right) - \frac{m}{3}}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - 1\right)}\right]^3$$

$$\text{wenn} \ldots \lambda^2 - \frac{\pi^2 E\,m^3}{9\,\sigma_s\,(3 - m)} > 0.$$

Formel (II)

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_s}\sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s}\left[\frac{\sigma_s}{\sigma_{kr}} - \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s} - \frac{2\,m}{3}\right]^3}$$

$$\text{wenn} \ldots \lambda^2 - \frac{\pi^2 E\,m^3}{9\,\sigma_s\,(3 - m)} < 0.$$

Man erkennt, daß für sehr große Exzentrizitätsmaße $m \geqq 3$ nur die Formel (II) zu verwenden ist.

Es könnte zunächst als Nachteil empfunden werden, daß nicht die kritische Spannung, sondern nur das Schlankheitsverhältnis explizit darstellbar ist, doch ist dieser Umstand beim Entwurf eines Diagramms (s. Abschnitt III) gleichgültig, und im praktisch wichtigeren Falle der Querschnittsbemessung erweist sich sogar die letztere Gestaltung als vorteilhafter (s. Abschnitt V).

III. Diagramme der kritischen Spannungen für die „Ideal"-Stähle St_I 37 und St_I 52.

Die zur Berechnung der Tragfähigkeit exzentrisch gedrückter Stäbe aus einem „Ideal"-Stahl angegebenen Formeln (I) und (II) sind zwar sehr einfach, gestatten aber keinen unmittelbaren Vergleich mit den weitaus schwieriger bestimmbaren Ergebnissen der strengen Lösung. Es scheint daher notwendig, den Zusammenhang zwischen der kritischen Spannung σ_{kr}, dem Exzentrizitätsmaß m und dem Schlankheitsverhältnis λ übersichtlich darzustellen; zu den beiden unabhängig Veränderlichen m und λ treten noch zwei weitere, nämlich die Fließgrenze σ_s und der Elastizitätsmodul E hinzu. Der Einfluß der beiden letzteren, die Werkstoffeigenschaften kennzeichnenden Größen auf die kritische Spannung kann nur durch Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Formänderungsgesetze festgestellt werden. Nachfolgend werden die Rechnungen für zwei „Ideal"-Stähle durchgeführt; für den Elastizitätsmodul und die Fließgrenze werden die den genormten Stahlsorten (Deutsche Normung) Flußstahl St 37 und Baustahl St 52 entsprechenden Werte gewählt: $E = 2100000$ kg/cm² und $\sigma_s = 2400$ kg/cm² bzw. 3600 kg/cm². Die diese Eigenschaften und ein Formänderungsgesetz nach Bild 2 aufweisenden Stahlsorten sollen in Hinkunft als „Ideal"-Stahl St_I 37 und „Ideal"-Stahl St_I 52 bezeichnet werden.

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Bild 6 u. 7 graphisch dargestellt. Die kritische Spannung $\sigma_{kr} = \psi(\lambda, m)$ wurde für die Exzentrizitätsmaße $m = 0{,}10$ bis 4,00 und für die Schlankheitsverhältnisse $\lambda = 0$ bis 200 ermittelt. Die Linie der Knickspannungen wird für $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_s = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_s}}$ aus der zur λ-Achse parallelen Geraden $\sigma_k = \sigma_s$ und für $\lambda \geqq \lambda_s$ aus der Eulerhyperbel $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ gebildet. Die Gültigkeitsbereiche (I) und (II) der Formeln (I) und (II) sind durch die „Grenzkurve" (analytische Form s. Gl. 28) voneinander geschieden. Ferner sind die Werte der kritischen Spannung für die „Ideal"-Stähle St_I 37 und St_I 52 in Tafel I und II in Abhängigkeit vom Exzentrizitätsmaß und vom Schlankheitsverhältnis bis auf 10 kg/cm² genau (dies genügt für praktische Zwecke vollkommen und erhöht außerdem die Übersichtlichkeit der Tafelwerte) angegeben. Für Exzentrizitätsmaße und Schlankheitsverhältnisse, welche zwischen den Tafelwerten liegen, kann geradlinig interpoliert werden. Ein Vergleich der Ergebnisse des vorliegenden Näherungsverfahrens mit den entsprechenden Werten der strengen Lösung[9]) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung: Die Spannungswerte für $\lambda = 0$ sind nach Gl. (38) identisch. Für $\lambda = \infty$ ergibt sich natürlich in beiden Fällen der Wert $\sigma_{kr} = 0$. Für zwischen diesen Grenzen liegende Schlankheitsverhältnisse bleiben die größten Abweichungen in der kritischen Spannung unter 3%, sind also praktisch bedeutungslos.

Tafel I. Kritische Spannungen σ_{kr} in t/cm² für $\sigma_s = 2{,}4$ t/cm², $E = 2100$ t/cm² (St$_t$ 37).

λ \ m	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
0	2,32	2,21	2,03	1,87	1,73	1,60	1,48	1,38	1,29	1,13	1,00	0,89	0,80
20	2,28	2,13	1,92	1,75	1,61	1,50	1,39	1,29	1,20	1,05	0,94	0,84	0,76
30	2,26	2,09	1,85	1,68	1,54	1,42	1,32	1,23	1,15	1,01	0,90	0,80	0,73
40	2,23	2,04	1,78	1,60	1,46	1,34	1,25	1,16	1,09	0,96	0,85	0,77	0,70
50	2,20	1,97	1,70	1,52	1,38	1,27	1,17	1,10	1,03	0,91	0,81	0,73	0,66
60	2,15	1,89	1,62	1,43	1,30	1,19	1,10	1,03	0,97	0,85	0,77	0,69	0,63
70	2,07	1,81	1,52	1,34	1,21	1,11	1,03	0,96	0,91	0,80	0,72	0,66	0,60
80	1,97	1,69	1,42	1,25	1,13	1,04	0,96	0,90	0,85	0,75	0,68	0,62	0,57
90	1,83	1,56	1,31	1,16	1,05	0,96	0,89	0,84	0,79	0,71	0,64	0,59	0,54
100	1,65	1,42	1,20	1,07	0,97	0,89	0,83	0,78	0,73	0,66	0,60	0,55	0,51
110	1,46	1,28	1,10	0,98	0,89	0,82	0,77	0,72	0,68	0,62	0,56	0,52	0,48
120	1,28	1,14	1,00	0,89	0,82	0,76	0,71	0,67	0,63	0,58	0,53	0,49	0,45
130	1,13	1,02	0,90	0,81	0,75	0,70	0,66	0,62	0,59	0,54	0,50	0,46	0,42
140	0,99	0,91	0,81	0,74	0,69	0,64	0,61	0,58	0,55	0,50	0,47	0,43	0,40
150	0,87	0,81	0,73	0,68	0,63	0,59	0,56	0,54	0,51	0,47	0,44	0,40	0,38
160	0,78	0,73	0,66	0,62	0,58	0,55	0,52	0,50	0,47	0,44	0,41	0,38	0,36
170	0,69	0,65	0,60	0,57	0,53	0,51	0,48	0,46	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34
180	0,62	0,59	0,55	0,52	0,49	0,47	0,44	0,43	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32
190	0,56	0,53	0,50	0,48	0,45	0,43	0,41	0,40	0,38	0,36	0,34	0,32	0,30
200	0,51	0,48	0,46	0,44	0,42	0,40	0,38	0,37	0,36	0,34	0,32	0,30	0,28

Tafel II. Kritische Spannungen σ_{kr} in t/cm² für $\sigma_s = 3{,}6$ t/cm², $E = 2100$ t/cm² (St$_t$ 52).

