

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
 Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
 Fernsprecher: 87 7421
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

10. Jahrgang

BERLIN, 23. April 1937

Heft 9

Beitrag zur Berechnung der Stegblechaussteifungen vollwandiger Blechträger.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Reichsbahnoberrat Dr.-Ing. Krabbe, München.

A. Allgemeines.

Auf Grund des von Bryan-Timoschenko aufgestellten Potentials können die Abmessungen eines fest umrahmten Stegblechteils bestimmt werden, die vorhanden sein dürfen oder müssen, damit das Stegblech nicht ausbeulen kann, jedoch unter der Voraussetzung, daß die dasselbe umrahmenden Steifen (Pfosten oder Längssteifen) hinreichend steif sind. Es ergeben sich danach die kritischen Beulspannungen σ_k bzw. τ_k , bei welchen das Stegblech ausbeulen kann. Die Berechnungsvorschriften sind im wesentlichen nach den Vorschlägen von Prof. Dr. Schleicher im Deutschen Ausschuß für Stahlbau beraten worden und werden demnächst als Deckblatt zur „BE“ erscheinen. Im folgenden soll die erforderliche Steifigkeit der Aussteifungen ermittelt werden.

Es ist versucht worden, diese Steifen in das Bryan-Timoschenko-Potential mit einzubeziehen, um so die erforderliche Steifigkeit der Aussteifungen im Verhältnis zur Steifigkeit der Platte zu ermitteln¹⁾. Dieses Verfahren hat indessen bisher nur zu Teillösungen geführt, und zwar fast nur für Fälle, die praktisch kaum vorkommen.

Das im folgenden dargelegte Verfahren, welches allgemein und in einfacher Weise anwendbar ist, geht von der Betrachtung der unversteiften Platte aus, in welcher die ermittelten kritischen Beanspruchungen (σ_k, τ_k) überschritten werden. Es betrachtet dann den Verformungszustand, den die unversteifte Platte nach Überschreitung der kritischen Beanspruchungen erleiden würde, um auf diesem Wege zur Ermittlung der Druckkräfte zu gelangen, die von den Aussteifungen übernommen werden müßten, wenn diese Verformung wirklich einträte, da sie ja von der Platte selbst nicht mehr aufgenommen werden können. Dabei muß als selbstverständlich angenommen werden, daß eine Druckfaser, die die kritische Beuldruckspannung erreicht hat, einen weiteren Spannungszuwachs nicht mehr aufnimmt; sie behält, gleichgültig, ob sie ausbeult oder nicht, die kritische Beuldruckspannung. Den Überschuß müssen zur Aufrechterhaltung der Querkraftbedingungen die senkrecht kreuzenden Zugfasern übernehmen, wobei dahingestellt sein mag, ob diese angespannten Zugfasern durch ihre Überlagerung der Druckfasern diese am Ausbeulen verhindern oder nicht. Wir wollen jedenfalls damit nicht rechnen.

B. Ermittlung des wirklichen Spannungszustandes beim Erreichen der kritischen Beanspruchungen.

Es ist zunächst erforderlich, die Hauptspannungen zu bestimmen. Das soll in Beschränkung auf die hier allein vorkommenden Fälle, nämlich Druckspannung oder Zugspannung σ_x in der Längsrichtung des Trägers und Schubspannung τ_{xy} an Bild 1 erörtert werden, ohne auf den Beweis einzugehen. Bild 1 entspricht den Werten

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -1000 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{xy} &= +700 \text{ „} \\ \text{d. h. } \frac{\sigma_x}{2} &= 500 \text{ „} \\ \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} &= 860 \text{ „} \end{aligned}$$

Im Koordinatenkreuz mit dem Anfang 0 tragen wir $\frac{\sigma_x}{2} = -500 \text{ kg/cm}^2$

ab = 0A, beschreiben dann mit dem Halbmesser $\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} = 860 \text{ kg/cm}^2$ den Kreis um A. Dann ist 0B = σ_{\min} ; 0C = σ_{\max} . Verbinden wir nun

¹⁾ Timoschenko, Über die Stabilität versteifter Platten, Der Eisenbau 1921, S. 147. — Chwalla, Bemessung der waagrecht ausgesteiften Stegbleche. Vorbericht zum II. intern. Kongreß für Brücken- und Hochbau. — Ders., Stahlbau 1936, Heft 21/22.

den Schnittpunkt D dieses Kreises mit dem positiven Zweig der Y-Achse mit B und C, so gibt DB die Richtung von σ_{\min} , CD die Richtung von σ_{\max} an; ferner ist $\tau_{xy} = 0D$. Ist $\sigma_x = +1000 \text{ kg/cm}^2$, haben wir also Zug- und Schubspannung, so ergibt sich dafür ein zur Y-Achse genau symmetrisches Bild, wobei die Bezeichnung σ_{\min} und σ_{\max} zu vertauschen sind. Im Sonderfall reiner Schubspannung wird (Bild 2)

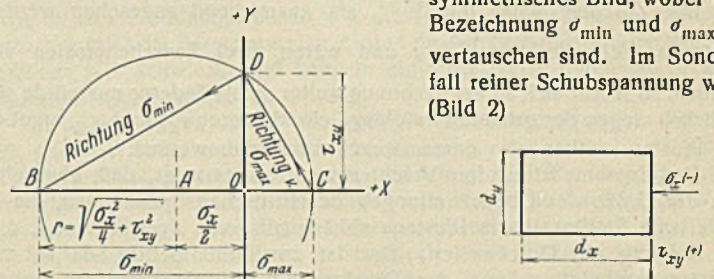


Bild 1.

$$\frac{\sigma_x}{2} = 0 \quad \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} = \tau_{xy}$$

A fällt mit 0 zusammen; es wird $\sigma_{\max} = \tau_{xy} = -\sigma_{\min}$.

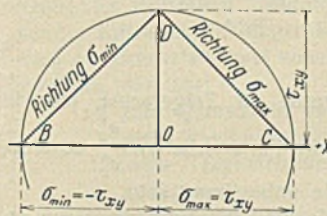


Bild 2.

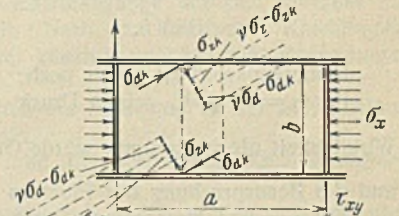


Bild 3.

C. Verformungszustand nach Überschreitung der kritischen Spannungen.

1. Gleichmäßiger Druck und Schub (Bild 3).

Im Trägerfeld von der Länge a und der Höhe b überschreite die wirkliche Hauptspannung σ_d und σ_z die aus den kritischen Spannungen sich ergebenden Hauptspannungen σ_{dk} und σ_{zk} . Es sei in der Mitte des Feldes ein Zwischenpfosten angeordnet, so daß bei hinreichender Steifigkeit dieses Pfostens in den Einzelfeldern die den kritischen Spannungen für dieses Feld entsprechenden zulässigen Hauptspannungen die Werte $\nu \sigma_d$ und $\nu \sigma_z$ nicht überschreiten. Denken wir uns den Zwischenpfosten als nicht vorhanden, so kann in der Richtung der Hauptspannung σ_{dk} auch bei über die kritische Spannung hinausführender Belastung des Trägers eine über σ_{dk} hinausgehende Spannung nicht mehr aufgenommen werden; die in dieser Richtung liegenden Fasern behalten, mögen sie ausbeulen oder nicht, den Wert σ_{dk} . Zur Aufrechterhaltung der Querkraftbedingungen muß daher σ_{zk} allein zunehmen, d. h. den Querkraftanteil von σ_{dk} mitaufnehmen. Die Enden der Druck- und Zugfasern treffen an den Gurtungen zusammen nach Bild 4.

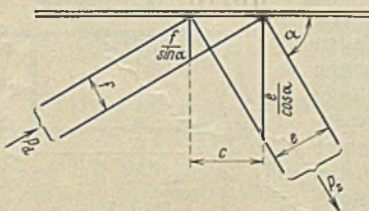


Bild 4.

Um dieselbe Querkraft in den Einheiten der senkrechten Blechschnitte zu erzeugen, muß die Bedingung erfüllt werden:

$$\frac{P_d \cdot \cos \alpha}{f / \sin \alpha} = \frac{P_z \cdot \sin \alpha}{e / \cos \alpha}$$

oder $\frac{P_d}{P_z} = \frac{f}{e} = \text{ctg } \alpha$.

Nun ist aber

$$P_d = \sigma'_d f t \quad P_z = \sigma'_z e t,$$

also

$$(1) \quad \frac{\sigma'_d f}{\sigma'_z e} = \text{ctg } \alpha,$$

und da $\frac{f}{e} = \text{ctg } \alpha$,

$$(2) \quad \sigma'_z = \sigma'_d.$$

Es entsteht also nun in der Zugfaser als Spannung, die das Stegblech nicht aufnehmen kann,

$$\nu \sigma_d - \sigma_{dk} + \nu \sigma_z - \sigma_{zk} \text{ oder} \\ \nu (\sigma_d + \sigma_z) - (\sigma_{dk} + \sigma_{zk}).$$

Davon entfällt auf den senkrechten Stegblechstreifen von der Breite c , da $c = \frac{e}{\sin \alpha}$, der Anteil

$$\sigma_v = [\nu (\sigma_d + \sigma_z) - (\sigma_{dk} + \sigma_{zk})] \sin^2 \alpha.$$

Der Pfosten muß die Druckkraft aufnehmen können, die durch Vermittlung der Gurte auf ihn übertragen wird:

$$(3) \quad P_v = 1,3 [\nu (\sigma_d + \sigma_z) - (\sigma_{dk} + \sigma_{zk})] t \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Eine Knickzahl ist nicht erforderlich, da sie bereits in $\nu \sigma_d$ und $\nu \sigma_z$ liegt. Es empfiehlt sich aber, einen kleinen Zuschlag zu machen, da wegen der Steifigkeit der Gurtungen diese als kontinuierliche Träger wirken und die Auflagerdrücke auf die Pfosten dadurch größer werden.

