

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43

Fernsprecher: 87 7421

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

10. Jahrgang

BERLIN, 7. Mai 1937

Heft 10

Alle Rechte vorbehalten.

## Theorie der einseitig angeordneten Stegblechsteife.

Von Ernst Chwalla und Alexander Novak in Brünn.

### A. Allgemeiner Teil.

1. Um den Beulwiderstand der im Stahlbau verwendeten dünnen Bleche zu erhöhen, pflegt man auf einer oder auf beiden Seiten des Bleches Verstärkungen anzuordnen, die aus Walzstäben gebildet werden und mit dem Blech durch Nietung oder Schweißung verbunden sind. Im Rahmen der Idealisierung, die bei der Durchführung der Stabilitätsuntersuchung derartiger versteifter Bleche erforderlich ist, wird die Blechtafel als dünne Rechteckplatte aufgefaßt, die an den Rändern bestimmten Lagerungsbedingungen unterworfen ist und in ihrer Ebene eine Belastung mit bekanntem Verteilungsgesetz erfährt. Der Zusammenhang zwischen der Steife und der Platte wird als starr vorausgesetzt und erfolgt längs einer geraden Linie, die in der Plattenmittelebene liegt und als „Kontaktlinie“ bezeichnet wird. Um den Lösungsweg übersichtlich zu gestalten, nehmen wir an, daß der Steifenquerschnitt eine auf der Platte senkrecht stehende Symmetrie-Ebene besitzt; ist diese Voraussetzung nicht erfüllt (Steifen mit L-, T- oder □-Querschnitt), dann gelangt beim Ausbeulen der Platte ein zusätzliches Spannungsfeld zur Ausbildung, dessen Einfluß auf die Beulgrenze jedoch gering ist und in der Regel vernachlässigt wird.

Ist die Steife beiderseits der Platte so angeordnet, daß ihre Schwerachse in die Plattenmittelebene zu liegen kommt und mit der Kontaktlinie zusammenfällt („mittig“ angeordnete Steife), dann wird die bei der Ausbeulung zur Wirkung gelangende Biegesteifigkeit durch die Verbindung der Steife mit der Platte nicht beeinflusst, so daß wir bei der Festlegung dieser Biegesteifigkeit unmittelbar das Querschnitts-Hauptträgheitsmoment  $J$  der von der Platte losgelöst gedachten Steife in Rechnung zu stellen haben. Wird die Steife jedoch einseitig oder auf beiden Seiten der Platte so angeordnet, daß ihre Schwerachse außerhalb der Plattenmittelebene gelegen ist („außermittig“ angeordnete Steife), dann werden beim Ausbeulen der versteiften Platte längs der Kontaktlinie stetig verteilte Schubkräfte  $T$  übertragen, die sowohl in der Platte als auch in der Steife zusätzliche Spannungen hervorrufen. Die beim Ausbeulen zur Geltung kommende Biegesteifigkeit ist hier wesentlich größer als die Biegesteifigkeit der von der Platte losgelösten Steife; sie entspricht einer gedachten Steife, die aus der vorhandenen Steife und einem anschließenden Plattenstreifen von bestimmter Breite besteht<sup>1)</sup>.

Wir werden im weiteren eine 10 mm dicke, auf reinen Schub beanspruchte Blechtafel 1800 · 1500 untersuchen, die in ihrer Mitte durch eine lotrechte, aus einem einseitig angeschweißten Flachstahl  $\square 70 \cdot 10$  gebildete Steife verstärkt ist. Es wird sich hierbei zeigen, daß die wirksame Biegesteifigkeit dieser „außermittig“ angeordneten Steife 3,6 mal so groß wie die Biegesteifigkeit der von der Platte losgelöst gedachten Steife ist und einer ideellen Steife entspricht, die aus dem gegebenen Flachstahl und einem anschließenden Plattenstreifen von 382 mm Breite (d. i. rd. 25,5% der Steifenlänge) zusammengesetzt ist; würden wir die Steife mit Hilfe von zwei Flachstäben beiderseits der Platte so anordnen, daß ihre Schwerachse in die Plattenmittelebene fällt, dann würde ihre Ausbildung, wenn wir den gleichen Beulwiderstand der Platte erzielen wollen, einen um 50% größeren Aufwand an Baustahl erfordern. Einseitig angeordnete Steifen bieten jedoch nicht nur Vorteile wirtschaftlicher Natur, sondern sind auch vom ästhetischen Standpunkt unter Umständen sehr zweckmäßig; so ist es, wie von Schleicher<sup>2)</sup> an Hand vieler Beispiele begründet wurde, beim Entwurf von vollwandigen Brückenträgern aus schönheitlichen Gründen vielfach zu empfehlen, die innerhalb

der einzelnen Stegblechfelder erforderlichen Steifen einseitig, und zwar an der Innenseite des Stegbleches anzuordnen, um sie dem Auge des Beschauers zu entziehen und ungünstige Schattenwirkungen zu vermeiden.

Wird die durch eine Steife verstärkte Platte in ihrer Ebene auf Schub (oder durch linear verteilte Normalspannungen, deren Wirkungsrichtung auf der Steifenachse senkrecht steht, auf Druck und Biegung) beansprucht, dann gelangt man bei der elastostatischen Untersuchung — gleichgültig, ob die Steife „mittig“ oder „außermittig“ angeordnet ist — auf eine Lösungskurve mit ausgeprägter Verzweigungsstelle, so daß hier (ähnlich wie auch im klassischen Fall der Eulerschen Stabknickung) ein Stabilitätsproblem mit Gleichgewichtsverzweigung, vom mathematischen Standpunkt also ein Eigenwertproblem vorliegt. Wird die Platte jedoch in ihrer Ebene durch Normalspannungen beansprucht, die zur Steifenachse parallel gerichtet sind und an der Kontaktlinie einen von Null verschiedenen Wert besitzen (wie dies etwa bei den waagerechten, außerhalb der neutralen Achse gelegenen Stegblechsteifen vollwandiger Träger der Fall ist), dann wird die Steife bei „außermittiger“ Anordnung auf exzentrischen Druck oder Zug beansprucht. Die Platte erfährt hier schon unter geringfügigen Belastungen eine von Null verschiedene Auswölbung, so daß die Frage nach der Existenz einer „Verzweigungsstelle“ erst nach der Ermittlung der allgemeinen Lösung des Gleichgewichtsproblems beantwortet werden kann; im Rahmen baupraktischer Anwendungen wird der Einfluß, den diese Primär-Ausbiegung auf den Problemcharakter zu nehmen vermag, in der Regel vernachlässigt.

Wir beziehen uns im weiteren auf den praktisch wichtigen Fall der einspannungsfrei gelagerten Rechteckplatte, die in ihrer Ebene durch gleichmäßig verteilte Schubspannungen beansprucht wird und in ihrer Mitte durch eine lotrechte, „außermittig“ angeordnete Steife verstärkt ist. Bei der Bestimmung der Stabilitätsgrenze dieser Platte wollen wir uns der Energiemethode bedienen, die uns auf ein Variationsproblem führt, das sich mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens einer beliebig scharfen Näherungslösung zuführen läßt. Um die Konvergenzverhältnisse zu beleuchten, werden wir die Zahl der bei der Approximation der Wölbfunktion in Rücksicht gezogenen Teilflächen schrittweise erhöhen und hierbei die Schärfe der Lösung wesentlich weiter treiben, als dies bei praktischen Anwendungen erforderlich ist.

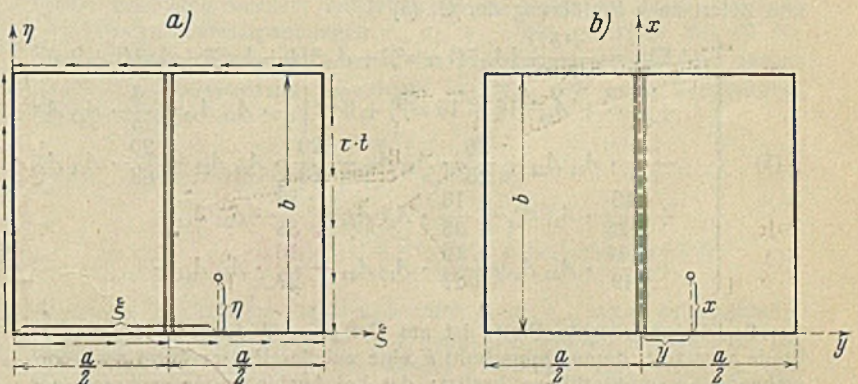


Bild 1.

2. Wir untersuchen eine dünne, an allen vier Rändern einspannungsfrei gelagerte Rechteckplatte, die in ihrer Mitte durch eine lotrechte, „außermittig“ angeordnete Steife verstärkt und an den Rändern durch Schubkräfte belastet ist (Bild 1 a). Die Plattenlänge sei mit  $a$ , die Platten-

<sup>1)</sup> Vgl. dazu auch das Referat des erstgenannten Verfassers im Stahlbau 1936, S. 73.

