

Als Folge der axialen Zusammendrückung des elastisch verformbaren Bogens ist im ersten Gleichgewichtszustand ein Betrag A_0 an „potentieller Energie der Federkraft“ aufgespeichert, der beim Übergang zur zweiten Lage auf den Betrag $A = A_0 + A_1 + A_2$ gehoben wird. Die Größe A_1 entspricht der Formänderungsarbeit, die bei der Erzwingung der Krümmung κ und der Dehnung ϵ aufgewendet werden muß und auch dann aufgewendet werden müßte, wenn der Bogen im ersten Gleichgewichtszustand vollkommen spannungsfrei wäre; sie beträgt

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \frac{EJ}{2} \int_{-b}^{+b} \kappa^2 ds + \frac{EF}{2} \int_{-b}^{+b} \epsilon^2 ds = \frac{EJ}{2r^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi \\ &+ \frac{EF}{2r} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi + \dots \end{aligned} \right.$$

wobei EJ die Biegesteifigkeit, F die Querschnittsfläche, φ_0 den Neigungswinkel der Kämpfertangente und $b = r\varphi_0$ die halbe Bogenlänge bedeutet. Der Anteil A_2 entspricht der inneren Arbeit, die von der (im ersten Gleichgewichtszustand schon in voller Größe vorhandenen) Normalkraft $N_k = -p_k r = \text{konst}$ beim Übergang zur zweiten Lage geleistet wird und

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} A_2 &= \int_{-b}^{+b} N \epsilon ds = p_k r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right) d\varphi \\ &- \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[\left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 + \left(v + \frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi + \dots \end{aligned} \right.$$

beträgt. Beachten wir, daß das in dieser Beziehung auftretende Teilintegral

$$(6) \quad \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{dv}{d\varphi} \cdot d\varphi \equiv v \Big|_{\varphi=\varphi_0} - v \Big|_{\varphi=-\varphi_0}$$

mit Rücksicht auf die Unverschieblichkeit der Kämpfergelenke sicher verschwindet, dann erhalten wir für A den Ausdruck

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= A_0 + p_k r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} u d\varphi + \left[\frac{EJ}{2r^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi \right. \\ &+ \left. \left(\frac{EF}{2r} - \frac{p_k}{2} \right) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi - \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(v + \frac{du}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Die potentielle Energie der äußeren Kräfte besitzt im ersten Gleichgewichtszustand einen bestimmten, vom Bezugssystem abhängigen Wert V_0 und wird beim Übergang zur zweiten Gleichgewichtslage auf den Betrag $V = V_0 - V_1$ herabgesetzt, wobei V_1 die von den äußeren Kräften geleistete Verschiebungsarbeit bedeutet. Da die Angriffspunkte der einzelnen Elementarlasten ($p_k ds$) beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage die Radialverschiebungen u erfahren, können wir für den von erster Ordnung kleinen Anteil der Verschiebungsarbeit unmittelbar das

Integral $\int_{-b}^{+b} (p_k ds) u \equiv p_k r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} u d\varphi$ anschreiben; es gilt somit

$$(8) \quad V = V_0 - V_1 = V_0 - \left[p_k r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} u d\varphi + V_1^* + \dots \right],$$

wobei V_1^* den von zweiter Ordnung kleinen Anteil der Verschiebungsarbeit vorstellt. Mit Hilfe von (7) und (8) gewinnen wir für die gesamte im zweiten Gleichgewichtszustand aufgespeicherte potentielle Energie des belasteten Bogens den bis auf einschließlich Glieder zweiter Kleinheitsordnung genauen Ausdruck

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= A + V = (A_0 + V_0) + \left[\frac{EJ}{2r^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi \right. \\ &+ \left. \left(\frac{EF}{2r} - \frac{p_k}{2} \right) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi - \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(v + \frac{du}{d\varphi} \right)^2 d\varphi - V_1^* \right] \end{aligned} \right.$$

und können nun etwa folgendermaßen schließen: Da die Deformationsfigur, die nach der Punktverschiebung u, v erhalten wird, eine Gleichgewichtsfigur sein soll, muß E zu einem Minimum werden und daher die erste Variation von E verschwinden, muß also (da A_0 und V_0 von u, v unabhängig ist und daher zur Variation nichts beizutragen vermag)

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \left[\frac{EJ}{2r^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi + \left(\frac{EF}{2r} - \frac{p_k}{2} \right) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \right. \\ \left. - \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(v + \frac{du}{d\varphi} \right)^2 d\varphi - V_1^* \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

sein. Die Gl. (10) stellt die Bedingung für die Existenz zweier benachbarter Gleichgewichtsfiguren unter derselben Laststufe vor; da die zur Mitte symmetrischen Gleichgewichtsfiguren auch unter den Laststufen $p > p_k$ widerspruchsfrei denkbar sind, ist p_k einer Verzweigungsstelle des Gleichgewichts zugeordnet.