λ \ m	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
0	3,48	3,31	3,05	2,81	2,59	2,40	2,23	2,07	1,93	1,69	1,49	1,33	1,20
20	3,41	3,17	2,84	2,58	2,37	2,19	2,03	1,89	1,77	1,55	1,38	1,23	1,11
30	3,36	3,08	2,71	2,45	2,23	2,05	1,91	1,78	1,66	1,46	1,30	1,17	1,06
40	3,30	2,96	2,57	2,30	2,08	1,91	1,77	1,66	1,55	1,37	1,22	1,10	1,00
50	3,21	2,82	2,41	2,14	1,93	1,77	1,64	1,53	1,44	1,27	1,14	1,03	0,94
60	3,06	2,64	2,23	1,97	1,78	1,63	1,51	1,41	1,32	1,18	1,06	0,96	0,88
70	2,84	2,42	2,03	1,80	1,62	1,49	1,38	1,29	1,22	1,09	0,98	0,90	0,82
80	2,54	2,18	1,83	1,63	1,47	1,36	1,26	1,18	1,12	1,00	0,91	0,84	0,77
90	2,19	1,91	1,64	1,46	1,33	1,23	1,15	1,08	1,02	0,92	0,84	0,78	0,72
100	1,87	1,66	1,45	1,31	1,20	1,12	1,04	0,99	0,93	0,85	0,78	0,72	0,67
110	1,59	1,45	1,28	1,17	1,08	1,01	0,95	0,90	0,85	0,78	0,72	0,67	0,62
120	1,36	1,26	1,14	1,04	0,97	0,91	0,86	0,82	0,78	0,72	0,66	0,62	0,58
130	1,17	1,10	1,01	0,93	0,88	0,83	0,78	0,75	0,71	0,66	0,61	0,57	0,54
140	1,02	0,97	0,90	0,84	0,79	0,75	0,71	0,68	0,65	0,61	0,57	0,53	0,50
150	0,89	0,85	0,80	0,75	0,72	0,68	0,65	0,62	0,60	0,56	0,53	0,49	0,47
160	0,79	0,76	0,72	0,68	0,65	0,62	0,59	0,57	0,55	0,52	0,49	0,46	0,44
170	0,70	0,68	0,64	0,61	0,59	0,56	0,54	0,52	0,51	0,48	0,45	0,43	0,41
180	0,63	0,61	0,58	0,56	0,54	0,51	0,50	0,48	0,47	0,44	0,42	0,40	0,38
190	0,57	0,55	0,53	0,51	0,49	0,47	0,46	0,44	0,43	0,41	0,39	0,37	0,36
200	0,51	0,50	0,48	0,46	0,45	0,44	0,42	0,41	0,40	0,38	0,36	0,35	0,34

Um den Einfluß der Vernachlässigung des bei jedem Baustahl vorhandenen Verfestigungsbereiches auf die vorliegenden Ergebnisse kennenzulernen, werden alle jene kritischen Gleichgewichtslagen ermittelt, bei denen die Formänderung am Innenrand in Stabmitte jener Stauchung entspricht, bei welcher eine Verfestigung eintreten würde. Nimmt man an, daß die Verfestigung bei einer Stauchung $\varepsilon_V = 10\,^0/_{00} = \varepsilon_i^{(m)}$ (s. Gl. 39) einsetzen würde, so ist die dieser Bedingung entsprechende Kurve nach Gl. (42) im Bereich (I) und nach Gl. (45) im Bereich (II) zu ermitteln.

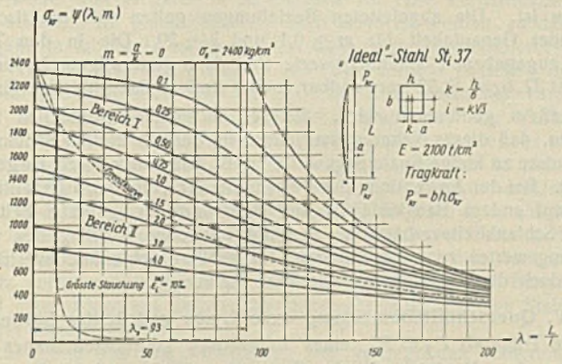

Bild 6.

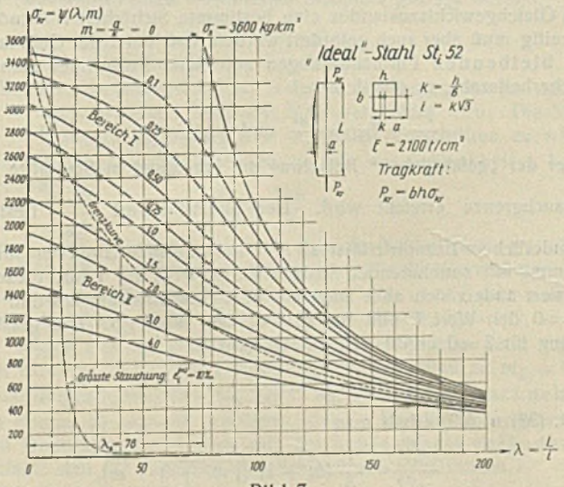

Bild 7.