<sup>2)</sup> F. Schleicher, Vorbericht zum II. Int. Kongreß f. Brücken- u. Hochbau in Berlin 1936, S. 1391.



höhe mit  $b$ , die Plattendicke mit  $t$ , das Seitenverhältnis mit  $\alpha = a/b$  und die Plattensteifigkeit mit  $D = Et^3/12(1 - \mu^2) = 192,3 t^3 \text{ cm}$  bezeichnet. Wir nehmen an, daß die Belastung  $\tau t$  langsam von Null anwächst und fragen nach jenem kritischen Intensitätswert  $\tau_k t$ , für den die biegungsfreie Gleichgewichtslage der Platte ihre Stabilität verliert und neben dieser Lage noch eine unendlich wenig ausgeogene Gleichgewichtslage zur Ausbildung gelangen kann. Um diese Aufgabe mit Hilfe der Energiemethode zu lösen, denken wir uns die Plattenmittelebene nach einer Fläche  $w = f(\xi, \eta)$  geringfügig verwölbt, ermitteln den Ausdruck für die gesamte potentielle Energie  $E$  und setzen die erste Variation von  $E$  gleich Null; im Ausdruck für  $E$  ist nur der Anteil  $\Delta E$  von der Auswölbung abhängig, so daß die Bedingung für das Erreichen einer Stabilitätsgrenze einfach „ $\delta(\Delta E) = 0$ “ lautet.

Zur angenäherten Lösung dieses Variationsproblems approximieren wir die Wölbfunktion  $w = f(\xi, \eta)$  im Sinne des Ritzschen Verfahrens durch das trigonometrische Polynom

$$(1) \quad w = \sum_{m,n} A_{m,n} \cdot \sin \frac{m \pi \xi}{a} \cdot \sin \frac{n \pi \eta}{b},$$

das den Bedingungen der einspannungsfreien Lagerung schon genügt, und berechnen die Beiwerte  $A_{m,n}$  aus der Serie der Extremalforderungen

$$(2) \quad \frac{\partial(\Delta E)}{\partial A_{m,n}} = 0.$$

Das auf diese Weise erhaltene, lineare und homogene Gleichungssystem läßt nur dann für die Beiwerte  $A_{m,n}$  eine von der Nulllösung verschiedene Lösung zu, wenn seine Koeffizientendeterminante  $\Delta$  verschwindet;  $\Delta = 0$  stellt somit die gesuchte Beulbedingung vor.

Im Fall reiner Schubbeanspruchung zerfällt das Gleichungssystem (2) in zwei voneinander unabhängige Teilsysteme, von denen das eine nur Beiwerte mit gerader Zeigersumme ( $m+n$ ) und das andere nur Beiwerte mit ungerader Zeigersumme enthält. Bei fehlender Versteifung und einspannungsfreier Lagerung führt das erstgenannte Teilsystem, sofern das Seitenverhältnis der Platte angenähert zwischen 0,4 und 2,5 gelegen ist, auf jene Beulbedingung „ $\Delta = 0$ “, die die kleinste Beulspannung liefert und daher die praktisch maßgebende ist. Wir wollen dieses Ergebnis, das innerhalb gewisser Grenzen auch bei der Stabilitätsuntersuchung versteifter Platten Geltung besitzt, bei der Wahl des Lösungsansatzes in Rücksicht ziehen und entscheiden uns für die acht Beiwerte  $A_{11}, A_{22}, A_{13}, A_{31}, A_{33}, A_{15}, A_{51}$  und  $A_{44}$ ; das die Wölbfläche festlegende Polynom Gl. (1) nimmt dann die Form an

$$(3) \quad w = A_{11} \cdot \sin \frac{\pi \xi}{a} \cdot \sin \frac{\pi \eta}{b} + A_{22} \cdot \sin \frac{2 \pi \xi}{a} \cdot \sin \frac{2 \pi \eta}{b} + A_{13} \cdot \sin \frac{\pi \xi}{a} \cdot \sin \frac{3 \pi \eta}{b} + \dots + A_{44} \cdot \sin \frac{4 \pi \xi}{a} \cdot \sin \frac{4 \pi \eta}{b}.$$

Die Größe  $\Delta E$ , die wir im weiteren unter Zugrundelegung der Wölbfunktion Gl. (3) zu berechnen haben, ist aus den drei Anteilen  $(\Delta E)_{Pl}, (\Delta E)_{St}$  und  $(\Delta E)_T$  zusammengesetzt;  $(\Delta E)_{Pl}$  bedeutet die Änderung, die das Potential der Federkraft der unversteift gedachten Platte und das Potential der äußeren Belastung bei der Auswölbung erfährt,  $(\Delta E)_{St}$  stellt die in der Steife bei der Auswölbung aufgespeicherte Energie vor und  $(\Delta E)_T$  ist jenem zusätzlichen Spannungszustand zugeordnet, der in der ausbeulenden Platte durch die einleitend erwähnten Schubkräfte  $T$  (als Folge der „Außermittigkeit“ der Steifenanordnung) hervorgerufen wird. Für die Potentialänderung  $(\Delta E)_{Pl}$  ist die Beziehung schon bekannt; sie lautet

$$(4) \quad (\Delta E)_{Pl} = \frac{D}{2} \int_a^b \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 d\xi d\eta - \tau t \int_a^b \int_0^a \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} d\xi d\eta$$

und liefert nach Einführung der Gl. (3)

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} (\Delta E)_{Pl} = & \frac{\pi^4 b D}{8 a^3} [A_{11}^2 (1 + \alpha^2)^2 + A_{22}^2 (4 + 4 \alpha^2)^2 + A_{13}^2 (1 + 9 \alpha^2)^2 \\ & + \dots + A_{44}^2 (16 + 16 \alpha^2)^2] + 8 \tau t \left[ \frac{4}{9} \cdot A_{11} A_{22} - \frac{4}{5} \cdot A_{13} A_{22} \right. \\ & - \frac{4}{5} \cdot A_{31} A_{22} + \frac{36}{25} \cdot A_{33} A_{22} - \frac{20}{63} \cdot A_{15} A_{22} - \frac{20}{63} \cdot A_{51} A_{22} \\ & + \frac{16}{225} \cdot A_{11} A_{44} + \frac{16}{35} \cdot A_{13} A_{44} + \frac{16}{35} \cdot A_{31} A_{44} \\ & \left. + \frac{144}{49} \cdot A_{33} A_{44} - \frac{16}{27} \cdot A_{15} A_{44} - \frac{16}{27} \cdot A_{51} A_{44} \right]. \end{aligned} \right.$$

3. Die untersuchte Platte ist am Ort  $\xi = a/2$  durch eine lotrechte Steife verstärkt, deren Querschnitt  $F$  eine auf der Plattenebene senkrecht stehende Symmetrie-Ebene besitzt; das bei Ausbiegungen senkrecht zur Plattenebene zur Geltung kommende Querschnitts-Trägheitsmoment dieser Steife wird mit  $J$  und der Trägheitsradius mit  $i = \sqrt{J/F}$  bezeichnet. Die Steife möge einseitig oder auf beiden Seiten der Platte so angeordnet sein, daß ihre Schwerachse außerhalb der Plattenmittelebene liegt und von dieser die Entfernung  $s$  aufweist (Bild 2a). Die Verbindung zwischen Steife und Platte sei eine starre und erfolge längs einer geraden Linie (der

sogenannten „Kontaktlinie“), die mit der Schnittgeraden der Plattenmittelebene und der Symmetrie-Ebene der Steife zusammenfällt; um dieser idealisierten Verbindungsweise entsprechen zu können, müssen wir uns die Steife durch eine prismatische Leiste von verschwindend kleinem Querschnitt ergänzt denken oder aber, wie dies bei den Flachstahlsteifen naheliegender ist, den der Rechnung zugrunde gelegten Steifenquerschnitt nicht nur bis zur Plattenoberfläche, sondern bis zur Plattenmittelebene reichen lassen (Bild 2b).

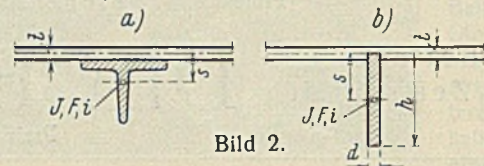


Bild 2.

Beult die Platte nach der durch die Gl. (3) festgelegten Wölbfläche aus, dann wird die Steife nach der ebenen Kurve

$$(6) \quad w|_{\xi=a/2} = (A_{11} - A_{31} + A_{51}) \cdot \sin \frac{\pi \eta}{b} + (A_{13} - A_{33}) \cdot \sin \frac{3 \pi \eta}{b} + A_{15} \cdot \sin \frac{5 \pi \eta}{b}$$

verbogen. Um die Spannungen, die hierbei sowohl in der Platte als auch in der Steife entstehen, in übersichtlicher Weise darstellen zu können, führen wir ein neues Koordinatensystem  $x, y, z$  ein, dessen  $x$ -Achse mit der Kontaktlinie und dessen  $y$ -Achse mit der unteren Randlinie der Platte zusammenfällt (Bild 1b); die von der Steife ausgebildete Biegelinie wird dann durch die Beziehung

$$(7) \quad z = (A_{11} - A_{31} + A_{51}) \cdot \sin \frac{\pi x}{b} + (A_{13} - A_{33}) \cdot \sin \frac{3 \pi x}{b} + A_{15} \cdot \sin \frac{5 \pi x}{b}$$

bestimmt (Bild 3a).

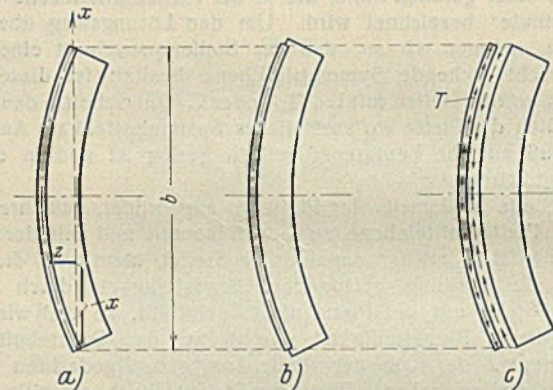


Bild 3.