Der zweite Summand im Klammerausdruck der Gl. (10), der nach Einführung des Querschnitts-Trägheitsradius $i = \sqrt{J/F}$ die Form

$$(11) \quad \left(\frac{EJ}{2r^3} \cdot \frac{r^2}{i^2} - \frac{p_k}{2} \right) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi$$

annimmt, ist mit Rücksicht auf den Faktor r^2/i^2 überaus groß im Vergleich zu den beiden anderen Summanden, so daß alle jene Verschiebungssysteme u, v , bei denen das bestimmte Integral $\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(u - \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi$ einen

von Null verschiedenen Wert besitzt, sicher nicht geeignet sind, den Klammerausdruck zu einem Minimum zu machen. Wir dürfen daher die Zahl der zur Konkurrenz zugelassenen Verschiebungssysteme auf die Zahl jener Verschiebungssysteme reduzieren, bei denen das erwähnte Integral verschwindet, u und v also durch die Beziehung

$$(12) \quad u = \frac{dv}{d\varphi}$$

miteinander verknüpft sind; die Gl. (1) lehrt, daß dies solche Verschiebungssysteme sind, bei denen ϵ von höherer Ordnung klein ist als u und v . Die praktisch maßgebende Knickfigur darf demnach in diesem Sinne als „dehnungslos“ vorausgesetzt und die Gl. (10), die wir als notwendige und — wenn wir die zusätzlichen Forderungen über die zweite Variation als erfüllt ansehen — auch hinreichende Bedingung für das Erreichen einer Verzweigungsstelle des Gleichgewichts gewonnen haben, in der Form

$$(1) \quad \delta \left[\frac{EJ}{2r^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi - \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(v + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi - V_1^* \right] = 0$$

geschrieben werden.

Die Grundgleichung (1) legt ein Variationsproblem fest, dessen Lösung entweder streng nach der klassischen Methode oder aber näherungsweise nach dem direkten Verfahren von W. Ritz erfolgen kann. Denken wir uns — im Sinne des letztgenannten Verfahrens — den Lösungsansatz $v = c_1 v_1(\varphi) + c_2 v_2(\varphi) + \dots$ in die Gl. (1) eingeführt, wobei wir die Funktionen $v(\varphi)$ so wählen wollen, daß sie die gesuchte Lösung zu approximieren vermögen und den Randbedingungen des Problems genügen, dann geht der Klammerausdruck in eine homogene, quadratische Funktion der unbekannt Parameter c_1, c_2, \dots über. Wir genügen der Gl. (1), wenn wir die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach den einzelnen Parametern gleich Null setzen, und gelangen so zu den einzelnen Zeilen eines Gleichungssystems, die — wenn wir sie der Reihe nach mit $c_1/2, c_2/2, \dots$ multiplizieren und addieren — auf die neue Gleichung

$$(13) \quad \left[\frac{EJ}{2r^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi - \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left(v + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)^2 d\varphi - V_1^* \right] = 0$$

führen. Diese Gleichung stellt eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Ausbildung einer Verzweigungsstelle vor und kann zur näherungsweise Ermittlung der Knicklast in jenen Fällen verwendet werden, in denen der Verlauf der Knickfigur in seinen wesentlichen Zügen schon vor der Untersuchung bekannt ist.

Abschließend sei noch erwähnt, daß die Gl. (13) auch unmittelbar aus einem mathematischen Lehrsatz folgt, der unter Zuhilfenahme des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen bewiesen und folgendermaßen formuliert werden kann: Ist $F(\varphi, v, v', v'', \dots)$ in allen Variablen stetig und differenzierbar und überdies in v, v', v'', \dots homogen, dann muß — wenn das Variationsproblem $\delta J \equiv \delta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F d\varphi = 0$ mit $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 0$ eine Lösung besitzt — der zugeordnete Extremwert von J gleich Null sein (Gl. 13).