Diese Linie größter Stauchung ist in Bild 6 u. 7 eingezeichnet. Man erkennt, daß derartige Formänderungen selbst bei großen Exzentrizitätsmaßen nur in sehr gedrungenen Stäben (für St$_t$ 37 . . . $\lambda < 10$, für St$_t$ 52 . . . $\lambda < 14$) auftreten. Würde man den Beginn des Verfestigungsbereiches bei einer noch kleineren Stauchung etwa $\varepsilon_V = 6\,^0/_{00}$ (dies entspräche dem von Roš-Brunner[4]) verwendeten Baustahl von „durchschnittlicher Qualität") annehmen, dann würden derartige Formänderungen bereits bei Stäben mit einem Schlankheitsverhältnis $\lambda \leqq 25$ bzw. $\lambda \leqq 30$ auftreten. Daraus folgt, daß auch unter sehr ungünstigen Umständen, d. h. unter der Annahme eines außergewöhnlich kleinen Fließbereiches in allen praktisch vorkommenden Fällen (Stäbe mit einem Schlankheitsverhältnis $\lambda < 30$ gelangen wohl nur sehr selten zur Ausführung) die kritische Spannung erreicht wird, bevor eine Verfestigung eintreten könnte. Die Vernachlässigung des Verfestigungsbereiches hat daher auf die Größe der kritischen Spannung von Stäben mit einem Schlankheitsverhältnis $\lambda > 30$ keinen Einfluß. Die durch die Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes bis zur Fließgrenze an Stelle des wirklichen Verlaufes der Arbeitslinie bewirkten Abweichungen in der kritischen Spannung werden im folgenden Abschnitt besprochen.

IV. Anwendung des Verfahrens auf Stäbe aus Baustahl.

Der Einfluß des Formänderungsgesetzes eines Baustahls auf die Größe der kritischen Spannungen zeigt sich am deutlichsten im Verlauf der Knickspannungslinie. Für einen Baustahl mit einem ausgeprägten Fließbereich, welcher bei den derzeit gebräuchlichen Stahlsorten immer vorhanden ist (Arbeitslinie s. Bild 8; der Verfestigungsbereich ist strichliert eingezeichnet), erhält man nach Engeßer-Kármán die in Bild 9 dargestellte Knickspannungslinie. Die Knickspannungslinie zweigt in der Höhe der Proportionalitätsgrenze σ_P von der Euler-Hyperbel ab und erreicht bei $\lambda = 0$ die Stauchgrenze σ_s (vollgezeichnete Linie). Der oberhalb der Stauchgrenze liegende, strichliert eingezeichnete Ast der Knickspannungslinie entspricht dem Verfestigungsbereich des Werkstoffes. Man erhält demnach für kleine Schlankheitsverhältnisse drei verschiedene Werte für die Knickspannung. Hartmann konnte diesen scheinbaren Widerspruch der Engeßer-Kármánschen Theorie aufklären[13]) und kommt zu dem Schlusse, daß die schon beim kleinsten dieser Spannungswerte (dieser liegt auf der vollgezeichneten Linie σ_k') vorhandene Labilität wohl kaum überwunden werden kann, so daß die oberhalb der Stauchgrenze liegenden Knickspannungswerte für die Praxis keine Bedeutung besitzen. Bei den derzeit gebräuchlichen Stahlsorten sind übrigens die nach der Engeßer-Kármánschen Theorie berechneten oberhalb der Stauchgrenze liegenden Knickspannungen sehr kleinen Schlankheitsverhältnissen ($\lambda < 20$) zugeordnet; derart gedrungene Stäbe kommen aber auch für die Praxis kaum in Frage.

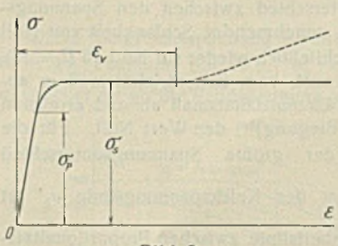

Bild 8.

Für die weitere Untersuchung kommt daher nur die in Bild 9 vollgezeichnete Knickspannungslinie σ_k' in Betracht, die nur vom Verlauf der Arbeitslinie zwischen Proportionalitäts- und Stauchgrenze abhängig ist und daher auch unter Zugrundelegung der in Bild 8 vollgezeichneten, nahezu ideal-plastischen Spannungs-Dehnungs-Linie erhalten wird. Bei ein und derselben Stahlsorte ist nun der Verlauf der Arbeitslinie zwischen Proportionalitäts- und Stauchgrenze recht schwankend, so daß auch die Knickspannungslinie in diesem Bereich — wobei von Schwankungen in der Höhe der Fließgrenze selbst und dem Auftreten einer oberen und unteren Fließgrenze zunächst abgesehen werden soll — keineswegs eindeutig festliegt. Diese für die derzeit gebräuchlichen Baustähle durch Versuche verhältnismäßig noch wenig geklärten Verhältnisse zwingen

[13]) F. Hartmann, Schlußbericht des I. Int. Kongr. f. Brücken- u. Hochbau in Paris, 1932, S. 40.

zu mehr oder weniger ungünstigen Annahmen in der Wahl der Arbeitslinie bzw. der Knickspannungslinie. Dieser Hinweis mag genügen, um die Bedeutung des Formänderungsgesetzes eines Baustahls für die vorliegende Untersuchung im richtigen Sinne einzuschätzen.

Bei den Versuchen des Deutschen Stahlbau-Verbandes beispielsweise wurden Baustähle verwendet, welche nahezu bis zur Stauchgrenze dem Hookeschen Gesetz folgen[11]). In diesem Falle verläuft die Knickspannungslinie bis nahe an die Stauchgrenze nach der Euler-Hyperbel und die Unterschiede gegenüber der Knickspannungslinie des „Ideal"-Stahls gleicher Stauchgrenze (in Bild 9 dünn eingezeichnet) sind unwesentlich; dann können auch die nach den Formeln (I) bzw. (II) berechneten kritischen Spannungen σ_{kr} mit praktisch ausreichender Genauigkeit (größter Fehler etwa $+4\,\%$) verwendet werden.

Zur Feststellung des Einflusses, den eine vom Formänderungsgesetz des Ideal-Stahls stärker abweichende Spannungs-Dehnungs-Linie auf die Größe der kritischen Spannung eines exzentrisch gedrückten Stabes besitzt, müßte demnach die Untersuchung bei derselben Stahlsorte (Stauchgrenze und Elastizitätsmodul bleiben unverändert) für mehrere, zwischen Proportionalitäts- und Stauchgrenze verschieden verlaufende Arbeitslinien vorgenommen werden. Die dem geänderten Formänderungsgesetz entsprechenden kritischen Spannungen σ_{kr}' weichen mehr oder weniger von den für den Ideal-Stahl ermittelten Werten σ_{kr} ab. Man kann nun diese Abweichungen $\Delta\sigma_{kr}$ rein qualitativ als Funktion der Schlankheit und des Exzentrizitätsmaßes angeben. In Bild 9 sind die Linien der kritischen Spannung σ_{kr} (Ideal-Stahl) und σ_{kr}' (Baustahl nach Bild 8) für ein bestimmtes Exzentrizitätsmaß m als Funktion der Schlankheit dargestellt.