Denken wir uns längs der Kontaktlinie eine reibungsfreie Führung angeordnet, dann werden an den einzelnen Stellen „ $x$ “ der Kontaktlinie beim Ausbeulen der Platte gegenseitige Verschiebungen zwischen der Platte und der Steife (Bild 3b) auftreten, die im gegebenen System mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Starrheit der Verbindung ausgeschlossen sind. Um hier auf ein dem gegebenen System „elastostatisch gleichwertiges“ System zu gelangen, müssen wir längs der Kontaktlinie die Doppelschubkräfte  $T$  wirken lassen und diese Kräfte so bemessen, daß sie die gegenseitigen Verschiebungen an jeder Stelle „ $x$ “ wieder auf Null zurückzuführen vermögen (Bild 3c). Diese Schubkräfte sind zwischen der Steife und der Platte wirksam (wenn die außermittige Steife nicht

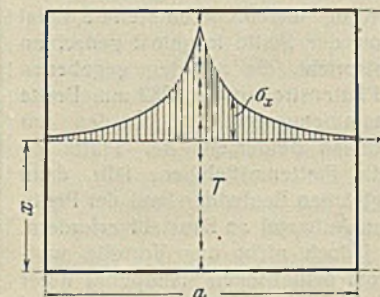


Bild 4.

einseitig sondern beiderseits der Platte angeordnet ist, haben wir uns den Steifenquerschnitt hier immer einteilig, die Platte „durchdringend“ zu denken!) und zeigen — da die Biegelinie Gl. (7) zur Mitte symmetrisch verläuft — eine antisymmetrische Verteilung. Sie dürfen, wie hier eigens vermerkt sei, nicht mit jenen Schubkräften  $T^*$  verwechselt werden, die im Fall der zweiseitigen Ausbildung der Steife (wie sie sich bei einer beidseitigen Anordnung praktisch nicht vermeiden läßt) bei der Ausbiegung von dem einen Steifenteil auf den anderen Steifenteil übertragen werden und in elementarer Weise — nach Art eines waagerechten Balkenstoßes — berechnet werden können;  $T^*$  ist bei jeder zweiseitigen Ausführungsweise der Steife, also auch im Fall der „mittigen“ Anordnung, von Null verschieden und muß bei einer Spannungsuntersuchung



der Nietverbindung oder Schweißnaht zusätzlich in Rechnung gestellt werden.

Durch die Schubkräfte  $T$  wird in der Platte ein Spannungszustand hervorgerufen (Bild 4), den wir mit Rücksicht auf die relative Kleinheit der Plattendicke und der in Betracht gezogenen Auswölbung als ebenen Spannungszustand auffassen dürfen. Die diesem Spannungszustand zugeordneten Spannungskomponenten  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  lassen sich mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion  $\phi(x, y), \Delta \Delta \phi(x, y) = 0$ , in der Form

$$(8) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

darstellen und sind mit den Verzerrungskomponenten durch die Beziehungen

$$(9) \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{1}{m} \cdot \sigma_y \right), \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{1}{m} \cdot \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy}$$

verknüpft; hierbei bedeutet  $u, v$  das Komponentenpaar der elastischen Verschiebung eines Plattenpunktes,  $m = 1/\mu = 10/3$  das Verhältnis der Längsdehnung zur Querkürzung und  $G = 810 \text{ t/cm}^2$  den Schubmodul des Baustahls. Die Randbedingungen, denen diese Spannungs- und Verzerrungskomponenten unterworfen sind, verlangen, daß an den Rändern „ $x = 0$ “ und „ $x = b$ “ die Spannung  $\sigma_x = 0$  ist, daß an diesen beiden Rändern — da die waagerechten Verschiebungen von Punkten der beiden Längsränder in praktischen Anwendungsfällen von den Gurtungen stark behindert werden — auch die Verschiebungskomponenten  $v$  verschwinden, und daß mit Rücksicht auf die Symmetrie des untersuchten Verzerrungszustandes für alle Punkte der Kontaktlinie die Forderung  $v = 0$  erfüllt wird.

Die Spannungsfunktion, die für die Lösung unserer Aufgabe geeignet ist und allen diesen Randbedingungen gehorcht, lautet

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi(x, y) &= C_1 \left[ \frac{m-1}{2m} - \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{\pi y}{b} \right] \cdot \sin \frac{\pi x}{b} \cdot e^{-\frac{\pi y}{b}} \\ &+ C_3 \left[ \frac{m-1}{2m} - \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{3\pi y}{b} \right] \cdot \sin \frac{3\pi x}{b} \cdot e^{-\frac{3\pi y}{b}} \\ &+ C_5 \left[ \frac{m-1}{2m} - \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{5\pi y}{b} \right] \cdot \sin \frac{5\pi x}{b} \cdot e^{-\frac{5\pi y}{b}}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $C_1, C_3$  und  $C_5$  Konstanten von der Dimension einer Kraft bedeuten. Sie bezieht sich auf die rechte Hälfte des symmetrischen Spannungsfeldes und ist einer Platte der Länge  $a \rightarrow \infty$  zugeordnet; die aus ihr abgeleiteten Spannungs- und Verzerrungskomponenten klingen, wie in Bild 4 angedeutet ist, nach beiden Seiten sehr rasch ab und sind daher bei Platten mit dem Seitenverhältnis  $\alpha > 1$  an den Rändern  $y = \pm a/2$  schon derartig klein, daß wir von einer Formulierung der Randbedingungen an diesen beiden Rändern absehen dürfen. Aus dem gleichen Grunde ist es auch zulässig, bei der Berechnung der im 4. Abschnitt verwendeten Kraft  $X$ , die die Resultierende aller in einem Plattenlängsschnitt „ $x = \text{const}$ “ auftretenden Normalspannungen  $\sigma_x$  vorstellt, die obere Integrationsgrenze von  $y = a/2$  nach  $y \rightarrow \infty$  zu verlegen und einfach

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= 2t \int_0^\infty \sigma_x dy = 2t \int_0^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot dy = 2t \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_0^\infty \\ &= \frac{2\pi t}{b} \left( C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{b} + 3 C_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{b} + 5 C_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{b} \right) \end{aligned} \right.$$

zu schreiben. Diese Kraft  $X$  ist mit den Schubkräften  $T$  durch eine Gleichgewichtsbedingung verbunden, die sich auf ein vom Rand „ $x = 0$ “ bis zur Schnittgeraden „ $x = \text{const}$ “ reichendes Plattenstück bezieht und

$$(12) \quad X - \int_0^x T dx = 0$$

lautet.

4. Die Schubkräfte  $T$  müssen, wie wir im 3. Abschnitt dargelegt haben, von solcher Größe sein, daß sie die gegenseitigen Verschiebungen, die sich bei Anordnung einer reibungsfreien Führung zwischen der Steife und der ausbeulenden Platte ergeben würden, an jeder Stelle „ $x$ “ auf Null zurückzuführen vermögen (Bild 3c). Wir wollen diese Bedingung so formulieren, daß wir für jede Stelle „ $x$ “ der Kontaktlinie die Übereinstimmung der spezifischen Plattendehnung  $\epsilon_x|_{y=0}$  mit der an derselben Stelle vorhandenen spezifischen Steifendehnung  $\epsilon_x$  fordern, und gelangen auf diese Weise zu einer Beziehung, die den Zusammenhang zwischen den Beiwerten  $C_1, C_3, C_5$  der Gl. (10) und den Beiwerten  $A_{m,n}$  der Gl. (3) festlegt.

Für die spezifische Dehnung, die eine Plattenfaser am Ort der Kontaktlinie erfährt, erhalten wir, wenn wir die Gl. (8), (9) u. (10) in Rücksicht ziehen, den Ausdruck

$$(13) \quad \epsilon_x|_{y=0} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{y=0} \\ = \frac{1,755 \pi^2}{E b^2} \left( C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{b} + 9 C_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{b} + 25 C_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{b} \right),$$

und für die Randfaserdehnung der Steife gewinnen wir, wenn wir den Einfluß der Verbiegung nach der Kurve  $z = f(x)$  [Gl. (7)] und den Einfluß der axialen Zusammendrückung durch die Kräfte  $T$  [Gl. (12) u. (11)] in Rechnung stellen, die Beziehung

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= -s \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{X}{EF} = \frac{\pi^2 s}{b^2} \left[ (A_{11} - A_{31} + A_{51}) \cdot \sin \frac{\pi x}{b} \right. \\ &+ 9 (A_{13} - A_{33}) \cdot \sin \frac{3\pi x}{b} + 25 A_{15} \cdot \sin \frac{5\pi x}{b} \left. \right] \\ &- \frac{2\pi t}{EFb} \left[ C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{b} + 3 C_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{b} + 5 C_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{b} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die erwähnte Formänderungsbedingung, die

$$(15) \quad \epsilon_x|_{y=0} - \epsilon_x = 0$$

lautet und für jede Stelle „ $x$ “ erfüllt sein muß, führt dann auf den Zusammenhang

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{(A_{11} - A_{31} + A_{51}) E s}{1,755 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{tb}{F}}, \quad C_3 = \frac{(A_{13} - A_{33}) E s}{1,755 + \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{tb}{F}}, \\ C_5 &= \frac{A_{15} E s}{1,755 + \frac{2}{5\pi} \cdot \frac{tb}{F}}. \end{aligned} \right.$$

Würden wir die Steife nicht „außermittig“ sondern „mittig“ anordnen, so daß die Steifenachse in die Plattenmittelebene zu liegen kommt, dann wäre  $s = 0, C_1 = C_3 = C_5 = 0, \phi(x, y) = 0$  und daher  $T = 0$ .

