

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Fernsprecher: 87 7421
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

11. Jahrgang

BERLIN, 18. Februar 1938

Heft 4

Alle Rechte vorbehalten.

Zentrischer und exzentrischer Druck

von an beiden Enden gelenkig gelagerten Rechteckstäben aus Avional *M* und Baustahl.

(Vergleich der Theorien von Roß-Brunner, Hartmann und Chwalla mit durchgeführten Versuchen.)

Von Dr. sc. techn. Curt F. Kollbrunner, Ingenieur, Zürich.

A. Einleitung.

Das Problem der Stabilitätsgrenze eines zentrisch gedrückten geraden Stabes wurde schon durch Engeßer-Jasinski-Kármán gelöst¹⁾. Der ungleich schwierigere Fall des Gleichgewichtsproblems exzentrisch gedrückter Stäbe erfuhr erst in den letzten zehn Jahren eine eingehende Behandlung. Roß-Brunner²⁾ gelang es zum ersten Male, ein übersichtliches Verfahren (das TKVSB-Verfahren) zur ingenieurmäßigen Berechnung exzentrisch gedrückter Stäbe zu entwickeln. Um die Lösungen zu vereinfachen, wurden die Gleichgewichtsfiguren des exzentrisch gedrückten Stabes durch Sinushalbwellen ersetzt und für die Spannungsverteilung auf der Biegezugseite die Entlastungsgerade angenommen. Hartmann³⁾

verbesserte das Näherungsverfahren von Roß-Brunner, indem er an Stelle der ganzen Sinushalbwellen nur den dem entsprechenden exzentrischen Kraftangriff zugeordneten Ast der Sinuslinie als Gleichgewichtsfigur einführte und auf der Biegezugseite keine Entlastung annahm. Westergaard-Osgood⁴⁾ und Chwalla⁵⁾ untersuchten das Gleichgewichtsproblem des exzentrisch gedrückten Stabes unabhängig von den Arbeiten Roß-Brunners; erstere setzten gleichfalls sinusförmige Gleichgewichtsfiguren voraus und legten ihren Untersuchungen eine Formänderungskurve zugrunde, die auf der Druckseite aus vier Geraden und einer Parabel und auf der Zugseite aus zwei Geraden zusammengesetzt ist. Chwalla berücksichtigte die genaue Form der sich einstellenden Gleich-

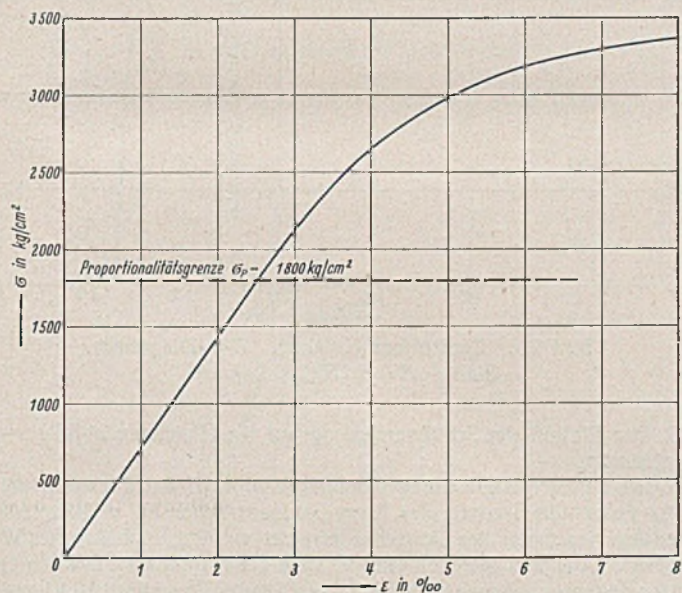


Bild 1a. Spannungs-Verkürzungs-Diagramm.
Avional *M*. $E = 715\,000 \text{ kg/cm}^2$.

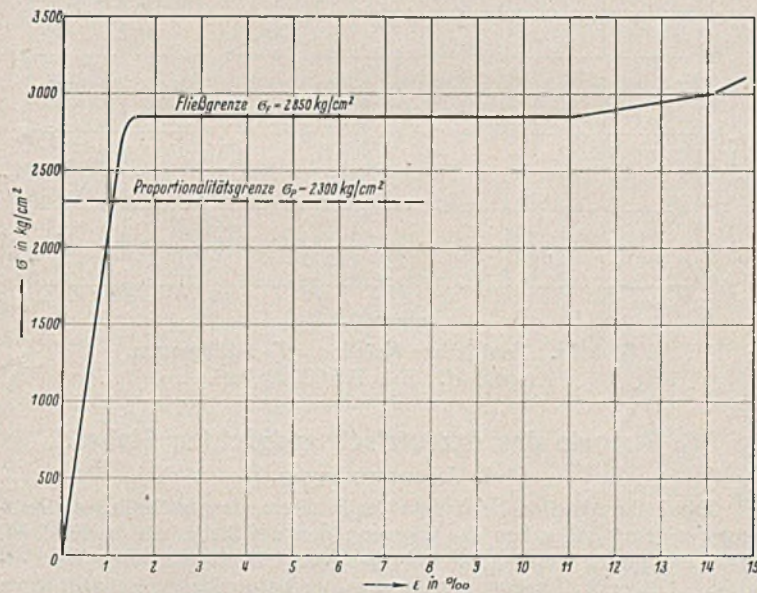


Bild 1b. Spannungs-Verkürzungs-Diagramm.
Stahl. $E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2$.

¹⁾ F. Engeßer, Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1889, S. 455. — Ders., Knickfragen. Schweiz. Bauztg. 1895, Bd. 26, S. 24. — F. Jasinski, Zu den Knickfragen. Schweiz. Bauztg. 1895, Bd. 25, S. 172. — Th. von Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Forschungsheft auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Z.d.VdI 1910, Nr. 81.

²⁾ M. Roß u. J. Brunner, Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Bericht Nr. 13 der EMPA und der Gruppe VI der TKVSB, Zürich, August 1926. — M. Roß, Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für technische Mechanik in Zürich, 1926. — Ders., Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung. Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien 1928. S. 282. — Ders., La stabilité des barres comprimées par des forces excentrées. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Erster Kongreß, Paris 1932, Vorbericht, S. 57.

³⁾ F. Hartmann, Der einseitige (exzentrische) Druck bei Stäben aus Baustahl. Z. d. ÖIAV. 1933, Heft 11/12, S. 65. — Ders., Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Erster Kongreß, Paris 1932. Schlußbericht, S. 40.

gewichtsfiguren, so daß seine Ergebnisse strenge Lösungen des Gleichgewichtsproblems exzentrisch gedrückter Stäbe darstellen.

Die vorliegenden Ausführungen zeigen die Berechnung nach den drei Theorien Roß-Brunner, Hartmann und Chwalla, stellen die erhaltenen Ergebnisse einander gegenüber und vergleichen sie mit den im Institut für Baustatik an der Eidgen. Techn. Hochschule (Abt. Prof. Dr.-Ing. L. Karner) durchgeführten Versuchen. Untersucht wird nur der exzentrische Kraftangriff mit Knickrichtung in der Kraftebene.

⁴⁾ H. M. Westergaard u. M. R. Osgood, Strength of Steel Columns. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. 1927/28, 49/50, APM — 50 — 9.

⁵⁾ E. Chwalla, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa. Juli 1928, S. 469. — Ders., Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien 1928. S. 608. — Ders., Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Erster Kongreß, Paris 1932. Schlußbericht, S. 53. — Ders., Über die experimentelle Untersuchung des Tragverhaltens gedrückter Stäbe aus Baustahl. Stahlbau 1934, Heft 3, S. 17. — Ders., Theorie des außermittig gedrückten Stabes aus Baustahl. Stahlbau 1934, Heft 21, 22 u. 23, S. 161.

Sämtliche Untersuchungen beziehen sich auf die in Bild 1a u. b dargestellten Spannungs-Verkürzungs-Diagramme. (Die Diagramme wurden nur so weit bestimmt, wie sie für die ausgeführten Versuche notwendig waren.)

B. Zentrisches Knicken.

Die Eulersche Knickformel für beiderseitig gelenkig gelagerte Stäbe

$$P_k = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot EJ$$

geht nach Engeßer-Jasinski-Kármán in die auch oberhalb der Proportionalitätsgrenze gültige Formel

$$P_k = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot TJ$$

über. Dabei wird der Knickmodul T für Rechteckquerschnitte

$$T = \frac{4E}{\left(1 + \sqrt{\frac{E}{E'}}\right)^2}$$

E Elastizitätsmodul,

$E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ veränderlicher Elastizitätsmodul im Bereich der bleibenden Formänderungen,

T Knickmodul,

J Trägheitsmoment in der Knickrichtung = J_{\min} ,

l Stablänge.

Die Knickmodul T für Avional M und Baustahl sind in Bild 2a u. b in Funktion von σ dargestellt. Die Knickspannungen

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \pi^2 \cdot \frac{T}{l^2} \left(\lambda = \frac{l}{i}\right)$$

sind in den σ_k - λ -Diagrammen eingetragen ($m = 0$).