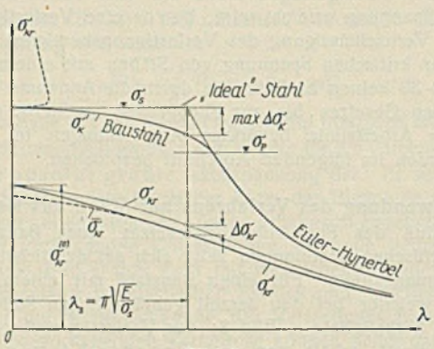

Bild 9.

Diese Linien besitzen für $\lambda = 0$ dieselbe Ordinate $\sigma_{kr}^{(0)}$ (Gl. 38) und haben die λ-Achse als Asymptote. Der Unterschied zwischen den Spannungswerten $(\sigma_{kr} - \sigma_{kr}') = \Delta\sigma_{kr}$ wächst mit zunehmender Schlankheit von Null bis zu einem Höchstwert und nimmt schließlich wieder auf Null ab ($\lambda = \infty$). Die Spannungsdifferenzen sind aber auch vom Exzentrizitätsmaß m abhängig; sie nehmen mit wachsendem Exzentrizitätsmaß ab und erreichen für $m \to \infty$ ($\sigma_{kr} = 0$, Fall der reinen Biegung)[14]) den Wert Null. Für die Knickspannungslinien ergibt sich der größte Spannungsunterschied $\max \Delta\sigma_k$ für $\lambda_s = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_s}}$. Die Form der Knickspannungslinie σ_k' ist kennzeichnend für den Verlauf der Arbeitslinie zwischen Proportionalitäts- und Stauchgrenze; je weniger die Spannungs-Dehnungs-Linie von der Arbeitslinie des „Idealstahls" abweicht, desto kleiner wird $\max \Delta\sigma_k$ und damit auch die Differenz $\Delta\sigma_{kr}$ in den kritischen Spannungen. Es ist daher naheliegend, die größte Differenz in den Knickspannungen als Maß für die Spannungsunterschiede $\Delta\sigma_{kr}$ anzusehen.

Mit einer praktischen Erfordernissen entsprechenden Annäherung kann bei der vorliegenden Aufgabe dem Formänderungsgesetz des Baustahls durch Einführung eines „ideellen" Exzentrizitätsmaßes $\bar{m} > m$ Rechnung getragen werden. Dieses „ideelle" Exzentrizitätsmaß $\bar{m}$ müßte der einem gegebenen Exzentrizitätsmaß entsprechenden größten Spannungsdifferenz $\max \Delta\sigma_{kr}$ gemäß gewählt werden und ergibt die aus den Formeln (I) bzw. (II) (hier ist sinngemäß $\bar{m}$ statt m einzuführen) berechnete, in Bild 9 strichliert eingezeichnete $\bar{\sigma}_{kr}$-Linie; man rechnet dann zwar im Bereich kleiner Schlankheitsverhältnisse etwas zu ungünstig (man erhält zu kleine Spannungswerte), doch spielen gerade die kleinen Schlankheitsverhältnisse ($\lambda < 30$) praktisch keine Rolle. Da die Spannungsunterschiede $\Delta\sigma_{kr}$ von $\max \Delta\sigma_k$ und m abhängig sind, wäre $\bar{m}$ als Funktion dieser Größen anzusehen. Nimmt man bei der Aufstellung eines einfachen analytischen Ausdrucks für $\bar{m}$ auf sehr kleine Exzentrizitätsmaße (etwa $m < 0{,}1$) keine Rücksicht, so könnte das „ideelle" Exzentrizitätsmaß in der Form

$$\bar{m} = m\left[1 + \frac{\max \Delta\sigma_k}{\sigma_s} \cdot \frac{K}{\varphi(m)}\right] \tag{46}$$

dargestellt werden (K ist eine Konstante); hierbei muß für $m = \infty$ . . . $\bar{m} = m$, d. h. $\frac{m}{\varphi(m)} = 0$ werden. Die Funktion $\varphi(m)$ muß also im einfachsten Falle eine rationale Funktion vom mindestens 2. Grade sein.

Zur Bestimmung der Funktion $\varphi(m)$ und der Konstanten K können die Ergebnisse des von Hartmann entwickelten graphischen Näherungsverfahrens[5]) für exzentrisch gedrückte Stäbe aus einem Baustahl St 37 ($\sigma_s = 2400$ kg/cm², sehr „weicher" Verlauf der Arbeitslinie zwischen Proportionalitäts- und Fließgrenze) herangezogen werden[15]). Man erhält dann genau genug

$$\bar{m} = m\left[1 + \frac{6 \max \Delta\sigma_k}{\sigma_s (1+m)^2}\right]. \tag{47}$$

Nimmt man in erster Näherung an, daß die Funktion $\varphi(m)$, die die Abnahme der jeweils größten Spannungsdifferenz $\Delta\sigma_{kr}$ mit zunehmendem Exzentrizitätsmaß wiedergibt, mit der Stahlsorte nur wenig veränderlich ist, so hängt $\bar{m}$ in erster Linie von der größten Differenz in den Knickspannungen $\max \Delta\sigma_k$ und der Stauchgrenze σ_s ab. Gl. (47) besitzt dann eine sehr große Allgemeingültigkeit und kann näherungsweise auch bei anderen Baustählen angewendet werden.

Nach den obigen Ausführungen ist für einen exzentrisch gedrückten Stab aus einem Baustahl, dessen Knickspannungslinie eine größte Differenz $\max \Delta\sigma_k$ gegenüber der Knickspannungslinie des „Ideal"-Stahls gleicher Stauchgrenze σ_s und gleichen Elastizitätsmoduls E aufweist, das Exzentrizitätsmaß $m = \frac{a}{k}$ auf den durch Gl. (47) gegebenen Wert $\bar{m}$ zu erhöhen. Das der kritischen Axialspannung $\bar{\sigma}_{kr}$ zugeordnete Schlankheitsverhältnis λ ist dann aus Formel (I) bzw. (II) zu ermitteln, wobei m durch $\bar{m}$ zu ersetzen ist. Die abgeleiteten Beziehungen gelten mit praktisch ausreichender Genauigkeit für $m \geqq 0{,}1$ und $\lambda \geqq 30$. Die in den Tafeln I und II angegebenen Spannungswerte sind dann ganz allgemein für jeden Stahl St 37 bzw. St 52 verwendbar, wenn statt m das „ideelle" Exzentrizitätsmaß $\bar{m}$ genommen wird. Es sei nochmals ausdrücklich hervorgehoben, daß dieses Näherungsverfahren im Bereich kleiner Schlankheitsverhältnisse zu kleine Spannungswerte ergibt, daß man also zu ungünstig rechnet. Bei der Anwendung des Verfahrens der „ideellen" Exzentrizitätsmaße auf andere Baustähle ist der zu erwartende größte Fehler für kleine Schlankheitsverhältnisse ($\lambda \sim 30$) mit etwa $-10\,\%$ des wahren Spannungswertes zu veranschlagen, für größere Schlankheitsverhältnisse sind jedoch die Abweichungen weitaus kleiner[16]).