Der im 2. Abschnitt erwähnte Anteil  $(\Delta E)_{St}$  der potentiellen Energie, der beim Ausbeulen der Platte in der Steife zur Aufspeicherung gelangt, setzt sich aus dem Teilbetrag  $(\Delta E)_{St}'$ , der den Biegespannungen zugehört, und dem durch die axialen Druckspannungen bedingten Teilbetrag  $(\Delta E)_{St}''$  zusammen. Für  $(\Delta E)_{St}'$  erhalten wir, wenn wir die Gl. (7) in Rücksicht ziehen,

$$(17) \quad (\Delta E)_{St}' = \frac{EJ}{2} \int_0^b \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx \\ = \frac{\pi^4 EJ}{4 b^3} [(A_{11} - A_{31} + A_{51})^2 + 81 (A_{13} - A_{33})^2 + 625 A_{15}^2],$$

während sich für  $(\Delta E)_{St}''$  der Ausdruck

$$(18) \quad (\Delta E)_{St}'' = \frac{1}{2 EF} \int_0^b X^2 dx = \frac{\pi^2 t^2}{EFb} (C_1^2 + 9 C_3^2 + 25 C_5^2)$$

ergibt; addieren wir beide Teilbeträge, dann gelangen wir nach Einführung der Gl. (16) auf die Beziehung

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} (\Delta E)_{St} &= \frac{EJ}{b^3} \left\{ (A_{11} - A_{31} \right. \\ &+ A_{51})^2 \left[ \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2}{\left(1,755 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{tb}{F}\right)^2} \cdot \frac{s^2 t^2 b^2}{i^2 F^2} \right] \\ &+ (A_{13} - A_{33})^2 \left[ \frac{81 \pi^4}{4} + \frac{9 \pi^2}{\left(1,755 + \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{tb}{F}\right)^2} \cdot \frac{s^2 t^2 b^2}{i^2 F^2} \right] \\ &+ A_{15}^2 \left[ \frac{625 \pi^4}{4} + \frac{25 \pi^2}{\left(1,755 + \frac{2}{5\pi} \cdot \frac{tb}{F}\right)^2} \cdot \frac{s^2 t^2 b^2}{i^2 F^2} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$

Durch die Schubkräfte  $T$ , die von der „außermittig“ angeordneten Steife übertragen werden, entstehen in der Platte die im 3. Abschnitt geschilderten Zusatzspannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , die mit Hilfe der Gl. (8), (10) u. (16) festgelegt werden können. Der Potentialanteil  $(\Delta E)_T$ , der diesem ebenen Spannungszustand zugeordnet ist, läßt sich unter Verwendung der Beziehung

$$(20) \quad (\Delta E)_T = 2 \cdot \frac{t}{2E} \int_0^b \int_0^{0,5a} (\sigma_x + \sigma_y) dx dy \\ + 2 \cdot \frac{t}{2G} \int_0^b \int_0^{0,5a} (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y) dx dy$$

berechnen. Da die Spannungskomponenten  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  mit anwachsendem  $y$  sehr rasch abklingen (Bild 4) und daher bei Platten mit dem Seitenverhältnis  $\alpha > 1$  außerhalb der Ränder  $y = \pm a/2$  nur mehr von unbedeutender Kleinheit sind, begehen wir keinen großen Fehler, wenn wir die obere Integrationsgrenze in Gl. (20) von  $y = a/2$  nach  $y \rightarrow \infty$  verlegen. Wir erhalten dann den einfachen Ausdruck

$$(21) \quad (\Delta E)_T = \frac{\pi^3 t}{2 E b^2} \cdot \frac{3m^2 + 2m - 1}{2m^2} (C_1^2 + 27 C_3^2 + 125 C_5^2)$$

und gelangen nach Einführung der Gl. (16) auf die gesuchte Beziehung



$$(22) \quad (\Delta E)_T = \frac{1,755 \pi^3}{2} \cdot \frac{EJ}{b^3} \cdot \frac{tb}{F} \cdot \frac{s^2}{i^2} \left[ \frac{(A_{11} - A_{31} + A_{51})^2}{\left(1,755 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{tb}{F}\right)^2} + \frac{27(A_{13} - A_{33})^2}{\left(1,755 + \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{tb}{F}\right)^2} + \frac{125 A_{15}^2}{\left(1,755 + \frac{2}{5\pi} \cdot \frac{tb}{F}\right)^2} \right]$$

Würden wir die Steife nicht „außermittig“ sondern „mittig“ anordnen, dann würde die Schwerachse der Steife in die Plattenmittelebene fallen und daher  $s = 0$ , also auch  $(\Delta E)_T = 0$  sein.

5. Die Gleichungen (5), (19) und (22) legen die drei Anteile  $(\Delta E)_{Pl}$ ,  $(\Delta E)_{St}$ ,  $(\Delta E)_T$  der durch die Auswölbung Gl. (3) bedingten Änderung der gesamten potentiellen Energie fest und liefern für diese Änderung, wenn wir die von den Abmessungen der verstellten Platte abhängigen Hilfsgrößen

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a}{b}, & \delta = \frac{F}{tb}, & \gamma = \frac{EJ}{bD}, & \psi = \frac{s^2}{i^2}, \\ \beta_1 = \pi^2 \gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{\psi}{1,755 \cdot 2\pi \delta + 4} \right), \\ \beta_3 = 81 \pi^2 \gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{\psi}{1,755 \cdot 6\pi \delta + 4} \right), \\ \beta_5 = 625 \pi^2 \gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{\psi}{1,755 \cdot 10\pi \delta + 4} \right) \end{cases}$$

und die von der Belastungsintensität abhängige Verhältnißgröße

$$(24) \quad \kappa = \frac{\tau t b^2}{\pi^2 D}$$

eingeführen, die Beziehung

$$(25) \quad \begin{cases} \Delta E = (\Delta E)_{Pl} + (\Delta E)_{St} + (\Delta E)_T = \frac{8 \pi^2 \kappa D}{b^2} \left\{ \frac{\pi^2}{64 \kappa \alpha^3} [A_{11}^2 (1 + \alpha^2)^2 + A_{22}^2 (4 + 4 \alpha^2)^2 + \dots + A_{44}^2 (16 + 16 \alpha^2)^2] + \frac{\beta_1}{8 \kappa} (A_{11} - A_{31} + A_{51})^2 + \frac{\beta_3}{8 \kappa} (A_{13} - A_{33})^2 + \frac{\beta_5}{8 \kappa} A_{15}^2 + \frac{4}{9} \cdot A_{11} A_{22} - \frac{4}{5} \cdot A_{13} A_{22} - \frac{4}{5} \cdot A_{31} A_{22} + \frac{36}{25} \cdot A_{33} A_{22} - \frac{20}{63} \cdot A_{15} A_{22} - \frac{20}{63} \cdot A_{51} A_{22} + \frac{16}{225} \cdot A_{11} A_{44} + \frac{16}{35} \cdot A_{13} A_{44} + \frac{16}{35} \cdot A_{31} A_{44} + \frac{144}{49} \cdot A_{33} A_{44} - \frac{16}{27} \cdot A_{15} A_{44} - \frac{16}{27} \cdot A_{51} A_{44} \right\} \end{cases}$$

Im Sinne der im 2. Abschnitt geschilderten Lösungsmethode haben wir die partiellen Ableitungen von  $\Delta E$  nach den einzelnen Beiwerten

$A_{m,n}$  gleich Null zu setzen und gelangen damit auf das nachfolgende System linearer, homogener Gleichungen:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (1 + \alpha^2)^2 A_{11} + \frac{\beta_1}{4 \kappa} (A_{11} - A_{31} + A_{51}) + \frac{4}{9} \cdot A_{22} + \frac{16}{225} \cdot A_{44} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (4 + 4 \alpha^2)^2 A_{22} + \frac{4}{9} \cdot A_{11} - \frac{4}{5} \cdot A_{13} - \frac{4}{5} \cdot A_{31} + \frac{36}{25} \cdot A_{33} - \frac{20}{63} \cdot A_{15} - \frac{20}{63} \cdot A_{51} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (1 + 9 \alpha^2)^2 A_{13} + \frac{\beta_3}{4 \kappa} (A_{13} - A_{33}) - \frac{4}{5} \cdot A_{22} + \frac{16}{35} \cdot A_{44} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (9 + \alpha^2)^2 A_{31} - \frac{\beta_1}{4 \kappa} (A_{11} - A_{31} + A_{51}) - \frac{4}{5} \cdot A_{22} + \frac{16}{35} \cdot A_{44} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (9 + 9 \alpha^2)^2 A_{33} - \frac{\beta_3}{4 \kappa} (A_{13} - A_{33}) + \frac{36}{25} \cdot A_{22} + \frac{144}{49} \cdot A_{44} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (1 + 25 \alpha^2)^2 A_{15} + \frac{\beta_5}{4 \kappa} \cdot A_{15} - \frac{20}{63} \cdot A_{22} - \frac{16}{27} \cdot A_{44} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (25 + \alpha^2)^2 A_{51} + \frac{\beta_1}{4 \kappa} (A_{11} - A_{31} + A_{51}) - \frac{20}{63} \cdot A_{22} - \frac{16}{27} \cdot A_{44} = 0 \\ \frac{\pi^2}{32 \kappa \alpha^3} (16 + 16 \alpha^2)^2 A_{44} + \frac{16}{225} \cdot A_{11} + \frac{16}{35} \cdot A_{13} + \frac{16}{35} \cdot A_{31} + \frac{144}{49} \cdot A_{33} - \frac{16}{27} \cdot A_{15} - \frac{16}{27} \cdot A_{51} = 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem läßt nur dann eine von der Nulllösung verschiedene Lösung für die Beiwerte  $A_{m,n}$  und damit für die Auswölbung Gl. (3) zu, wenn seine Koeffizientendeterminante  $\mathcal{A}$  verschwindet. Die Bedingung  $\mathcal{A} = 0$ , die nach der unbekanntnen Hilfsgröße  $\kappa$  aufzulösen ist, stellt demnach die Beulbedingung der untersuchten, auf reinen Schub beanspruchten und durch eine „außermittig“ angeordnete Steife verstärkten Rechteckplatte vor.