Der Zuschlag kann mit 30% als ausreichend angesehen werden.

Hätte das Feld die Länge $\frac{3}{2} \cdot a$ und wären zwei Zwischenpfosten vorhanden, so würde sich an der Rechnung weiter nichts ändern; nur würde sich natürlich wegen der größeren Feldlänge ein kleineres σ_{dk} und σ_{zk} ergeben, die Pfosten müßten also dementsprechend stärker werden.

Das Ergebnis ist insofern beachtenswert, als es zeigt, daß, abgesehen von der Größe der Überschreitungen der kritischen Spannungen, die erforderliche Steifigkeit des Pfostens abhängig ist von dem Winkel α , d. h. der Neigung der Druckwellen. Das ist zweifellos richtig, da bei verhältnismäßig steiler Lage der Druckwellen (Bild 5) diese in weitaus stärkerem Maße ein Mitausbiegen des Pfostens herbeiführen können wie bei flacher Neigung der Druckwellen nach Bild 6.



Bild 5.



Bild 6.

Bemerkenswert ist ferner noch:

Für $\alpha = 0$, d. h. reinen Druck senkrecht zur Trägerachse (der in Wirklichkeit nie vorkommt), würde Gl. (1) die Form erhalten $\frac{\sigma'_d}{\sigma'_z} = \infty$, und die Beanspruchung des Pfostens würde unbestimmt sein.

Für $\alpha = 90^\circ$, d. h. reinen Druck, würde die Gleichung die Form erhalten $\frac{\sigma'_d}{\sigma'_z} \cdot 0 = 0$ und damit auch in diesem Falle für die Pfosten unbestimmte Werte ergeben.

In beiden Fällen sind keine kreuzenden Zugfasern vorhanden.

Es zeigt sich also auch hier, daß bei reinem Druck die Versteifung durch Pfosten eine unzulängliche Maßnahme ist.

Im Falle reinen Schubes wird

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\nu \sigma_d - \sigma_{dk} = \nu \sigma_z - \sigma_{zk} = \nu \tau - \tau_k;$$

damit geht Gl. (3) über in

$$(4) \quad P_v = 1,3 \cdot 2 (\nu \tau - \tau_k) t \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

2. Reiner Schub und Biegung,

der Fall, der bei Berechnung der Biegeträger allein vorkommt.

Wir nehmen hier an, daß die kritischen Spannungen so bemessen sind, daß nirgendwo im Träger, auch in der Zone des vorwiegenden Zuges, die den kritischen Spannungen entsprechenden Hauptdruckspannungen überschritten werden dürfen, wenn ein Ausbeulen verhindert werden soll, daß also in allen Teilen die Überschreitung der Druckspannungen nicht eintritt und dafür zur Aufrechterhaltung der Querkraftbedingungen erhöhte Zugspannungen Platz greifen würden. Die Annahme ist allerdings sehr weitgehend ungünstig.

Der Träger wird im oberen Teil (Bild 7) auf Druck und Schub, im unteren Teil auf

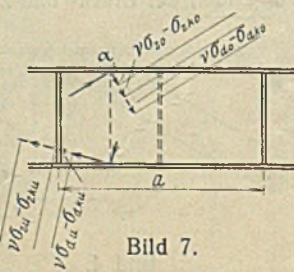


Bild 7.

Zug und Schub beansprucht. Auch hier sei zur Aufnahme der überschießenden Zugkräfte ein Pfosten angeordnet. Das Bild der Hauptspannungen gestaltet sich dann so, wie in Bild 7 eingetragen. Der Pfosten hat also aufzunehmen:

am oberen Ende

$$1,3 (\nu \sigma_{zo} - \sigma_{zko} + \nu \sigma_{do} - \sigma_{dko}) t \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin^2 \alpha = P_{vo},$$

am unteren Ende

$$1,3 (\nu \sigma_{zu} - \sigma_{zku} + \nu \sigma_{du} - \sigma_{dku}) t \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos^2 \alpha = P_{vu},$$

Ein so beanspruchter Pfosten, dessen Belastungsbild in Bild 8 wiedergegeben ist, bei welchem also der Unterschied $P_{vo} - P_{vu}$ durch die den Pfosten mit dem Stegblech verbindenden Niele aufgenommen wird, kann bezüglich seiner Knicksicherheit so berechnet werden, als wenn er an seinen Enden mit der ganzen kleineren Kraft P_{vu} und außerdem mit einem $\frac{1}{4}$ des Unterschiedes $P_{vo} - P_{vu}$ belastet worden wäre. Seine Belastung ist also anzunehmen:

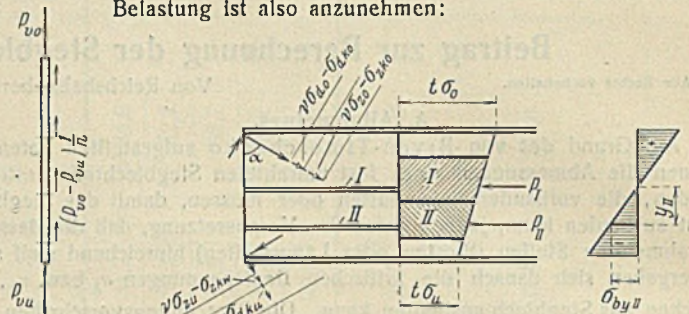


Bild 8.

Bild 9.

$$P_v = P_{vu} + \frac{P_{vo} - P_{vu}}{4}.$$

Soll in diesem Falle die Aussteifung durch waagerechte Steifen erfolgen, so gestaltet sich für diese Steifen das Belastungsbild nach Bild 9. Der Träger wird im unteren Teil auf Druck und Schub, im oberen Teil auf Zug und Schub beansprucht (Feld neben der Zwischenstütze durchlaufender Träger).

Am oberen Trägersrande greift an

$$(\nu \sigma_{do} - \sigma_{dko} + \nu \sigma_{zo} - \sigma_{zko}) t \cdot \sin^2 \alpha,$$

am unteren Trägersrande

$$(\nu \sigma_{du} - \sigma_{dku} + \nu \sigma_{zu} - \sigma_{zku}) t \cdot \cos^2 \alpha,$$

wodurch die waagerechten Fasern belastet werden:

am oberen Ende mit

$$t \sigma_o = (\nu \sigma_{do} - \sigma_{dko} + \nu \sigma_{zo} - \sigma_{zko}) t \cdot \sin^2 \alpha,$$

am unteren Rande mit

$$t \sigma_u = (\nu \sigma_{du} - \sigma_{dku} + \nu \sigma_{zu} - \sigma_{zku}) t \cdot \cos^2 \alpha,$$

Diese Belastung verteilt sich in der skizzierten Weise auf die vorhandenen waagerechten Steifen und die Gurtungen. Auf die Steife I entfällt der Anteil der schraffierten Fläche $I = \frac{P_I}{1,3}$, auf die Steife II der Anteil der

schraffierten Fläche $II = \frac{P_{II}}{1,3}$.

Bild 9 könnte nun den Anschein erwecken, daß die untere Steife, die in der Druckzone liegt, schwächer beansprucht wird wie die Steife I in der neutralen Faser, oder als ob gar in der Zugzone angebrachte Steifen besonders wirksam sein würden. Das ist natürlich nicht der Fall, denn die Steifen haben außerdem den auf sie entfallenden Anteil der Biegungsspannungen des Systems aufzunehmen, d. h., wenn wir die Biegungsspannung in der um y von der neutralen Faser entfernten waagerechten Faser mit σ_{by} bezeichnen, hat, wie in Bild 9 rechts dargestellt, die Steife I weiter nichts aufzunehmen. Die Steife II dagegen $\nu \sigma_{byII} F_{II}$, während in der Zugzone angebrachte Steifen entsprechende Zugkräfte aufzunehmen hätten, und dadurch in Verbindung mit den gedachten Druckkräften mehr oder weniger wirkungslos sein würden.

Tritt nun der Fall ein, daß allein durch die Kraft $\sigma_{by} F$ die Knicklast einer waagerechten Steife überschritten wird, so sucht sich diese Steife auf die vielleicht noch standhaltende Platte zu stützen; die Steife schadet in diesem Falle nur statt zu nützen, sie erniedrigt die Beulsicherheit der Platte. Dies dürfte ein einfaches und einwandfreies Kriterium für die Wirksamkeitsgrenze der Steife sein.

Wollen wir gleichzeitig durch Längssteifen und Pfosten aussteifen, so übernehmen wir einen Teil der überschießenden Spannung auf die Pfosten und den Rest auf die waagerechten Steifen.