V. Querschnittsbemessung exzentrisch gedrückter Stäbe.

Die Tragkraft $P_T = P_{kr}$ eines exzentrisch gedrückten Stabes erhält man aus dem Produkt kritische Spannung mal Querschnittsfläche. Die Gebrauchslast P ist dann so zu wählen, daß gegen Erreichen des kritischen Gleichgewichtszustandes eine bestimmte Sicherheit vorhanden ist; gleichzeitig muß aber auch gefordert werden, daß unter der Gebrauchslast keine bleibenden Formänderungeu auftreten. Bezeichnet man mit ν die Sicherheitszahl, so gilt demnach

$$\frac{P}{F} = \sigma_m = \frac{\sigma_{kr}}{\nu} \quad \text{und} \quad \sigma_m \leqq \sigma_{gef}, \tag{48}$$

da unter der „gefährlichen" Belastung am Innenrand in Stabmitte gerade die Stauchgrenze erreicht wird. Der Verhältniswert $\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{gef}}$ besitzt bei unveränderlichem Exzentrizitätsmaß m = konst. seinen Größtwert für $\lambda = 0$ und nimmt mit zunehmender Schlankheit ($\lambda \to \infty$) auf 1 ab; dieser Verhältniswert ändert sich aber auch mit dem Exzentrizitätsmaß und besitzt für $m = 0$ den Wert 1 und für $m = \infty$ den Wert 1,5. Die gefährliche Spannung für $\lambda = 0$ ergibt sich aus Gl. (15) zu

$$\sigma_{gef}^{(0)} = \frac{\sigma_s}{1+m}. \tag{49}$$

Aus Gl. (38) u. (49) erhält man

$$\frac{\sigma_{kr}^{(0)}}{\sigma_{gef}^{(0)}} = \frac{1}{3}(m+1)\left(\sqrt{m^2+9} - m\right). \tag{50}$$

---

[14]) Die Linie $m = \infty$ entspricht der λ-Achse. In diesem Falle ist der Querschnitt vollständig plastiziert, d. h. die Spannungsverteilung ergibt sich aus Bild 4 für $\sigma_m = 0$ und $c_2 = 0$.

[15]) Herr Prof. Dr. F. Hartmann stellte mir zu diesem Zwecke sein noch nicht veröffentlichtes Diagramm der kritischen Spannungen freundlichst zur Verfügung.

[16]) Für sehr kleine Exzentrizitätsmaße ($m < 0{,}1$) kann das „ideelle" Exzentrizitätsmaß auch in der Form $\bar{m} \doteq m + \left(\frac{\max \Delta\sigma_K}{\sigma_s}\right)^2$ dargestellt werden. Über die Ableitung dieser Formel, welche mit ausreichender Genauigkeit (größter Fehler $\pm 6\,\%$) auch für größere Exzentrizitätsmaße ($m > 0{,}1$) an Stelle der Gl. (47) verwendet werden kann, soll a. a. O. ausführlich berichtet werden.

Die Funktion Gl. (50) besitzt für $m = 4$ ein analytisches Maximum. Der entsprechende größte Funktionswert wäre in diesem Falle als kleinste Sicherheit anzusehen und ergibt sich zu

$$\max \frac{\sigma_{kr}^{(0)}}{\sigma_{gef}^{(0)}} = \frac{5}{3} \leqq \nu. \tag{51}$$

Man beachte, daß die von der Deutschen Normung vorgeschriebene kleinste Knicksicherheitszahl (für $\lambda = 0$) nur etwas größer ist als der obige Wert ($1{,}71 > 1{,}67$). Ganz allgemein sollte also nach den obigen Ausführungen die Sicherheitszahl für gedrungene Stäbe, bei denen sich der Einfluß eines exzentrischen Kraftangriffs auch besonders bemerkbar macht, größer gewählt werden als für schlanke Stäbe[17]).

Setzt man die Sicherheitszahl eines exzentrisch gedrückten Stabes gleich der Knicksicherheitszahl des zentrisch gedrückten Stabes gleicher Schlankheit und führt den Verhältniswert

$$\varkappa = \frac{\sigma_k}{\sigma_{kr}} \tag{52}$$

ein, so ergibt sich mit Verwendung der „Knickzahl" ω die nachfolgende, den Deutschen Berechnungsvorschriften für zentrisch gedrückte Stäbe angepaßte Bemessungsformel

$$\varkappa\, \omega \cdot \frac{P}{F} \leqq \sigma_{zul}. \tag{53}$$

Bei der Berechnung der $\varkappa$-Werte für die normenmäßigen (Deutsche Vorschriften) Stähle Flußstahl St 37 und Baustahl St 52 wäre nach dem angegebenen Näherungsverfahren für das „ideelle" Exzentrizitätsmaß $\bar{m}$ (Gl. 47) die erste bzw. die zweite der nachfolgenden Formeln zu verwenden:

$$\text{St 37} \ldots \bar{m} = m\left[1 + \frac{0{,}675}{(1+m)^2}\right] \tag{54}$$

$$\text{St 52} \ldots \bar{m} = m\left[1 + \frac{1{,}014}{(1+m)^2}\right]. \tag{55}$$

Zur Ermittlung der kritischen Spannungen ist dann die Formel (I) bzw. (II) heranzuziehen oder es kann auch die Tafel I bzw. II benutzt werden, wobei dort m durch $\bar{m}$ zu ersetzen ist. Die Verhältniszahlen $\varkappa$ können demnach für jeden Einzelfall rasch ermittelt werden, so daß ihre Wiedergabe in tabellarischer Form nicht unbedingt nötig erscheint[18]). Es sei nur erwähnt, daß die größten Abweichungen zwischen den $\varkappa$-Werten für die Stahlsorten St 37 und St 52 bei dem Schlankheitsverhältnis $\lambda = 100$ auftreten; bei diesem Schlankheitsgrad sind die Verhältniszahlen $\varkappa$ für St 52 um 16% ($m = 0{,}1$) bis 25% ($m = 4$) kleiner als die entsprechenden Werte für St 37. Die $\varkappa$-Werte sind also in nicht unerheblichem Maße von der Stahlsorte abhängig. Auf diesen Umstand sei ausdrücklich hingewiesen, da erst kürzlich vorgeschlagen wurde, die für ein bestimmtes Formänderungsgesetz ermittelten $\varkappa$-Werte auch für andere Stahlsorten zu verwenden[2]). Diese einschränkende Annahme ist bei dem vorliegenden Verfahren nicht notwendig, da die Formeln (I) bzw. (II) ganz allgemein gelten und daher für jede beliebige Stahlsorte verwendet werden können.