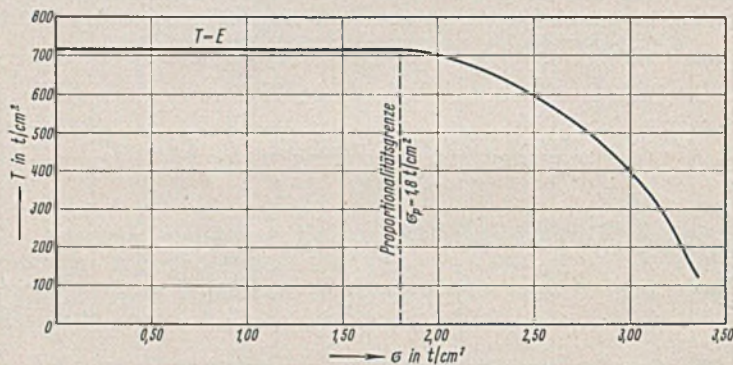


Bild 2a. Zentrisches Knicken. T - σ -Diagramm.
Avional M . $E = 715\,000 \text{ kg/cm}^2$.

Spannungszustandes eine Erhöhung der Fließgrenze ein⁶⁾. Sie ist sicherlich erheblich geringer als im Falle reiner Biegung, da die Inhomogenität des Spannungszustandes durch die gleichmäßig verteilte Grundspannung σ_s stark gemildert wird. Bei den ausgeführten Versuchen wurde auf diese Erscheinung nicht eingetreten, sondern das aus dem einachsigen Druckversuch verwendete Spannungs-Verkürzungs-Diagramm verwendet.

E. Chwalla legte seiner Theorie die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

1. Die Querschnitte bleiben eben und senkrecht auf der Achse. (Hypothese von J. Bernoulli.)

2. Die Querschnittsfigur erfährt während der Belastung des Stabes keine merkbare Veränderung. (Diese Voraussetzung ist bei Stäben mit Vollquerschnitten praktisch immer erfüllt.)

3. In jenen Stabfasern, in denen die spezifische Längenänderung monoton anwächst, gehorchen die Faserspannungen dem „zugrunde gelegten“ Formänderungsgesetz.

4. In jenen Fasern, in denen die spezifische Längenänderung nach Erreichen eines endlich großen Wertes einen Abbau erfährt, gilt das lineare Formänderungsgesetz der Entlastung. [Chwalla beschränkte sich

in der Folge darauf, die Fälle $\frac{p}{k} \geq \frac{1}{8}$, bei denen das Entlastungsgesetz im untersuchten Belastungsfall (Druckkraft wächst in ihrer exzentrischen Lage von Null an) praktisch nicht mehr zur Geltung kommt, zu untersuchen; d. h. für alle Grundspannungen σ_s folgen die Spannungen auf der Biegezugseite dem „zugrunde gelegten“ Formänderungsgesetz.]

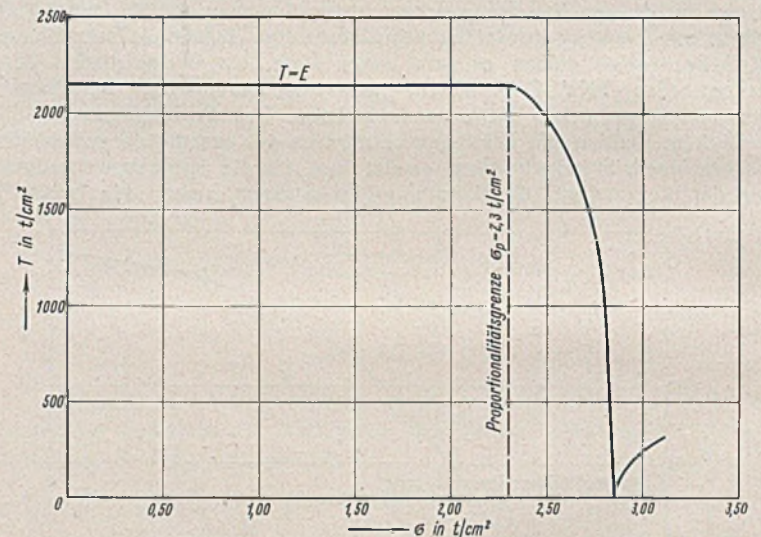


Bild 2b. Zentrisches Knicken. T - σ -Diagramm.
Stahl. $E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2$.

C. Theorie des exzentrisch gedrückten Stabes.

I. Voraussetzungen.

Zahlreiche Arbeiten behandeln das Problem als gewöhnliches „Spannungsproblem“ und sehen das Tragvermögen des Stabes als erschöpft an, wenn die größte auftretende Randspannung einen bestimmten Wert erreicht. Dieser Auffassung stehen die hier besprochenen Behandlungen des Problems als „Gleichgewichtsproblem“ gegenüber, wobei das Gleichgewicht — das in den einzelnen Stabquerschnitten zwischen dem äußeren Moment (Moment der angreifenden Kräfte) und dem inneren aufrichtenden Moment (Spannungsmoment) besteht — für ein bestimmtes Formänderungsgesetz ziffernmäßig erfaßt werden kann. Unter der wachsenden Belastung bildet sich ein theoretisch genau bestimmbarer „kritischer“ Gleichgewichtszustand aus, in welchem der in der Wirkungslinie der Druckkraft gemessene Stabwiderstand seinen Höchstwert erreicht. Ihm unmittelbar benachbart ist ein instabiler, den „Zusammenbruch“ des Stabes einleitender Zustand. Der Gleichgewichtswechsel ist durch das „zugrunde gelegte“ Formänderungsgesetz des betreffenden Baustoffes und die dadurch bestimmte Normalspannungsverteilung bedingt.

Es gibt kritische Gleichgewichtszustände, in denen die maximale Randspannung nur wenig, als auch solche, in denen sie bedeutend oberhalb der Proportionalitätsgrenze liegt; sie liegt jedoch immer oberhalb der Proportionalitätsgrenze.

Das „zugrunde gelegte“ Formänderungsgesetz ist bei Stäben mit dünnwandigen Querschnitten mit dem aus dem einachsigen Zug- und Druckversuch ermittelten Formänderungsgesetz identisch. Bei Stäben mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt (d. h. bei Stäben mit relativ großer Masse um die neutrale Achse) tritt Infolge des inhomogenen

5. Der Einfluß der Schubverzerrung auf die Gleichgewichtsfigur wird vernachlässigt.

6. Die Differentialgleichung der Biegelinie wird mit Rücksicht darauf, daß die gesuchten Grenzen des Tragvermögens schon bei verhältnismäßig kleinen Ausbiegungen der Stabachse erreicht werden, in bekannter Weise linearisiert. Aus dem gleichen Grunde wird die Normalkraft in allen Querschnitten des ausgebogenen Stabes der angreifenden Druckkraft gleichgesetzt.

F. Hartmann legte seiner Theorie die gleichen Voraussetzungen wie Chwalla zugrunde, begnügte sich jedoch mit einer nur näherungsweise Ermittlung der Grundkurvenlängen, indem er sie durch Sinushalbwellen ersetzte. (Biegelinie des Stabes = Ast einer Sinuslinie.)

Ros-Brunner leiteten ihre Theorie unter folgenden Vereinfachungen ab:

1. Biegelinie des Stabes = Sinushalbwellen.

2. Entlastung der gedrückten Fasern folgt dem E -Gesetz. (Die Spannungen auf der Biegezugseite folgen der Entlastungsgeraden.)

Im übrigen gelten die Voraussetzungen Chwallas.

⁶⁾ O. Eiselin, Untersuchungen am einfach gelochten Zugstab. (Ein Beitrag zum Problem der Spannungsstörungen in Eisenbauten.) Bauing. 1924, Heft 8, S. 247; Heft 9, S. 281. — O. Bierett, Ein Beitrag zur Frage der Spannungsstörungen in Bolzenverbindungen. (Experimentelle Untersuchung eines Augenstabes.) Mitteilungen der deutschen Materialprüfungsanstalten, Sonderheft XV, 1931. — A. Thum u. F. Wunderlich, Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1932, Nr. 6, S. 261. — W. Prager, Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933, Nr. 2, S. 95. — E. Chwalla, Über die Erhöhung der Fließgrenze in prismatischen Balken aus Baustahl. Stahlbau 1933, Heft 19/20. — W. Kuntze, Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Stahlbau 1933, Heft 7.

II. Theorie des exzentrisch gedrückten Stabes nach Roß-Brunner.

1. Bestimmung der inneren Momente M_i für verschiedene willkürlich angenommene Werte der Summe der Randfaserdehnungen Δ .