2. Die Voraussetzungen über das Verhalten der Belastung während des Ausknickens. Der in der Grundgleichung (1) auftretende, von zweiter Ordnung kleine Anteil V_1^* der Verschiebungsarbeit, die von den äußeren Kräften beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage geleistet werden muß, ist vom Verhalten der Lasten während des Ausknickens abhängig. Es ist daher grundsätzlich erforderlich, bei Beginn der Stabilitätsuntersuchung die Voraussetzungen festzulegen, die hinsichtlich dieses Verhaltens getroffen worden sind.

Auch bei den elementaren Knickuntersuchungen axial gedrückter, gerader Stäbe müssen wir uns bewußt sein, daß die seit Euler stillschweigend vorausgesetzte Annahme (Unveränderlichkeit der Richtung der Kraft P) nicht die einzige ist, die wir der Stabilitätsuntersuchung

zugrunde legen können. Denn die Wirkungsgerade von P fällt vor Beginn der Ausbiegung nicht nur mit der Stabachse, sondern auch mit der Endtangente an die Achsline zusammen und geht im übrigen beispielsweise auch durch den Fußpunkt dieser Achsenkurve. Eine dieser drei Eigenschaften kann bei der Ausbiegung des Stabes erhalten bleiben, so daß wir hier auf drei verschiedene Fälle des Lastverhaltens (Bild 2a, 2b u. 2c) gelangen, denen drei grundsätzlich verschiedene Lösungsergebnisse der Stabilitätsuntersuchung entsprechen; der erste dieser drei Fälle könnte mit Hilfe eines aufgehängten Gewichtes, der zweite mit Hilfe eines am freien Stabende wirkenden „Druckpropellers“ und der dritte mit Hilfe eines Seilzuges verwirklicht werden.

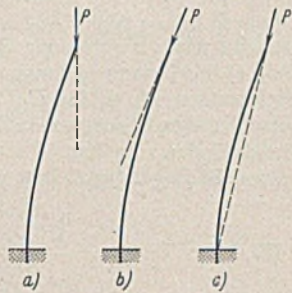


Bild 2.

Beim ebenen Knickproblem des Bogenträgers sind gleichfalls mehrere Annahmen über das Lastverhalten denkbar. Die Wirkungslinie der Kraft $p_k ds$, die auf ein Achsenelement entfällt, schließt im „ersten“ Gleichgewichtszustand mit der Lotrechten einen bestimmten Winkel ein, geht durch den Kreismittelpunkt und steht senkrecht auf dem zugeordneten Achsenelement. Eine von diesen drei Eigenschaften kann auch beim Übergang zur „zweiten“ Gleichgewichtslage erhalten bleiben, so daß wir mit Bezug auf das Lastverhalten auch hier drei verschiedene Fälle zu unterscheiden haben, denen verschiedene große V_1^* und daher auch verschiedene Knicklasten und Knickfiguren entsprechen. Wir wollen diese drei Fälle der Reihe nach mit I, II, III bezeichnen, wobei die folgenden Voraussetzungen in Geltung stehen: Fall I. Die Elementarlasten behalten ihre Richtung auch während des Ausknickens des Bogens bei.

Fall II. Die Wirkungsgeraden der Elementarlasten gehen auch während des Ausknickens durch den ursprünglichen Kreismittelpunkt.

Fall III. Die Wirkungsgeraden stehen auch während des Ausknickens senkrecht auf den zugeordneten Achsenelementen.

3. Die Lösung des Knickproblems im Fall I. Die Angriffspunkte A der einzelnen Elementarlasten ($p_k ds$) erfahren beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage eine radiale Verschiebung u und eine tangentielle Verschiebung v , so daß der Punkt A nach A_1 gelangt (Bild 1b). In Bild 3a ist die Elementarlast vor und nach dem Übergang zur zweiten Gleichgewichtslage dargestellt worden, wobei sich das linke Bild auf einen Achsenpunkt in der Nähe des Scheitels und das rechte auf einen Achsenpunkt in der Nähe des Kämpfers bezieht. Da die Richtung von ($p_k ds$) voraussetzungsgemäß unverändert erhalten bleibt, ist die Verschiebungsarbeit V_1 unmittelbar durch das in der Gl. (8) schon

