DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule
Fernsprecher: C 1 Steinplatz 0011
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

10. Jahrgang | BERLIN, 29. Januar 1937 | Heft 3

Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes.

Von Dr.-Ing. F. Bleich und Dr.-Ing. H. Bleich, Wien.

Die derzeit gebräuchlichen Formeln zur Berechnung der Knicksicherheit von punktweise elastisch gestützten Stäben, die Engeßer-Formel und die Formel von F. Bleich[1]), erfassen nur den Fall fester Stützung der Stabenden bei unveränderlichem Stabquerschnitt, gleicher Elastizität aller Zwischenstützen und bei unveränderlicher Druckkraft von einem Stabende zum anderen. In einer jüngeren Arbeit behandelt F. Schweda[2]) unter den gleichen Voraussetzungen den Stab mit elastisch gestützten Enden und gelangt auf dem gleichen Wege wie F. Bleich zu einer geschlossenen Formel für den erforderlichen Widerstand der Endstützen. Wenn auch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bestehen, die kritischen Werte der Stützenwiderstände bei beliebiger Veränderlichkeit der Druckkräfte S, des Trägheitsmomentes J und der Stützenwiderstände A zu berechnen, so kann doch im Anwendungsfalle auf die bereits von Zimmermann[3]) und Müller-Breslau[4]) angegebenen allgemeinen Methoden, die auf mehr oder minder mühselige Zahlenrechnungen hinauslaufen, kaum zurückgegriffen werden. Im nachfolgenden wird daher eine allgemeine Berechnungsmethode dargelegt werden, die sich auf das Ritzsche Verfahren zur Festlegung von Näherungslösungen eines Variationsproblems stützt[5]). Während aber üblicherweise bei der Anwendung dieser Methode Funktionenfolgen φ, sogenannte Minimalfolgen, angesetzt werden, die den Randbedingungen des Problems von vornherein genügen, so daß der Energieausdruck, von dem die Problemlösung ihren Ausgang nimmt, keine auf die Ränder bezüglichen Glieder zu enthalten braucht, wird hier in der Weise vorgegangen werden, daß die Ansatzfunktionen φ im allgemeinen nur mehr einen Teil der Randbedingungen befriedigen. Infolgedessen müssen im Ausdruck für die Energie des Systems auch die auf den Rand bezüglichen Glieder aufgenommen werden. Da aber die übrigen von den Funktionen φ nicht eingehaltenen Randbedingungen als natürliche Randbedingungen des Variationsproblems aufscheinen, so konvergieren die Lösungen gegen eine allen Randbedingungen genügende Funktion.

A. Die Darstellung der Näherungslösungen.

Wir gehen von einem geraden Stab von der Länge L aus, der in den Punkten 0, 1, 2, . . . r . . . n elastisch gelagert ist, wobei linearer Zusammenhang zwischen Stützendruck C_r und Verschiebung y_r vorausgesetzt sei, derart, daß

$$C_r = A_r y_r \tag{1}$$

ist. A_r heißt der Stützenwiderstand der Stütze r. Im besonderen können einzelne Punkte fest sein. Dort ist $A_r = \infty$ und $y_r = 0$.

Der Stab steht im Augenblick des Ausknickens unter einer veränderlichen Druckkraft S, deren Wert an der Stelle x mit S_x bezeichnet wird. Das veränderliche Trägheitsmoment des Stabes sei J_x. Im ausgebogenen Gleichgewichtszustand werden die Ordinaten der Verformungslinie mit y_x bezeichnet (Bild 1). An den Stützstellen 0, 1, 2 . . . r, . . . n heißen die Ausbiegungen $y_0, y_1, \ldots y_r, \ldots y_n$. Wir nehmen, um möglichst allgemein zu sein, weiter an, daß auch der Elastizitätsmodul E mit S_x veränderlich sei.

Die potentielle Energie des Gesamtsystems beträgt im ausgebogenen Zustande

$$A = \frac{1}{2}\int_0^L E J_x\, y_x''^2\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L S_x y'^2\, dx + \frac{\mu}{2}\sum_{r=0}^{n} A_r y_r^2. \tag{2}$$

Das erste Glied stellt die potentielle Energie des Stabes infolge der Biegung, das zweite Glied die Arbeit der Lasten S_x und das letzte Glied, in dem

$$A_r = \mu \bar{A}_r$$

gesetzt wurde, die Arbeit der Stützenwiderstände A_r vor. Der Parameter μ ist eine unbenannte Zahl. Wir nehmen nun S_x, J_x, E sowie die $\bar{A}_r$ als gegeben an, wobei E eine Funktion von S_x/F_x ist, dann folgt der Parameter μ bekanntlich aus der Bedingung

$$\delta A = 0,$$

wobei von Fall zu Fall bestimmte Randbedingungen als Nebenbedingungen vorgeschrieben sind. Es sind dies jene Randbedingungen, die, wie Festhaltungen und starre Einspannungen, keinen Beitrag zur potentiellen Energie des Systems leisten.

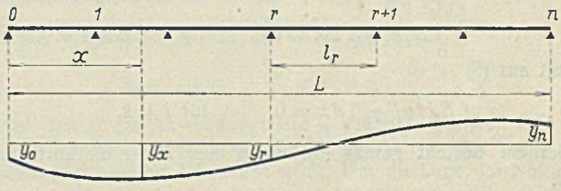

Bild 1.

Der Grundgedanke des im folgenden dargelegten Berechnungsverfahrens besteht nun darin, als Funktionenfolge φ die Eigenlösungen eines Hilfsproblems zu benutzen, bei dessen Lösung bereits die Veränderlichkeit von S_x und EJ_x berücksichtigt erscheint. Wir beschaffen uns zu diesem Zwecke die Eigenlösungen eines verwandten Extremalproblems, das durch das Integral

$$A' = \frac{1}{2}\int_0^L E J_x\, \varphi_x''^2\, dx - \frac{1}{2}\lambda \int_0^L S_x \varphi'^2\, dx \tag{3}$$

definiert ist, wobei auch die gleichen Nebenbedingungen wie oben vorgeschrieben werden sollen. Wir bezeichnen die Lösungen φ als Lösungen des Hilfsproblems. Die Bedingung $\delta A' = 0$ führt auf die bekannte Differentialgleichung

$$(E J_x \varphi'')'' + \lambda (S_x \varphi')' = 0, \tag{3'}$$

das ist die Differentialgleichung des Knickproblems des geraden Stabes für den allgemeinen Fall, daß S_x und EJ_x veränderlich sind.

Wir setzen zunächst voraus, daß die Eigenwerte λ_i und die Eigenlösungen φ_i ($i = 1, 2 \ldots$) dieser Differentialgleichung bekannt wären. Von Haus aus wissen wir aber, daß sie ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem bilden. Es lassen sich daher die Lösungen des durch (2) gegebenen Variationsproblems durch den Ansatz

$$y = \sum_{i=1}^{p} a_i \varphi_i, \tag{4}$$

wo a_i passend zu bestimmende Festwerte sind, mit beliebigem Grade der Genauigkeit approximieren, wobei wir gegenüber jedem anderen

[1]) F. Bleich, Theorie und Berechnung eiserner Brücken, Berlin 1924.
[2]) F. Schweda, Die Bemessung des Endquerrahmens offener Brücken, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss., Wien 1928.
[3]) H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, Berlin 1910.
[4]) H. Müller-Breslau, Graphische Statik, Bd. II, 1.
[5]) Den stetig elastisch gestützten Stab hat S. Timoshenko mit Hilfe eines Näherungsansatzes für die Ausbiegung y behandelt. Siehe Ann. des ponts et chaussées 1913.

Funktionensystem den Vorteil gewinnen, daß die besonderen Orthogonalitätseigenschaften der aus (3') hervorgehenden Eigenfunktionen φ den Rechnungsgang bei der Durchführung des Ritzschen Verfahrens zur Aufsuchung der Näherungslösungen des vorgegebenen Variationsproblems wesentlich vereinfachen.

Die zum Eigenwert λ_i gehörige Eigenlösung φ_i genügt unter den jeweils vorgeschriebenen Randbedingungen der Differentialgleichung (3'). Es ist demnach

$$(EJ_x \varphi_i'')'' + \lambda_i (S_x \varphi_i')' = 0.$$

Wir multiplizieren mit φ_k und integrieren über den ganzen Bereich, wobei

$$\int_0^L (EJ_x \varphi_i'')'' \varphi_k \, dx + \lambda_i \int_0^L (S_x \varphi_i')' \varphi_k \, dx = 0 \tag{5}$$

erhalten wird. Die partielle Integration liefert zunächst

$$\int_0^L (EJ_x \varphi_i'')'' \varphi_k \, dx = \left[(EJ_x \varphi_i'')' \varphi_k\right]_0^L - \int_0^L (EJ_x \varphi_i'')' \varphi_k' \, dx$$

$$= \left[(EJ_x \varphi_i'')' \varphi_k - EJ_x \varphi_i'' \varphi_k'\right]_0^L + \int_0^L EJ \varphi_i'' \varphi_k'' \, dx$$

$$\int_0^L (S_x \varphi_i')' \varphi_k \, dx = \left[S_x \varphi_i' \varphi_k\right]_0^L - \int_0^L S_x \varphi_i' \varphi_k' \, dx,$$

womit Gl. (5) übergeht in

$$\left\{\left[(EJ_x \varphi_i'')' + \lambda_i S_x \varphi_i'\right] \varphi_k - EJ_x \varphi_i'' \varphi_k'\right\}_0^L$$
$$+ \int_0^L EJ_x \varphi_i'' \varphi_k'' \, dx - \lambda_i \int_0^L S_x \varphi_i' \varphi_k' \, dx = 0.$$

Der in der linken Klammer stehende Ausdruck verschwindet immer bei den in unserem Problem in Betracht kommenden homogenen Randbedingungen[6]), so daß

$$\int_0^L EJ_x \varphi_i'' \varphi_k'' \, dx - \lambda_i \int_0^L S_x \varphi_i' \varphi_k' \, dx = 0 \tag{6}$$

zurückbleibt. Vertauscht man i und k, so gewinnt man eine zweite Beziehung

$$\int_0^L EJ_x \varphi_k'' \varphi_i'' \, dx - \lambda_k \int_0^L S_x \varphi_k' \varphi_i' \, dx = 0 \tag{6'}$$

und nach Subtraktion beider Gleichungen

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int_0^L S_x \varphi_i' \varphi_k' \, dx = 0.$$