Waagerechte Steifen brauchen nicht durchlaufend über die Pfosten hinweggeführt zu werden, sondern können an den Pfosten stumpf endigen. Es muß dann aber folgende Bedingung erfüllt werden (Bild 10):

Bezeichnet P_v die Belastung des Pfostens, S die Belastung der waagerechten Steife und w die Kraft, welche erforderlich ist, um den in

der Achsrichtung mit P_v belasteten Pfosten um 1 durchzubiegen, dann muß sein:

$$w > \frac{1}{a/2} \cdot 2S$$

oder

$$w > 4 \cdot \frac{1}{a} \cdot S.$$

3. Als Sonderfall bleibt noch der Fall reiner Biegung zu behandeln, der annähernd in den Mittelfeldern von Biegeträgern auftreten kann. Wir müssen uns dabei allerdings auf die Berechnung von Längsteifen beschränken. Hier liegt ein einachsiger Spannungszustand vor, bei dem also die Druckfasern nicht von Zugfasern gekreuzt werden, bei dem daher eine Spannungumlagerung wie bei zweiaxialen Spannungszuständen nicht möglich ist. Wir nehmen auch hierbei an, daß die mit σ_{ok} berechnete Beulspannung so bemessen ist, daß an keiner Stelle des Trägers die durch σ_{ok} und nach dem Hookeschen Gesetz bedingten Druckspannungen überschritten werden dürfen, wenn nicht Beulung eintreten soll. Dann ergibt sich das in Bild 11 waagrecht schraffierte Spannungsbild. Die durch das schräg schraffierte Dreieck gegebenen Spannungen können durch das Stegblech nicht aufgenommen werden, sie müssen also durch die Steifen aufgenommen werden und durch die Gurtungen. Diese Belastung, aus dem schräg schraffierten Dreieck bestehend, verteilen wir nach dem Hebelgesetz auf die waagerechte Steife und die obere Gurtung (der kleine Anteil, der auf die untere Gurtung entfallen würde, kann vernach-

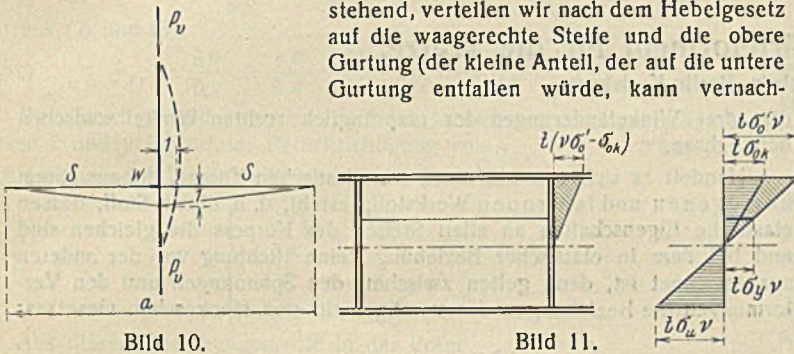


Bild 10.

Bild 11.

lässigt werden). Außerdem muß die Steife natürlich auch in diesem Falle die ihr aus dem Trägersystem zufallende Belastung $\nu \sigma_y F$ aufnehmen. Aus Bild 11 ersieht man, daß auch eine in der neutralen Faser angebrachte waagerechte Steife nicht wirkungslos sein würde.

D. Einseitig angebrachte Aussteifungen.

Sind die Aussteifungen nicht symmetrisch zum Stegblech, sondern einseitig angebracht, so ist die Knickuntersuchung nach der Belastungsskizze Bild 12 durchzuführen. Die Aussteifung ist also als außermittig belastet anzunehmen, das Stegblech ist dabei nicht mitzurechnen.

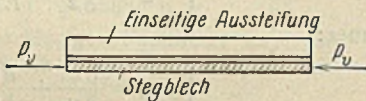


Bild 12.

E. Schlußbemerkungen.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß die hier errechneten Pfostenbeanspruchungen keine wirklich auftretenden Beanspruchungen sind, da ja im Augenblick des Anbringens der Pfosten sich die Werte σ_k , τ_k usw. vergrößern, die Druckfasern also in Wirksamkeit treten und damit die errechneten Zugfaserspannungen und Pfostenbeanspruchungen nicht aufkommen lassen. Diese sind vielmehr nur gedachte Beanspruchungen, bei deren Einhaltung aber ein Ausknicken der Pfosten mit Sicherheit verhindert wird. Trotzdem ergeben sich für die Pfosten geringere Beanspruchungen als nach bisher vorgeschlagenen, überdies nur in Sonderfällen anwendbaren Verfahren.

Den hier benutzten Gedankengang der nur gedachten, in Wirklichkeit gar nicht auftretenden Kraftübertragung kann man sich an einem anderen, einfacheren Beispiel klarmachen. Wir denken uns einen Rundstab mit der Eulerschen Knicklast P_k , der also bei einer Belastung mit $P_k + P$ ausknicken würde. Sein Trägheitsmoment muß dann sein

$$J_1 = \frac{P_k l^2}{\pi^2 E}$$

Um das Ausknicken zu verhindern, wollen wir nun den Stab mit einer dichtanschließenden Hülse umgeben, in welcher er fast reibungslos gleiten kann. Wir werden dann das Ausknicken zweifellos verhindern, wenn wir das Trägheitsmoment J_2 der Hülse so bemessen, daß das Trägheitsmoment $J_1 + J_2$ für die Last $P_k + P$ ausreicht, also

$$J_1 + J_2 > \frac{(P_k + P) l^2}{\pi^2 E} \quad \text{oder} \quad \sigma_{zul} \cong \omega \cdot \frac{P_k + P}{F_1 + F_2}$$

Es ist wohl kaum daran zu zweifeln, daß diese einfache Berechnung zulässig ist, bei welcher wir uns aber nach der zweiten Formel eine ganz andere Art der Kraftübertragung vorstellen als die wirklich stattfindende. Wir stellen uns nämlich vor, daß der für sich allein überlastete Rundstab

die überschießende Längskraft auf die Hülse abgegeben habe, was er in Wirklichkeit nicht kann, da eine Übertragungsmöglichkeit gar nicht vorhanden ist. Wir stellen uns aber vor, was mit dem Stabe nach Überschreitung der Knicklast geschehen würde. Ausbiegen kann er nicht, daran hindert ihn die genügend stark bemessene Hülse, und es bleibt nur die einfache Vorstellung, der Stab habe die überschießende Längskraft an die Hülse abgegeben. Der wirkliche Vorgang ist ganz anders, der Stab versucht auszubiegen und überträgt dabei verschwindend kleine Biegemomente auf die Hülse, die sich aber nicht auswirken können, sondern im Keime erstickt werden. Der Stab behält die volle Belastung $P_k + P$, und die Hülse bleibt so gut wie spannungslos. Die Berechnung der erforderlichen Dicke der Hülse auf Grund der wirklichen Kraftübertragungsmöglichkeit würde sehr schwierig sein.

Ein ganz entsprechender Vorgang liegt bei unserer Berechnungsweise der Steifen vor. Wir stellen uns hier auch vor, was mit dem Stegblech nach Überschreitung der Beulspannung geschehen würde. Einen größeren Druck aufzunehmen, sind die Druckfasern nicht imstande. Sie behalten ihre Beulspannung, die Zugfasern übernehmen die überschießende Spannung und übertragen sie auf die Pfosten, die dementsprechend bemessen werden. Der wirkliche Vorgang ist aber hier ganz ähnlich wie im Beispiel des Rundstabes. Das Blech will ausbeulen, wird aber durch die Pfosten daran gehindert. Es gibt verschwindend kleine Biegemomente auf die Pfosten ab, die aber auch hier im Keime erstickt werden. Die Druckfasern behalten die überschießende Beanspruchung, wozu sie nun eben durch das Vorhandensein der Pfosten imstande sind. Die Zugfasern übernehmen nichts von den Druckfasern und die Pfosten auch nicht, sie bleiben, ebenso wie die Hülse, so gut wie spannungslos. Auch hier wird die Berechnung auf Grund des wirklichen Kraftübertragungsversuchs sehr schwierig und kann in einfacher Weise durch die gedachte Kraftübertragung umgangen werden.

In beiden Fällen findet die gedachte Kraftübertragung in Wirklichkeit gar nicht statt, und es ist in beiden Fällen offenbar nicht notwendig, daß Verbindungen vorhanden sind, die diese Kraftübertragung wirklich ermöglichen. Die Lösung des scheinbaren Widerspruchs liegt im Wesen des Knickvorgangs. Sowohl der überbeanspruchte Rundstab ohne Hülse als auch das überbeanspruchte Stegblech ohne Steifen können ausknicken; rein theoretisch aber brauchen sie nicht auszuknicken, und sie würden nicht ausknicken, wenn sie völlig mittig belastet wären und aus vollkommen gleichmäßigem Werkstoff bestünden. Da dieser Zustand aber praktisch nicht darstellbar ist, bedürfen sie einer gewissen Stützung, wodurch die unvermeidlichen Unvollkommenheiten unschädlich gemacht werden, ohne daß dabei die Stützung die überschießenden Kräfte zu übernehmen braucht, denn die Stützung verhindert die Entwicklung dieser Kräfte im Entstehen. Ähnlicher Gedankengänge hat sich übrigens die neuere Knicktheorie längst bedient. Nach der klassischen Knicktheorie muß ein Druckstab zwei voneinander gänzlich unabhängigen Bedingungen genügen, nämlich:

1. sein Querschnitt darf durch die Belastung in der Achsrichtung nicht überbeansprucht sein,
2. sein Trägheitsmoment muß der Eulerschen Knickbedingung genügen.

Dann biegt der Stab nicht aus, und davon, daß etwa die Randfasern über $\frac{P}{F}$ hinaus beansprucht werden, ist in der klassischen Knicktheorie nirgends die Rede. Der Widerspruch, wie der nur in der Achsrichtung belastete Stab überhaupt dazu kommt, auszulegen, bleibt hier aber ungeklärt. Die neuere Knicktheorie dagegen arbeitet von vornherein mit gedachten, in Wirklichkeit nicht vorhandenen Biegebbeanspruchungen (Zimmermann: Querbelastungen, Fehlerhebel), was im weiteren Verlauf zu dem im bekannten ω -Verfahren verwendeten gedachten Randfaserspannung $\omega \cdot \frac{P}{F}$ führt. Auch hier geht man der vereinfachten Berechnung zuliebe den Weg, an Stelle der Biegemomente eine vergrößerte Längskraft ωP anzunehmen und denkt sich eine Spannung $\omega \cdot \frac{P}{F}$, die in Wirklichkeit gar nicht vorhanden ist, da ja ihr Auftreten infolge Verbiegung durch die nach dem ω -Verfahren erfolgte Bemessung des Stabes verhindert wird.