Nachfolgend soll die Anwendung des vorliegenden Näherungsverfahrens im Falle der Querschnittsbemessung eines exzentrisch gedrückten Baustahlstabes an Hand eines Beispiels gezeigt werden.

Zahlenbeispiel.

Gegeben: $P = 12$ t, $L = 250$ cm, $a = 1$ cm.

Gesucht: Die Querschnittsfläche, wenn $h = b$ angenommen und ein normenmäßiger Flußstahl St 37 verwendet wird. Die Sicherheitszahl ν ist nach den Deutschen Vorschriften zu wählen.

Zwischen dem Exzentrizitätsmaß m und der Schlankheit λ besteht die Beziehung

$$\frac{L}{a} = \frac{\lambda\sqrt{3}}{m}.$$

Da weder λ noch m bekannt ist, muß einer der beiden Werte geschätzt werden. Den oberen Grenzwert für das Schlankheitsverhältnis λ_k erhält man aus den Querschnittsabmessungen für zentrischen Druck (Knickung); in diesem Falle ergibt sich: $h_k \doteq 6{,}2$ cm, $\lambda_k = 139$, $\nu = 3{,}5$. Aus der obigen Beziehung zwischen m und λ erhält man dann zugleich auch den oberen Grenzwert für das Exzentrizitätsmaß zu $m_k = 0{,}963$. Für die nachfolgende Rechnung ist nun $\lambda < \lambda_k$ oder $m < m_k$ anzunehmen und aus Formel (I) bzw. (II) nachzuprüfen. Da die Sicherheitszahl ν nach den Deutschen Vorschriften mit der Schlankheit veränderlich ist, empfiehlt sich die Annahme des Schlankheitsverhältnisses λ.

1. Annahme: $\lambda' = 130$.

Man erhält: $m' = 0{,}902$, $\nu' = 3{,}5$, $h' = \frac{6a}{m'} = 6{,}66$ cm, $F' = 44{,}3$ cm² und $\sigma'_{kr} = \nu' \cdot \frac{P}{F'} = 0{,}948$ t/cm².

Zur Berechnung des „ideellen" Exzentrizitätsmaßes $\bar{m}$ ist Gl. (47) heranzuziehen, und man erhält im vorliegenden Falle nach Gl. (54) ... $\bar{m}' = 1{,}071$. Da

$$(\lambda')^2 - \frac{\pi^2 E (\bar{m}')^3}{9\,\sigma_s (3 - \bar{m}')} = 10\,800 > 0$$

ist, muß Formel (I) verwendet werden. Mit $\sigma_s = 2{,}4$ t/cm² und $E = 2100$ t/cm² ergibt sich aus Formel (I)

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma'_{kr}} \left[\frac{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma'_{kr}} - 1\right) - \frac{\bar{m}'}{3}}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma'_{kr}} - 1\right)} \right]^3 = 9850$$

oder $\lambda \doteq 99$, also kleiner als der angenommene Wert λ' ($\Delta\lambda = -31$). Das wirkliche Schlankheitsverhältnis liegt zwischen diesen Werten, und es empfiehlt sich, als 2. Annahme den Mittelwert (auf Einer abgerundet) zu wählen.

2. Annahme: $\lambda'' = 115$.

Man erhält: $m'' = 0{,}798$, $\nu'' = 3{,}5$, $h'' = 7{,}52$ cm, $F'' = 56{,}6$ cm², $\sigma''_{kr} = 0{,}743$ t/cm² und $\bar{m}'' = 0{,}965$.

Nach Überprüfung ist wieder Formel (I) anzuwenden, und man erhält $\lambda = 132$, also einen zu großen Wert ($\Delta\lambda = +17$). Durch lineare Interpolation findet man $\lambda = 120{,}3 \doteq 120$ [dies ist bereits der genaue Wert[19])]. Dieser Schlankheit entspricht $m = 0{,}832$, $h = 7{,}22 \doteq 7{,}2$ cm, $F = 51{,}8$ cm², $\sigma_{kr} \doteq 0{,}81$ t/cm². Das aus zwei Annahmen durch lineare Interpolation ermittelte Schlankheitsverhältnis entspricht in den meisten Fällen genügend genau dem wirklichen Wert. Der Verhältniswert $\varkappa$ ergibt sich zu $\varkappa = 1{,}77$, die „Knickzahl" zu $\omega = 3{,}40$ und die zulässige Spannung beträgt $\sigma_{zul} = 1400$ kg/cm². Die Bedingungsgleichung (53) ist erfüllt:

$$1{,}77 \cdot 3{,}40 \cdot \frac{12\,000}{51{,}8} = 1396 \doteq 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

VI. Vergleich mit den Vorschriften.

In den Deutschen und Österreichischen Vorschriften wird dem Einfluß eines exzentrischen Kraftangriffs mangels einer theoretisch begründeten Formel dadurch Rechnung getragen, daß eine nach der folgenden Regel berechnete „gedachte Randspannung" mit der zulässigen Inanspruchnahme verglichen wird:

$$\sigma_\omega = \omega \cdot \frac{P}{F} + \frac{Pa}{W} = \sigma_{zul}. \tag{56}$$

Mit $W = F \cdot k$, $\sigma_{zul} = \frac{\omega}{\nu} \cdot \sigma_k$ und $\nu \cdot \frac{P}{F} = \sigma_V$ erhält man aus Gl. (56) eine der kritischen Axialspannung entsprechende Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \frac{\sigma_k}{1 + \frac{m}{\omega}}. \tag{57}$$

Diese Vergleichsspannung σ_V entspricht übrigens für $\lambda = 0$ der „gefährlichen" Spannung (Gl. 49 ... $\sigma_k = \sigma_s$, $\omega = 1$), also jener Axialspannung, bei welcher die größte Randspannung gleich der Stauchgrenze ist $\left(\sigma_V^{(0)} = \sigma_{gef}^{(0)}\right)$.

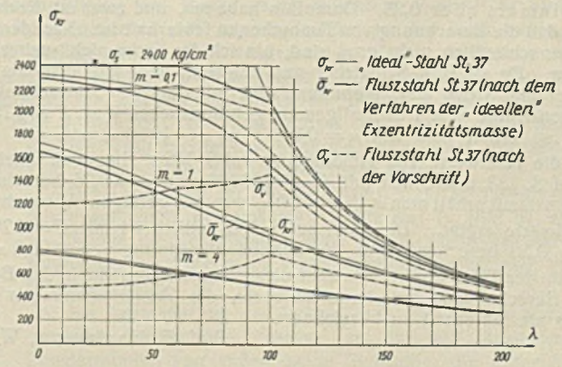

Bild 10.