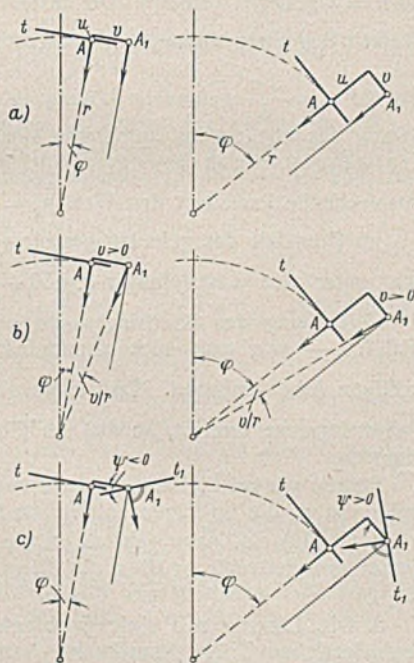


Bild 3.

berücksichtigte Integral $\int_{-b}^{+b} (p_k ds) u \equiv p_k r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} u d\varphi$ festgelegt, wird also der von zweiter Ordnung kleine Anteil V_1^* gleich Null, so daß sich für die Grundgleichung (1) nach Herausheben des Faktors $EJ/2r^3$ einfach

$$(1a) \quad \delta \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)^2 - \mu \left(v + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right)^2 \right] d\varphi = 0, \quad \mu = \frac{p_k r^3}{EJ}$$

ergibt.

Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung dieses Variationsproblems, für die wir — wenn F die unter dem Integralzeichen stehende Funktion der m^{ten} Ableitungen von v nach φ bedeutet — allgemein bekanntlich

$$(14) \quad \sum_{m=0,1,2,\dots} (-1)^m \cdot \frac{d^m}{d\varphi^m} \left[\frac{\partial F}{\partial v^{(m)}} \right] = 0$$

schreiben dürfen, lautet

$$(15) \quad \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + (2 + \mu) \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + (1 + 2\mu) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \mu v = 0$$

und stellt eine lineare, homogene Differentialgleichung sechster Ordnung für v vor, deren allgemeine Lösung in den Fällen $\mu \neq 1$ die Form

$$(16a) \quad \begin{cases} v = C_1 \cdot \sin \varphi + C_2 \cdot \cos \varphi + C_3 \varphi \cdot \sin \varphi + C_4 \varphi \cdot \cos \varphi \\ \quad + C_5 \cdot \sin \varphi \sqrt{\mu} + C_6 \cdot \cos \varphi \sqrt{\mu} \end{cases}$$

und im Sonderfall $\mu = 1$ die Form

$$(16b) \quad \begin{cases} v = C_1 \cdot \sin \varphi + C_2 \cdot \cos \varphi + C_3 \varphi \cdot \sin \varphi + C_4 \varphi \cdot \cos \varphi \\ \quad + C_5 \varphi^2 \cdot \sin \varphi + C_6 \varphi^2 \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

annimmt. Die sechs Randbedingungen, denen diese Lösung unterworfen ist, verlangen das Verschwinden der Verschiebungskomponenten u, v und der Krümmung κ an den Orten der beiden Kämpfergelenke. Sie lauten nach Rücksichtnahme auf Gl. (3) u. (12) einfach

$$(17) \quad v = \frac{dv}{d\varphi} = \frac{d^3 v}{d\varphi^3} = 0 \quad \text{für } \varphi = \pm \varphi_0$$

und liefern nach Einführung der allgemeinen Lösung sechs Bestimmungsgleichungen für C_1 bis C_6 , die linear und homogen sind und daher nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung zulassen, wenn ihre Koeffizientendeterminante verschwindet. Im Fall $\mu \neq 1$ ist diese Forderung erfüllt, wenn eine der beiden Bedingungen

$$(18a) \quad \begin{cases} \left(\frac{3-\mu}{2} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - \frac{\mu-1}{2} \cdot \varphi_0 \right) \sqrt{\mu} \cdot \sin \varphi_0 \sqrt{\mu} \\ \quad - \sin^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \sqrt{\mu} = 0, \end{cases}$$

$$(18b) \quad \begin{cases} \left(\frac{3-\mu}{2} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \frac{\mu-1}{2} \cdot \varphi_0 \right) \sqrt{\mu} \cdot \cos \varphi_0 \sqrt{\mu} \\ \quad - \cos^2 \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 \sqrt{\mu} = 0 \end{cases}$$

befriedigt wird, und im Sonderfall $\mu = 1$ ist sie erfüllt, wenn $\varphi_0 = 2,09$ (im Gradmaß $\varphi_0 = 119^\circ 45'$) beträgt.