Für eine bestimmte Grundspannung $\sigma_s = \frac{P_k}{F}$ werden für verschiedene endliche Werte der Summe der Randfaserdehnungen Δ (praktisch für verschiedene σ_{R_i}) an Hand des Druck-Verkürzungs-Diagramms die inneren Momente M_i bestimmt.

a) Annahme der Grundspannung σ_s . [Für die weitere Berechnung (b bis d) bleibt diese angenommene Grundspannung konstant; sie wird erst variiert, wenn die M_i -Kurve (M_i - Δ -Diagramm) bestimmt ist.]

b) Annahme der inneren Randspannung σ_{R_i} in Stabmitte (= max. Druckspannung). Durch geeignete Wahl von σ_{R_i} (z. B. von 100 kg/cm² zu 100 kg/cm²) kann man später im M_i - Δ -Diagramm die Randspannungskurven ohne Interpolation sofort einzeichnen.

c) Zu den gewählten σ_{R_i} bestimmt man das zugehörige ϵ_i und F_i (Bild 3). Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\int_F \sigma_b dF = 0$$

folgt

$$F_i = F_a$$

ϵ_a ist so zu wählen, daß diese Bedingung erfüllt ist⁷⁾.

Das Spannungsbild ($F_i = F_a$) ist nun über der gegebenen Querschnittshöhe h affin abzubilden, indem die Ordinaten unverändert gelassen und die Abszissen im Verhältnis $\frac{h}{\Delta}$ verkleinert werden. Die Resultierenden der Biegedruck- und Biegezugspannungen (S) betragen dann im Stab von der Breite $b = 1$ cm

$$S = F \cdot \frac{h}{\Delta}$$

d) Bestimmung des inneren Momentes M_i .

$$M_i = S a^*$$

$$(a^* = a \cdot \frac{h}{\Delta}, \text{ Schwerpunktabstand der Flächen } F_i \text{ und } F_a)$$

M_i wird für verschiedene σ_{R_i} im M_i - Δ -Diagramm aufgetragen.

Gewählte Grundspannungen bei Avional M:

$\sigma_s = 0, 300, 600, 900, 1200, 1500, 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 3100, 3200, 3300$ kg/cm².

Gewählte Grundspannungen bei Baustahl:

$\sigma_s = 0, 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2300, 2600, 2750$ kg/cm².

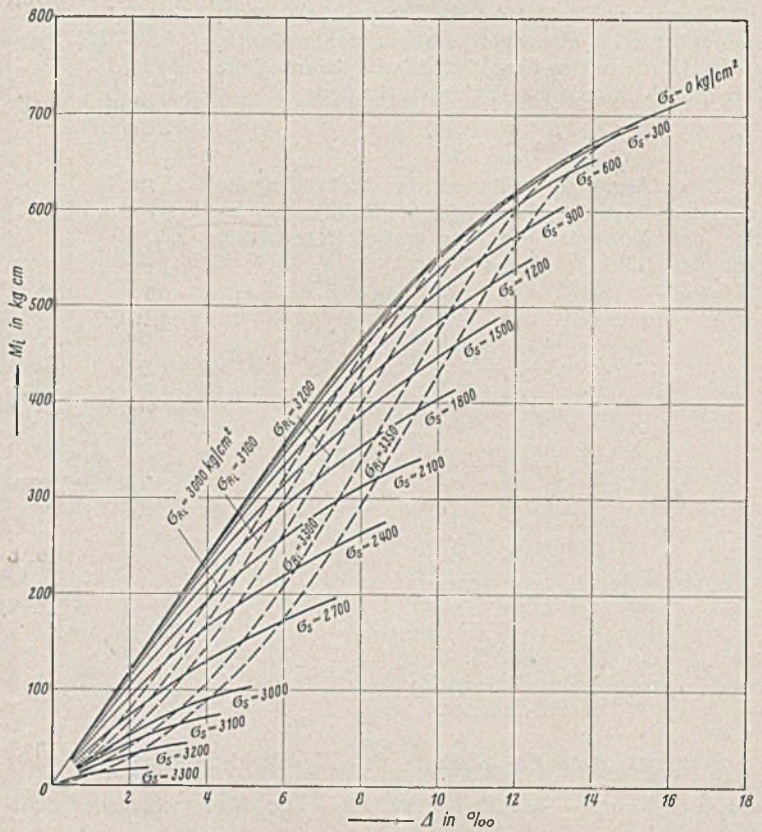


Bild 4a. Exzentrischer Druck. M_i - Δ -Diagramm (Roß-Brunner). Avional M. $E = 715\,000$ kg/cm².

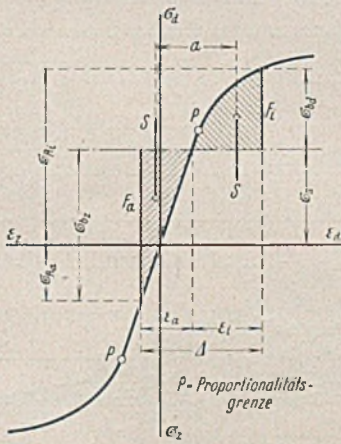


Bild 3. Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

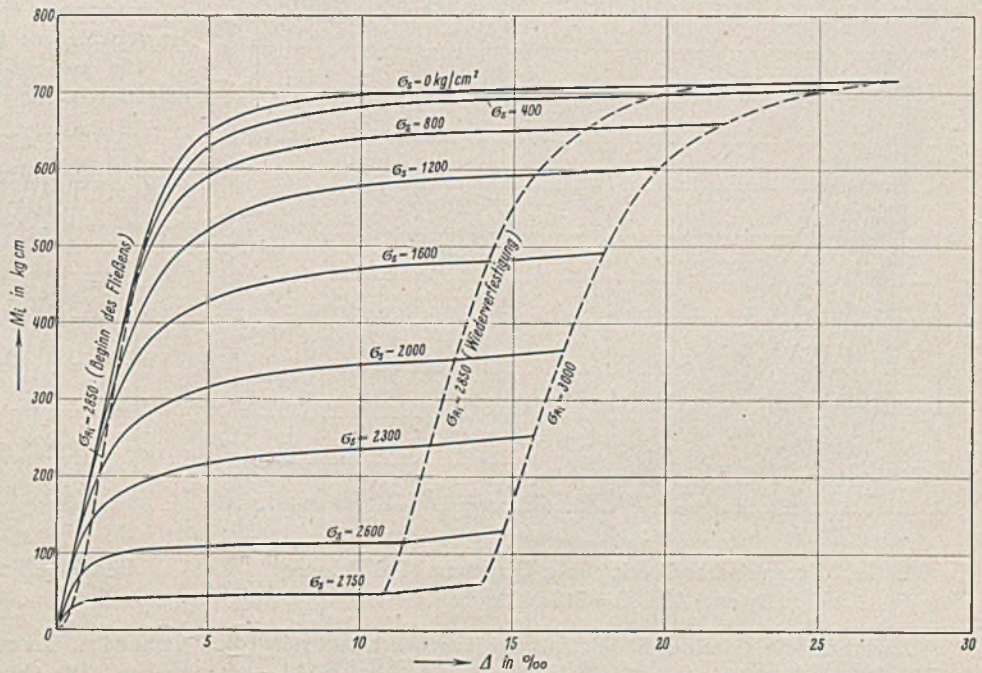


Bild 4b. Exzentrischer Druck. M_i - Δ -Diagramm (Roß-Brunner). Stahl. $E = 2\,150\,000$ kg/cm².

e) Nun wird für eine andere Grundspannung σ_s die Rechnung (a bis d) wiederholt. Die gleichen Randspannungen entsprechenden Punkte im M_i - Δ -Diagramm werden miteinander verbunden; so erhält man die max. Randspannungskurven σ_{R_i} (Bild 4a u. b).

7) Solange die Biegezugspannungen σ_{R_a} die Proportionalitätsgrenze P überschreiten, wird dies praktisch am leichtesten durch graphische Darstellung ermöglicht, indem die den Dehnungen ϵ_a entsprechenden Flächen F_a in einem Dehnungs-Flächen-Diagramm aufgetragen werden.

Roß-Brunner nehmen an, daß die Spannungsverteilung auf der Biegezugseite der Entlastungsgeraden folge. Dies trifft genau zu für den Fall, daß die Grundspannung die Proportionalitätsgrenze nicht überschreitet oder, bei Überschreitung der Proportionalitätsgrenze, wenn zuerst die volle Längskraft auftritt und erst nachher das der Exzentrizität des Kraftangriffs entsprechende Moment dazukommt. Wenn hingegen, wie in den praktisch wichtigen Fällen, die exzentrisch wirkende Längskraft allmählich auf den Höchstwert anwächst, gilt dies als Annäherung.

2. Bestimmung der maximal möglichen Exzentrizität p , für welche bei gewählter Grundspannung σ_s und gewählter Schlankheit λ noch Gleichgewicht möglich ist.

Damit Gleichgewicht herrscht, muß in jedem Zeitpunkt dem äußeren Moment M_a das innere Moment M_i entgegenwirken. $M_a = M_i$. Erst wenn das innere Moment nicht mehr rascher oder gleich rasch wie das äußere zunehmen kann, ist die Tragkraft erschöpft, d. h. es ist keine Gleichgewichtsform mehr möglich.

Die Durchbiegung f in Stabmitte wird bei Annahme einer Sinushalbwellen als Gleichgewichtsfigur

$$(1) \quad f = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Delta}{h}$$

[Diese Annahme ergibt an den Stabenden die Krümmung 0, währenddem sie in Wirklichkeit, infolge des Momentes Pp , bei großer Exzentrizität recht beträchtlich sein kann (Bild 5).]