Aus dieser Beziehung folgt die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^L S_x \varphi_i' \varphi_k' \, dx = 0 \qquad \text{für } i \neq k \tag{7}$$

und damit aus (6)

$$\int_0^L EJ_x \varphi_i'' \varphi_k'' \, dx = 0 \qquad \text{für } i \neq k. \tag{7'}$$

Außerdem besteht gemäß (6), wenn man $i = k$ einführt, die Verknüpfung

$$\int_0^L EJ_x \varphi_i''^2 \, dx - \lambda_i \int_0^L S_x \varphi_i'^2 \, dx = 0. \tag{8}$$

Wir gehen nun zur Lösung des eigentlichen Extremalproblems mittels des Ansatzes (4) über. Die Einführung dieses Ansatzes in (2) ergibt

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_x \left(\sum_i a_i \varphi_i''\right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L S_x \left(\sum_i a_i \varphi_i'\right)^2 dx + \frac{\mu}{2} \sum_{r=0}^{n} A_r \sum \left(a_i \varphi_{ir}\right)^2$$

$$(i = 1, 2 \ldots p) \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots n).$$

φ_{ir} bedeutet den Betrag der Eigenlösung φ_i an der Stelle r.

Entwickelt man die Quadrate der Summen, so findet man, daß die Glieder, die doppelte Produkte enthalten, wegen der Orthogonalitätsbedingungen (7) u. (7') in den beiden Integralen verschwinden, so daß dort nur die quadratischen Glieder zurückbleiben. Man erhält daher

$$A = \frac{1}{2} \sum_i a_i^2 \left[\int_0^L EJ_x \varphi_i''^2 \, dx - \int_0^L S_x \varphi_i'^2 \, dx\right]$$
$$+ \frac{\mu}{2} \sum_i \sum_j a_i a_j \sum_{r=0}^{n} A_r \varphi_{ir} \varphi_{jr}.$$

Da außerdem gemäß Gl. (8) die Verknüpfung besteht

$$\frac{1}{2} \sum_i a_i^2 \left[\int_0^L EJ_x \varphi_i''^2 \, dx - \lambda_i \int_0^L S_x \varphi_i'^2 \, dx\right] = 0,$$

so liefert die Subtraktion beider Gleichungen

$$A = \frac{1}{2} \sum_i a_i^2 (\lambda_i - 1) \int_0^L S_x \varphi_i'^2 \, dx + \frac{\mu}{2} \sum_i \sum_j a_i a_j \sum_{r=0}^{n} A_r \varphi_{ir} \varphi_{jr}.$$

Mit den Abkürzungen

$$(\lambda_i - 1) \int_0^L S_x \varphi_i'^2 \, dx = N_i, \tag{9a}$$

$$\sum_{r=0}^{n} A_r \varphi_{ir} \varphi_{jr} = \alpha_{ij}, \tag{9b}$$

wobei $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, nimmt der Ausdruck für A die einfache Gestalt

$$A = \frac{1}{2} \sum_i a_i^2 N_i + \frac{\mu}{2} \sum_i \sum_j a_i a_j \alpha_{ij}\,^{7)} \tag{10}$$

an. Die α_{ij} bilden eine symmetrische quadratische Matrix von der Form

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix},$$

deren Glieder gemäß Gl. (9b) in der Weise gebildet werden, daß die Ordinaten der φ_i-Linien in den Punkten 1 bzw. 2 bzw. 3 usw. mit den entsprechenden Ordinaten der φ_j-Linie multipliziert, mit A_r vermehrt und die Produkte sodann addiert werden.

Die Stabilitätsbedingung $\delta A = 0$ liefert schließlich p lineare homogene Gleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial a_k} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots p$$

zur Ermittlung der Entwicklungskoeffizienten a_i, nämlich

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\alpha_{11} + \frac{N_1}{\mu}\right) a_1 + \alpha_{12} a_2 + \alpha_{13} a_3 + \ldots = 0 \\ \alpha_{21} a_1 + \left(\alpha_{22} + \frac{N_2}{\mu}\right) a_2 + \alpha_{23} a_3 + \ldots = 0 \\ \alpha_{31} a_1 + \alpha_{32} a_2 + \left(\alpha_{33} + \frac{N_3}{\mu}\right) a_3 + \ldots = 0 \\ \text{— — — — — — — — — — — — —}, \end{array}\right. \tag{11}$$

deren Determinante verschwinden muß, wenn für die a_i endliche Werte bestehen sollen. Die Null gesetzte Determinante liefert im allgemeinsten Fall für μ eine Gleichung p-ten Grades, deren größte positive Wurzel μ den für die Stabilität kritischen Wert ergibt. Damit ist in allgemeiner Form der Weg zur Auffindung einer Näherungslösung des eingangs aufgestellten Variationsproblems aufgezeigt.

Es ist nun klar, daß das eben dargelegte Berechnungsverfahren nur dann von einigem Vorteil für die Anwendung ist, wenn es gelingt, einen genügend genauen Näherungswert mit Hilfe eines zwei-, höchstens dreigliedrigen Ansatzes (4) zu finden. Hier stellt sich aber gegenüber ähnlichen Knickproblemen, die bisher nach dem Ritzschen Verfahren gelöst wurden, die Schwierigkeit ein, daß von Haus aus kein Anhaltspunkt für die Gestalt der maßgebenden Formänderungslinie im Knickzustande besteht. Es ist bekannt, daß ein in $n + 1$ Punkten gestützter, also n-feldriger Stab in 1, 2, ... $n - 1$ Halbwellen ausknicken kann, je nach den Verhältnissen der die Steifigkeit des Systems kennzeichnenden Größen, das sind die Feldlängen, Steifigkeiten EJ und Rahmenwiderstände A. Es ist daher, um einen zweckmäßigen Ansatz für y zu machen, notwendig, sich durch zweckdienliche Überlegungen oder durch kurze Vorberechnungen mit Hilfe der eingangs erwähnten Formeln ein beiläufiges Bild über die Zahl der Halbwellen zu machen, in der der Stab bei den gegebenen Steifigkeitsverhältnissen ausknicken wird. Man wird dann aus der Reihe der zur Verfügung stehenden Ansatzfunktionen φ jene Linien auswählen, die miteinander kombiniert eine Linie von der erwarteten Wellenzahl bilden können. In den meisten Fällen wird die Verbindung zweier oder dreier benachbarter Funktionen φ_i genügen, um den Größtwert von μ ausreichend genau zu finden, bei symmetrischen Stäben z. B. je eine Verbindung aus benachbarten symmetrischen bzw. antisymmetrischen Lösungen φ. Im übrigen sei auf die Beispiele verwiesen.

Zwei Aufgaben sind es, die wir hier besonders ins Auge fassen wollen, und die sich im wesentlichen durch die verschiedenen Randbedingungen voneinander unterscheiden.

1. Fall. Die beiden Enden des Stabes sind fest und momentenfrei gelagert. Die Zwischenstützen sind elastisch nachgiebig. In diesem Falle lauten die Randbedingungen

$$y = 0, \quad y'' = 0: \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = L.$$

Die beiden Randbedingungen sind in diesem Falle auch gleichzeitig natürliche Randbedingungen des Hilfsproblems, daher erfüllen die Eigenlösungen φ und damit der Lösungsansatz (4) sämtliche Randbedingungen der vorgelegten Aufgabe strenge.

[6]) Man beachte, daß $(EJ_x \varphi_i'')' + \lambda_i S_x \varphi_i' = Q_x$ die Querkraft an der Stelle x bedeutet. Man erkennt auch, daß die Randbedingung $Q_x = 0$ für $x = 0$ z. B. nicht übereinstimmt mit einer analogen Randbedingung $Q_x = (EJ_x y_x'')' + S_x y_x' = 0$ des ursprünglichen Problems, da S_x keineswegs gleich $\lambda_i S_x$ ist.

[7]) $\sum_i \sum_j a_i a_j \alpha_{ij} = (a_1 a_1 \alpha_{11} + a_1 a_2 \alpha_{12} + \ldots) + (a_2 a_1 \alpha_{21} + a_2 a_2 \alpha_{22} + \ldots) + \ldots$

2. Fall. Sämtliche Stützpunkte sind elastisch nachgiebig. Die Randbedingungen haben die Form

$$Q \equiv (EJ_x y'')' + S_x y' = 0 \text{ und } y'' = 0: \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = L.$$

Die natürlichen Randbedingungen des Hilfsproblems, die aus der Variation des Integrals (3) folgen, sind aber

$$(EJ_x \varphi_i'')' + \lambda_i S_x \varphi_i' = 0, \qquad y'' = 0: \qquad \text{für } x = 0 \text{ und } x = L.$$

Die ersten der beiden Randbedingungen stimmen nicht mehr überein. Es werden daher in den Lösungen y des eigentlichen Extremalproblems die Bedingungen am Rande, die sich dort auf das Verschwinden der Querkraft beziehen, nur näherungsweise erfüllt sein.

B. Ermittlung der Eigenwerte λ und Eigenlösungen φ des Hilfsproblems.

1. Unveränderliches S und unveränderliches EJ.

Das durch Gl. (3') definierte Hilfsproblem ist in diesem Falle nichts anderes als das Knickproblem des geraden Druckstabes mit unveränderlichem Querschnitt.

a) Sind die beiden Stabenden festgehalten, Fall 1, so sind die Eigenwerte die Eulerschen bzw. Engeßer-Kármánschen Traglasten

$$S\lambda_i = i^2 \cdot \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \tag{12}$$

und die zugehörenden Eigenlösungen die Funktionen

$$\varphi_i = C \cdot \sin \frac{i \pi x}{L}, \tag{13}$$

wobei E auch den Kármánschen Knickmodul bedeuten kann.