Zum Vergleich mit den Ergebnissen des vorliegenden Verfahrens diene das Diagramm Bild 10. In diesem Diagramm sind für die Exzentrizitätsmaße $m = 0{,}1$, 1,0 und 4,0 die Spannungen σ_{kr} („Ideal"-Stahl St 37), σ_{kr} [Flußstahl St 37, nach dem Verfahren der „ideellen" Exzentrizitätsmaße, s. Gl. (54)] und σ_V [Flußstahl St. 37, nach der Deutschen Vorschrift, s. Gl. (57)] als Funktion des Schlankheitsverhältnisses λ dargestellt. Man erkennt, daß die Deutschen Vorschriften im Bereich kleiner Schlankheiten zu kleine und für größere Schlankheitsgrade zu große Werte für die kritische Spannung ergeben. Die größten Abweichungen gegenüber den Spannungswerten σ_{kr} ergeben sich für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = 100$ und

[17]) Vgl. die Ausführungen von F. Hartmann, Schlußbericht d. I. Int. Kongr. f. Brückenbau u. Hochbau in Paris, 1932, S. 45.

[18]) Bei den bisher bekannt gewordenen Methoden zur Ermittlung der Tragfähigkeit exzentrisch gedrückter Baustahlstäbe können die Ergebnisse ausschließlich in tabellarischer Form oder in Form eines Diagramms dargestellt werden.

[19]) Nach den Deutschen Vorschriften ist das Schlankheitsverhältnis nur bis auf die Einerstelle genau nachzuweisen.

betragen — 38% ($m = 4$) bzw. + 60% ($m = 1{,}5$) der Werte σ_{kr}. Die für $\lambda = 100$ geforderte Sicherheit gegen Erreichen des kritischen Gleichgewichtszustandes $\nu = 3{,}5$ sinkt demnach bei Anwendung der Deutschen Vor-

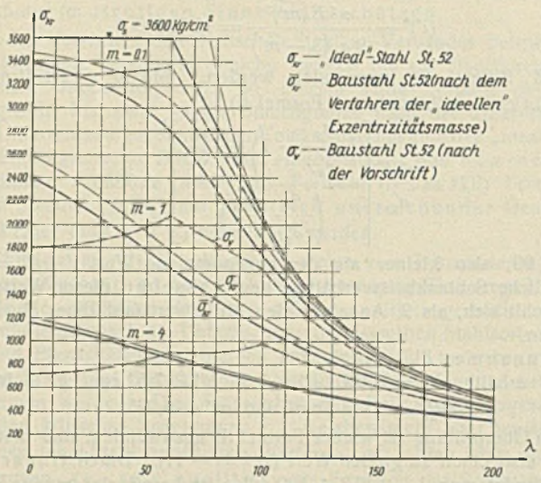

Bild 11.

schriften [Gl. (56) oder (57)] für die Exzentrizitätsmaße $m = 0{,}1$, 1,0, 1,5 und 4,0 auf $\nu = 2{,}71$, 2,21, 2,19 und 2,27.

Die Verwendung der Spannungen σ_{kr} („Ideal"-Stahl St_1 37, dünn gezeichnete Linien) an Stelle der etwas kleineren Werte $\bar{\sigma}_{kr}$ hätte innerhalb des betrachteten Bereiches ($m = 0{,}1$ bis 4,0) einen größten Fehler von + 8% ($m = 0{,}1$; für größere Exzentrizitätsmaße ist der Fehler kleiner) zur Folge und würde die bei $\lambda = 100$ geforderte Sicherheit $\nu = 3{,}5$ für die Exzentrizitätsmaße $m = 0{,}1$, 1,0 und 4,0 auf $\nu = 3{,}24$, 3,32 und 3,41 herabsetzen. Diese Unterschiede sind gegenüber den aus der Verwendung der Deutschen Vorschriften entspringenden Abweichungen so geringfügig, daß man sich wohl immer in praktisch ausreichender Annäherung mit den für den „Ideal"-Stahl nach Formel (I) bzw. (II) berechneten Spannungswerten begnügen kann.

Zu ganz ähnlichen Ergebnissen führt der Vergleich zwischen den Spannungswerten für den „Ideal"-Stahl St_1 52 und für den normenmäßigen Baustahl St 52. Die den Exzentrizitätsmaßen $m = 0{,}1$, 1,0 und 4,0 entsprechenden Linien der kritischen Axialspannung sind im Diagramm Bild 11 eingezeichnet, wobei das „ideelle" Exzentrizitätsmaß $\bar{m}$ näherungsweise aus Gl. (55) ermittelt wurde.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Untersuchung wird ein analytisches Näherungsverfahren zur Berechnung der Tragfähigkeit exzentrisch gedrückter Stäbe aus einem „Ideal"-Stahl entwickelt, welches zu den einfachen Endformeln (I) bzw. (II) führt. Diese Formeln können durch Einführung eines „ideellen" (erhöhten) Exzentrizitätsmaßes auch auf Stäbe aus Baustahl angewendet werden, es zeigt sich aber, daß in allen praktisch vorkommenden Fällen die Berechnung unter Zugrundelegung des „Ideal"-Stahls gleicher Stauchgrenze genügend genaue Ergebnisse liefert.

Die Untersuchung des nicht unerheblichen Einflusses der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit bleibt einem weiteren Aufsatze vorbehalten. Über ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Tragkraft querbelasteter und gekrümmter Druckstäbe aus Stahl wird a. a. O. berichtet werden.

Zuschrift an die Schriftleitung.

Zuschrift zu dem Aufsatz von Prof. Schleicher **„Einfluß der Querdehnung auf die Stabilität von Stahlplatten"** in Heft 7 des „Stahlbau".