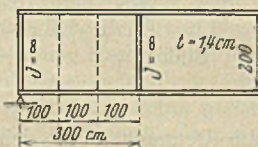


Bild 13.14

Anhang. Beispiel: Es soll noch ein Beispiel durchgerechnet werden, und zwar für den Fall reiner Schubspannung.

Es handele sich um ein Stegblech aus St 52 von 2 m Höhe, 1,4 cm Dicke, starre Pfosten seien in je 2 m Entfernung vorhanden; ein elastischer Zwischenpfosten soll angebracht und dessen erforderliche Dicke berechnet werden (Bild 13).

Das Feld ohne Zwischenpfosten hat also

$$b = 200 \text{ cm}, \quad t = 1,4 \text{ cm}, \quad a = 200 \text{ cm}.$$

Wir nehmen an, daß das unterteilte Feld also mit $a = 100 \text{ cm}$ mit $\nu \tau = \tau_k$ ausgelastet sei. Dieser Wert wird natürlich für das freie Feld mit $a = 200 \text{ cm}$ nicht erreicht, sondern ein erheblich kleineres τ_k .

Es ist nach den demnächst als Deckblatt zur BE erscheinenden Vorschriften:

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 EJ}{b^2 l (1 - \mu^2)} = \frac{9,84 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot 1,4^3}{40 \cdot 000 \cdot 12 \cdot 1,4 (1 - 0,3^2)} = \frac{9,84 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot 1,96}{40 \cdot 000 \cdot 12 \cdot 0,91} = 92 \text{ kg/cm}^2.$$

Nun ist $\alpha = \frac{1}{2}$; also für das Feld von 1 m Länge

$$k = 4,00 + 5,34 \cdot 4 = 25,36, \quad \tau_k = k \sigma_e = 25,36 \cdot 92 = 2800 \text{ kg/cm}^2,$$

die „kritische Vergleichsspannung“ ist

$$\sigma_v = \tau_k \sqrt{3} = 4850 \text{ kg/cm}^2,$$

sie liegt über 2073 kg/cm², ist also abzumindern, und zwar ist

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_v}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 000}{4850}} = 66,$$

also abzumindern nach BE auf 3363 kg/cm²;

also ist

$$\tau_k = 2800 \cdot \frac{3363}{4850} = 1940 \text{ kg/cm}^2.$$

Für das Feld mit doppelter Pfostenentfernung ist $\alpha = 1$,

$$k = 5,34 + 4,00 = 9,34,$$

$$\tau_k = 9,34 \cdot 92 = 860 \text{ kg/cm}^2;$$

einer Abminderung bedarf dieser Wert nicht. Wir nehmen also an:

$$\nu \tau = 1940 \text{ kg/cm}^2;$$

$$P_v = 1,3 \cdot 2 (\nu \tau - \tau_k) t \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{Gl. 4}),$$

$$P_v = 1,3 (1940 - 860) 1,4 \cdot 100,$$

$$P_v = 1,3 \cdot 1,080 \cdot 1,4 \cdot 100 = 190 \text{ t}.$$

Dann ist

$$J_{\text{erf}} = \frac{P_v b^2}{\pi^2 E} = \frac{190 \cdot 40 \cdot 000}{9,84 \cdot 2 \cdot 100} = 368 \text{ cm}^4.$$

Würde erst in 3 m Entfernung ein starrer Pfosten vorhanden sein und sollen zwei Zwischenpfosten angebracht werden (Bild 14), so würde zu setzen sein:

$$\alpha = 1,5,$$

$$k = 5,34 + \frac{4,00}{2,25} = 7,11,$$

$$\tau_k = 7,11 \cdot 92 = 654 \text{ kg/cm}^2,$$

$$P_v = 1,3 (1940 - 654) 1,4 \cdot 100 = 1,3 \cdot 1286 \cdot 1,4 \cdot 100 = 227 \text{ t},$$

$$J_{\text{erf}} = \frac{227 \cdot 40 \cdot 000}{9,84 \cdot 2 \cdot 100} = 440 \text{ cm}^4.$$

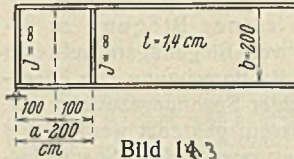


Bild 14,3

Alle Rechte vorbehalten.

Ableitung der Hertzschen Härteformeln für die Walze.

Von Dipl.-Ing. Kurt Drescher, Berlin-Karlshorst.

Im Juniheft 1936 der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik hat Prof. Ludwig Föppl eine neue Ableitung der Hertzschen Härteformeln für die Walze veröffentlicht¹⁾. Die praktische Bedeutung, die diesen Gleichungen bei der Bemessung von Lagertellen und Gelenken der Ingenieurbauten zukommt, ist bekannt²⁾. Da aber im allgemeinen die meisten Bauingenieure nicht zu dem Leserkreis der Z. ang. Math. gehören, so soll in dieser Arbeit, die sich in den Grundzügen an die L. Föppl'sche Arbeit anlehnt, etwas ausführlicher darauf eingegangen werden. Der Rechnungsgang, der sich aus den physikalischen und geometrischen Voraussetzungen und Annahmen des Hertzschen Härteproblems zweier Walzen ergibt, führt bei der L. Föppl'schen Ableitung auf eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Druckspannungsfunktion p längs der Drucklinie. In der vorliegenden Arbeit wird ferner gezeigt, wie man die Härteformeln, von dieser Bestimmungsgleichung ausgehend erhält, ohne überhaupt die Lösung zu kennen bzw. sie von Hertz übernehmen zu müssen. Die dabei benutzte, sich auf eine allgemeinere Gleichung beziehende grundsätzliche Lösungsmethode ist mir in dankenswerter Weise von meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Hamel, mitgeteilt worden. Damit wird zugleich gezeigt, daß man — auch bei der Ableitung der Hertzschen Härteformeln zweier Walzen nach L. Föppl — als theoretische Lösung die halbkreisförmige Verteilung der Druckspannung über der Drucklinie erhält.

Der allgemeinste räumliche Spannungszustand in der Umgebung eines Körperpunktes mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z wird bekanntlich dargestellt durch neun Spannungsgrößen, drei Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, und dreimal je zwei Schubspannungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ und } \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ und } \tau_{yx}; \quad \tau_{zx} \text{ und } \tau_{zy},$$

die an den drei Seitenflächen einer räumlichen rechtwinkligen Ecke wirken (Bild 1):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Diesem Schema von neun (wegen der Gleichheit der zugehörigen Schubspannungen jedoch nur noch sechs verschiedenen) Spannungsgrößen, Spannungstensor genannt, steht ein zweites Raster von ebenfalls sechs (Verformungs-) Größen gegenüber, Formänderungstensor genannt:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

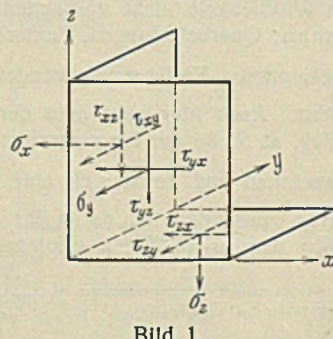


Bild 1.

Hierin bedeuten die Größen ϵ_x, ϵ_y und ϵ_z die Dehnungen in den Richtungen der Achsen x, y und z und die Größen γ_{xy}, γ_{yz} und γ_{zx}

die drei Winkeländerungen der ursprünglich rechten Winkel zwischen den Achsen.

Handelt es sich nun um einen rein elastischen Körper, der aus einem homogenen und isotropen Werkstoff besteht, d. h. einem Stoff, dessen elastische Eigenschaften an allen Stellen des Körpers die gleichen sind und bei dem in elastischer Beziehung keine Richtung vor der anderen ausgezeichnet ist, dann gelten zwischen den Spannungen und den Verformungen die Beziehungen des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes:

$$(1) \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]; \end{cases}$$

ferner:

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx}; \end{cases}$$

darin bedeuten:

u, v, w die Komponenten der Verschiebung eines Körperpunktes in Richtung der drei Achsen x, y und z ,

E den Elastizitätsmodul,

G den Schubmodul,

$$\nu = \frac{1}{m} \text{ die Querdehnungszahl } (< \frac{1}{2}).$$

Diese drei elastischen Werkstoffkonstanten E, G, ν sind dabei durch die Beziehung verknüpft

$$(3) \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Die in den obigen Gleichungen auftretenden Größen σ, τ und u, v, w sind im allgemeinen Funktionen der drei Koordinaten x, y, z .

Der ebene Formänderungszustand.

In der folgenden Arbeit wird ein Sonderfall des elastischen Körpers den Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden, bei dem die Verschiebungen und die Spannungen nur von zwei Koordinaten abhängen. Dies sollen die Koordinaten x und y sein. Solche ebenen Zustände können durch geeignete Kräfte in Körpern von zylindrischer Form hervorgebracht werden. Die Erzeugenden des Zylindermantels seien der z -Achse parallel und die Endquerschnitte zu ihr senkrecht. Alle Punkte, die sich im unverzerrten Zustand des Körpers auf einer zur xy -Ebene parallelen Querschnittsebene befunden haben, sollen auch nach der Verzerrung auf solchen Ebenen liegen. Wenn man noch von einer solchen Parallelverschiebung in Richtung der z -Achse ($\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, d. h. $w = \text{konst}$) absieht, kann man sogar diese zur xy -Ebene senkrechte Verschiebung w gleich Null annehmen. Alle

¹⁾ Über die Hertzschen Untersuchungen vgl. Crelles Journal f. d. reine u. angew. Math., Bd. 92 (1881), S. 156, und insbesondere für das Walzenproblem: Verhandlg. d. Vereins z. Beförd. d. Berl. Gewerbefleißes, Berlin, Nov. 1882.

²⁾ Siehe u. a. Schaper, Eiserne Brücken 1922, S. 664 u. 665. — F. Bleich, Theorie und Berechnung eiserner Brücken 1924, S. 561. — Beton-Kalender 1937, Teil II, S. 238.