Da die Konstante C willkürlich ist, so können wir sie auch 1 setzen, so daß das in N_i auftretende Integral, Gl. (9a), den Wert

$$\int_0^L \varphi_i'^2 \, dx = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \int_0^L \cos^2 \frac{i \pi x}{L} \, dx = \frac{i^2 \pi^2}{2L} \tag{14}$$

annimmt. Somit sind die Größen N_i durch

$$N_i = (S\lambda_i - S) \frac{i^2 \pi^2}{2L} \tag{14'}$$

festgelegt.

b) Im Fall 2 stellt das Hilfsproblem den Knickfall des Stabes mit freien Enden vor. Eigenwerte und Eigenlösungen sind die gleichen wie vor, doch bestehen noch zwei weitere Eigenlösungen, die die Randbedingungen des Falles 2 erfüllen und die wir mit φ_0 und $\bar{\varphi}_0$ bezeichnen wollen, mit den Eigenwerten λ_0 und $\bar{\lambda}_0$. Diese Lösungen lauten:

$$\begin{cases} \varphi_0 = 1 & \text{mit dem Eigenwert } \lambda_0 = \text{unbestimmt}, \\ \bar{\varphi}_0 = -\dfrac{2x}{L} + 1 & \text{mit dem Eigenwert } \bar{\lambda}_0 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

$\varphi_0 = 1$ bedeutet, daß sich der unverformte Stab parallel zu sich selbst verschiebt. $\bar{\varphi}_0$ beinhaltet eine Drehung des unverformten Stabes um seine Mitte. Die zugehörenden, oben angegebenen Eigenwerte folgen aus der Randbedingung

$$Q \equiv EJ\varphi''' + \lambda S \varphi' = 0.$$

Außerdem ist gemäß der Definitionsgleichung (9a)

$$N_0 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{N}_0 = -S \cdot \frac{4}{L}. \tag{15'}$$

2. Veränderliches S und veränderliche Steifigkeit EJ.

In vielen Fällen wird selbst bei gleichbleibendem Querschnitt aber veränderlicher Druckkraft S auch EJ veränderlich sein, da nach dem Überschreiten der Elastizitätsgrenze vor dem Ausknicken E von S abhängig wird. Eine allzu genaue Verfolgung der Änderung von Stabkraft und Steifigkeit ist natürlich nicht notwendig und auch schwer durchführbar. Um die Rechenarbeit bei der Feststellung der Eigenwerte λ und Eigenlösungen φ innerhalb bescheidener Grenzen zu halten, wird man sich damit begnügen, den Stab in drei Abschnitte zu teilen, innerhalb welcher S und EJ konstant angenommen werden können. Damit ist das Hilfsproblem festgelegt. Es sind die Knicklasten und die Knickbiegelinien des in Bild 2 dargestellten Druckstabes zu berechnen, wobei Symmetrie der Anordnung vorausgesetzt wird. Die Abschnittlängen seien so angenommen, daß sie das Vielfache der Feldlänge l darstellen. Das vorliegende Stabilitätsproblem ist mit Hilfe eines der bekannten allgemeinen Verfahren, die die Stabilität von Stabzügen behandeln, leicht zu lösen[8]). Wir geben im folgenden nur die Ergebnisse an:

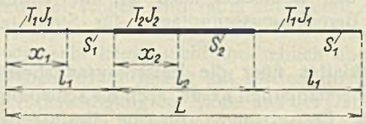

Bild 2.

a) Fall 1. Die Enden sind festgehalten. Die symmetrischen Eigenwerte findet man aus der Bedingung

$$\Delta \equiv \frac{l_1 J_2}{\gamma_1} \cdot \operatorname{cotg} \gamma_1 - \frac{l_2 J_1}{\gamma_2} \cdot \operatorname{tg} \gamma_2/2 = 0, \tag{16}$$

wobei

$$\gamma_1 = l_1 \sqrt{\frac{S_1 \lambda}{E_1 J_1}}, \qquad \gamma_2 = l_2 \sqrt{\frac{S_2 \lambda}{E_2 J_2}}. \tag{16'}$$

Die symmetrischen Eigenlösungen lauten

$$\begin{cases} \text{für den Bereich } 0 < x_1 < l_1 & \varphi(x_1) = \dfrac{1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \gamma_1 \dfrac{x_1}{l_1} \\ \text{für den Bereich } 0 < x_2 < l_2 & \varphi(x_2) = \dfrac{1}{\cos \gamma_2/2} \cdot \cos \gamma_2 \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x_2}{l_2} \right), \end{cases} \tag{17}$$

womit das Integral $\int S_x \varphi'^2 \, dx$ in Gl. (9a) den Wert annimmt

$$\int_0^L S_x \varphi'^2 \, dx = \frac{S_1 \gamma_1^2}{l_1 \cdot \sin^2 \gamma_1} + \frac{S_2 \gamma_2^2}{2 l_2 \cdot \cos^2 \gamma_2/2}. \tag{18}$$

Die antisymmetrischen Eigenwerte berechnet man aus der Knickbedingung

$$\Delta \equiv \frac{l_1 J_2}{\gamma_1} \cdot \operatorname{cotg} \gamma_1 + \frac{l_2 J_1}{\gamma_2} \cdot \operatorname{cotg} \gamma_2/2 = 0. \tag{19}$$

Die zugehörenden antisymmetrischen Eigenlösungen sind

$$\begin{cases} \text{für den Bereich } 0 < x_1 < l_1 & \varphi(x_1) = \dfrac{1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \gamma_1 \dfrac{x_1}{l_1} \\ \text{für den Bereich } 0 < x_2 < l_2 & \varphi(x_2) = \dfrac{1}{\sin \gamma_2/2} \cdot \sin \gamma_2 \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x_2}{l_2} \right), \end{cases} \tag{20}$$

womit das Integral $\int S_x \varphi'^2 \, dx$ den Wert annimmt

$$\int_0^L S_x \varphi'^2 \, dx = \frac{S_1 \gamma_1^2}{l_1 \cdot \sin^2 \gamma_1} + \frac{S_2 \gamma_2}{2 l_2 \cdot \sin^2 \gamma_2/2}. \tag{21}$$

Man drückt im Anwendungsfalle γ_2 durch γ_1 aus und löst die transzendenten Gl. (16) u. (19) durch Versuchen nach γ_1 auf, womit auch der zugehörende Eigenwert λ bekannt wird. Um die Lage der Nullstellen der Funktion Δ rasch überblicken zu können, ist es zweckmäßig, diese Funktion für die Punkte $x = 1, 1{,}5, 2, 2{,}5 \ldots$ überschlägig zu bestimmen und zeichnerisch darzustellen. Aus dieser Darstellung kann die beiläufige Lage der Nullstellen entnommen werden. Der genaue Wert der Wurzeln γ_1 wird mit Hilfe der bekannten Näherungsregeln bestimmt.

b) Fall 2. Die Stabenden sind frei. In diesem Falle gelten die gleichen Eigenwerte und Eigenlösungen wie vor, doch treten noch die beiden Eigenlösungen (15) hinzu. (Schluß folgt.)

[8]) H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern. Sitzungsber. d. Kgl. preuß. Akad. d. Wiss. 1909. S. 180. F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin 1924.

Die neuen Berechnungsgrundlagen für Stahlbauteile von Kranen und Kranbahnen

Von Oberregierungs- und -baurat Wedler, Berlin.

Für die Berechnung der Stahlbauteile von Kranen und Kranbahnen waren bisher baupolizeilich an sich die allgemeinen Hochbaubestimmungen maßgebend (vgl. Stahlbau 1934, Heft 24/25, S. 198). Mit Rücksicht auf die besonders geartete Beanspruchung dieser Bauteile waren schon lange Bestrebungen im Gange, besondere Berechnungsgrundlagen für die Stahlbauteile von Kranen zu bearbeiten. Schon im Jahre 1928 stellte ein Ausschuß bei dem damaligen Deutschen Kranbau-Verband einen ersten Entwurf auf, dem 1930 ein zweiter und 1933 ein dritter Entwurf folgten. Diese Arbeiten entstanden im wesentlichen unter der Obmannschaft von Herrn Geheimrat Dr.-Ing. E. h. Kammerer, Berlin, und bezweckten, die Anforderung, die die Besteller und die prüfenden Behörden manchmal in verschiedener Weise stellten, zu vereinheitlichen und so für die anbietenden Kranbauanstalten eine einheitliche Grundlage für die Abgabe ihrer Angebote zu schaffen.

Die aus diesen Arbeiten hervorgegangenen drei Entwürfe sind in der Praxis bereits in großem Umfange angewandt worden. Baupolizeiliche Geltung erlangten sie nicht. Da aber hierfür ein dringendes Bedürfnis bestand, nahm der Ausschuß für einheitliche technische Baupolizeibestimmungen (ETB) im Jahre 1934 diese Arbeit im Einvernehmen mit der Fachgruppe Hebezeuge, Fördermittel und Aufzüge in der Wirtschaftsgruppe Maschinenbau wieder auf. Das Ergebnis ist das Normblatt DIN 120, dessen Blatt 1 die obengenannten Berechnungsgrundlagen und Blatt 2 Grundsätze für die bauliche Ausbildung enthält. Ein Beiblatt gibt zu leichteren Handhabungen der neuen Vorschriften Erläuterungen.

Die Berechnungsgrundlagen sind inzwischen in Preußen als baupolizeiliche Vorschriften[1]) mit Wirkung vom 1. April d. J. eingeführt, die Grundsätze für die bauliche Ausführung zur Beachtung empfohlen worden. Gleichzeitig wurde das Grenzgebiet zwischen den Berechnungsgrundlagen

[1]) Abgedruckt mit amtlichem Einführungserlaß in der 1. Beilage zum Ztrlbl. d. Bauv. 1937. Preis geh. 1,50 RM.

für Stahl im Hochbau DIN 1050 und den neuen Vorschriften geregelt (vgl. unten). Die Einführung durch die anderen zuständigen Stellen steht zu erwarten.

Hier soll ein kurzer Überblick über die wichtigsten Festsetzungen des neuen Normblattes gegeben und besonders auch auf die Unterschiede zwischen ihm und den Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau hingewiesen werden.