Für die kritische Belastungsintensität gilt dann

$$(19) \quad p_k = \mu \cdot \frac{EJ}{r^3},$$

wobei der der tiefsten Verzweigungsstelle zugeordnete Beiwert μ beispielsweise für $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}$ der Reihe nach $\mu = 35,94, 8,725, 3,265, 0,990, 0,128$ und $0,000$ beträgt (Bild 4, Kurve I). Setzen wir den Lösungswert p_k in die erwähnten sechs Bestimmungsgleichungen für

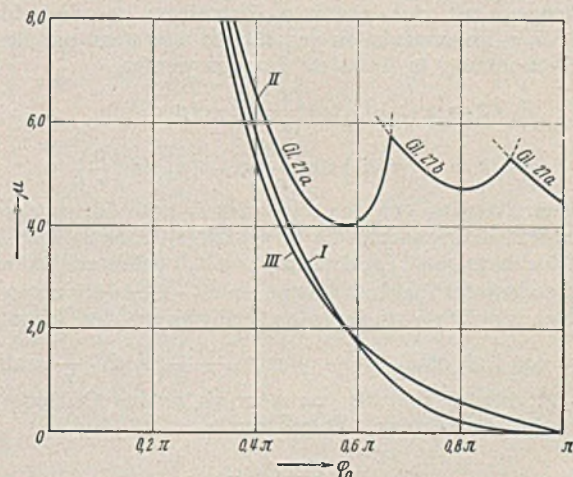


Bild 4.

C_1 bis C_6 ein, dann können wir die relativen Größen von C_1 bis C_6 berechnen und mit Hilfe von (16) und (12) die Verschiebungskomponenten u, v bis auf einen gemeinsamen (an der Stabilitätsgrenze unendlich klein zu denkenden) Parameter festlegen; u und v zeigt im Wesen den in Bild 1c bzw. 1d dargestellten Verlauf, so daß die Knickfigur im Wesen die in Bild 1b gezeichnete unsymmetrische Form annimmt. Die für $\varphi_0 = \frac{3\pi}{6}$ gefundene Knickfigur deckt sich, wie man unmittelbar einzusehen vermag, mit dem zwischen zwei gegenüberliegenden Wendepunkten liegenden Teil der maßgebenden Knickfigur eines biegesteif geschlossenen Kreisringes, so daß dieser an die Stabilitätsgrenze gelangt, wenn die dem „Fall I“ entsprechende Radialbelastung den Wert $p_k = 3,265 \cdot \frac{EJ}{r^3}$ erreicht.

Führen wir an Stelle von φ_0 die halbe Bogenlänge $b = r \varphi_0$ und an Stelle von p_k die unter dieser Laststufe auftretende Normalkraft $N_k = -p_k r = \text{konst}$ in die Rechnung ein, dann nimmt Gl. (19) die Form

$$(20) \quad N_k = -\nu \cdot \frac{\pi^2 EJ}{b^2}, \quad \nu = \mu \cdot \frac{\varphi_0^2}{\pi^2}$$

an, wobei ν durch die Kurve I in Bild 5 bestimmt wird. Im Grenzfalle $b = r\pi$ gelangen wir zu einem gelenkig geschlossenen Kreisring, für den sich $\nu = 0$ ergibt, da der Verdrehung um den Gelenkpunkt kein Widerstand entgegengesetzt wird. Der Grenzübergang zum geraden Stab ($r \rightarrow \infty$) ist schon mit Rücksicht darauf, daß die Kleinheitsordnung von u und v bei geraden Stäben nicht mehr die gleiche ist, mit Hilfe der in Bild 5 dargestellten Kurven nicht durchführbar⁵⁾.

Abschließend sei noch erwähnt, daß die dem „Fall I“ entsprechende Voraussetzung über das Verhalten der Last während des Ausknickens auch den allgemeinen Untersuchungen zugrunde liegt, die in der einleitend genannten Abhandlung¹⁾ durchgeführt worden sind. In dieser Abhandlung wurde eine „Differentialgleichung (II)“ abgeleitet, die gleichfalls der Voraussetzung einer Stützlinienbelastung unterliegt, jedoch allgemein für einen Bogen beliebiger Achsenform und beliebigen Querschnittsverlaufes Geltung besitzt. Wird nun in dieser Differentialgleichung mit Bezug auf den hier untersuchten Kreisbogen die Biegesteifigkeit $EJ = \text{konst}$, die örtliche Primärkrümmung $k_0 = 1/r = \text{konst}$, die tangentielle Lastkomponente $T_0 = 0$ und die radiale Lastkomponente $R_0 = p_k = \text{konst}$ gesetzt, dann nimmt sie nach Rücksichtnahme auf die Fußnote⁴⁾ die Form

$$(21) \quad \frac{EJ}{r} \left(\frac{d^3 \nu}{d\varphi^3} + \frac{d\nu}{d\varphi} \right) + p_k r^2 \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} + p_k \left(\frac{d^2 \nu}{d\varphi^2} + \nu \right) = 0$$

an und geht — wie zu erwarten war — nach Einführung von (3) und (12) in unsere Differentialgleichung (15) über.