Punkte, die die gleichen Koordinaten x und y haben, verschieben sich dann in jeder dieser Ebenen um die gleichen Beträge u und v .³⁾

Da u und v nur Funktionen von x und y sind, folglich $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, und w unabhängig von x und y ist, verschwinden auch nach Gl. (2) die Winkeländerungen γ_{xz} und γ_{yz} , also auch die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} . Wegen $\varepsilon_z = 0$ folgt aus der dritten Elastizitätsgleichung (1):

$$(4) \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_z(x, y).$$

Da σ_x und σ_y Funktionen von x und y sind, so ist auch σ_z im allgemeinen für verschiedene Punkte der Scheibe von verschiedener Größe. Zur Aufrechterhaltung eines solchen ebenen Formänderungszustandes sind also an den Endquerschnitten Normalspannungen σ_z als äußere Oberflächenkräfte erforderlich, die so bemessen sein müssen, daß die Länge aller Längsfasern (in Richtung parallel zur z -Achse) konstant gehalten wird. Diese Spannungen σ_z beeinflussen nun ebenfalls die Formänderungen ε_x und ε_y der xy -Ebene; durch Einsetzen von (4) in die ersten beiden Elastizitätsgleichungen (1) erhält man⁴⁾:

$$(5a) \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_y \right)$$

$$(5b) \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_x \right)$$

und aus (2) und (3):

$$(5c) \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy}.$$

Das Gleichgewicht an einem Element in Richtung der Querschnittsachsen x und y führt unter Berücksichtigung von $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ bei Vernachlässigung der Eigengewichtskräfte zu den Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Beziehungen, die in der Form

$$(7a) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{cases}$$

geschrieben sein mögen, folgt, daß die drei Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} sich als zweite partielle Ableitungen einer einzigen Funktion $F(x, y)$ von zwei veränderlichen x und y (der sog. Airyschen Spannungsfunktion) darstellen lassen⁵⁾:

$$(8) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Die Einführung der Airyschen Spannungsfunktion F nach (8) befriedigt jedoch nur die Gleichgewichtsbedingungen (7). Sie muß nun auch noch die Bedingung erfüllen, daß die Spannungen mit der Voraussetzung eines ebenen, rein elastischen Formänderungszustandes, wie er sich durch Gl. (5) ausdrückt, verträglich sind.

Differenziert man Gl. (5c) partiell nach x und dann nach y , so ergibt sich:

$$\frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right);$$

für $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ werden Gl. (5a) u. (5b) eingesetzt:

³⁾ Die Annahme, daß die Dehnung $\frac{\partial w}{\partial z}$ in Richtung der z -Achse gleich Null vorausgesetzt ist, ist jedoch nicht die allgemeinste, die einen ebenen Verzerrungszustand kennzeichnet; es würde sogar genügen, ohne wesentliche Verwicklungen zu verursachen, daß $\frac{\partial w}{\partial z} = \text{konst}$ ist, d. h. daß w als eine lineare Funktion von z angesehen werden kann, während es von x und y unabhängig sein muß.

⁴⁾ L. Föppl geht in seiner Arbeit von den Elastizitätsgleichungen aus, wie sie sich bei Annahme eines ebenen Spannungszustandes ergeben. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, daß in einem Körper nur die Flächenelemente senkrecht zu einer einzigen Ebene (der xy -Querschnittsebene) Spannungen aufweisen, so daß

$$(6) \quad \sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

vorausgesetzt werden.

⁵⁾ Auf Grund des Satzes von der Vertauschung der mittleren, partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{mit } f = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \text{also: } \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y},$$

daher z. B.: $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \sigma_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \cdot \tau_{xy}$; das ist die erste Gleichgewichtsbedingung (7a).

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x]$$

und weiter durch Einführung von $F(x, y)$ nach (8):

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(1-\nu^2) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu(1+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(1-\nu^2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu(1+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right].$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$(1-\nu) \left[\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right] = 0,$$

also

$$(9) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.$$

Unter Einführung des Laplaceschen Delta-Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

läßt sich die obige Gl. (9) auch schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \Delta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \Delta \Delta F = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung (9) ist die Bedingungsgleichung, der die Funktion F noch zu genügen hat; sie heißt die biharmonische Differentialgleichung der Airyschen Spannungsfunktion⁶⁾.

Wir betrachten nun den ebenen Formänderungszustand in einem zylindrischen Körper von sehr großer Länge, der entlang der Erzeugenden des Zylinders (in Richtung der z -Achse) in gleicher Weise beansprucht wird. Die obere, ebene Begrenzungsfläche — sie soll als xz -Ebene gewählt werden — bilde dabei den Angriffsbereich von Normalspannungen, die in Richtung parallel zur z -Achse von gleicher Größe sein sollen, während sie in der x -Richtung als veränderlich angenommen werden (Bild 2). Jedoch sei vorausgesetzt, daß diese eine in der Querschnittsebene gelegene horizontale Abmessung $2a$ klein ist gegenüber der anderen senkrechten, durch $y = h$ gekennzeichneten endlichen Ausdehnung des Körpers.

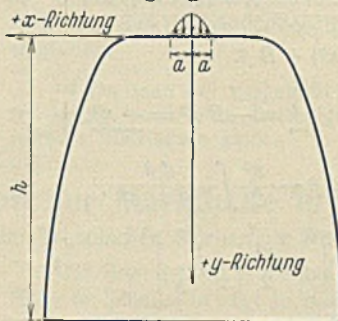


Bild 2.

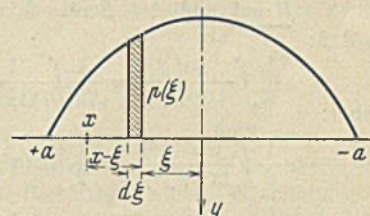


Bild 3.

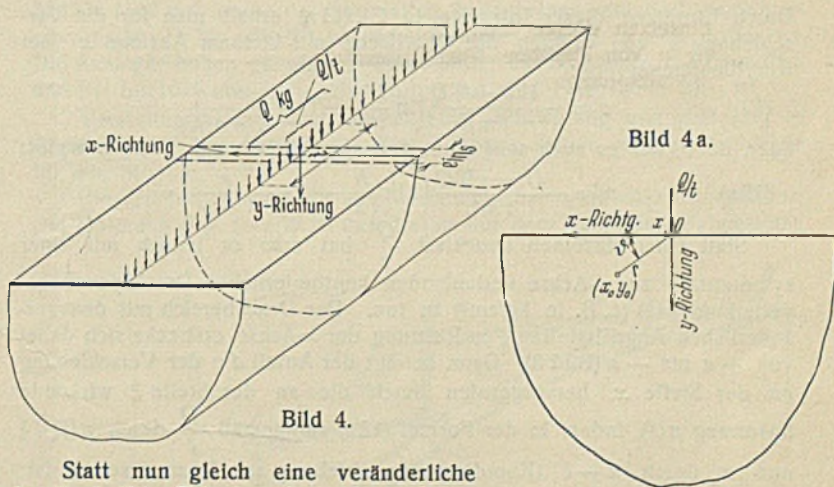


Bild 4.

Statt nun gleich eine veränderliche kontinuierliche Belastung längs der x -Achse der Rechnung zugrunde zu legen, wird zunächst von dem Formänderungszustand ausgegangen, der sich in einer Halbebene unter der Wirkung einer längs der z -Achse gleichmäßig verteilten linienförmigen Druckbelastung im Koordinatenursprung ausbildet (Bild 4).

Der gleichmäßig auf eine mittlere Länge t wirkende Druck sei Q in kg. Dann ist $\frac{Q}{t}$ die auf die Längeneinheit in Richtung der z -Achse wirkende Druckbelastung (z. B. in kg/cm).

⁶⁾ Man gelangt zu derselben Differentialgleichung $\Delta \Delta F = 0$, wenn man nach der Bedingungsgleichung für die Airysche Spannungsfunktion F fragt, die sich bei Zugrundelegung der Spannungs-Formänderungsbeziehungen eines ebenen Spannungszustandes (vgl. Fußnote 4) ergibt.

Die Spannungen σ_{x_0} , σ_{y_0} , $\tau_{x_0 y_0}$ in einem beliebigen Punkt $x_0 y_0$ be-
tragen⁷⁾:

$$(10a) \left\{ \begin{aligned} \sigma_{x_0} &= -\frac{2Q}{t\pi} \cdot \frac{x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ \sigma_{y_0} &= -\frac{2Q}{t\pi} \cdot \frac{y_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ \tau_{x_0 y_0} &= -\frac{2Q}{t\pi} \cdot \frac{x_0 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \end{aligned} \right. \quad \text{oder} \quad (10b) \left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2Q}{t\pi} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \\ \sigma_\vartheta &= 0 \\ \tau_{r\vartheta} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Für die Längsdehnung ϵ_y in der y -Richtung gilt nach Gl. (5b):

$$(11) \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_x \right),$$

und nun bestimmt man nach L. Föppl durch Integration von $y=0$ bis $y=h$ die relative Lagenänderung in Richtung der y -Achse eines Punktes der Oberfläche ($y=0$) mit der Koordinate $x < a$ gegenüber der eines Punktes in der Tiefe h . Man erhält unter Berücksichtigung der Gl. (10a):

$$(11a) \quad v = \frac{1-\nu^2}{E} \int_{y=0}^{y=h} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_x \right) dy \\ = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{2Q}{t\pi} \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{y^3}{r^4} - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{y \cdot x^2}{r^4} \right) dy.$$