Bezeichnen wir die kleinste positive Wurzel dieser Beulbedingung (den sogenannten „Beulwert“) mit  $\min \kappa = k$ , dann erhalten wir für die kritische, der tiefsten Stabilitätsgrenze zugeordnete Schubspannung die Beziehung

$$(II) \quad \tau_k = k \cdot \frac{\pi^2 D}{b^2 t}$$

und können mit Hilfe dieser Beziehung jenen Sonderwert  $\tau_k t$  berechnen, den die von Null anwachsende Randschubkraft erreichen muß, um die Platte unter Überwindung des elastischen Widerstandes der Steife zum Ausbeulen zu bringen.

(Fortsetzung folgt.)  
2.5.92

Alle Rechte vorbehalten.

### Ableitung der Hertz'schen Härteformeln für die Walze.

Von Dipl.-Ing. Kurt Drescher, Berlin-Karlshorst.

(Schluß aus Heft 9.)

#### Aufstellung der Bestimmungsgleichung für die unbekanntne Druckspannungsfunktion $p$ (§).

Im unbelasteten (drucklosen) Zustand haben zwei gegenüberliegende Punkte der beiden Oberflächen mit gleichen  $x$ - und  $z$ -Koordinaten wie  $A_1$  und  $A_2$  der Walzen  $W_1$  und  $W_2$ , die sich längs einer mathematischen Geraden von der Länge  $l$  berühren, in erster Annäherung einen Abstand (in Bild 8 der deutlicheren Darstellung halber stark übertrieben gezeichnet):

$$(17) \quad A_1 A_2 = \eta_1 + \eta_2 = r_1 (1 - \cos \varphi_1) + r_2 (1 - \cos \varphi_2) \approx r_1 \cdot \frac{\varphi_1^2}{2} + r_2 \cdot \frac{\varphi_2^2}{2} \approx \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Indem wir nun unser Augenmerk auf jede der Walzen für sich richten (vgl. Bild 6), werden bei Wirkung des Druckes sich die Punkte des Druckbereiches verschieben, und zwar wird ein Oberflächenpunkt  $A_1$  der Walze  $W_1$  eine Verschiebung  $v_1$  (nach unten positiv gerechnet) nach  $A_1'$ , der entsprechende gegenüberliegende Punkt  $A_2$  der anderen Walze  $W_2$  eine Verschiebung  $v_2$  (nach oben positiv gerechnet) nach  $A_2'$  erfahren (Bild 9). Die positive  $y$ -Richtung (und daher auch die der Verschiebung  $v$ ) für jede der beiden Walzen ist also immer in das Innere des betrachteten Körpers gerichtet. Für diese Verschiebungen  $v_1$  und  $v_2$  kann wegen der oben getroffenen Voraussetzung  $a \ll r$  Gl. (16) benutzt werden, die zunächst ja unter der Voraussetzung gefunden war, daß der Körper in der Nähe des Druckbereiches vor der Formänderung durch eine (horizontale), ebene Fläche, nämlich die  $xz$ -Ebene als gemeinsame Tangentialebene beider Walzen, begrenzt gewesen ist (Bild 2 u. 4; im Schnitt als horizontale Gerade dargestellt). Da die beiden Walzen im allgemeinen aus verschiedenen Werkstoffen mit verschiedenen  $E$  und  $\nu$  bestehen können, so ist in Gl. (16) bei  $v_1$   $E_1, \nu_1$ , entsprechend bei  $v_2$   $E_2, \nu_2$  einzusetzen. Der

Gesamtabstand  $A_1' A_2'$  der beiden gegenüberliegenden Punkte  $A_1$  und  $A_2$  beträgt demnach:

$$(18) \quad A_1' A_2' = A_1 A_2 + v_1 + v_2.$$

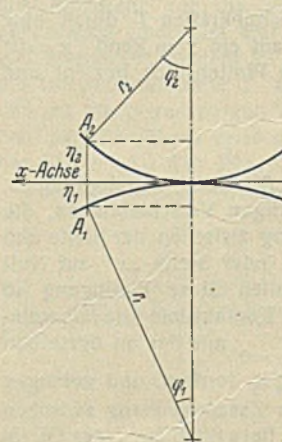


Bild 8.

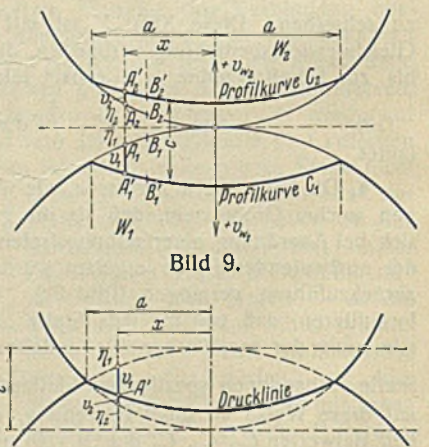


Bild 9.

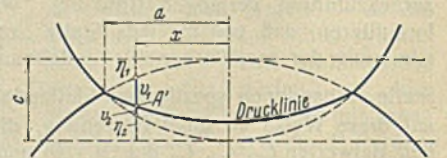


Bild 10.

Zwei andere gegenüberliegende, durch ein anderes  $x$  gekennzeichnete Punkte der beiden Walzenoberflächen, wie  $B_1$  und  $B_2$ , werden sich dabei nach  $B_1'$  bzw.  $B_2'$  verschieben. Im ursprünglichen unbelasteten Zustand lagen die Punkte auf zwei Kreisbögen mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ ; durch die gegenseitige Wirkung des Druckes haben nun alle Punkte innerhalb des Druckbereiches ihre ursprüngliche Lage verändert, und zwar werden



dann alle Punkte der Walze  $W_1$  (durch den Index 1 gekennzeichnet) auf einer Profilkurve  $C_1$ , die entsprechenden Punkte der Walze  $W_2$  auf einer Profilkurve  $C_2$  zu liegen kommen (Bild 9). Da sich aber nun die beiden Körper unter der gegenseitigen Wirkung des Druckes berühren, d. h. ihre Profilkurven innerhalb des betrachteten Druckbereiches in eine einzige (auch Drucklinie genannt) zusammenfallen, so muß es möglich sein, sie durch eine Parallelverschiebung genau zur Deckung bringen zu können (Bild 10), d. h., es muß der Abstand entsprechender gegenüberliegender Punkte innerhalb des ganzen Druckbereiches einen konstanten Wert  $c$  haben:

$$(19) \quad \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + v_1 + v_2 = \text{konst} = c.$$

Diese Entfernung  $c$ , die auch die „Abplattung“ genannt wird, gibt also an, um wieviel sich die undeformierten Teile der beiden Walzen einander genähert haben.

Aus (19) folgt dann durch Differentiation nach  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + v_1(x) + v_2(x) \right] = 0$$

oder:

$$(20) \quad x \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{dv_1(x)}{dx} + \frac{dv_2(x)}{dx} = 0.$$

Führt man die Differentiation von  $v$  der Gl. (16) nach  $x$  durch, so erhält man <sup>12)</sup>:

$$(21) \quad \frac{dv}{dx} = 0 + \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \int_{\xi=0}^{\xi=x} \frac{p(\xi)}{x-\xi} \cdot d\xi + [p(\xi) \ln(x-\xi)]_{\xi=x-0} \right. \\ \left. - \int_{\xi=x}^{\xi=a} \frac{p(\xi)}{\xi-x} \cdot d\xi - [p(\xi) \ln(\xi-x)]_{\xi=x+0} + \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{p(\xi)}{x+\xi} \cdot d\xi \right\}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{\xi=0}^{\xi=a} \left( \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{x+\xi} \right) p(\xi) d\xi$$

$$= \frac{4x(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{1}{x^2-\xi^2} \cdot p(\xi) d\xi.$$

Indem man dieses Ergebnis in Gl. (20) einsetzt, erhält man:

$$x \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{4x}{\pi} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{1}{x^2-\xi^2} \cdot p(\xi) d\xi = 0$$

oder mit der Abkürzung

$$(22) \quad k = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}$$

$$(23) \quad \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{1}{x^2-\xi^2} \cdot p(\xi) d\xi = -k.$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für die unbekannte Druckspannungsfunktion  $p(\xi)$ . Wir wissen von dieser Druckverteilung bisher nur, daß sie symmetrisch zur  $y$ -Achse verläuft, d. h. eine gerade Funktion ist  $p(-\xi) = +p(+\xi)$  und daß die Summe aller Elementardruckkräfte gleich dem Gesamtdruck  $P$  ist:

$$(24) \quad P = l \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} p(\xi) d\xi = 2l \int_{\xi=0}^{\xi=+a} p(\xi) d\xi.$$

In der Mitte für  $\xi=0$  wird  $p$  noch ihren größten Wert, der später mit  $p(0) = p_0$  bezeichnet werden soll, besitzen, während sie nach den Endpunkten zu (für  $\xi = \pm a$ ) auf den Wert Null absinkt.