Prof. Schleicher glaubt, daß mir bei der Überprüfung der von Timoschenko angegebenen Beulspannungen ein Irrtum unterlaufen sei, indem ich annahm, daß Timoschenko im Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik, IV. Bd., 1. Hälfte, in seinem Aufsatz „Stabilität von Platten und Schalen" Seite 128 usf. mit $\mu = 0{,}3$ rechne, während Prof. Schleicher behauptet, Timoschenko habe mit $\mu = 0{,}25$ gerechnet. Nun gibt jedoch Timoschenko selbst in diesem Aufsatz S. 135 ausdrücklich $\mu = 0{,}3$ an. Nachdem man aber mit $\mu = 0{,}3$ und mit dem von Timoschenko angegebenen $E = 2200000$ andere Werte für die Beulspannungen erhält, als die Tafel auf S. 132 angibt, habe ich die μ zurückgerechnet. Es ist nämlich nach Timoschenko

$$\sigma_{1k} = \frac{\varkappa \pi^2 E}{12(1-\mu^2)10^4} = \frac{181\,\varkappa}{1-\mu^2} \text{ und daraus } \mu = \sqrt{1 - \frac{181\,\varkappa}{\sigma_{1k}}};$$

setzt man die Werte der Tafel auf S. 132 der Reihe nach ein, so erhält man $\mu = 0{,}262$; 0,262; 0,266 . . . sogar bis 0,268 und als kleinsten Wert 0,257, niemals aber 0,25. Daraufhin habe ich, und zwar mit Recht, behauptet, daß die Berechnung von Timoschenko fehlerhaft ist. Nachdem aber die Fehler schließlich nicht groß sind, bin ich der Sache nicht weiter nachgegangen. Da sie Prof. Schleicher nun aufgreift, habe ich nochmals nachgerechnet und stelle fest: Wenn man statt mit dem von Timoschenko angegebenen E mit dem früher allgemein gebräuchlichen Wert $E = 2150000$ rechnet, so erhält man mit $\mu = 0{,}3$ . . . $\sigma_{1k} = 194{,}4\,\varkappa$, und das ergibt genau die Tafelwerte von Timoschenko auf S. 132. Hingegen scheint die Tafel auf S. 133 tatsächlich mit $E = 2200000$ und $\mu = 0{,}25$ berechnet zu sein, denn damit erhält man $\sigma_{1k} = 192{,}9\,\varkappa$, was mit geringen Abweichungen die Tafelwerte ergibt. Die Tafel auf S. 135 endlich ist mit $E = 2200000$ und $\mu = 0{,}30$ berechnet, was die Schubbeulspannung $\tau_k = 198{,}8\,\varkappa$ und die Werte der Tafel ergibt. Da aber dieser letzte Fall nicht in den Bereich meiner Berechnungen fiel, hatte ich recht, die Zahlenrechnungen Timoschenkos als fehlerhaft zu bezeichnen.

Prof. F. Hartmann, Wien.

Erwiderung.

In obiger Zuschrift ist keine Rücksicht darauf genommen, daß nicht nur σ_e von der Querzahl μ abhängt, sondern daß sich auch k mit μ ändert. Die Ausführungen über den ersten Belastungsfall sind also nicht stichhaltig. Jedoch auch meine diesbezügliche Feststellung bedarf noch einer Verbesserung.

Von den E- bezw. σ_e-Werten Timoschenkos wurde in meinem Aufsatz absichtlich nicht gesprochen, da sie für die gleichen k-Zahlen mit verschiedenen Beträgen auftreten. Die von mir allein verglichenen Werte k sind von T. für beide Belastungsfälle mit $\mu = 0{,}25$ (nicht 0,30) berechnet und, von belanglosen Ungenauigkeiten abgesehen, richtig. Dies ergibt sich einwandfrei aus den in meinem Aufsatz, Tafel 3 u. 4, mitgeteilten Lösungen k der transzendenten Knickbedingung für $\mu = 0{,}25$ bzw. 0,30.

Auch die Knickspannungen $(\sigma)_{1k}$ sind von T. in früheren Veröffentlichungen über den gleichen Belastungsfall für $E = 2000$ t/cm², $\mu = 0{,}25$ richtig angegeben. Erst bei der späteren Umrechnung (Handb. d. phys. u. techn. Mechanik, Bd. IV, 1. Hälfte, S. 132) ist ein Widerspruch entstanden. Die Eulerspannung ist nämlich zu $(b/t)^2\ \sigma_e = 1943$ t/cm² eingesetzt, entsprechend $E = 2150$ t/cm² und $\mu = 0{,}30$, während die zugrunde liegenden k-Werte mit $\mu = 0{,}25$ ermittelt sind. Die Angabe $E = 2200$ t/cm² über der Tabelle auf S. 132 bei T. steht also nicht in Übereinstimmung mit dem eingesetzten σ_e, worauf Herr Professor Hartmann zuerst aufmerksam gemacht hat. Diesen Widerspruch bei T. habe ich übersehen. Die Unterschiede zwischen den Knickspannungen nach T. und denen nach H. sind also für den ersten Belastungsfall zum kleineren Teil auch dadurch bedingt, in der Hauptsache jedoch durch die Abhängigkeit des Wertes k von μ, die Herr Professor Hartmann in seiner Zuschrift nicht beachtet hat.

Die Aussage Professor Hartmanns über die Zahlenrechnungen Timoschenkos wäre somit für den ersten Belastungsfall dahin einzuschränken, daß in der betreffenden Veröffentlichung nur der oben gezeigte Widerspruch vorhanden ist. Die primären k-Werte sind richtig und durch meine genauen Kontrollrechnungen für $\mu = 0{,}25$ durchweg bestätigt worden. Für $(b/t)^2\ \sigma_e = 1943$ t/cm² (welcher Wert nur der Überschrift $E = 2200$ t/cm² der Tafel S. 132 widerspricht, sonst aber wie jeder andere möglich ist) wären auch die Knickspannungen richtig.

Die Knickspannungen Timoschenkos für den zweiten Belastungsfall, die in dem Aufsatz von Professor Hartmann ebenfalls als fehlerhaft bezeichnet waren, sind oben schon als richtig und mit $\mu = 0{,}25$ berechnet anerkannt.

Da die Zahlentafeln von Timoschenko, dem wir die meisten Ergebnisse auf dem Gebiete der Theorie der Plattenbeulung verdanken, in der Praxis immer weitere Anwendung finden, sind obige Feststellungen notwendig, um Unsicherheit bei der Anwendung zu vermeiden.

In der Zuschrift ist angenommen, der von T. bei den kritischen Schubspannungen auf S. 135 angegebene Wert $\mu = 0{,}3$ gelte auch drei Seiten vorher für die kritische Druckspannung der Rechteckplatte mit einem freien Längsrande. Diese scheinbar so einleuchtende Annahme ist nicht berechtigt. Man erkennt daraus, wie notwendig meine Warnung war, bei Benutzung des Schrifttums Vorsicht zu üben, da in der Literatur sehr verschiedene Werte E und μ gebraucht wurden, ohne daß die betreffenden Zahlen immer ausdrücklich angegeben sind.

Meine Ausführungen über die Abhängigkeit der Knickspannungen von der Querzahl μ werden durch obiges selbstverständlich in keiner Weise berührt.

Ferd. Schleicher, Hannover.

INHALT: Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe. — Zuschrift an die Schriftleitung.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.