Bei der Integration nach y ist x als konstant anzusehen. Die Ausrechnung der beiden auftretenden Integrale ergibt, wenn man noch die Annahme h groß gegen x berücksichtigt:

$$\int_{y=0}^{y=h} \frac{y}{r^4} \cdot dy = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{d(y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{d\beta}{(x^2 + \beta^2)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=h} \\ = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x^2 + h^2)} \approx \frac{1}{2x^2},$$

ferner:

$$\int_{y=0}^{y=h} \frac{y^3}{r^4} \cdot dy = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{y^2 d(y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{\beta d\beta}{(x^2 + \beta^2)^2}, \text{ dabei } y^2 = \beta;$$

die Partialbruchzerlegung liefert:⁸⁾

$$\frac{\beta}{(x^2 + \beta^2)^2} = \frac{A}{(x^2 + \beta^2)} + \frac{B}{(x^2 + \beta^2)^2} = \frac{A + Bx^2 + B\beta}{(x^2 + \beta^2)^2} \\ 0 + 1\beta = (A + Bx^2) + B\beta.$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man:

$$\underline{B=1} \text{ und } A + Bx^2 = 0, \text{ also: } \underline{A = -Bx^2 = -x^2},$$

so daß:

$$\frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{\beta d\beta}{(x^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{1}{x^2 + \beta} \cdot d\beta - \frac{x^2}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{d\beta}{(x^2 + \beta)^2},$$

daher:

$$\frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=h} \frac{y^2 d(y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2 + y^2) \right]_{y=0}^{y=h} + \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=h} \\ = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x^2 + h^2}{x^2} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x^2 + h^2} - \frac{1}{x^2} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\ln \frac{h^2}{x^2} - 1 \right).$$

Durch Einsetzen dieser Integrale in Gl. (11a) erhält man für die Verschiebung v von Punkten der Oberfläche mit kleinem Abstand x vom Koordinatenursprung:

$$(12) \quad v = -\frac{(1-\nu^2)Q}{t\pi E} \left(\ln \frac{h^2}{x^2} - 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \right)$$

oder, da v , wie es auch sein muß, sich symmetrisch zur y -Achse ergibt:

$$(12a) \quad v = -\frac{(1-\nu^2)Q}{t\pi E} \left(2 \ln \frac{h}{|x|} - 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \right).$$

Statt einer einzelnen Drucklast $\frac{Q}{t}$ hat man es jedoch mit einer symmetrisch zur y -Achse verlaufenden kontinuierlichen Druckspannungsverteilung $p(\xi)$ (z. B. in kg/cm²) zu tun. Der Druckbereich mit den veränderlichen Angriffsstellen ξ in Richtung der x -Achse erstreckt sich dabei von $+a$ bis $-a$ (Bild 3). Dann beträgt der Anteil dv der Verschiebung an der Stelle x , hervorgerufen durch die an der Stelle ξ wirkende Spannung $p(\xi)$, indem in der Formel (12a) sinngemäß $\frac{Q}{t}$ durch $p(\xi) d\xi$ und $|x|$ durch $|x-\xi|$ (Koordinatenverschiebung um ξ) zu ersetzen ist:

$$(13) \quad dv = -\frac{(1-\nu^2)p(\xi)d\xi}{\pi E} \left(2 \ln \frac{h}{|x-\xi|} - 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \right)$$

und demnach von der gesamten Belastung durch Aufsummierung (Integration von $\xi=-a$ bis $\xi=+a$) der Einflüsse aller Elementardrücke:

⁷⁾ Die zu diesem sog. „strahligen“ Spannungszustand zugehörige Airy'sche Spannungsfunktion ist:

$$F = \frac{Q}{t\pi} \cdot \vartheta r \cdot \cos \vartheta = \frac{Q}{t\pi} \cdot x \cdot \arctg \frac{y}{x} \quad (\text{vgl. Bild 4a}).$$

Nach Gl. (8) erhält man dann die oben angegebenen Formeln (10a); siehe z. B. Love-Timpe 1907, S. 250; ferner auch H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre 1913, § 56; A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure, Bd. I, 1924, § 44.

⁸⁾ Siehe z. B. Höhere Mathematik von R. Rothe, Bd. II, 1929, § 35.

$$(14) \quad v = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} \left[2 \ln \frac{h}{|x-\xi|} - 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \right] p(\xi) d\xi$$

oder

$$(14a) \quad v = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} \left(2 \ln h - 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \right) p(\xi) d\xi \\ - 2 \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} p(\xi) \ln |x-\xi| d\xi \quad (9).$$

Für $p(\xi)$ war eine zur y -Achse symmetrische Druckspannungsfunktion vorausgesetzt: $p(-\xi) = +p(+\xi)$. Das letzte Integral läßt sich nun bei Beschränkung auf positive x -Werte noch wie folgt umformen:

$$\int_{\xi=-a}^{\xi=+a} p(\xi) \ln |x-\xi| d\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(x-\xi) d\xi + \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln |x-\xi| d\xi \\ = \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln |x-\xi| d\xi + \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(x+\xi) d\xi \quad (10).$$

Bei dem vorstehenden ersten Integral der rechten Seite ist es noch zweckmäßig, den Integrationsbereich von 0 bis a in die beiden Intervalle von 0 bis x und von x bis a zu zerlegen:

$$\int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln |x-\xi| d\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=x} p(\xi) \ln(x-\xi) d\xi + \int_{\xi=x}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(\xi-x) d\xi.$$

Nach diesen Umformungen läßt sich Gl. (14a), wenn man noch den resultierenden Druck

$$(15) \quad \frac{P}{t} = \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} p(\xi) d\xi \quad [\text{in kg/cm}]$$

in die obige Rechnung einführt, in der Form schreiben:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} v(x) &= \frac{(1-\nu^2)P}{t\pi E} \left(1 + \frac{\nu}{1-\nu} - 2 \ln h \right) \\ &+ \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\int_{\xi=0}^{\xi=x} p(\xi) \ln(x-\xi) d\xi + \int_{\xi=x}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(\xi-x) d\xi \right. \\ &\left. + \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(x+\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \right.$$

Dieses Ergebnis wird nun auf die Frage der Berührung zweier Walzen die längs der Erzeugenden von der Länge l mit der Kraft P kg aufeinandergedrückt werden, angewendet.

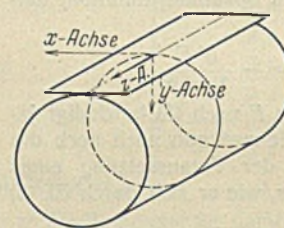


Bild 5.

Man denke sich zunächst die beiden Walzen im drucklosen Zustand in Berührung gebracht. Dies erfolgt längs einer mathematischen Linie von der Länge l . In die gemeinsame Tangentialebene sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt, bei dem die mathematische Berührungslinie als z -Achse gewählt wird, während die im Mittelquerschnitt der Walzen liegende gemeinsame (horizontale) Tangente der beiden Kreisquerschnitte die x -Achse darstellt. Die dritte dazu senkrechte Koordinate ist dann y , so daß das xy -Koordinatensystem in der Querschnittsebene liegt (Bild 5).

Durch das Zusammendrücken werden nun die Oberflächen der beiden Walzen Formänderungen erleiden, die besonders stark in der Umgebung der ursprünglichen mathematischen Berührungslinie hervortreten und zu einer gemeinsamen Berührungsfläche, der sog. Druckfläche, führen. Die sich berührenden Oberflächenteile sollen dabei als vollkommen glatt angenommen werden, d. h. es sollen also nur Normaldrücke zwischen den sich berührenden Teilen vorhanden sein, während die Tangentialkomponenten gleich Null sind. Die Druckkraft P zwischen den beiden Walzen, die der eine Körper auf den anderen ausübt, ist dabei die resultierende Kraft einer über die Druckfläche sich nach einem noch unbekanntem Gesetz verteilenden Normaldruckspannung p kg/cm². Jedoch wird vorausgesetzt, daß sich P gleichmäßig über die Zylinderlänge verteilt. Wenn die Walzen lang genug sind, dann kann man, wenigstens in den von den Seitenflächen (Endflächen) entfernt liegenden Teilen der Walzen, die

⁹⁾ Diese elastische Verschiebung v der Oberflächenpunkte in der Nähe des Druckbereiches ist also berechnet in bezug auf die hiervon entfernten, undeformierten Teile des Körpers (siehe später die Bemerkung auf S. 71).

$$(10) \text{ denn: } \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(x-\xi) d\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=x} p(\xi) \ln(x-\xi) d\xi + \int_{\xi=x}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(\xi-x) d\xi \\ = \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) \ln(x+\xi) d\xi.$$

Formänderung als eine ebene betrachten. An den beiden Endflächen der Walzen werden sicher andere von der Annahme des ebenen Formänderungszustandes abweichende Verhältnisse vorkommen. Wenn man nun trotzdem ohne Rücksicht auf die Verhältnisse an den Endquerschnitten die obigen Rechnungen für die Walze verwenden will, so muß man sich darüber klar sein, daß man eine Ungenauigkeit begeht, die man allerdings mit in Kauf nehmen muß.

Unter dieser Beschränkung werden Punkte in verschiedenen Schnittebenen mit denselben Querschnittskordinaten nahezu dieselben Verschiebungen besitzen. Insbesondere werden auch die Einsenkungen der Punkte der Oberfläche einer Walze mit derselben x -Kordinate infolge

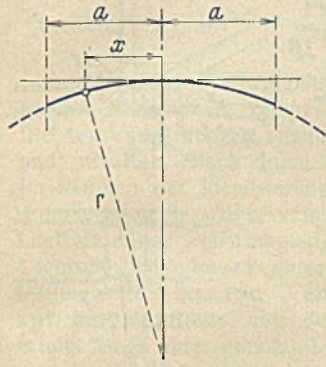


Bild 6a.