Die Festsetzungen des Normblattes über die Belastungsannahmen und die Standsicherheit gelten für alle stählernen Krane, auch für Schwimmkrane, und für Kranbahnen. Die Festsetzungen für die Festigkeitsberechnung beziehen sich im wesentlichen auf genietete Bauteile. Für geschweißte Bauteile sollen entsprechende Vorschriften bearbeitet werden, sobald die erforderlichen Erfahrungen hierfür vorliegen und die Vorschriften für geschweißte vollwandige stählerne Straßenbrücken verabschiedet sind. Die Berechnungsgrundlagen für Krane schließen sich in der Einteilung und Fassung und, soweit möglich, auch sachlich eng an die Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau DIN 1050 an. Das erleichtert ihre Benutzung wesentlich.

Eine Reihe von Fragen konnte für die Berechnung der Stahlbauteile von Kranen und Kranbahnen in derselben Weise geregelt werden wie für Stahlbauteile im Hochbau. Dies ist besonders der Fall bei den „Allgemeinen Vorschriften für die Festigkeitsberechnung" mit Ausnahme der Abschnitte „Wahl des Werkstoffes" und „Wechselbeanspruchung", bei den Festsetzungen über die zulässigen Spannungen für St 37 und St 52 und über die Bemessung der Zug- und Druckstäbe. Die neuen Festsetzungen über den Winddruck entsprechen dem Entwurf der Windbelastungsvorschriften im Hochbau DIN 1055 (Bl. 4).

Dagegen mußten die Festsetzungen über die Belastungsannahmen, die Berücksichtigung der häufig wiederholten Belastung und die Standsicherheit besonders geregelt werden. Aber auch hier war es möglich, sich für die Wärmewirkungen, die Bremskräfte aus der Fahrbewegung und die Berücksichtigung der Wechselbeanspruchung an die Vorschriften für Brücken (DIN 1072 und BE) anzulehnen.

Die verschiedenen Arbeitsbedingungen der einzelnen Krane verlangen eine der Art und Schwere des Betriebes entsprechende Ausbildung der Stahlbauteile. Diese Einflüsse, die besonders dynamischer Art sind, werden durch Ausgleichzahlen und Stoßbeiwerte (siehe unten) berücksichtigt. Hierfür werden die Krane in vier Klassen eingeteilt. Maßgebend für die Einteilung sind die bezogene Betriebsdauer, die bezogene Belastung und die Stärke der Stöße.

Die bezogene Betriebsdauer soll die während der Lebensdauer des Kranes zu erwartende Zahl der Lastwechsel, d. h. der Be- und Entlastungen berücksichtigen; denn mit steigender Zahl der Lastwechsel sinkt die Dauerfestigkeit und damit die zulässige Spannung des Werkstoffs. Um die bezogene Betriebsdauer zu bestimmen, muß man die Betriebszeit des Kranes ohne Arbeitspausen schätzen. Hierbei sind auch die Zeiten voll einzurechnen, wo nicht alle Motore gleichzeitig im Betrieb sind. Als Summe der reinen Betriebszeit und der Arbeitspausen muß bei Kranen, die fast das ganze Jahr in etwa gleicher Weise arbeiten, die tägliche Schichtzeit eingesetzt werden. Bei ihnen ist eine kleine bezogene Betriebsdauer dann anzunehmen, wenn im allgemeinen die Betriebszeit ohne Arbeitspausen weniger als die Hälfte der täglichen Schichtzeit beträgt. Bei Kranen, die nur zu bestimmten Jahreszeiten oder überhaupt selten benutzt werden, sind zur Bestimmung der bezogenen Betriebsdauer entsprechend größere Zeiträume zu vergleichen.

Die bezogene Belastung, die klein oder groß sein kann, soll zum Ausdruck bringen, ob die vom Kran zu hebende Last bei der zu erwartenden Gesamtsumme der Lasthübe sehr häufig nahe an der zulässigen Grenze liegt oder im allgemeinen wesentlich unter ihr bleibt und sie nur verhältnismäßig selten in voller Größe oder nahezu erreicht. Der erste Fall ist als große bezogene Belastung, der zweite als kleine anzusehen. Kleine bezogene Belastung ist schon dann anzunehmen, wenn bei etwa der Hälfte der Arbeitsspiele die Belastung nur $^2/_3$ der zulässigen Höchstlast beträgt.

Zu den Stößen aus dem Bewegen der Last sind auch die beim Drehen und Wippen des Kranes und die bei der Greifertätigkeit entstehenden Stöße zu rechnen. Die Stärke der Stöße aus dem Bewegen der Last hängt beispielsweise davon ab, ob z. B. beim Stückgutbetrieb mit Lasthaken bei gewöhnlicher Hubgeschwindigkeit oder mit Greifern und kurzem Ausleger bei großer Hubgeschwindigkeit gearbeitet wird. Im ersten Falle sind Stöße gewöhnlicher Stärke, im zweiten Falle starke Stöße zu erwarten. Die Wirkung der Stöße kann bei den einzelnen Teilen eines Kranes verschieden groß sein. Es kann daher in Frage kommen, die einzelnen Stahlbauteile verschiedenen Gruppen zuzuordnen, d. h. Kranteile, zu denen die Stöße bereits stark abgeschwächt gelangen, in die nächst niedrige Gruppe einzustufen. Bei Kranen wird dies nur ausnahmsweise, bei Kranbahnen regelmäßig möglich sein. In einer Tafel sind häufig vorkommende Kranarten, je nach der Art und Schwere der Arbeitsbedingungen in die vier Krangruppen eingeordnet.

Das Gewicht eines bestimmten Kranteiles kann für den einen Bauteil als ständige Last, für einen anderen als Verkehrslast wirken. So ist bei der Berechnung eines Laufkranes mit fahrbarer Katze das Gewicht des Laufkranträgers (ohne Katze) als ständige Last, bei der Berechnung der Kranbahn aber als Verkehrslast zu rechnen. Mit Rücksicht hierauf sind diese beiden Begriffe besonders eingehend im Normblatt und in den Erläuterungen behandelt. Zur Verkehrslast rechnen auch die Massenkräfte, die beim Drehen und Wippen und beim Abbremsen dieser Bewegungen oder beim Greiferbetrieb entstehen, nicht aber die Bremskräfte aus der Fahrbewegung.

Bei Kranen ist Schrägzug im allgemeinen durch die Unfallverhütungsvorschriften verboten. Soll bei einem Kran aus besonderen Gründen ein Schrägzug zugelassen werden, so muß sein ungünstiger Einfluß bei der Bemessung des Kranes, und zwar als Hauptkraft berücksichtigt werden. Im Hinblick darauf, daß Schrägzug im allgemeinen verboten ist, sind die bisher in baupolizeilichen Bestimmungen als „Schrägzugkräfte" bezeichneten Kraftwirkungen nunmehr als „Waagerechte Seitenkräfte" bezeichnet worden. Diese waagerechte Seitenkraft in der Größe von $^1/_{10}$ aller eine Fahrbahnseite belastenden Räder eines Laufkranes soll alle zahlenmäßig nicht erfaßbaren Seitenkräfte, z. B. beim Schieflaufen des Kranes und bei ungenauer Lage der Laufschienen, decken. Sie schließt auch eine etwa senkrecht zur Fahrbahn wirkende Bremskraft aus der Fahrbewegung einer Katze ein. Es ist also nicht erforderlich, die Bremskraft der Katze neben der genannten Seitenkraft in Rechnung zu stellen. Bei Laufkranen ist beiden Kranbahnträgern eine ausreichende Seitensteifigkeit zu geben, wobei bei der Ermittlung der waagerechten Seitenkraft die Laufkatze jeweils in ungünstigster Stellung anzunehmen ist.

Temperaturspannungen brauchen bei fahrbaren Kranen in der Regel nicht berücksichtigt zu werden. Jedoch ist der Einfluß der Temperaturschwankungen bei einem feststehenden Krantor im Freien zu berücksichtigen, wenn es als Zweigelenkrahmen ausgebildet ist.

Bremskräfte aus der Fahrbewegung von Kranen sind nunmehr durchweg als Zusatzkräfte zu berücksichtigen, gleichviel ob sie von einem oder von mehreren Kranen herrühren.

Für die Berücksichtigung der Windbelastung ist ein neues Verfahren vorgesehen, das sich, wie bereits gesagt, an den Entwurf der neuen Windbelastungsvorschriften anlehnt. Es paßt sich den wirklichen Zuständen besser an, ohne daß im allgemeinen die Rechnungswerte wesentlich von den Werten abweichen, die sich bei den bisherigen Winddruckannahmen ergaben. Der für den Betriebszustand angegebene Wert $q = 30$ kg/m² ergibt mit $c = 1{,}6$ (Tafel 4) für Fachwerke und Vollwandträger eine Windbelastung $w = 1{,}6 \cdot 30 = 48$ oder rd. 50 kg/m². Erfahrungsgemäß kann ein Kran bei dieser Windbelastung im allgemeinen nicht mehr arbeiten. Geändert ist die Festsetzung über die in Rechnung zu stellende Größe der Windangriffsflächen von hinten liegenden Trägern.

Die in Tafel 9 des Normblatts angegebenen zulässigen Spannungen sind unter der Voraussetzung gewählt, daß die Belastung der Stahlbauteile ruhend, d. h. dauernd unverändert ist. In Wirklichkeit erleiden jedoch sehr viele Bauteile der Krane je nach der Art des Betriebs mehr oder weniger starke Stöße. Außerdem sind sie häufigen Wiederholungen der Belastung und Kräften von veränderlicher Größe und Richtung ausgesetzt. Zum Ausgleich derartiger aus der Verkehrslast herrührender Stöße und auch des Einflusses etwaiger schwellender Beanspruchungen müssen alle durch die Verkehrslast hervorgerufenen Stabkräfte, Biegemomente und Querkräfte mit einer Ausgleichszahl ψ vervielfacht werden, die je nach der Kranklasse zwischen 1,2 und 1,9 schwankt.