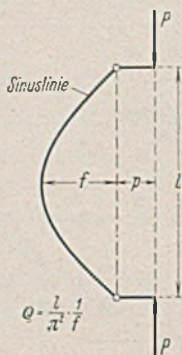


Bild 5. Biegelinie nach Roß-Brunner.

Bestimmt man die Strahlen der M_a -Strahlenbüschel ($M_a = Pf = \sigma_s \cdot h \cdot l \cdot f = \sigma_s \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \Delta$, für die Breite $b = 1$ cm) für verschiedene Grundspannungen σ_s und zieht entsprechend den Strahlenbüscheln an die M_i -Kurven Tangenten, so geben die so bestimmten Berührungspunkte die Gleichheit der Momente der äußeren exzentrisch wirkenden Kraft $P = \sigma_s \cdot h \cdot l$ und des inneren aufrichtenden Momentes M_i (Bild 6).

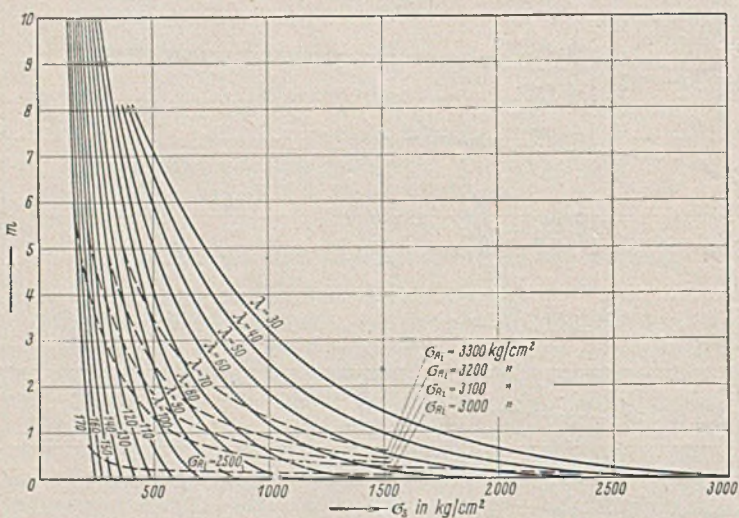


Bild 7a. Exzentrischer Druck. m - σ_s -Diagramm (Roß-Brunner). Avional M. $E = 715\,000$ kg/cm².

⁸⁾ λ wird für die einzelnen Strahlenbüschel jeweils konstant gehalten, da man auf diese Weise zur Aufzeichnung der TKVSB-Kurven (σ_k - λ -Diagramm) besser interpolieren kann, als wenn man wie Roß-Brunner für eine bestimmte Grundspannung das Strahlenbüschel für verschiedene Schlankheiten aufzeichnet.

Wäre die Exzentrizität für die gewählte Grundspannung und die gewählte Schlankheit (Bild 6, $\sigma_s = 1200$ kg/cm², $\lambda = 60$) kleiner als p , so würde der M_a -Strahl die M_i -Kurve schneiden, d. h. Gleichgewicht wäre selbst für größere Exzentrizitäten noch möglich. Wäre die Exzentrizität größer als p , so würde der M_a -Strahl die M_i -Kurve nicht mehr treffen, Gleichgewicht wäre somit unmöglich. Wenn der M_a -Strahl die M_i -Kurve berührt, erhält man die größte Exzentrizität, bei der das innere Moment M_i dem äußeren Moment M_a gerade noch Gleichgewicht halten kann; für eine unendlich kleine Vergrößerung von p knickt der Stab aus.

Die für eine bestimmte Schlankheit λ und eine bestimmte Grundspannung σ_s sich ergebende maximale Exzentrizität p wird graphisch bestimmt (Bild 6)

$$(2) \quad p = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{\Delta}{h}$$

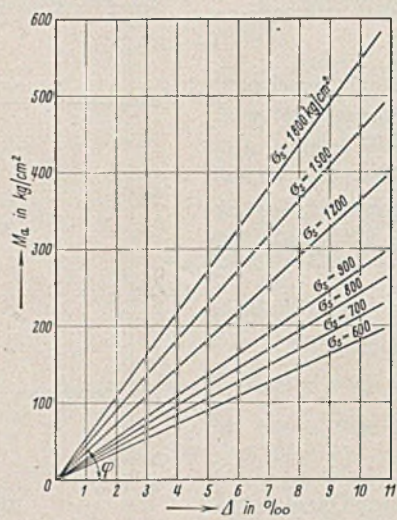


Bild 6a. M_a -Linien für $\lambda = 60$.

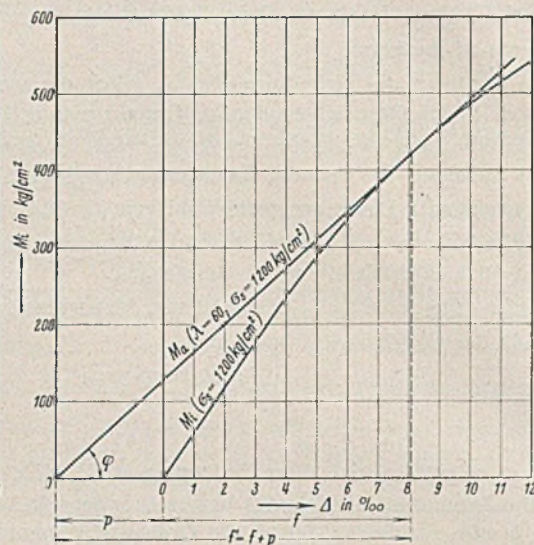


Bild 6b. Exzentrischer Druck. M_a -Tangente an die M_i -Kurve. $\sigma_s = 1200$ kg/cm² (Roß-Brunner). Avional M. $E = 715\,000$ kg/cm².

3. Bestimmung des σ_k - λ -Diagramms (TKVSB-Kurven).

Die Exzentrizität des Kraftangriffs wird durch das Exzentrizitätsmaß $m = \frac{p}{k}$ ausgedrückt ($p =$ Anfangsexzentrizität, $k =$ verschränkt gemessene Kernweite).

Aus der Gleichgewichtsbedingung $M_a = M_i$ erhält man zu bestimmten Schlankheiten λ und bestimmten Grundspannungen σ_s ungerade Werte der Exzentrizitätsmaße m . Um gerade Werte von m zu erhalten, interpoliert man für festgehaltenes λ graphisch und bekommt so die geraden, m zugeordneten Grundspannungen σ_s . [Aufzeichnung des m - σ_s -Diagramms für verschiedene λ (Bild 7a u. b).]

Die so erhaltenen Werte m werden im Koordinatensystem σ_k - λ eingetragen und die Punkte gleichen Exzentrizitätsmaßes m miteinander

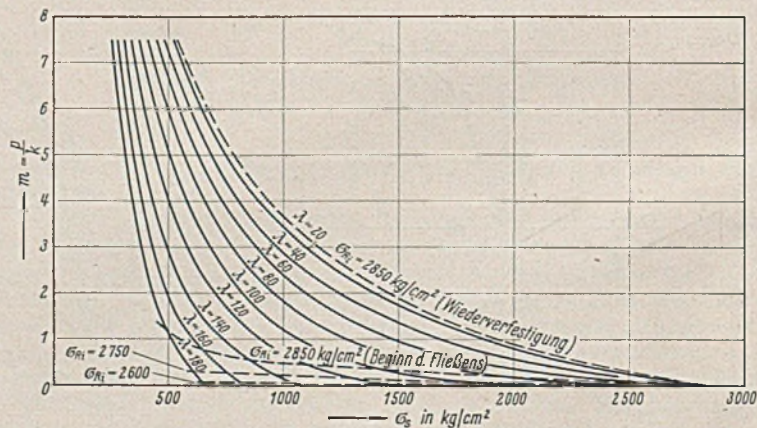


Bild 7b. Exzentrischer Druck. m - σ_s -Diagramm (Roß-Brunner). Stahl. $E = 2\,150\,000$ kg/cm².

verbunden. So erhält man die TKVSB-Kurven (Bild 8a u. b). (σ_k - λ -Diagramm. Die Grundspannung σ_s wird hier als kritische Knickspannung mit σ_k benannt.)

4. Eintragung der Randspannungen.

Damit $M_i = M_a$ ist, wurden an die M_i -Kurven die M_a -Strahlen als Tangenten gelegt. Die Berührungspunkte ergaben für eine bestimmte Grundspannung σ_s und eine bestimmte Schlankheit λ die kritischen inneren Momente $M_{i,kr}$. Im $M_{i,kr}$ - σ_s -Diagramm werden für bestimmte λ die erhaltenen Werte eingetragen (Bild 9a u. b). (Da die M_a -Strahlenbüschel

⁹⁾ Für $m = 0$ treffen die λ -Kurven die Ordinatenachse in den σ_s -Werten des zentrischen Knickens. (Beim zentrischen Knicken ist die Grundspannung gleich der Randspannung.)

jeweils für ein bestimmtes λ aufgezeichnet wurden, entspricht in diesem Diagramm jedem Strahlenbüschel eine λ -Kurve.)