Die Weiterbehandlung der Gl. (23) geschieht bei L. Föppl in der Weise, daß er nun die von H. Hertz auf ganz anderem Wege durch einen Grenz-

<sup>12)</sup> Ist

$$F(x) = \int_{\xi=a(x)}^{\xi=b(x)} f(\xi, x) d\xi,$$

dann berechnet sich die Ableitung des Integrals  $F(x)$  nach dem „Parameter“ („Mittläufer“)  $x$  mit von  $x$  veränderlichen Grenzen nach der Formel:

$$F'(x) = \int_{\xi=a(x)}^{\xi=b(x)} \frac{\partial f(\xi, x)}{\partial x} \cdot dx + f[b(x), x] \frac{db}{dx} - f[a(x), x] \frac{da}{dx}.$$

Sind die Grenzen  $a$  und  $b$  Festwerte, dann fallen die beiden letzten Glieder rechts weg. (Siehe z. B. Rudolf Rothe, Höhere Mathematik, 1929, Teil II, S. 133.

übergang<sup>13)</sup> gefundene Lösung der halbkreisförmigen Druckverteilung über der Drucklinie

$$p(\xi) = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2}$$

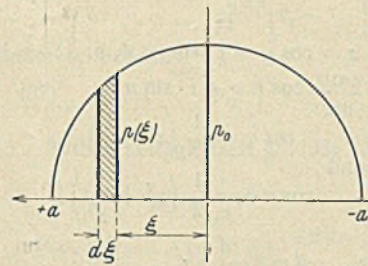


Bild 11.

übernimmt. In dieser Arbeit soll hingegen die Lösung erst durch methodische, allerdings etwas rein mathematische Behandlung der Gl. (23) bestimmt werden. Dadurch ist nicht nur der weitere Rechnungsgang insofern vollkommen selbständig und unabhängig von Hertz, als man dabei die von ihm gefundene Lösung nicht vorwegzunehmen braucht, sondern es wird auch zugleich gezeigt, daß man — auch bei der Föppl'schen Ableitung des Hertz'schen Härteproblems zweiter

Walzen — als theoretische Lösung die halbkreisförmige Verteilung der Druckspannung über der Drucklinie erhält<sup>14)</sup>.

So wie viele Probleme der Mechanik auf Differentialgleichungen führen, das sind bekanntlich Gleichungen, in denen außer der gesuchten Funktion auch noch ihre Differentialquotienten vorkommen, so hat man es bei Gl. (23), in der die unbekannte Funktion unter einem Integral auftritt, mit einer Integralgleichung zu tun.

Die methodische Bestimmung der Lösung der obigen Integralgleichung (23).

Gl. (23):

$$\int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{1}{x^2-\xi^2} \cdot p(\xi) d\xi = -k$$

stellt eine lineare [d. h. linear in bezug auf die unbekannte Funktion  $p(\xi)$ ] Integralgleichung erster Art (d. i. eine solche, in der die unbekannte Funktion nur unter dem Integralzeichen erscheint) dar und wird in allgemeiner Bezeichnung in der Form geschrieben:

$$\int_{\xi=a}^{\xi=b} K(x, \xi) p(\xi) d\xi = f(x).$$

$K(x, \xi)$  wird der Kern der Integralgleichung genannt. In unserem Falle ist  $K(x, \xi) = \frac{1}{x^2-\xi^2}$ ; er ist antisymmetrisch [ $K(x, \xi) = -K(\xi, x)$ ] und an der Stelle  $\xi = x$  singular, während auf der rechten Seite allgemein eine gegebene Funktion  $f(x)$  stehen kann:

$$(25) \quad \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{1}{x^2-\xi^2} \cdot p(\xi) d\xi = f(x).$$

Der Wert  $x$  liegt, wie nochmals erwähnt sein soll, zwischen 0 und  $a$ . Wegen der Voraussetzung einer geraden Funktion  $p(\xi)$  läßt sich Gl. (25) schreiben:

$$\int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{p(\xi)}{x^2-\xi^2} \cdot d\xi = \frac{1}{2} \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} \frac{p(\xi) d\xi}{x^2-\xi^2} = f(x)$$

und unter Einführung von

$$\xi = a \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad 2\varphi = \psi$$

wie folgt umformen:

$$\frac{a}{2} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=+\frac{\pi}{2}} \frac{p(a \cdot \sin \varphi) \cos \varphi}{x^2 - a^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \frac{a}{4} \int_{\psi=-\pi}^{\psi=+\pi} \frac{p(a \cdot \sin \varphi) \cos \varphi}{x^2 - \frac{a^2}{2} (1 - \cos 2\varphi)} \cdot d(2\varphi)$$

oder

$$(26) \quad \frac{a}{4} \int_{\psi=-\pi}^{\psi=+\pi} \frac{p(a \cdot \sin \varphi) \cos \varphi}{x^2 - \frac{a^2}{2} (1 - \cos \psi)} \cdot d\psi = f(x).$$

Für die Weiterrechnung soll nun vorausgesetzt werden, daß sich  $p(a \cdot \sin \varphi) \cos \varphi$  in eine Fourier-Reihe nach  $\psi$ , das ist nach doppelten Argumenten  $\varphi$  entwickeln läßt:

<sup>13)</sup> Siehe auch die Bemerkungen in A. Föppl, Vorlesungen 1922, Bd. V, S. 346 u. 347.

<sup>14)</sup> Dieses Ergebnis verdient außerdem schon deshalb der besonderen Erwähnung, da in manchen Veröffentlichungen auch von einer theoretischen, parabolischen Druckverteilung über der Drucklinie gesprochen wird.



$$(27) \quad p(a \cdot \sin \varphi) \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos n \varphi.$$

Die Weiterbehandlung von (26) soll durch Einführung des Komplexen geschehen. Mit

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} e^{i\varphi} &= z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi, \text{ d. h. } |z| = 1 \\ e^{in\varphi} &= z^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi, \end{aligned}$$

$$\text{also: } e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{z} = z^{-1} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \\ \cos n\varphi &= \frac{1}{2} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right), \end{aligned}$$

$$\text{ferner: } dz = i e^{i\varphi} d\varphi = i z d\varphi \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Gl. (27) liefert

$$p \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos n\varphi = \frac{1}{2} \cdot C_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) = F(z),$$

während aus Gl. (26) wird:

$$(28) \quad f(x) = \frac{a}{4i} \oint_C \frac{F(z) dz}{z \left[ x^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{a^2}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]} = \frac{1}{ia} \oint_C \frac{F(z) dz}{z^2 + 2z \left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + 1}$$

Von Wichtigkeit sind die Nullstellen des Ausdruckes im Nenner:

$$z^2 + 2z \left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + 1 = 0 = (z - z_1)(z - z_2),$$

$$\text{daher: } z_1 + z_2 = -2 \left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = 2 - \frac{4x^2}{a^2} \quad z_1 z_2 = 1$$

$$z_{1,2} = - \left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \pm \sqrt{\left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^2 - 1}$$

$$z_{1,2} = - \left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \pm i \sqrt{1 - \left( 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^2} = \cos \gamma \pm i \cdot \sin \gamma; \quad |z_1| = |z_2| = 1$$

$$z_1 = e^{i\gamma}; \quad z_2 = e^{-i\gamma} = \frac{1}{z_1} = \bar{z}_1$$

$$z_1 + z_2 = 2 - \frac{4x^2}{a^2} = 2 \cdot \cos \gamma$$

$$2x^2 = a^2(1 - \cos \gamma) = 2a^2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}; \quad x = a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

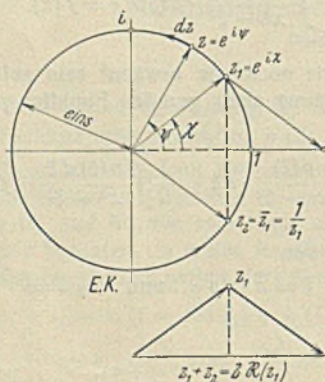


Bild 12.

Gl. (28) läßt sich dann in der Form schreiben:

$$(29) \quad \frac{1}{ia} \oint_C \frac{F(z) dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{2ia} \oint_{E.K.} \frac{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right)}{(z-z_1)(z-z_2)} \cdot dz = f(x);$$

darin sind die  $C_n$  unbekannt, während auf der rechten Seite eine gegebene, bekannte Funktion  $f(x)$  von  $x$  steht. Die oben auftretenden Integrale im Komplexen

$$(30) \quad \begin{cases} J_1 = \oint_C \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}; & J_2 = \oint_C \frac{z^n dz}{(z-z_1)(z-z_2)}; \\ J_3 = \oint_C \frac{1}{z^n} \cdot dz \end{cases}$$

lassen sich nun auf Grund funktionentheoretischer Sätze ermitteln, indem sich ihre Werte im allgemeinen durch die Nullstellen  $z_1$  und  $z_2$  ausdrücken werden. Da diese nun wieder ihrerseits von  $x$  abhängen, so werden wir — und das ist das Ziel der folgenden Rechnungen — aus Gl. (29) die Beziehung zwischen den  $C_n$  einerseits und der gegebenen Funktion  $f(x)$  in Form einer Entwicklung erhalten.