Bauteile mit Wechselbeanspruchung kommen im Kranbau häufiger vor, weil die Verkehrslasten und die von ihnen hervorgerufenen Spannungen im Verhältnis zur ständigen Last oft sehr groß sind. Die geringere Dauerfestigkeit bei Wechselbeanspruchung zwang dazu, diesen Einfluß besonders zu berücksichtigen. Deshalb hat man das γ-Verfahren aus den Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken für den Wechselbereich in etwas vereinfachter Form eingeführt. Daneben ist auf Wunsch der Kranbauanstalten auch das einfachere, im Maschinenbau übliche Verfahren zugelassen, die größten Zug- und Druckspannungen, die in einem Punkte des Querschnittes (bei Biegungen in den Randfasern) infolge ständiger Last und Verkehrslast auftreten, ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen zusammenzuzählen und mit der zulässigen Spannung σ_{zul} zu vergleichen. Dieses Verfahren ergibt bei St 37, Handelsbaustahl und St 00 allerdings teilweise wesentlich ungünstigere Werte als das γ-Verfahren. Bei St 52 sind die Unterschiede meist nur unwesentlich.

Bei Nachweis des Einflusses der Wechselbeanspruchung sind in beiden Fällen die Beiwerte ψ und φ (s. unten) zu berücksichtigen, nicht aber die Knickzahl ω. Die Knicksicherheit ist besonders nachzuweisen und dabei die Beiwerte ψ und φ, nicht aber die Wechselbeanspruchung (z. B. die γ-Werte) zu berücksichtigen. Bei Fachwerkstäben mit Wechselbeanspruchung sind also in der Regel zwei Rechnungen durchzuführen: eine, um den Einfluß der Wechselbeanspruchung, und eine, um die Knicksicherheit nachzuweisen. Für die Bemessung der Stäbe wird bei großen Schlankheits-

graden und bei stark überwiegender Druckkraft die zweite Rechnung, in anderen Fällen die erste maßgebend sein.

Hat der zu berechnende Kranteil eine eigene Fahrbewegung, so können in ihm zusätzliche Beanspruchungen auch durch Stöße beim Fahren, z. B. durch Unebenheiten oder Hindernisse auf den Fahrschienen entstehen. Zum Ausgleich dieser Einflüsse sind die von der ständigen Last hervorgerufenen Stabkräfte, Biegemomente und Querkräfte mit einer Stoßzahl φ zu vervielfachen, soweit sie nicht schon mit einer Ausgleichzahl ψ vervielfacht sind. Die Stoßzahl φ hat den Wert 1,1 oder 1,2, je nach der Fahrgeschwindigkeit und dem Vorhandensein von Schienenstößen.

Für die Berechnung ist anzunehmen, daß die Fahrbahnkrane oder Kranteile gleichzeitig fahren und arbeiten. In dem Beispiel eines Tordrehkrans sind daher bei der Bemessung des Tores die Stabkräfte, Biegemomente und Querkräfte, die von der getragenen Last und dem Gewicht des sich drehenden Teils als Verkehrslast hervorgerufen werden, mit der Ausgleichzahl ψ, die durch das Gewicht des fahrenden Tores als ständige Last hervorgerufenen mit der Stoßzahl φ in die Berechnung einzuführen.

St 00 und Handelsbaustahl sollen möglichst nicht für Krane und Kranbahnen verwendet werden, da diese Stahlsorten, besonders St 00, in ihren Gütewerten stark streuen können und daher für die dynamisch beanspruchten Bauteile der Krane nicht besonders geeignet sind. Für den Fall, daß diese Stahlsorten ausnahmsweise doch verwendet werden sollen, sind die zulässigen Spannungen entsprechend niedriger festgesetzt worden, nämlich für St 00 auf 1000 kg/cm², für Handelsbaustahl auf 1200 kg/cm² in beiden Belastungsfällen.

Die Voraussetzung für die Anwendung der höheren Spannungen im Belastungsfall 2 sind in dem neuen Normblatt klarer als in DIN 1050 angegeben. Danach dürfen diese Spannungen angewandt werden, wenn außer den bei dem betreffenden Bauteil vorkommenden Hauptkräften auch die vorkommenden Zusatzkräfte berücksichtigt sind, beide natürlich nur, soweit sie ungünstig wirken. Es ist also nicht nötig, daß alle im Normblatt aufgezählten Haupt- und Zusatzkräfte bei den betreffenden Bauteilen vorkommen. Die höheren Spannungen für Belastungsfall 2 dürfen jedoch nicht angewandt werden, wenn der betreffende Bauteil, z. B. ein Füllstab eines Windverbandes, durch keine Hauptkraft, sondern nur durch eine einzige Zusatzkraft beansprucht wird. Über die Gründe für diese Maßnahme vgl. Jahrgang 1935, Seite 198.

Die Vorschriften über die Berechnung der ein- und mehrteiligen Druckstäbe entsprechen, wie schon oben gesagt, den Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau DIN 1050. Jedoch ist mit Rücksicht auf Erfahrungen der letzten Zeit ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die übliche Knickberechnung von Fachwerkstäben usw. nur zulässig ist, wenn die Enden der in Rechnung gestellten freien Knicklänge sicher gegen seitliches Ausweichen gehalten sind. Derartige Hinweise werden auch in die anderen Bestimmungen aufgenommen werden müssen. Die in DIN 1050 vorgesehene Beschränkung der rechnerischen Druckspannung auf die im Belastungsfall 1 zugelassenen Werte gilt nicht für Krane und Kranbahnen.

Sehr eingehende Festsetzungen sind über die Kippsicherheit und Probebelastung der Krane getroffen, die die verschiedenen Belastungsfälle und Kranarten besonders berücksichtigen. Bei der Berechnung der Standsicherheit bleiben die Ausgleich- und Stoßzahlen außer Ansatz.

Die Festsetzungen der Berechnungsgrundlagen, besonders die vorgeschriebene Berücksichtigung der Ausgleichzahl, der Stoßzahl und der Wechselbeanspruchung setzen die tatsächlich ausnutzbaren Spannungen zum Teil stark herab. Dies ist bei Kranen und Kranbahnen berechtigt, denn tatsächlich wird kaum ein Bauteil so häufig mit der rechnungsmäßigen Höchstlast voll beansprucht wie ein Kran. Erfahrungsgemäß werden Krane sogar sehr häufig nicht unerheblich überlastet. Besonders sind auch Kranbahnen bisher häufig auf Kosten ihrer Lebensdauer ohne ausgleichende Berücksichtigung der Stöße und der Dauerbeanspruchung bemessen worden, so daß sich nicht selten in schweren Betrieben mit der Zeit Schäden zeigten.

Die Grundsätze für die bauliche Ausbildung lehnen sich in der Fassung und, soweit möglich, auch sachlich an die GE der Reichsbahn an. Sie enthalten im wesentlichen Festsetzungen über die Mindestabmessungen, Nietabstände, Bauformen und Verbände.

Die Erläuterungen sollen das Einarbeiten in die Berechnungsgrundlagen und ihr Verständnis erleichtern. Sie bringen zu einzelnen Festsetzungen kurze Begründungen und erläutern eine Reihe von Bestimmungen durch Beispiele.

Die Berechnungsgrundlagen für Krane regeln einzelne Fragen der Belastungen und Berechnungen, die bisher in DIN 1055, Blatt 3, Belastungsannahmen für Verkehrslasten, und in DIN 1050, Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau, zum Teil anders geregelt waren. Bei der amtlichen Einführung des neuen Normblatts mußten daher zu beiden Vorschriften Ergänzungen und Abänderungen verfügt werden, die sich im allgemeinen auf Hinweise auf die neuen Vorschriften beziehen. Besonders geregelt ist im preußischen Einführungserlaß der Fall, daß Bauteile außer Kranlasten auch wesentliche andere Lasten tragen, z. B. Hallenstützen, die Dach und Kranbahn tragen. Bestehen diese Bauten aus St 00 oder Handelsbaustahl, so brauchen in ihnen nicht die niedrigeren Spannungen entsprechend den neuen Kranvorschriften, sondern es können die in den Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau festgelegten höheren Spannungen zugrunde gelegt werden. Die aus der Belastung durch einen oder mehrere Krane herrührenden Beanspruchungen dieser Bauteile sind jedoch stets nach den neuen Kranvorschriften zu ermitteln, also z. B. unter Berücksichtigung der Ausgleichszahlen.

Für die Anwendung höherer Spannungen, als die für St 00 festgesetzten, gelten natürlich bei Kranen dieselben Voraussetzungen wie beim übrigen Stahlhochbau. Soweit die Walzwerke daher keine allgemeine Gewähr dafür übernommen haben, daß bestimmte Stahlquerschnitte nur in der Güte des Handelsbaustahls geliefert werden, muß in derselben Weise, wie es für den übrigen Hochbau festgelegt ist, nachgewiesen werden, daß es sich tatsächlich um den Stahl handelt, für den die in der Berechnung zugrunde gelegten zulässigen Spannungen nach den Bestimmungen gelten. Für St 37, der für Krane bevorzugt werden soll, ist also immer mindestens ein Werkattest des Walzwerks erforderlich.

Schließlich wird im preußischen Einführungserlaß noch einmal besonders auf die Beachtung der einschlägigen Unfallverhütungsvorschriften hingewiesen, da die hierin festgesetzten Bestimmungen, z. B. über den freien Lichtraum, erfahrungsgemäß beim Entwurf von Hallen usw. nicht immer genügend beachtet werden. Hierdurch können schwere Unfälle entstehen.

Ein Beitrag zur Stabilität des horizontal ausgesteiften Stegbleches.

Von Doz. Dr. Miloslav Hampl, Prag.

(Schluß aus Heft 2.)

2. Reiner Schub ($\sigma = 0$) (Bild 3).

Wir nehmen die Schubspannung τ_0 als konstant an (Chwalla — s. 5. — berücksichtigt ihren parabolischen Verlauf).

Nach Auflösung der Gl. $\Delta = 0$ bekommt man zwei Wurzeln für die kritischen Spannungen τ_0. Wieder hat nur die kleinere praktische Bedeutung.