Um in den Berührungspunkten der M_a -Strahlen an die M_i -Kurven die genauen Randspannungen zu kennen, muß graphisch interpoliert werden. Weil zur Eintragung ins σ_k - λ -Diagramm gerade Randspannungen

sprechenden σ_s . Aufgetragen im σ_k - λ -Diagramm ($\sigma_k = \sigma_s$), ergeben sich die Randspannungskurven σ_{Ri}^{10} .

Damit bei Baustahl die σ_{Ri} -Kurve für Beginn der Wiederverfestigung, die keine der in Bild 9b aufgezeichneten λ -Kurven mehr schneidet, bestimmt werden kann, werden die M_i für bestimmte Grundspannungen σ_s

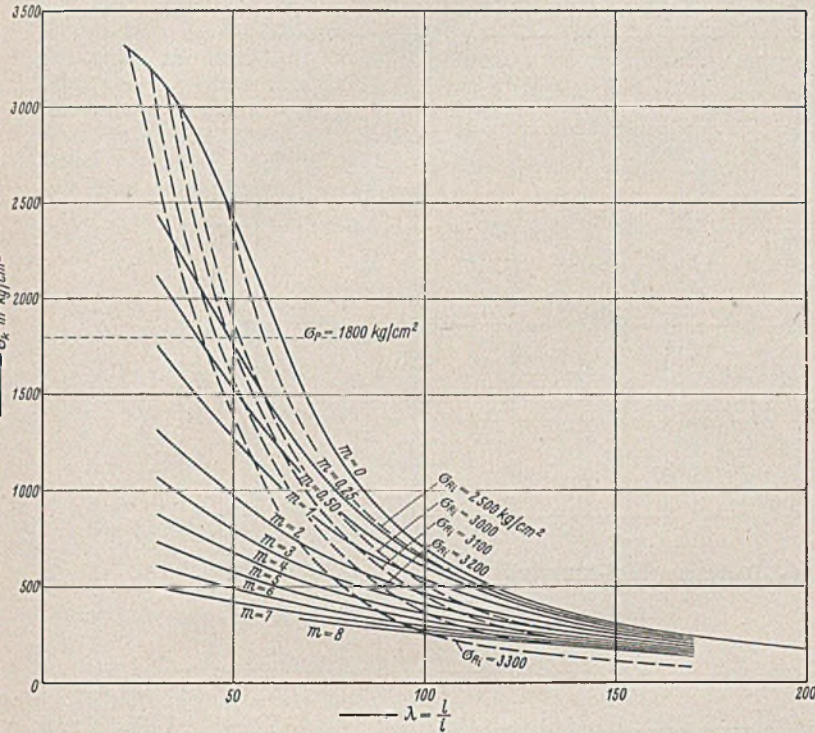


Bild 8a.

Exzentrischer Druck. σ_k - λ -Diagramm (TKVSB-Kurven. Roß-Brunner). Avional M. $E = 715\,000\text{ kg/cm}^2$.

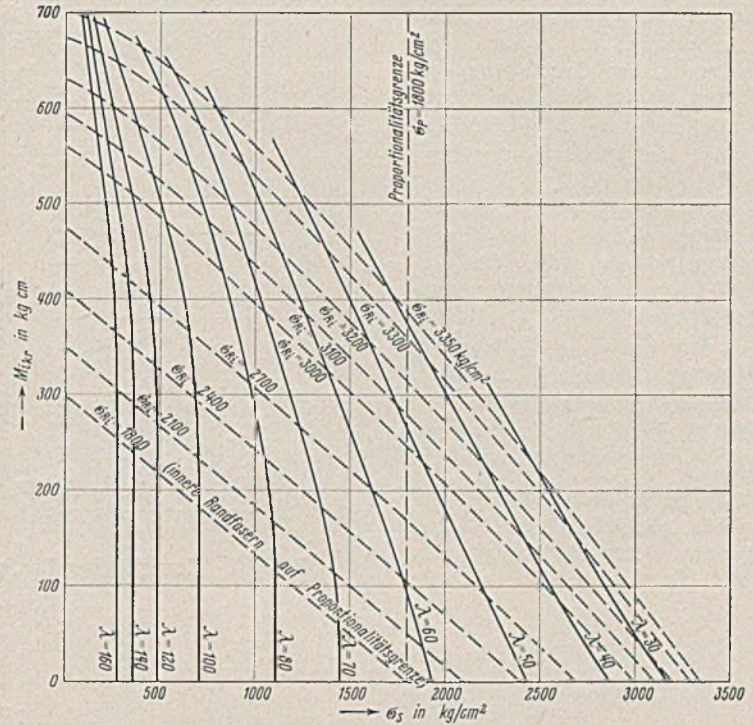


Bild 9a.

Exzentrischer Druck. $M_{i,kr} - \sigma_s$ -Diagramm (Roß-Brunner). Avional M. $E = 715\,000\text{ kg/cm}^2$.

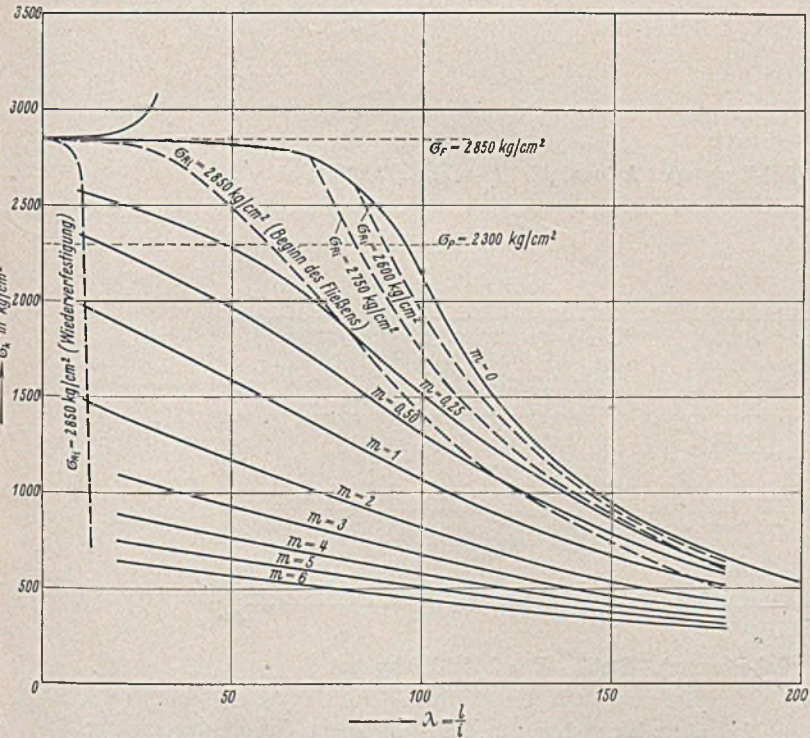


Bild 8b.

Exzentrischer Druck. σ_k - λ -Diagramm (TKVSB-Kurven. Roß-Brunner). Stahl. $E = 2\,150\,000\text{ kg/cm}^2$.

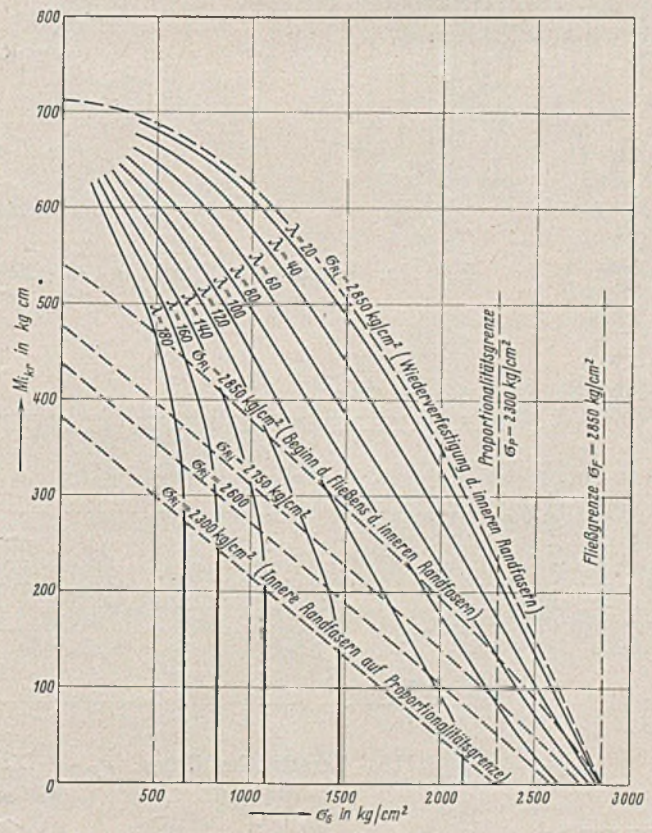


Bild 9b.