Für die Ermittlung der obenstehenden Integrale  $J_1, J_2, J_3$  werden nun folgende Sätze der Funktionentheorie benutzt<sup>15)</sup>:

1. Ist eine komplexe Funktion  $f(z)$  in einem einfach zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{B}$  überall analytisch, d. h. differenzierbar und eindeutig, dann hat das Integral  $\oint_C f(z) dz$  über einen beliebigen,

ganz in  $\mathfrak{B}$  verlaufenden geschlossenen Weg  $C$  den Wert Null (Bild 13):

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

(Hauptsatz der Funktionentheorie).

2. a) Bedeutet  $z_1$  einen Punkt im Innern des Integrationsweges  $C$ , dann gilt unter denselben Voraussetzungen wie bei 1 (Bild 14):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_1} \cdot dz = f(z_1)$$

(Cauchysche Integralformel).

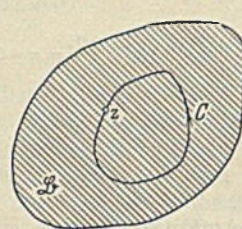


Bild 13.

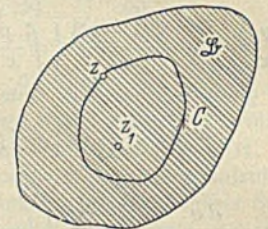


Bild 14.

b) Liegt jedoch  $z_1$  außerhalb des Integrationsweges  $C$ , so ist (folgt aus 1, Bild 15):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_1} \cdot dz = 0.$$

c) Liegt schließlich  $z_1$  auf dem Integrationsweg  $C$ , so gilt (Bild 16):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_1} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot f(z_1).$$

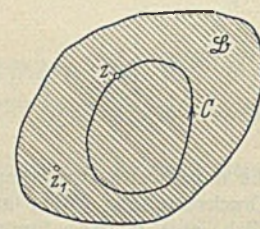


Bild 15.

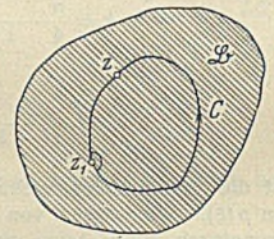


Bild 16.

Bedeutet nun  $z_1$  und  $z_2$  zwei im Innern von  $C$  gelegene Punkte, so erhält man für

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \left[ \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} \right] dz \\ &= \frac{A}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-z_1} + \frac{B}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-z_2}, \end{aligned}$$

dabei  $f(z)$  in  $\mathfrak{B}$  analytisch.

Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2}$$

$$1 = (A+B)z + (-Bz_1 - Az_2),$$

also durch Koeffizientenvergleich  $B = -A = \frac{1}{z_2 - z_1}$ . Daher:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_1} \cdot dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z_2 - z_1} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_1} \cdot dz, \end{aligned}$$

<sup>15)</sup> Siehe z. B. Rothe-Ollendorff-Pohlhausen, Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Berlin 1931, Jul. Springer.



folglich (nach 2a):

$$(31) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \cdot dz = \left[ \frac{1}{z_1-z_2} \cdot f(z_1) + \frac{1}{z_2-z_1} \cdot f(z_2) \right].$$

Liegen  $z_1$  und  $z_2$  jedoch auf dem Integrationsweg, so tritt (wie oben bei 2c) noch der Faktor  $\frac{1}{2}$  vor die eckige Klammer.

Dieses letzte Ergebnis soll gleich dazu benutzt werden, um die Werte der Integrale  $J_1$  und  $J_2$  zu bestimmen; bei  $J_1$  ist  $f(z)=1$ , bei  $J_2$  ist  $f(z)=z^n$ .

$$(32) \quad \frac{1}{2\pi i} \cdot J_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{E.K.} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z_1-z_2} + \frac{1}{z_2-z_1} \right] = 0,$$

ferner:

$$(33) \quad \frac{1}{2\pi i} \cdot J_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{E.K.} \frac{z^n dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{z_1^n}{z_1-z_2} + \frac{z_2^n}{z_2-z_1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}.$$

Die Berechnung des Integrals  $J_3$  hingegen erfolgt auf Grund des folgenden (Residuen)-Satzes:

Ist  $h(z)$  eine Funktion, die im Innern eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  überall regulär ist mit Ausnahme von endlich vielen Stellen  $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ , dann gilt, wenn der Integrationsweg  $C$  alle singulären Stellen umschließt:

$$\oint_C h(z) dz = \oint_{K_1} h(z) dz + \oint_{K_2} h(z) dz + \dots + \oint_{K_\lambda} h(z) dz,$$

wobei die Kurven  $K_\nu$  die einzelnen singulären Stellen umschließen. Man nennt die Größe  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_\nu} h(z) dz$  das Residuum von  $h(z)$  an der Stelle  $z=z_\nu$ ; bezeichnet man mit  $a_{-1}$  den Koeffizienten der ersten negativen Potenz in der zu  $h(z)$  zugehörigen Laurentschen Potenzreihenentwicklung um  $z_\nu$ , so gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_\nu} h(z) dz = a_{-1}$$

und daher:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C h(z) dz = \text{Summe der Residuen von } h(z) \text{ an allen Ausnahmestellen.}$$

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich auch der Wert von  $J_3$  von (30) wie folgt bestimmen:

$$(34) \quad \frac{1}{2\pi i} \cdot J_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{E.K.} \frac{dz}{z^n(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_1^n(z_1-z_2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_2^n(z_2-z_1)} + \Re\{h(z)\}_{z=0} = \frac{1}{2(z_1-z_2)} \left( \frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_2^n} \right) + \Re\{h(z)\}_{z=0}.$$

Nun gilt:

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_1 z_2 \left(1 - \frac{1}{z_1} \cdot z\right) \left(1 - \frac{1}{z_2} \cdot z\right)} = \frac{1}{z_1 z_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} z_1^\nu z_2^\mu z^{n-\nu-\mu},$$

dabei:  $\mu + \nu = n, \quad \nu = n - \mu$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\mu=0}^n z_1^\mu z_2^{n-\mu} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n.$$

Der Koeffizient der ersten negativen Potenz von  $\frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$  in der Entwicklung um  $z=0$  ist demnach

$$(35) \quad p_{n-1} = \Re\{h(z)\}_{z=0}.$$

Die Ausrechnung von  $p_n$  ergibt mit

$$z_1 = e^{i\gamma} = \frac{1}{z_2}, \quad z_1 - \frac{1}{z_1} = 2 \cdot \sin \gamma \quad \text{und} \quad \sin n\gamma = \left( z_1^n - \frac{1}{z_1^n} \right) \frac{1}{2}$$

$$p_n = \sum_{\mu=0}^n z_1^\mu z_2^{n-\mu} = \sum_{\mu=0}^n z_1^\mu z_1^{-(n-\mu)} = \sum_{\mu=0}^n z_1^{-n+2\mu} = \frac{1}{z_1^n} \sum_{\mu=0}^n z_1^{2\mu}$$

$$= \frac{1}{z_1^n} \cdot \frac{z_1^{2(n+1)} - 1}{z_1^2 - 1} \text{ (geometrische Reihe),}$$

also:

$$(36) \quad \frac{z_1^{n+1} \left( z_1^{n+1} - \frac{1}{z_1^{n+1}} \right)}{z_1^{n+1} \left( z_1 - \frac{1}{z_1} \right)} = \frac{\sin(n+1)\gamma}{\sin \gamma} = p_n,$$

daher schließlich:

$$(37) \quad p_{n-1} = \frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma} = \Re\{h(z)\}_{z=0}.$$

Mithin beträgt nach Gl. (33), (34) und (37) der Wert von:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{(z-z_1)(z-z_2)} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2} + \frac{1}{2(z_1-z_2)} \left( \frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_2^n} \right) + p_{n-1} = \frac{1}{2(z_1-z_2)} \left( z_1^n - \frac{1}{z_2^n} - z_2^n + \frac{1}{z_1^n} \right) + p_{n-1} = 0 \text{ wegen } z_2 = \frac{1}{z_1},$$

so daß man erhält:

$$(38) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{(z-z_1)(z-z_2)} \cdot dz = p_{n-1} = \frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma}.$$

Nach diesen Zwischenrechnungen liefert Gl. (26):

$$f(x) = \frac{1}{2ia} \oint \frac{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right)}{(z-z_1)(z-z_2)} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2ia} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma},$$

also:

$$(39) \quad f(x) = f\left(a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma}.$$

Somit ist die Entwicklung für  $f(x)$  zur Bestimmung der unbekanntenen  $C_n$  gefunden.