Die Werte von $\frac{\tau_0}{\sigma_e}$ (bzw. die kleineren von ihnen) in Abhängigkeit von β, γ sind in der Tafel II unten angegeben und in Bild 4 dargestellt.

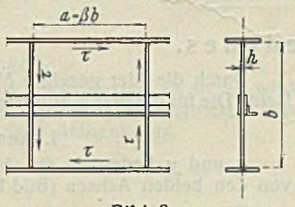

Bild 3.

Im Falle des Schubes kann sich die obere bzw. untere Hälfte der Platte (wenn in ihrer Mitte eine horizontale Steife ist) für sich selbst auch so ausbeulen, daß die Steife gerade bleibt. Daher ist es nötig, den kritischen Wert τ_0' zu bestimmen, welcher einer Platte mit den Seiten a, $b' = \frac{b}{2}$ und ohne Steife ($\gamma = 0$) entspricht.

Bezeichnet man die Beulziffern $\frac{\tau_0}{\sigma_e}$, die in der Tafel II eingeführt sind, mit $F(\beta, \gamma)$, so kann man den kritischen Wert τ_0' auf folgende Weise ausrechnen. Es ist

$$\tau_0 = \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{E h^2}{b^2} \cdot F(\beta, \gamma).$$

Den Wert für τ_0' bekommt man, wenn man in der letzten Gleichung für b den Wert $b' = \frac{b}{2}$, für β den Wert $\beta' = \frac{a}{b'} = \frac{a}{\frac{b}{2}} = 2\beta$ und $\gamma = 0$ einsetzt. Also

$$\tau_0' = \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{E h^2}{\frac{1}{4} \cdot b^2} \cdot F(2\beta, 0) = \sigma_e \cdot 4 F(2\beta, 0).$$

Der Wert $\frac{\tau_0'}{\sigma_e} = 4 F(2\beta, 0)$ begrenzt die Gültigkeit der Tafel II und des Bildes 4 (die gestrichelte Kurve). Aus Bild 4 ist ersichtlich, daß z. B. für $\beta = 0{,}80$ es keinen Sinn hätte, die Steife steifer zu wählen, als dem

Wert $\gamma = 5$ entspricht, denn durch eine Versteifung $\gamma > 5$ könnte man zwar die Ausbeulung der ganzen Platte verhindern, nicht aber die Ausbeulung der oberen bzw. unteren Hälfte für sich.

Tafel II. Für $k_\tau = \frac{\tau_0}{\sigma_e}$.

β \ γ	0	0,5	1	2	5	10	20	∞	$4 \cdot \frac{\tau_0'}{\sigma_e}$
0,4	41,5	57,3	67,9	82,5		124,2	133,7	146	49,05
0,5	26,86	35,22	41,3	50,3	66,0	79,1	89,6	98,6	37,7
0,667	16,03	20,05	23,1	27,98	37,2	46,1	55,1	68,0	30,02
0,8	12,29	14,70	16,78	19,92	28,1	33,3	41,0	57,1	28,15
1,0	9,40	10,90	11,92	13,98	18,2	23,0	28,95	49,8	26,84
1,25	7,86	8,78	9,50	10,65	13,31	16,52	21,02	45,5	26,61
1,5	7,15	7,86	8,36	9,15	11,02	13,38	16,78	45,2	26,60
2,0	6,71	7,28	7,65	8,19	9,27	10,66	12,8	46,3	
2,5	6,66	7,17	7,57	8,06	9,01	10,06	11,62	57,3	

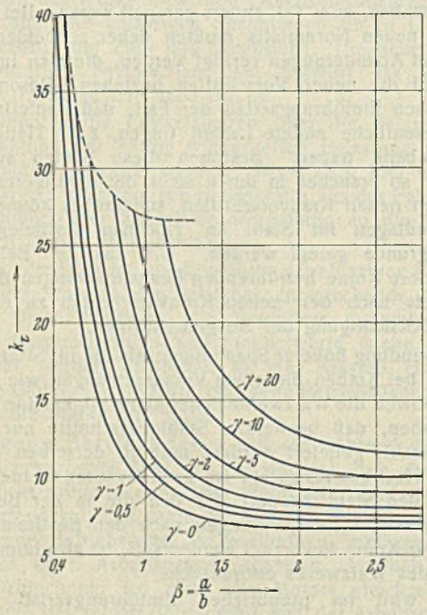

Bild 4.

Tafel III. Für $\frac{\tau}{\tau_0}$.

$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	$\beta = 1$, $\gamma = 0$	$\beta = 1$, $\gamma = 5$	$\beta = 1$, $\gamma = \infty$	$\beta = 0,6$, $\gamma = 0$	$\beta = 0,6$, $\gamma = \infty$
0	1	1	1	1	1
0,1	0,994	0,994		0,996	0,995
0,2	0,975	0,976	0,965	0,983	0,980
0,3	0,943	0,945	0,939	0,961	0,955
0,4	0,898	0,900		0,928	0,919
0,5	0,837	0,841	0,839	0,882	0,869
0,6	0,758	0,763		0,821	0,805
0,7	0,658	0,663	0,682	0,738	0,721
0,8	0,530	0,534	0,569	0,626	0,609
0,9	0,355	0,363	0,410	0,457	0,448
0,95	0,236			0,331	0,326
1,0	0	0	0	0	0

Die angegebenen Werte für $\gamma = \infty$ haben nur theoretische Bedeutung; sie sollen zeigen, daß die Abhängigkeit $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ von $\frac{\tau}{\tau_0}$ bei verschiedenen γ praktisch unveränderlich bleibt. Daher wurden nur die Kurven

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \beta, \gamma\right) \text{ für } \gamma = 0 \text{ und } \beta = 1 \text{ bzw. } 0,6$$

in Bild 6 dargestellt. Man erkennt, daß die Kurve $\beta = 1$ unter dem Einheitskreise liegt.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Diagramme Bild 2, 4, 6 zur Bestimmung der Sicherheit gegen Ausbeulung benutzt.

Beispiel:

$a = 193{,}75$ cm, $b = 220$ cm,
$h = 1{,}2$ cm, $J = 215$ cm^4,
$E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2,
$\beta = \frac{a}{b} = 0{,}880$, $\gamma = 6{,}2$,
$\sigma_e = 56{,}47$ kg/cm^2.

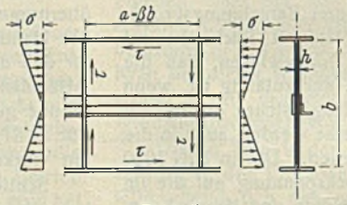

Bild 5.

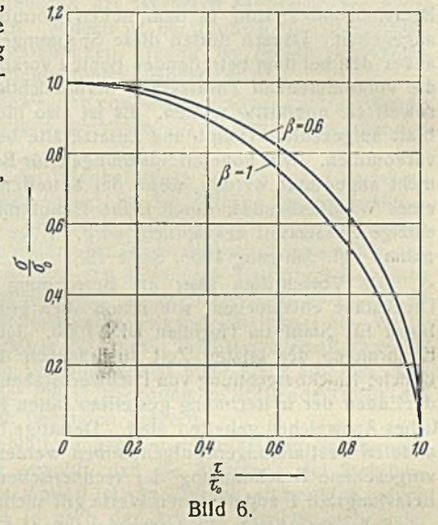

Bild 6.

3. Biegung und Schub (Bild 5).

Durch Lösung der Gleichung $\Delta = 0$ bekommt man die Wurzelpaare σ, τ, welche die kritischen Ausbeulspannungen darstellen. Wenn wir — wie Chwalla (l. c. 6.) — die Verhältniszahlen $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ bzw. $\frac{\tau}{\tau_0}$ (wobei σ_0 bzw. τ_0 die kritischen Ausbeulspannungen bei reiner Biegung bzw. reinem Schub bedeuten) einführen, bekommen wir

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}, \beta, \gamma\right).$$

Diese Gleichung stellt die Grenzkurve, welche natürlich durch die Punkte (0,1 und 1,0) geht, dar.

Wir führen in der folgenden Tafel III einige besondere Fälle an:

$\beta = 1$, $\gamma = 0$

$\beta = 1$, $\gamma = 5$ $\beta = 1$, $\gamma = \infty$
$\beta = 0{,}6$, $\gamma = 0$ $\beta = 0{,}6$, $\gamma = \infty$.

Die Platte sei durch ein Biegungsmoment mit $\bar{\sigma} = 800$ kg/cm^2 als Biegungsspannung und durch eine Schubspannung $\bar{\tau} = 300$ kg/cm^2 belastet.

I. Aus Bild 2 für reine Biegung bestimmt man die Ausbeulziffer $k_\sigma \simeq 35{,}2$, also die kritische Biegungsspannung $\sigma_0 = k_\sigma \sigma_e \simeq 2000$ kg/cm^2.

II. Aus Bild 4 für reinen Schub bestimmt man $k_\tau \simeq 23{,}6$, also die kritische Schubspannung $\tau_0 = k_\tau \sigma_e \simeq 1330$ kg/cm^2.

III. Man sucht jetzt im Bild 6 den Punkt $\bar{A}$ mit den Koordinaten $\frac{\bar{\tau}}{\tau_0} = \frac{300}{1330} = 0{,}226$ und $\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{800}{2000} = 0{,}40$. Durch diesen Punkt $\bar{A}$ und durch den Koordinatenursprung führt man eine Gerade, welche die interpoliert gedachte Kurve $\beta = 0{,}88$ in einem Punkte $A_{0,88}$ schneidet. Das Verhältnis $\frac{\overline{0A_{0,88}}}{\overline{0A}}$ ist gleich der Sicherheit gegen die Ausbeulung.

Verschiedenes.

Praktische Anwendungen einer allgemeinen Integrationsmethode zur Bestimmung von Momenten. Im folgenden soll gezeigt werden, wie das über eine beliebige Fläche oder Flächenstück zu erstreckende Integral

$$\vartheta = \int_{F(xy)} x^m y^n \, df$$

praktisch auf einfache Weise gelöst und verwertet werden kann.

Das Integral stellt in dieser allgemeinen Form Momente beliebiger Ordnung der Fläche um irgendein rechtwinkliges oder auch schiefwinkliges Achsenkreuz dar. Die Lage des Schwerpunktes bezüglich der Achsen spielt dabei keine Rolle.