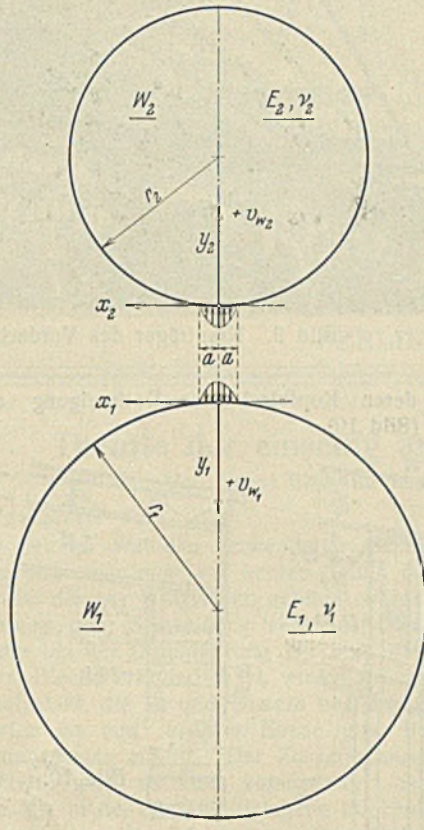


Bild 6.

des Druckes innerhalb des Druckbereiches in allen zur Walzenachse senkrechten Ebenen annähernd die gleichen sein und daher wird man statt von einer sich über die Länge l erstreckenden Druckfläche auch von einer in parallelen Querschnitten nahezu gleichen Drucklinie sprechen.

Die Bestimmung der Druckverteilung über der Drucklinie und damit auch der Länge der Drucklinie soll nun durchgeführt werden, indem folgende Voraussetzungen betreffs der Formänderungen beider Walzen gemacht werden:

1. soll der Spannungs- und Formänderungszustand überall rein elastisch sein;
2. sei der Angriffsbereich $2a$ der als unbekannt anzusehenden veränderlichen Druckspannungsfunktion $p(\xi)$ klein gegenüber den Radien r_1 und r_2 der beiden Walzen W_1 und W_2 (s. Bild 6).

Bevor nun die Bedingungsgleichung für die unbekannte Druckspannungsfunktion $p(\xi)$ aufgestellt wird, sollen noch folgende Bemerkungen hinzugefügt werden:

In die obige Rechnung ist ein Wert h von endlicher Größe eingeführt worden. Da h groß gegen a und x vorausgesetzt wurde, so kann man seine Aufmerksamkeit beschränken auf denjenigen Teil des Körpers, der dem Koordinatenursprung sehr nahe liegt, da hier die Spannungen groß sind gegen die im übrigen Körperteil auftretenden. Daher werden auch die Deformationen nur zum kleinsten Teil abhängen von den in weit entfernten Teilen des Körpers angreifenden Spannungen. Es wird daher auch nicht darauf ankommen, wie der Körper in Entfernungen, die groß sind gegenüber dem Bezirk der Deformationen, hingestaltet ist. In dem hier vorliegenden Fall eines walzenartigen Körpers mit kreisförmigem Querschnitt kann dieses h

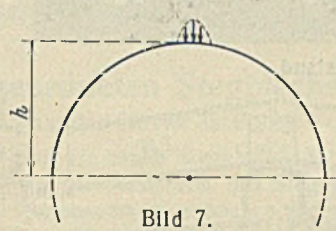


Bild 7.

gedeutet werden als der Abstand des belasteten Druckbereiches etwa von der Mitte des Walzenquerschnittes (von der Größe des Kreisradius).

Wegen der oben getroffenen Annahme einer großen Entfernung dieses weiter weggelegenen Bereiches gegenüber dem Bezirk der Deformation wird die Verschiebung der Körperpunkte in Entfernungen in dieser Tiefe h höchstens nur aus einer Parallelverschiebung bestehen¹¹⁾.

Daß es bei der Bestimmung der Druckspannungsfunktion auf ein genau festgelegtes h nicht ankommt, kann man auch, wie weiter unten ausgeführt wird, daran erkennen, daß h in der Bestimmungsgleichung für die unbekannte Druckspannungsfunktion $p(\xi)$ nirgends mehr auftreten wird; bei der im folgenden auszuführenden Differentiation wird h restlos wegfallen. (Schluß folgt.)

¹¹⁾ Da man bei vorgegebenen Randbelastungen der elastischen Verschiebung noch eine beliebige kleine starre Verschiebung des ganzen Körpers überlagern kann.

Die geschweißte Stahlkonstruktion der Markthalle in Kattowitz.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. Stefan Bryla, o. Professor an der Technischen Hochschule Warschau.

Im Jahre 1935 wurde in Kattowitz eine Markthalle in Stahlkonstruktion errichtet (Bild 1). Der in der Hochbauabteilung der Kattowitzer Stadtverwaltung unter Leitung des Herrn Ing. Sikorski bearbeitete architektonische Entwurf sah eine Halle von 39,5 m Breite, 121 m Länge und 16 m Höhe vor, ferner einen um die Halle laufenden Außenteil mit einer Breite von 7,40 m. Die Halle stützt sich auf die stählernen Dachbinder, die als Dreigelenkbogen ausgeführt sind. Die Spannweite der Bogenbinder beträgt 39,5 m, die Pfeilhöhe 15,20 m. Die Bogen besitzen 7,40 m lange Ausleger, die das Dach der Seitenschiffe tragen.

Die Dreigelenkkonstruktion beseitigte die Schwierigkeiten, welche infolge des unsicheren und ungleichmäßigen Bodens entstehen konnten.

Um die ungünstigen Einflüsse des Horizontalschubes zu vermeiden, wurden die beiden Bogenwiderlager mit einbetonierten Zugstangen verbunden, die unter dem Fußboden der Halle angebracht worden sind.

Die Konstruktion der Halle besteht somit aus Hauptbindern in Abständen von 11 m, aus Dachunterzügen in Abständen von 6,58 m und aus Stützen, Balken und Dachpfetten. Die Konstruktion ist gänzlich in der Werkstatt geschweißt und genietet oder verschraubt mit teilweiser Anwendung des Schweißverfahrens auf der Baustelle.

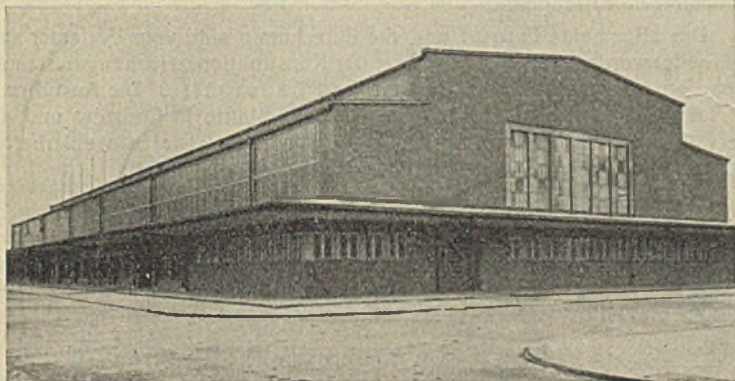


Bild 1. Ansicht der Markthalle.

Der Bogen (Bild 2) hat eine parabolische Korbform. Die theoretische Höhe im Scheitel beträgt 15,20 m. Die Blechträger haben I-Querschnitt mit veränderlicher Höhe, am kleinsten an den Auflagern und am Scheitel und am größten an den Auslegern. Das Stegblech ist 10 mm dick und 300 bis 1100 mm hoch; die Gurtplatten haben einen veränderlichen Querschnitt 350 · 12 bis 450 · 20 im Scheitel und 320 · 15 an den Auflagern. Die Ausleger haben ebenfalls I-Querschnitt; das Stegblech ist 10 mm dick und 191 bis 1015 mm hoch, die Gurtplatten sind Flachstäbe 240 · 10.

Versteifungsrippen sind abwechselnd rechtwinklig und dreieckig in Abständen von 1 m angebracht. Einige Rippen dienen als Querstoßbleche für den Steg.

Die Unterzüge sind als doppelwandige Fachwerkbalken ausgeführt. Der Unterzug B (s. Bild 2) ist unmittelbar auf dem Hauptbinder abgestützt.

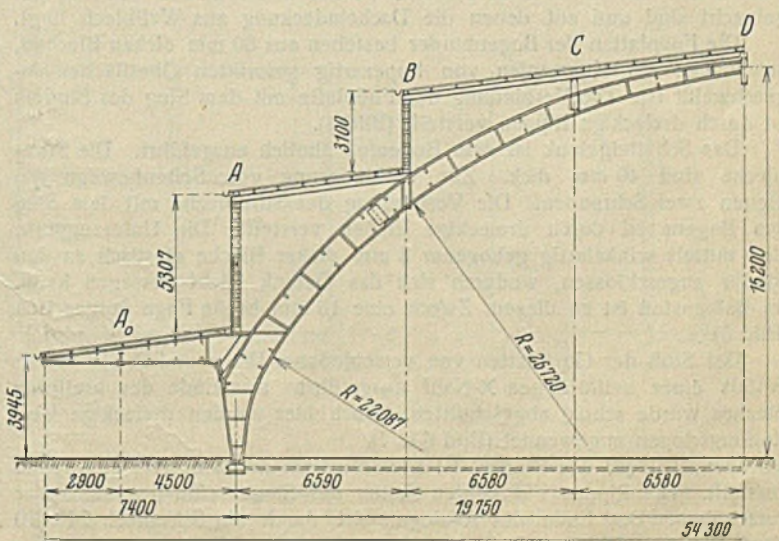


Bild 2. Querschnitt.