In unserm Falle ist

$$(40) \quad f(x) = \text{konst} = -k;$$

die ganze Entwicklung besteht daher nur aus dem ersten Glied mit  $n=1$ . Man erhält dann aus Gl. (39):

$$-k = \frac{\pi}{a} \cdot C_1 \quad C_1 = -\frac{ak}{\pi}$$

$$\text{und} \quad p(a \cdot \sin \gamma) \cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos n\gamma = \frac{1}{2} \cdot C_0 + C_1 \cdot \cos \gamma,$$

$$\text{d. h. mit} \quad \psi = 2\gamma \quad \text{und} \quad \cos 2\gamma = 2 \cdot \cos^2 \gamma - 1$$

folglich:

$$p \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot C_0 - \frac{ak}{\pi} (2 \cdot \cos^2 \gamma - 1),$$

$$\left( \frac{1}{2} \cdot C_0 + \frac{ak}{\pi} \right) - \cos \gamma \left( p + \frac{2ak}{\pi} \cdot \cos \gamma \right) = 0.$$

Da diese Gleichung für alle  $\gamma$  gilt und rechter Hand Null steht, so muß sein:

$$\frac{1}{2} \cdot C_0 + \frac{ak}{\pi} = 0 \quad C_0 = -\frac{2ak}{\pi}$$

und ferner:

$$p(a \cdot \sin \gamma) = -\frac{2ak}{\pi} \cdot \cos \gamma$$

oder mit

$$\xi = a \cdot \sin \gamma \quad \text{also:} \quad \cos \gamma = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2}$$

$$(41) \quad p(\xi) = -\frac{2k}{\pi} \sqrt{a^2 - \xi^2}.$$

Mit diesem Ergebnis ist die Lösung der Integralgleichung (23) gefunden und damit zugleich die gesuchte Druckspannungsverteilung  $p(\xi)$  bekannt. Es ist noch zweckmäßig, die bei  $\xi=0$  sich ergebende größte Druckspannung  $p(0)=p_0$  in Gl. (41) einzuführen:

$$(42) \quad p(0) = p_0 = \frac{2ka}{\pi}$$

und somit

$$(43) \quad p(\xi) = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2}.$$

Die Lösung (43) liefert also das Ergebnis, daß sich der Druck nach einem Halbkreis über der Drucklinie verteilt.

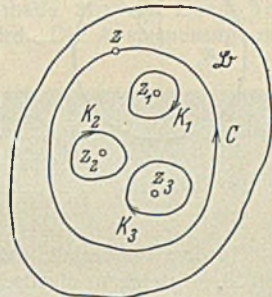


Bild 17.



Durch Gl. (24) ist nun auch der Zusammenhang zwischen  $p_0$  und der Gesamtdrucklast  $P$  gegeben: ( $\xi = a \cdot \sin \varphi$ ),

$$P = l \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} p(\xi) d\xi = \frac{l p_0}{a} \int_{\xi=-a}^{\xi=+a} \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi = l p_0 a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = l p_0 a \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$(A) \quad P = l p_0 a \cdot \frac{\pi}{2}$$

während die Beziehung (42) der auftretenden größten Druckspannung  $p_0$  zu den anderen physikalischen und geometrischen Größen des behandelten Problems, wie den Radien und den Werkstoffkonstanten der beiden Walzen sowie der Abmessung  $2a$  des Druckbereiches, sich aus dem methodischen Lösungsgang der für  $p(\xi)$  aufgestellten Bestimmungsgleichung (23) ergeben hat zu

$$(B) \quad p_0 = \frac{2ka}{\pi} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}$$

Bemerkung: Nimmt man hingegen die halbkreisförmige Verteilung der Druckspannung über der Drucklinie als bekannt an und setzt die Lösung (43) in die ursprüngliche Bestimmungsgleichung (23) für  $p(\xi)$  ein, dann wird aus dieser Integralgleichung (23) eine Gleichung, in der auf der rechten Seite einfach ein bestimmtes (uneigentliches) Integral einer nun bekannten zu integrierenden Funktion steht

$$(44) \quad \frac{p_0}{a} \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{x^2 - \xi^2} \cdot d\xi = -k.$$

Man erhält für

$$\int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{x^2 - \xi^2} \cdot d\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{a^2 - \xi^2}{(x^2 - \xi^2)\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot d\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{a^2 - x^2 + x^2 - \xi^2}{(x^2 - \xi^2)\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot d\xi$$

$$= (a^2 - x^2) \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{d\xi}{(x^2 - \xi^2)\sqrt{a^2 - \xi^2}} + \int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$$

Nun ist:

$$\int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \left[ \arcsin \frac{\xi}{a} \right]_{\xi=0}^{\xi=a} = \pm \frac{\pi}{2},$$

während das Integral  $\int_{\xi=0}^{\xi=a} \frac{d\xi}{(x^2 - \xi^2)\sqrt{a^2 - \xi^2}}$  für Werte  $x < a$  Null ergibt<sup>10)</sup>.

Setzt man nun das Ergebnis der Integration in Gl. (44) ein, so erhält man — und diesen Weg geht L. Föppl auf S. 169 in seiner Arbeit — ebenfalls die Beziehung (42) zwischen  $k$  und der größten Druckspannung  $p_0$ .

Löst man Gl. (A) u. (B) nach der halben Druckbreite  $a$  und der größten Druckspannung  $p_0$  auf, dann erhält man die Hertz'schen Gleichungen in der Form:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= 2 \sqrt{\frac{P}{l\pi} \cdot \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} \\ \text{und} \\ p_0 &= \sqrt{\frac{P}{l\pi} \cdot \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}} \end{aligned} \right.$$

<sup>10)</sup> Mit Hilfe der Substitutionen  $\frac{x}{a} = y = \cos \chi$  und  $\frac{\xi}{a} = u = \cos \psi$  läßt es sich durch eine leichte Zwischenrechnung bis auf einen konstanten Faktor auf die Form bringen:

$$\int_{\psi=-\pi}^{\psi=+\pi} \frac{d\psi}{\cos \psi - \cos \chi},$$

und dann weiter durch Einführung des Komplexen:  $\cos \psi = \frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi})$   $= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  und  $dz = iz d\psi$  auf das folgende Integral zurückführen:

$$J_1 = \oint \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

welches nach Gl. (32) den Wert Null besitzt.

Wie schon anfangs erwähnt, hat Prof. Föppl seinen Rechnungen den ebenen Spannungszustand zugrunde gelegt, der für das behandelte Walzenproblem ebenfalls nur angenähert zutrifft und streng nur für die Zylindermittellebene richtig ist. Es sei in diesem Zusammenhang noch die Bemerkung hinzugefügt, daß den Ausgangsgleichungen jedoch eine strenge Gültigkeit zukommt, wenn man unter den eingeführten Größen ihre Mittelwerte, genommen über die Walzenlänge versteht (s. z. B. Love-Timpe 1907, S. 162 u. § 146).

Die Zugrundelegung des ebenen Spannungszustandes hat für die hier angestellten Rechnungen nur zur Folge, daß dann in den Endformeln für  $a$  und  $p_0$  bloß  $E_1$  an Stelle von  $\frac{E_1}{1-\nu_1^2}$ , entsprechend  $E_2$  an Stelle von  $\frac{E_2}{1-\nu_2^2}$  steht. Ferner sei noch bemerkt, daß in seiner Arbeit mit  $P$  schon der auf die Längeneinheit der Walze wirkende Druck (kg/cm) bezeichnet ist.

Wenn z. B. der Radius der einen Walze  $W_2$  über alle Grenzen groß ist, dann liegt der Fall der Berührung einer Walze mit einer ebenen Platte vor (Bild 18); in den Hertz'schen Gl. (45) ist dann  $\frac{1}{r_2} = 0$ .

Ferner behalten die obigen Formeln (45) ihre Gültigkeit, wenn Teile der beiden Zylinderflächen sich von innen berühren ( $r_1$  größer  $r_2$ ; Bild 19); an Stelle der positiven Krümmung  $+\frac{1}{r_1}$  tritt dann  $-\frac{1}{r_1}$ .

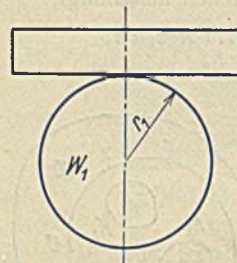


Bild 18.

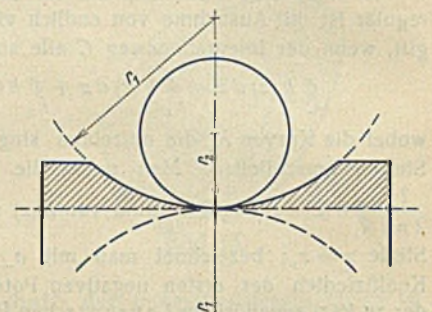


Bild 19.

Im dem Sonderfall, daß die beiden Walzen aus demselben Werkstoff mit den gleichen elastischen Konstanten  $E$  und  $\nu$  bestehen, ergibt sich nach Gl. (45):

$$a = 2 \sqrt{\frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \sqrt{\frac{P}{lE} \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}}$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$$

oder mit  $\nu = 0,3$ :

$$(46) \quad a = 1,52 \sqrt{\frac{P}{lE} \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

$$(47) \quad p_0 = 0,418 \sqrt{\frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$$

Mit diesen Zahlen bilden die beiden letzten Formeln (46) u. (47) z. B. den Ausgangspunkt zur Aufstellung der Bemessungsregeln für Rollenlager stählerner Brücken.

Zum Schluß sei noch auf einige Arbeiten hingewiesen, die sich mit der Nachprüfung der Hertz'schen Formeln für die Walze durch Versuche befassen und auch noch den Spannungszustand nicht nur in der Druckfläche selbst, sondern auch im Innern der Körper untersuchen:

S. Rajnfeld, Die spannungsoptische Untersuchung der Berührung zweier Kreiszylinder. Schweiz. Bauztg. 1934, Nr. 9, S. 96;

L. Föppl, Der Spannungszustand und die Anstrengung des Werkstoffes bei Berührung zweier Körper. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, September/Oktober-Heft 1936, S. 209 ff.

INHALT: Theorie der einseitig angeordneten Stegblechsteife. — Ableitung der Hertz'schen Härteformeln für die Walze. (Schluß.)

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.

Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 63.