Die genaue Lösung dieser Aufgaben ist schon bei einfachen Flächen sehr zeitraubend.

Durch die hier gezeigte Methode wird die Lösung wesentlich vereinfacht. Die für die Praxis erforderliche Genauigkeit kann rasch erreicht werden.

I. Analytische Lösung.

x und y bedeuten die Abstände des Flächenelements $df = dx\,dy$ von den beiden Achsen (Bild 1 a).

Es ist $$\vartheta = \iint_{F(xy)} x^m y^n \, dx\, dy.$$

Wir schreiben dieses Integral in folgender Form:

$$\vartheta = \iint_{F(xy)} d \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot d \cdot \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Es ist auch

$$\vartheta = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \iint\limits_{F(\xi\eta)} d\xi\, d\eta \text{ [1]},$$

wenn mit $\xi = x^{m+1}$ und mit $\eta = y^{n+1}$ bezeichnet wird (Transformationsgleichungen).

Bei geeigneter Berandung des Flächenstücks läßt sich das Integral analytisch bestimmen.

II. Graphische Lösung.

Zu diesem Zweck zeichnet man die Punkte $P_{(xy)}$ der gegebenen Berandungskurve mit Hilfe der Transformationsgleichungen in einem neuen Koordinatensystem (ξ, η), indem man die Punkte $P_{(\xi\eta)}$ bestimmt (Bild 1b).

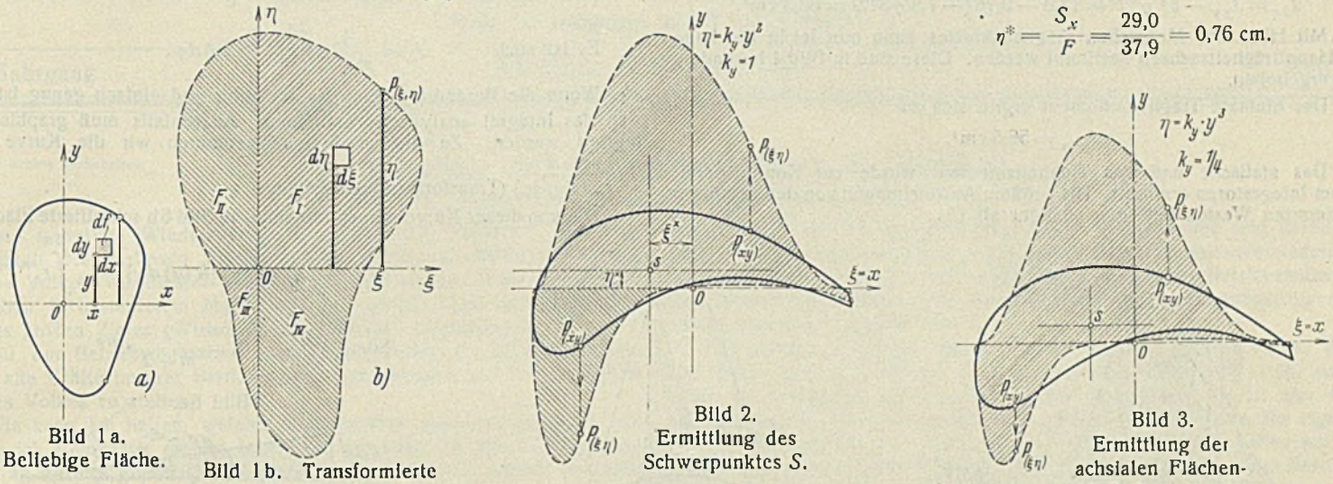

Bild 1a. Beliebige Fläche.

Bild 1b. Transformierte Fläche [Hilfsfläche].

Bild 2. Ermittlung des Schwerpunktes S.

Bild 3. Ermittlung der achsialen Flächenträgheitsmomente.

Unter Berücksichtigung der Vorzeichen ist die von diesen Kurven eingeschlossene Fläche [Hilfsfläche]

$$F^* = \iint\limits_{F(\xi\eta)} d\xi\, d\eta.$$

Somit ist

$$\vartheta = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \cdot F^*.$$

Mit F_{I}, F_{II}, F_{III} und F_{IV} bezeichnen wir die Absolutwerte der Flächenstücke in den einzelnen Quadranten (Bild 1b). Wir können dann vier Fälle unterscheiden:

1. m gerade Zahl, n gerade Zahl: $F^* = F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}} + F_{\mathrm{III}} + F_{\mathrm{IV}}$
2. m gerade Zahl, n ungerade Zahl: $F^* = F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}} - F_{\mathrm{III}} - F_{\mathrm{IV}}$
3. m ungerade Zahl, n gerade Zahl: $F^* = F_{\mathrm{I}} - F_{\mathrm{II}} - F_{\mathrm{III}} + F_{\mathrm{IV}}$
4. m ungerade Zahl, n ungerade Zahl: $F^* = F_{\mathrm{I}} - F_{\mathrm{II}} + F_{\mathrm{III}} - F_{\mathrm{IV}}$.

Wir haben das einfache Ergebnis:

Das über ein Flächenstück zu erstreckende Integral $\vartheta = \int x^m y^n\, df$ kann durch einfaches Umzeichnen der Berandungskurve an Hand der Transformationsgleichungen und Flächenbestimmungen genau gelöst werden.

IIIa. Bemerkungen zur Anwendung der Methode.

Zum Aufzeichnen der neuen Kurve $P_{(\xi\eta)}$ sind die ξ- und η-Werte oft in einem, der Größe des Querschnitts angepaßten Grade zu verkürzen, d. h. mit einem geeigneten Verkürzungsbeiwert k zu multiplizieren.

Es wird dann

$$\vartheta = \frac{1}{k_x k_y (m+1)(n+1)} \cdot F^*,$$

wo mit k_x und k_y der Verkürzungsbeiwert in x- bzw. in y-Richtung bezeichnet wird. Die Transformationsgleichungen lauten nun

$$\xi = k_x x^{m+1},$$
$$\eta = k_y y^{n+1}.$$

IIIb. Anwendungen.

Die Bestimmung der für den Techniker wichtigsten Momente wird nun an Hand eines Dampfturbinenschaufel-Querschnitts erläutert. Wir wählen zunächst ein beliebiges, rechtwinkliges Achsenkreuz.

1. Das statische Moment.

Bezüglich der x-Achse beträgt dieses

$$S_x = \int\limits_{F(xy)} y\, df.$$

Es ist also $m = 0$ und $n = 1$.

Somit ist

$$S_x = \frac{1}{2} \iint dx\, d(y^2).$$

Wir bestimmen die Kurve $\eta = k_y y^2(x)$ (Bild 2). In unserem Beispiel wurde $k_y = 1$ gewählt.

Es ist dann $F^* = (F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}}) - (F_{\mathrm{III}} + F_{\mathrm{IV}}) = 79{,}0 - 21{,}0$,

$F^* = 58{,}0\ \mathrm{cm}^2$ (absolut)

und

$$S_x = \frac{1}{k_y \cdot 2} \cdot F^* = \frac{1}{2} \cdot 58{,}0 = 29{,}0\ \mathrm{cm}^3.$$

Wenn mit $F = 37{,}9\ \mathrm{cm}^2$ der Flächeninhalt des gegebenen Querschnitts bezeichnet wird, bestimmt sich der Schwerpunktabstand von der x-Achse zu

$$\eta^* = \frac{S_x}{F} = \frac{29{,}0}{37{,}9} = 0{,}76\ \mathrm{cm}.$$

Analog kann der Schwerpunktabstand ξ^* von der y-Achse bestimmt werden.

Es ist

$$\xi^* = \frac{-70{,}2}{37{,}9} = -1{,}85\ \mathrm{cm}.$$

Bemerkung: Wählt man die beiden Achsen so, daß sie den Querschnitt nicht schneiden, z. B. als Tangenten, dann erhält man nur positive oder nur negative Hilfsflächen. Dadurch kann das Verfahren vereinfacht werden, unter Umständen jedoch auf Kosten der Genauigkeit.

2. Das Trägheitsmoment [2].

Bezüglich der x-Achse beträgt dieses

$$J_x = \int\limits_{F(xy)} y^2\, df.$$

Es ist also $m = 0$ und $n = 2$.

Somit ist

$$J_x = \frac{1}{3} \iint dx\, d(y^3).$$

Wir bestimmen die Kurve $\eta = k_y y^3(x)$. In unserem Beispiel wählen wir $k_y = \frac{1}{4}$ (Bild 3).

Es ist dann $F^* = F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}} + F_{\mathrm{III}} + F_{\mathrm{IV}} = 68{,}5\ \mathrm{cm}^2$ (absolut)

und

$$J_x = \frac{1}{k_y \cdot 3} \cdot F^* = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 3} \cdot 68{,}5 = 91{,}4\ \mathrm{cm}^4.$$

Analog wird das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse bestimmt.

Es ist

$$J_y = \frac{1}{k_x \cdot 3} \cdot F^* = \frac{1}{\frac{1}{30} \cdot 3} \cdot 53{,}1 = 531\ \mathrm{cm}^4.$$

Die Trägheitsmomente bezüglich der Schwerachsen betragen

$$J_\xi = J_x - \eta^{*2} F = 69{,}5\ \mathrm{cm}^4,$$
$$J_\eta = J_y - \xi^{*2} F = 401{,}0\ \mathrm{cm}^4.$$

Bemerkung: Gewöhnlich ist das Trägheitsmoment bezüglich Schwerachsen zu bestimmen. Es empfiehlt sich deshalb, zuerst den Schwerpunkt zu ermitteln und diesen mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen zu lassen. Man erspart sich dadurch eine nachherige Umrechnung und gewinnt an Genauigkeit.