Exzentrischer Druck. $M_{i,kr} - \sigma_s$ -Diagramm (Roß-Brunner). Stahl. $E = 2\,150\,000\text{ kg/cm}^2$.

benötigt werden, werden für bestimmte Randspannungen σ_{Ri} die inneren Momente M_i als Funktion der Grundspannung σ_s ins gleiche Diagramm eingetragen. (Aus M_i - λ -Diagramm entnommen.) So erhält man für bestimmte Randspannungen σ_{Ri} und für bestimmte Schlankheiten λ die ent-

¹⁰ Auf der Abszissenachse ($M_i = 0$) befinden sich die Werte für zentrisches Knicken. ($\sigma_s = \sigma_{Ri}$, σ_s zum betreffenden λ aus dem σ_k - λ -Diagramm für $m = 0$ entnommen.)

als Funktion von λ aufgetragen (M_i - λ -Diagramm, Bild 10). Zu gesuchter Randspannung (Beginn der Wiederverfestigung) und einer bestimmten Grundspannung σ_s gehört ein bestimmter Wert des inneren Momentes M_i . Durch Extrapolation, d. h. durch Verlängerung der Grundspannungskurven bis zu diesem Werte M_i erhält man im M_i - λ -Diagramm Punkte der Randspannungskurve bei Beginn der Wiederverfestigung; somit zu bestimmten σ_s die zugehörigen Werte λ dieser Randspannungskurve, die nun im σ_k - λ -Diagramm eingetragen werden können¹¹⁾.

Aus dem σ_k - λ -Diagramm kann man rückwärts ins m - σ_s -Diagramm (Bild 7a u. b) die Kurven für gerade Randspannungen σ_{R_i} eintragen und analog in ein σ_{R_i} - σ_s -Diagramm Kurven für gerade Schlantheiten λ und gerade Exzentrizitätsmaße m (Bild 11a u. b)¹²⁾.

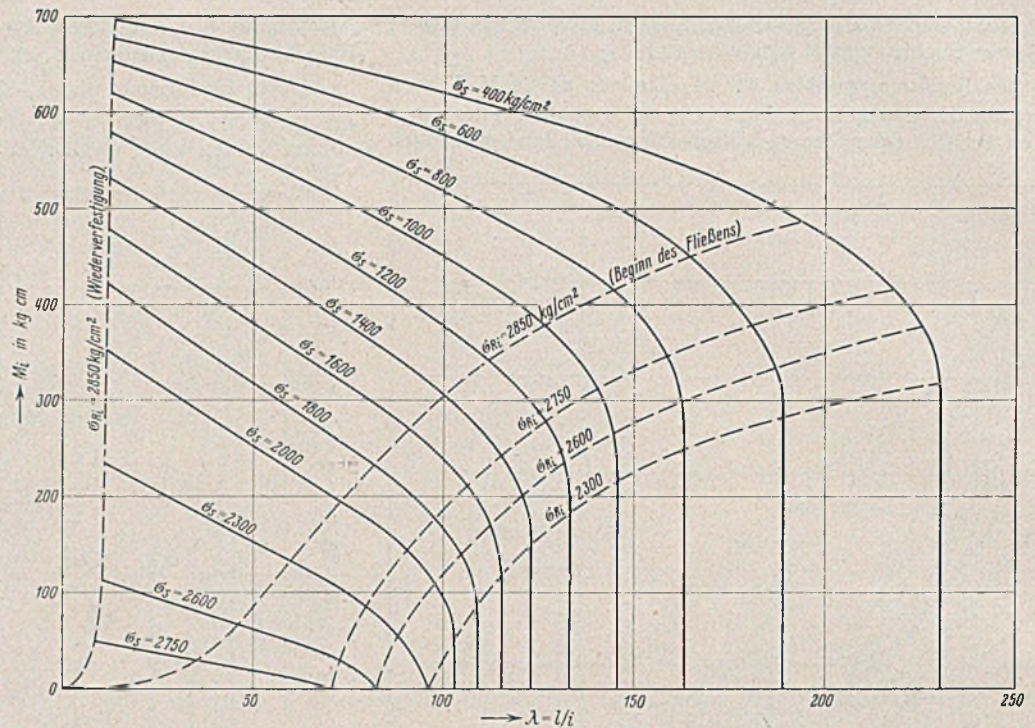


Bild 10. Exzentrischer Druck. M_i - λ -Diagramm (Roß-Brunner). Stahl. $E = 2\,150\,000$ kg/cm².

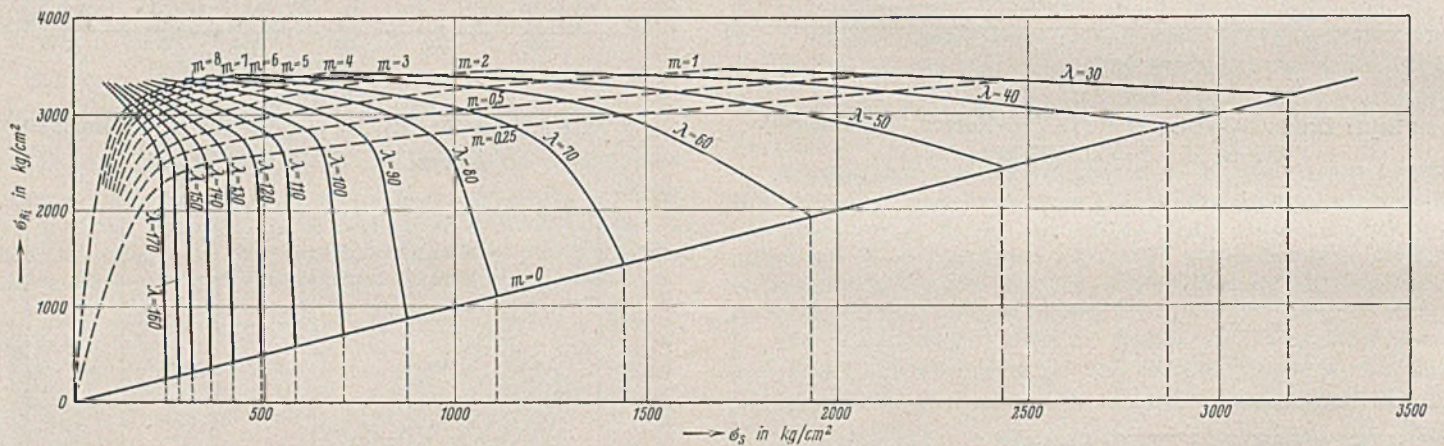


Bild 11a. Exzentrischer Druck. σ_{R_i} - σ_s -Diagramm (Roß-Brunner). Avional M. $E = 715\,000$ kg/cm².

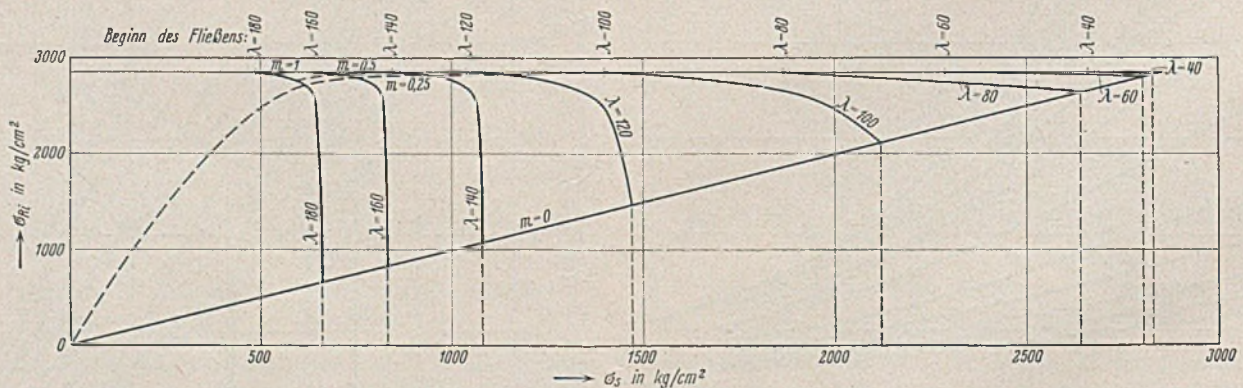


Bild 11b. Exzentrischer Druck. σ_{R_i} - σ_s -Diagramm (Roß-Brunner). Stahl. $E = 2\,150\,000$ kg/cm².

¹¹⁾ Die so erhaltenen Randspannungen im σ_k - λ -Diagramm treffen die $m = 0$ -Kurve in den entsprechenden σ_k -Werten. (Zentrisches Knicken $\sigma_k = \sigma_{R_i}$.)

¹²⁾ Für $m = 0$ werden die $\sigma_{R_i} = \sigma_s$. (Zentrisches Knicken.) Die λ -Kurven endigen auf einer Geraden.

Auf diese Weise hat man drei Diagramme, die die gegenseitige Beziehung der vier Größen $\sigma_s = \sigma_k$, λ , m und σ_{R_i} ausdrücken:

1. σ_k - λ -Diagramm (Bild 8a u. b), Kurven für gerade m und gerade σ_{R_i} .
2. m - σ_s -Diagramm (Bild 7a u. b), Kurven für gerade λ und gerade σ_{R_i} .
3. σ_{R_i} - σ_s -Diagramm (Bild 11a u. b), Kurven für gerade λ und gerade m . (Schluß folgt.)