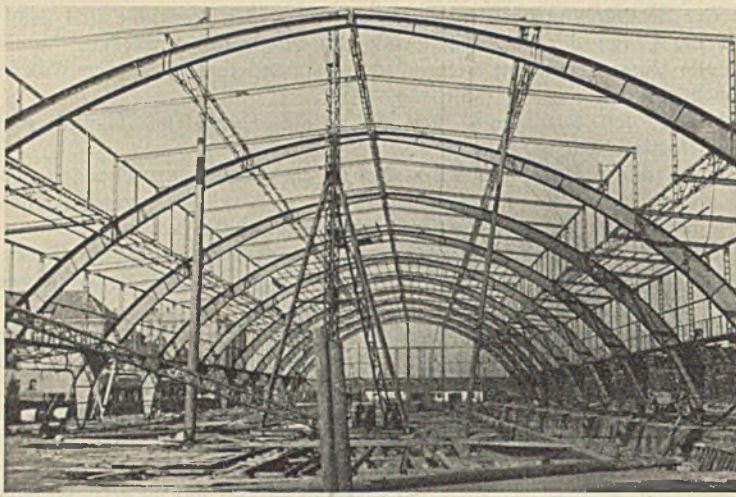


Bild 3. Montagezustand.

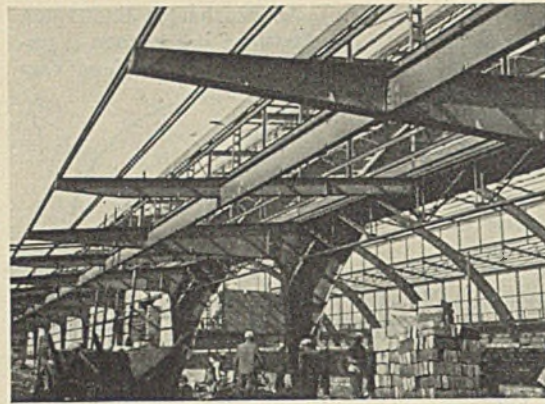


Bild 9. Kragträger des Vordaches.

Die Dachpfetten sind I 10 - Profile. Sie sind gegen den Balken mittels der aus I 16 ausgeschnittenen Pfettenstücke abgestützt. Diese wurden bereits in der Werkstatt mit den Balken verschweißt. Die Randpfette ist aus zwei C-Profilen ausgeführt. Das untere Ende des Dachbalkens ruht auf einer Stütze, welche aus zwei C-Profilen hergestellt ist und schräg gestellt ist (Bild 10).

deren Kopfblech der Dachneigung entsprechend

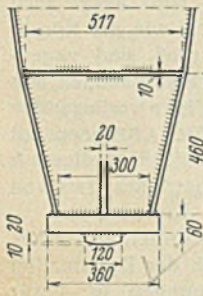


Bild 4.

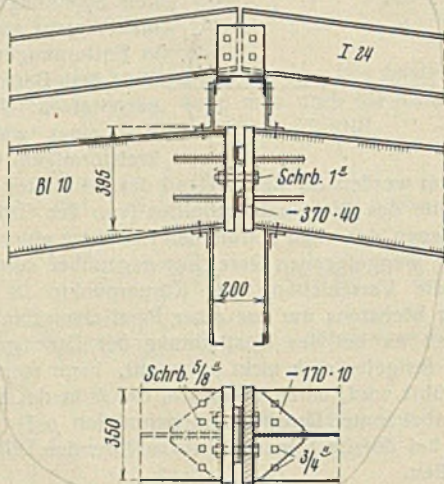


Bild 5.

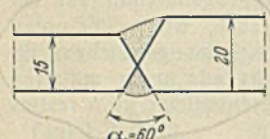


Bild 6.

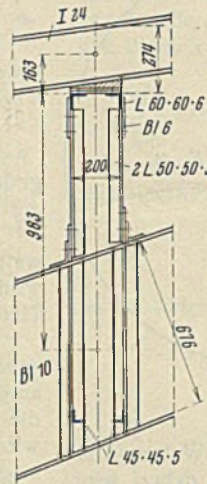


Bild 11.

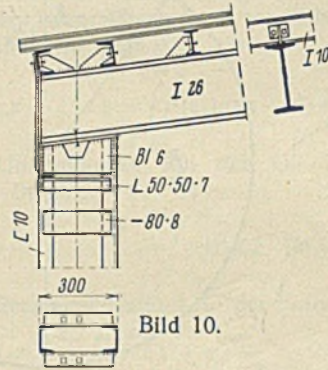


Bild 10.

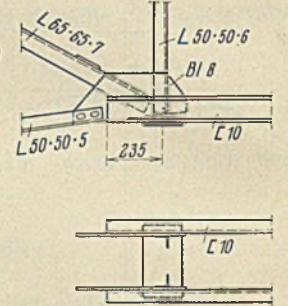


Bild 12.

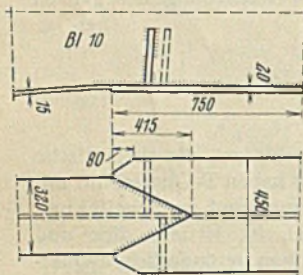


Bild 7.

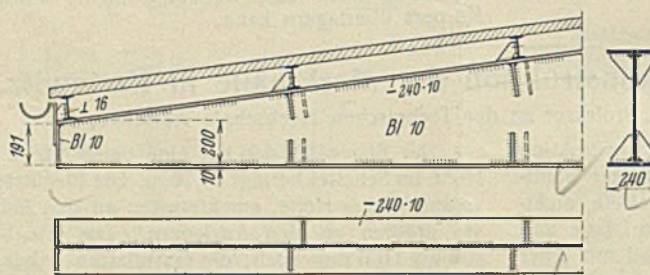


Bild 8.

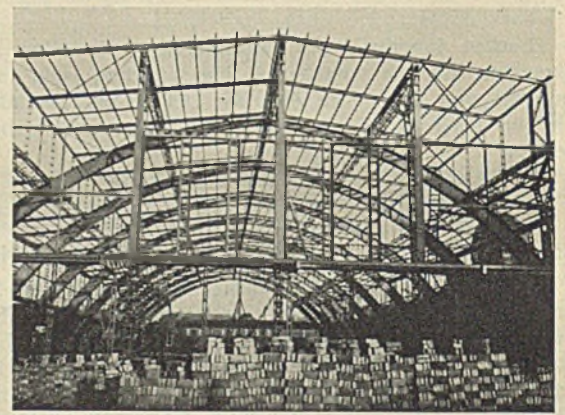


Bild 13. Stahlkonstruktion nach beendeter Aufstellung.

der Obergurt des Unterzuges C befindet sich oberhalb des Binders, der Unterzug D ist am Binder aufgehängt.

Auf die Unterzüge stützen sich die Dachbalken, welche aus einzelnen gewalzten Trägern ausgeführt sind. Sie ruhen auf diesen Unterzügen teilweise unmittelbar und teilweise mittels Stützen (Bild 3). Auf den Dachbalken ruhen stählerne Pfetten, welche in Abständen von 1 m angebracht sind und auf denen die Dacheindeckung aus Wellblech liegt.

Die Fußplatten der Bogenbinder bestehen aus 60 mm dicken Blechen, an welche ein Kippzapfen von trapezartig geformten Oberflächen angeschweißt ist. Die Verbindung der Fußplatte mit dem Steg des Binders ist durch dreieckige Rippen versteift (Bild 4).

Das Scheitelgelenk ist dem Bogenfuß ähnlich ausgeführt. Die Stirnbleche sind 40 mm dick. Zur Verhinderung von Seitenbewegungen dienen zwei Schrauben. Die Verbindung der Stirnbleche mit dem Steg des Bogens ist durch dreieckige Rippen versteift. Die Unterzuggurte sind mittels winkelförmig gebogener 8 mm dicker Bleche elastisch an den Binder angeschlossen, wodurch sich das Gelenk leicht bewegen kann. Im Balkenstoß ist zu diesem Zweck eine 16 mm breite Fuge vorgesehen (Bild 5).

Der Stoß der Gurtplatten von verschiedener Dicke und Breite wurde mittels einer keilförmigen X-Naht ausgeführt. Das Ende des breiteren Bleches wurde schräg abgeschnitten. Auch hier wurden dreieckige Verstärkungsrippen angewendet (Bild 6 u. 7).

Der Ausleger des Binders ist ausschließlich durch dreieckige Rippen versteift. Die Rippen auf beiden Seiten des Steges sind gegeneinander verschoben. Das Ende des Auslegers ist durch ein Stirnblech 240 · 10 abgeschlossen (Bild 8 u. 9).

Bild 11 stellt die Verbindung des Unterzuges C mit dem Binder und die Abstützung des Dachbalkens auf dem Unterzug dar. Die Dachneigung berücksichtigend, wurden auf den Auflagern der Dachbalken keilförmige Einlagen angewendet. Die Verbindung des Obergurtes des Unterzuges mit dem Binder wurde mittels Winkeln und nicht wie beim Scheitelunterzug mittels Blechen ausgeführt, da hier eine elastische Verbindung nicht notwendig war.

Bild 12 stellt den Knotenpunkt des Untergurtes des Unterzuges in der Nähe des Hauptbinders dar. Hier sind Knotenbleche ähnlich wie bei genieteten Fachwerkträgern angewendet. Der unbelastete Randstab des Untergurtes ist aus Winkeln 50 · 50 · 5 ausgeführt und verschiebbar mit dem Knotenblech verschraubt.

Der allgemeine Entwurf und die Berechnung sind vom Verfasser ausgearbeitet worden. Die Bearbeitung der Konstruktionszeichnungen stammt vom Konstruktionsbüro der Königs- und Laurahütte. Die Ausführung ist zur Hälfte zwischen der Königs- und Laurahütte in Chorzów und der Friedenschütte in Nowy Bytom verteilt worden. Die Schweißarbeiten wurden mit den blau-weißen Baildon-Elektroden ausgeführt.

Bild 13 zeigt die Konstruktion nach beendeter Aufstellung.

INHALT: Beitrag zur Berechnung der Stegblechverstärkungen vollwandiger Blechträger. — Ableitung der Hertzischen Härteformeln für die Walze. — Die geschweißte Stahlkonstruktion der Markthalle in Kattowitz.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.