3. Das Deviationsmoment [Fliehmoment].

Gemäß Definition ist $J_{xy} = \int\limits_{F(xy)} x\, y\, df.$

Es ist also $m = 1$ und $n = 1$. Die Transformationsgleichungen lauten nun $\xi = \frac{1}{5} \cdot x^2$ und $\eta = y^2$, wo $k_x = \frac{1}{5}$ und $k_y = 1$ gewählt wurden. Die Bestimmung der Kurve $P_{(\xi\eta)}$ erfolgt am vorteilhaftesten in zwei Schritten (Bild 4):

[1]) Diese Tatsache folgt ohne weiteres aus der allgemeinen Substitutionstheorie der Doppelintegrale.

[2]) M. Baumann in Schweiz. Bauztg., Bd. 104 (1934), Nr. 11, S. 121.

1. Transformation in y-Richtung. Wir zeichnen also die Kurve $P_{(x\eta)}$, welche wir zur Bestimmung des statischen Momentes bereits ermittelt haben.

2. Transformation in x-Richtung. Von der Kurve $P_{(x\eta)}$ ausgehend, läßt sich die Kurve $P_{(\xi\eta)}$ leicht einzeichnen[3]).

Es ist nun $F^* = F_{\mathrm{I}} - F_{\mathrm{II}} + F_{\mathrm{III}} - F_{\mathrm{IV}}$

$$= 20{,}2 - 50{,}8 + 42{,}2 - 1{,}2 = 10{,}4 \text{ cm}^2 \text{ (absolut)}$$

und
$$J_{xy} = \frac{1}{k_x k_y \cdot 4} \cdot F^* = \frac{1}{\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 4} \cdot 10{,}4 = 13{,}0 \text{ cm}^4.$$

Das Deviationsmoment bezüglich der Schwerachsen beträgt

$$J_{\xi\eta} = J_{xy} - \xi^* \eta^* F = 13{,}0 - 0{,}76\,(-1{,}85)\,37{,}9 = 66{,}3 \text{ cm}^4.$$

Mit Hilfe des Mohrschen Trägheitskreises kann nun leicht die Lage der Hauptträgheitsachsen bestimmt werden. Diese sind in Bild 4 besonders hervorgehoben.

Das kleinste Trägheitsmoment ergibt sich zu

$$J_{\min} = 56{,}5 \text{ cm}^4.$$

Das statische und das Trägheitsmoment wurde zur Kontrolle mit einem Integratoren ermittelt. Die größten Abweichungen von den graphisch bestimmten Werten betrugen weniger als 1 %.

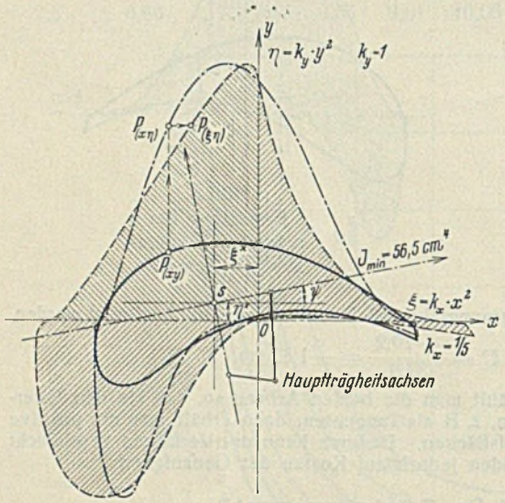

Bild 4. Ermittlung des Deviationsmomentes und der Hauptträgheitsachsen.

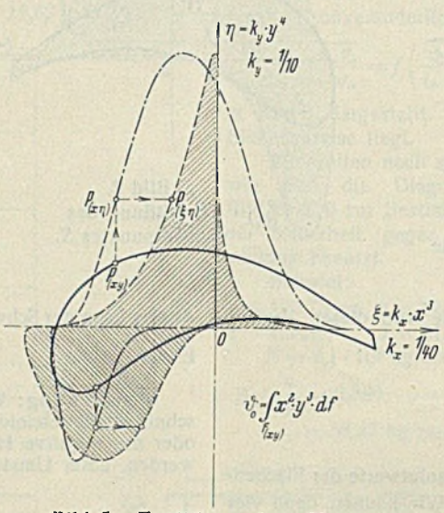

Bild 5. Ermittlung eines Momentes höherer Ordnung.

4. Ein Moment höherer Ordnung.

Um die allgemeine Verwendbarkeit der Methode darzutun, soll noch ein Moment höherer Ordnung bestimmt werden.

Als Beispiel wählen wir

$$\vartheta = \int_{F(xy)} x^2 y^3 \, df.$$

Es ist also $m = 2$ und $n = 3$, und die Transformationsgleichungen lauten

$$\xi = \frac{1}{40} \cdot x^3; \quad \eta = \frac{1}{10} \cdot y^4, \quad \text{wo } k_x = \frac{1}{40} \text{ und } k_y = \frac{1}{10}$$

gewählt wurden. Zur Bestimmung der Kurve $P_{(\xi\eta)}$ (Bild 5) kann in gleicher Weise wie bei der Ermittlung des Deviationsmomentes vorgegangen werden.

Es ist

$$F^* = (F_{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{II}}) - (F_{\mathrm{III}} + F_{\mathrm{IV}}) = 28{,}1 - 26{,}15 = 1{,}95 \text{ cm}^2 \text{ (absolut)}$$

und
$$\vartheta = \frac{1}{k_x k_y \cdot 3 \cdot 4} \cdot F^* = \frac{1}{\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{10} \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1{,}95 = 65{,}0 \text{ cm}^7.$$

IV. Das räumliche Integral.

Mit den gleichen Überlegungen läßt sich das über einen Körper (Volumen) zu erstreckende Integral

$$\theta = \int_V x^m y^n z^q \, dm$$

bestimmen. Es ist dann

$$\theta = \frac{1}{(m+1)(n+1)(q+1)} \int dV^*.$$

Dabei ist $\int dV^* = V^*$ das von der Oberfläche $(x^{m+1}, y^{n+1}, z^{q+1})$ eingeschlossene Volumen, wiederum unter Berücksichtigung der Vorzeichen. Die graphische Bestimmung läßt sich nur durch Legen von einzelnen Schnitten durchführen.

[3]) Die Reihenfolge der Transformation spielt keine Rolle. Es kann also auch zuerst in x- und nachher in y-Richtung transformiert werden.

V. Bestimmung von polaren Momenten (Bild 6a).

Gemäß Definition ist das polare Moment m^{ter} Ordnung eines Flächenstücks bezüglich eines Punktes 0 seiner Ebene das über das Flächenstück zu erstreckende Integral

$$J_0 = \int_{F(r,\varphi)} r^m \, df.$$

Dabei bedeutet r den Abstand des Flächenelements $df = (r\,d\varphi)\,dr$ vom Bezugspunkt 0 und $r_a(\varphi)$ den Abstand der Berandungspunkte von 0.

Wir schreiben dieses Integral in folgender Form

$$J_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_a(\varphi)} r^{m+1} \, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_a(\varphi)} d \cdot \frac{r^{m+2}}{m+2}.$$

Es ist auch
$$J_0 = \frac{1}{m+2} \int_0^{2\pi} r_a^{m+2}(\varphi) \, d\varphi.$$

Wenn die Berandung $r_a = f(\varphi)$ bekannt und einfach genug ist, läßt sich das Integral analytisch bestimmen. Andernfalls muß graphisch integriert werden. Zu diesem Zweck bestimmen wir die Kurve $R(\varphi) = r_a^{\frac{m+2}{2}}(\varphi)$ (Transformationsgleichung).

Die von dieser Kurve eingeschlossene, in Bild 6b schraffierte Fläche ist

$$F^* = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot R(\varphi)\,[R(\varphi)\,d\varphi] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_a^{m+2}(\varphi).$$

Somit ist
$$J_0 = \frac{2}{m+2} \cdot F^*.$$

Bild 6a.

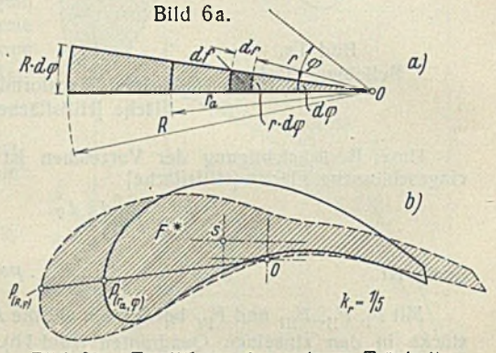

Bild 6b. Ermittlung des polaren Trägheitsmomentes bezüglich 0.

VI. Das polare Trägheitsmoment (Bild 6b).

Gemäß Definition ist

$$J = \int_{F(r,\varphi)} r^2 \, df.$$

Es ist also $m = 2$ und $\frac{m+2}{2} = 2$.

Die Transformationsgleichung lautet $R(\varphi) = k_r\, r_a^2(\varphi)$, wo k_r den Verkürzungsbeiwert in radialer Richtung bedeutet.

Somit ist
$$J_0 = \frac{1}{k_r^2 \cdot 2} \cdot F^*.$$

In unserem Beispiel erhalten wir $F^* = 50{,}2$ cm² (absolut)

und
$$J_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 2} \cdot 50{,}1 = 626{,}2 \text{ cm}^4.$$

Bezüglich des Schwerpunktes erhalten wir

$$J_s = J_0 - (\xi^{*2} + \eta^{*2})\,F = 626{,}2 - 151{,}9 = 474{,}3 \text{ cm}^4.$$

Die Beziehung $J_s = J_\xi + J_\eta$ gestattet uns eine Kontrolle.

Wir erhalten
$$J_s = 474{,}3 \text{ cm}^4,$$
$$J_\xi + J_\eta = 470{,}5 \text{ cm}^4.$$

Das ergibt eine Differenz von 3,8 cm⁴ oder ungefähr 1 %.

Dieser Wert gibt uns einen Anhaltspunkt über die Genauigkeit der ermittelten Momente. Martin Baumann, Dipl.-Ing., E.T.H. Zürich.

Berichtigung

zum Aufsatz „Die Knickfestigkeit des Stockwerkrahmens" von Dr.-Ing. M. G. Puwein, Wien, Jahrgang 1936, S. 201.

In den Gl. (3) und (3a) auf S. 201 und 202 muß es an Stelle von v_k richtig heißen v'_k. Dr.-Ing. Puwein.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.