Alle Rechte vorbehalten.

Kinematische Ermittlung der Einflußlinien gekrümmter Brücken.

Von Dr.-Ing. Gustav A. Fuchs, zur Zeit München.

(Schluß aus Heft 3.)

Bei Tragwerken mit zwei Zwischenstützen (Bild 16) läßt sich die Konstruktion der Einflußlinien weitgehend vereinfachen. Liegt der Sonderfall eines zu den Mittelstützen symmetrisch ausgebildeten Tragwerkes oder der der Hintereinanderreihung gleicher Felder vor — und solche Sonderfälle werden in der Praxis vorherrschen —, so bedeutet dies einen weiteren großen Vorteil, da sich dann die Zahl der notwendigen Einflußlinien wesentlich reduziert. Durch die Zerlegung in Teilsysteme verkürzt sich auch der gedrehte Williotplan.

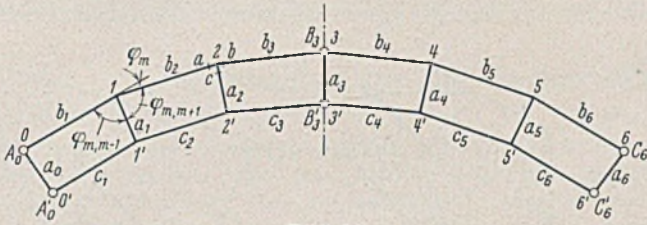


Bild 16.

Die Systemabmessungen betragen $a_0 - a_6 = 5,00$ m,
 $b_1 - b_6 = 10,50$ m,
 $c_1 - c_6 = 9,50$ m,

womit sich $\varphi_m = 11^\circ 29' 36''$ und

$$\varphi_{m, m-1} = \varphi_{m, m+1} = 84^\circ 15' 12'' \text{ ergibt.}$$

Die Einflußlinien des Teilsystems zeigen die Bilder 17a bis d. Mit den Werten $c_m = c_{m1} = 4,9704$ ergeben sich die Momente in den Nachbarscheiben.

Als statisch unbestimmte Größen X_1 und X_2 werden die Stützkräfte bei 3 und 3' eingeführt. Die Durchbiegungen der Eckpunkte des statisch

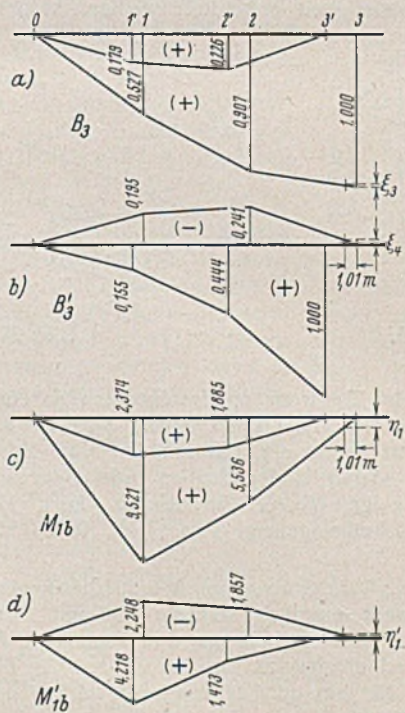


Bild 17a bis d.

bestimmten Systems werden wieder mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bestimmt, wobei abwechselnd bei 3 und 3' an den Teilsystemen zwei entgegengesetzt gerichtete Momente $M_3 = 1$ tm und $M_{3'} = 1$ tm angebracht werden, deren Drehvektor zur Querscheibe 3—3' parallel ist. Hiermit ist das Moment in der angrenzenden Seitenscheibe

$$M_{3,2} = \frac{+1}{\sin \varphi_{3,2}} = +1,01 \text{ tm und in der Querscheibe } M_{3,3'} = -1 \cdot \cot \varphi_{3,2}$$

$= -0,1006$ bzw. $M_{3',2} = +1,01$ tm und $M_{3',3} = +0,1006$ tm. Das Moment in der Seitenscheibe $M_{3,2}$ wird sich im ganzen Tragwerk fortpflanzen, während das Moment in der Querscheibe $M_{3,3'}$ bloß Auflagerkräfte in 3 und 3' hervorruft.

Der Momentenverlauf im Tragwerk sowie die Auflagerdrücke sollen nun wieder mit Einflußlinien ermittelt werden. Hierzu wird das Moment in der Seitenscheibe $M_{3,2} = 1,01$ tm durch eine waagerechte Kraft in der Richtung der Scheibe, 1,01 m über dem Auflager, ersetzt. Da nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Einflußfläche unter bestimmten Voraussetzungen gleich der Verformungsfläche des Tragwerkes ist, ist jene der Scheibe 3—3' gleich der Einflußfläche für waagerechte Beanspruchungen. Es muß daher die Neigung der Kanten 3 bzw. 3' bestimmt werden. Die kinematischen Verformungen erfolgen jedoch ohne Weckung innerer Kräfte so, daß die waagerechte Kante der Scheibe 2—3 um das gleiche Maß wie die senkrechte Kante 3 in bezug auf ihre Ausgangslage — in ihrer Ebene — verdreht wird. Die Ordinaten der Einflußlinien in der Entfernung 1,01 m von 3 geben hiermit bereits die einzelnen statischen Größen infolge $M_3 = 1$ tm an. Dies gilt sowohl für die Momenten- und Querkrafteinflußlinien als auch für die des Stützdruckes mit Ausnahme der Einflußlinie für B_3 , bei welcher der Wert $1 - \xi$ gilt, da bloß die Verschiebung des 1,01 m von der Ecke 3 entfernten Punktes, unter der Voraussetzung seiner Festhaltung, maßgebend ist und das Vorzeichen wechselt (Bild 17). Das gleiche gilt für $M_{3'} = 1$ tm in bezug auf die Einflußlinie $B_{3'}$. Der Stützdruck B_3 und $B_{3'}$ wird noch vermehrt um den Anteil aus dem Moment in der Querscheibe 3—3'. Für das Moment $M_3 = 1$ tm wird $B_3 = -\Delta B_{3'} = -\frac{M_{3,3'}}{a_3}$.

Tafel VI.

	$M_3 = 1,0$ tm	$M_{3'} = 1,0$ tm
M_0	0	0
$M_{1a} = M_{1b}$	+ 0,5227	+ 0,2004
M_{1c}	- 0,1072	- 0,0403
$M_{2a} = M_{2b}$	+ 0,9161	+ 0,2524
M_{2c}	- 0,1810	- 0,0508
M_{3a}	+ 1,0100	0
M_{3c}	- 0,1006	0
M'_0	0	0
$M'_{1a} = M'_{1b}$	- 0,1787	+ 0,1566
M'_{1c}	- 0,0359	+ 0,0315
$M'_{2a} = M'_{2b}$	- 0,0445	+ 0,4486
M'_{2c}	- 0,0089	+ 0,0902
M'_{3a}	0	+ 1,0100
M'_{3c}	0	+ 0,1006
A_0	+ 0,0507	+ 0,0191
A'_0	- 0,0187	+ 0,0164
B_3	+ 0,0112	+ 0,0441
$B_{3'}$	- 0,0432	- 0,0796

In Tafel VI sind die Momente und Stützkräfte infolge $M_3 = 1$ tm und $M_{3'} = 1$ tm zusammengestellt. Es sind nun die Integrale $\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EJ} \cdot ds$ mit der Trapezformel auszuwerten, worauf sich die Einflußlinien für X_3 und $X_{3'}$ aus der Differenz der mit entsprechenden Beiwerten vervielfachten Biegelinien δ_{k3} und $\delta_{k3'}$ ergeben. Dabei wurde das Verhältnis der Trägheitsmomente von Querträger zu Hauptträger mit 1:5 angenommen. Aus den Beziehungen

$$X_3 \delta_{33} + X_{3'} \delta_{3'3} + \delta_{3k} = 0$$

$$X_3 \delta_{3'3} + X_{3'} \delta_{3'3'} + \delta_{3'k} = 0$$

ergibt sich

$$X_3 = c_{33} \delta_{k3} - c_{3'3} \delta_{k3'}$$

$$X_{3'} = c_{3'3} \delta_{k3} - c_{3'3'} \delta_{k3'}$$

wobei $c_{33} = \frac{\delta_{3'3'}}{D}$, $c_{3'3} = c_{3'3} = \frac{\delta_{33}}{D}$, $c_{3'3'} = \frac{\delta_{33}}{D}$ und

$$D = \delta_{33} \delta_{3'3'} = \delta_{3'3}^2$$

Die einzelnen Werte für X_3 und $X_{3'}$ sind in Bild 18 aufgetragen. Es empfiehlt sich, vorerst die $6 EJ_0$ -fachen Biegelinien des Teilsystems infolge $X_3 = 1$ tm bzw. $X_{3'} = 1$ tm aufzutragen (Bild 19), um wie bei vorigem Beispiel die Durchbiegungen einzelner Zwischenpunkte zu bestimmen.

Die Einflußlinien der gesuchten statischen Größen im statisch unbestimmten System werden wieder aus der bekannten Beziehung erhalten (Bild 20, 21):

$$A_{0,v} = A_{0,0} + X_3 A_3 + X_3' A_3'$$

$$M_{1a,v} = M_{1a,0} + X_3 M_3 + X_3' M_3'$$

Hiermit

$$A_{0,v} = A_{0,0} + 0,0507 X_3 + 0,0191 X_3'$$

$$M_{1a,v} = M_{1a,0} + 0,5327 X_3 + 0,2004 X_3'$$

Die Einflußlinien für $M_{3a} = M_{3b}$ ergeben sich aus den eingangs gefundenen Beziehungen.

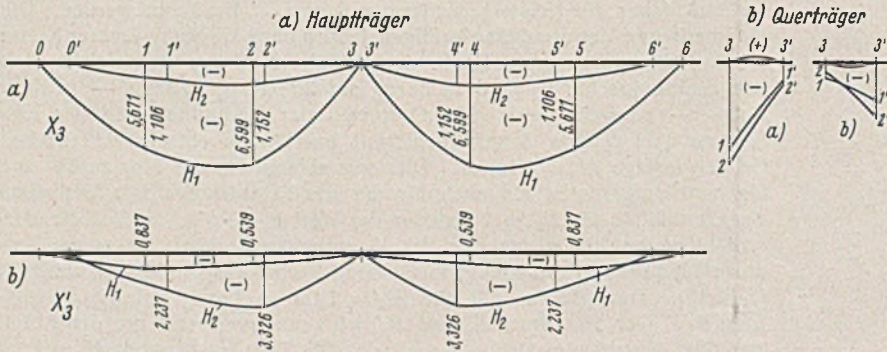


Bild 18 a u. b.

Ist das Tragwerk nach einer Raumkurve gekrümmt, so schließen die Bodenscheiben mit der Grundebene beliebige Winkel ein. Das Verfahren wird wieder im Grundriß für den zu den Bodenscheiben parallelen oberen Rand der senkrechten Seitenscheiben durchgeführt. Sind die Scheibenoberkanten zu den Bodenscheiben nicht parallel, so gelten die Unter-

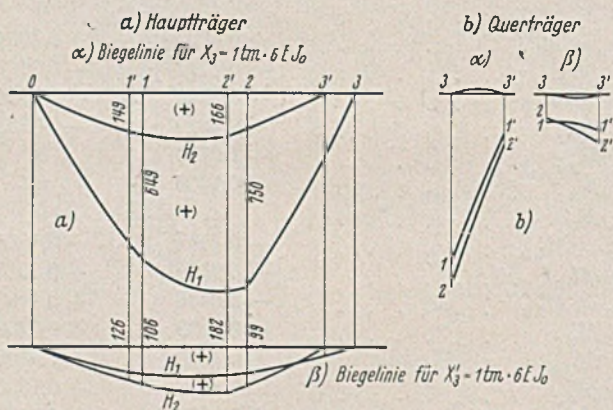


Bild 19 a u. b.

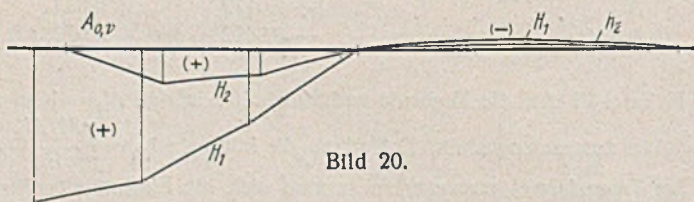


Bild 20.

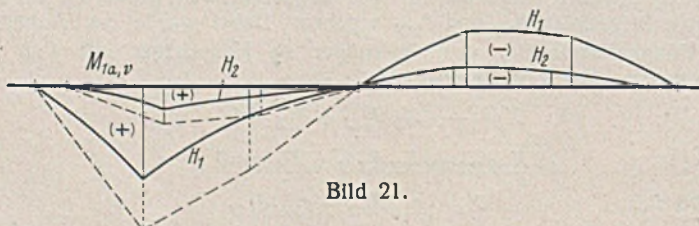


Bild 21.

suchungen für einen durch das Tragwerk zu ihnen jeweils parallel geführten Schnitt. Die in der Hauptbelastungsrichtung wirkende Vertikalkraft zerlegt sich dann in die zur Achse der Seitenscheibe senkrechte Querkraft und in die zu ihr parallele Normalkraft

$$Q_i = V_i \cdot \cos \alpha \quad N_i = V_i \cdot \sin \alpha$$

Bei statisch unbestimmten Systemen muß zur Berechnung der unbestimmten Größe X die Integration der Momentenflächen längs der

Achse der Seitenscheiben erfolgen. Es sind daher die tatsächlichen schrägen Seitenlängen in die Berechnung einzuführen.

In allen bisher untersuchten Fällen waren die Seitenscheiben senkrecht zur Grundebene angenommen. Es soll nun eine Zelle mit einer zur Grundebene geneigten Querscheibe untersucht werden (Bild 22). Wie in Heft 14/15 ausgeführt, besteht ein solches Scheibenwerk — vier Seitenscheiben und eine Bodenscheibe — aus zwei gegenüberliegenden Tetraedern; zum Beispiel 1—2—3—1' und 2—3—4—4'. Die Diagonale 2—3 der Bodenscheibe ist eine den beiden Tetraedern gemeinsame Seite und als solche eine relative Drehachse. Es dreht sich also auch 4' um 2—3. Wie bereits früher bewiesen, sind die Projektionen der Verschiebungen aller in einer zur Drehachse parallelen Ebene liegenden Punkte in diese

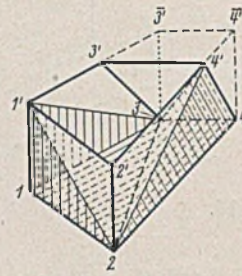


Bild 22.

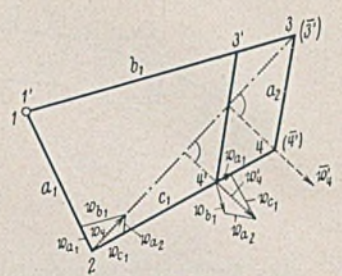


Bild 23.

gleich groß. Dies gilt sowohl für die Ecke 4' bei Drehung um die Relativachse 2—3 als auch für alle Punkte der Oberkante 2'—4' und 3'—4' bei Drehung der zugehörigen Seitenscheiben um die Ecke 2 bzw. 3 als momentanen Drehpol. Daraus folgt, daß der Verschiebungsplan der Ecke 4' der gleiche ist wie jener der Ecke 4' bei senkrechter Querscheibe a_2 . Ihre Neigung beeinflußt die Form des Verschiebungsplanes nicht, da dieser lediglich von der Form der Bodenscheibe abhängig ist.

Der gedrehte Verschiebungsplan eines beliebigen Zellsystems kann hiermit ohne Schwierigkeit entwickelt werden, wobei ähnliche Über-

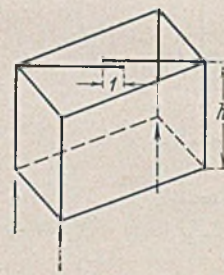


Bild 24.

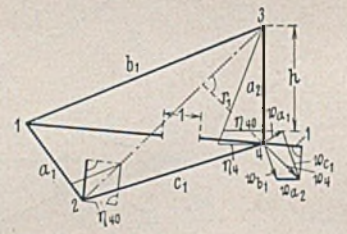


Bild 25.

legungen wie beim Tragwerk mit senkrechten Scheiben gelten. Sind noch andere Scheiben geneigt, so ändert dies an den Überlegungen nichts. Es können somit die Einflußlinien von Scheibenwerken gezeichnet werden, deren Bodenscheiben und Seitenscheiben mit der Grundebene beliebige Winkel einschließen, auch kann ihre Oberkante zur Bodenscheibe geneigt sein. Die Seitenscheiben sind dann Trapezolde.

Besitzt ein Tragwerk einen oberen Windverband, einen Stab (Bild 24), so ist das Tragwerk innerlich statisch bestimmt. Es darf dann bei äußerlich statischer Bestimmtheit nur drei senkrechte Auflagerstäbe aufweisen. Der Verschiebungsplan für eine Zelle ist in Bild 25 dargestellt. Die Einflußlinien für ein solches Tragwerk werden nach den gleichen Überlegungen bestimmt.

Die vorliegende Arbeit soll die kinematische Ermittlung der Einflußlinien räumlich gekrümmter Scheibenwerke zeigen. Mag die Anordnung der Zellen auch verschieden sein, immer wird der gezeigte Weg zum Ziele führen, wobei die geschickte Anordnung der Grundzelle fallweise wesentliche Vereinfachungen ermöglicht.

INHALT: Zentrischer und exzentrischer Druck von an beiden Enden gelenkig gelagerten Rechteckstäben aus Avional M und Baustahl. — Kinematische Ermittlung der Einflußlinien gekrümmter Brücken. (Schluß.)

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.