4. Die Lösung des Knickproblems in Fall II. Steht die Voraussetzung in Geltung, daß die Wirkungsgeraden der Elementarlasten ($p_k ds$) auch während des Ausknickens durch den ursprünglichen Kreismittelpunkt gehen, dann werden diese Wirkungsgeraden — wie Bild 3b erkennen läßt — beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage um die unendlich kleinen Beträge (ν/r) verdreht. Wir wollen diese verdrehten Elementarlasten ($p_k ds$) im Interesse einer bequemen Berechenbarkeit der Verschiebungsarbeit in zwei Komponenten zerlegen, deren Richtungen mit den positiven Richtungen der Verschiebungskomponenten u, v zusammenfallen und für die wir, wenn nur die Glieder erster Kleinheitsordnung in Rücksicht gezogen werden,

$$(22) \quad \begin{cases} R_1 ds = + (p_k ds) \cos \left(\frac{\nu}{r} \right) \approx + (p_k ds), \\ T_1 ds = - (p_k ds) \sin \left(\frac{\nu}{r} \right) \approx - (p_k ds) \left(\frac{\nu}{r} \right) \end{cases}$$

erhalten. Beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage wird von der Radialkomponente die in der Gl. (8) schon in Rechnung gestellte Verschiebungsarbeit $(p_k ds)u \approx p_k r u d\varphi$ geleistet, während die Verschiebungsarbeit der Tangentialkomponente — die in der ersten Gleichgewichtslage noch nicht vorhanden ist und erst während des Überganges zur zweiten Lage von Null anwächst — offenbar $-\frac{1}{2} (p_k ds) \left(\frac{\nu}{r} \right) \nu \approx -\frac{p_k}{2} \nu^2 d\varphi$ beträgt; hierbei sind die von mehr als zweiter Ordnung kleinen Glieder vernachlässigt worden. Es gilt somit

$$(23) \quad V_1^* = -\frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \nu^2 d\varphi,$$

so daß die Grundgleichung (1) die Form

$$(1b) \quad \delta \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[\left(\frac{d\nu}{d\varphi} + \frac{d^3 \nu}{d\varphi^3} \right)^2 - \mu \left(\nu + \frac{d^2 \nu}{d\varphi^2} \right)^2 + \mu \nu^2 \right] d\varphi = 0, \quad \mu = \frac{p_k r^3}{EJ}$$

annimmt und die ihr zugeordnete Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

$$(24) \quad \frac{d^6 \nu}{d\varphi^6} + (2 + \mu) \frac{d^4 \nu}{d\varphi^4} + (1 + 2\mu) \frac{d^2 \nu}{d\varphi^2} = 0$$

lautet. Für die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich, wenn wir $\mu > 4$ voraussetzen,

⁵⁾ Bogenträger mit extrem kleinen Pfeilverhältnissen knicken nicht mehr in der geschilderten Weise aus, sondern zeigen die Erscheinung des „symmetrischen Durchschlagens“; es liegt hier ein „Stabilitätsproblem ohne Gleichgewichtsverzweigung“ vor, das von C. B. Biezeno (Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Sect. Sci. 32, 1929, S. 990) und S. Timoshenko (Journ. Appl. Mech., 2, 1935, S. 17 sowie Fußnote 12, S. 230) untersucht worden ist.

$$(25) \quad \begin{cases} v = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cdot \sin \lambda_1 \varphi + C_4 \cdot \cos \lambda_1 \varphi + C_5 \cdot \sin \lambda_2 \varphi + C_6 \cdot \cos \lambda_2 \varphi, \\ \lambda_{1,2} = \sqrt{1 + \frac{\mu}{2}} \pm \sqrt{\mu \left(\frac{\mu}{4} - 1 \right)}. \end{cases}$$

während im Sonderfall $\mu = 4$ einfach

$$(26) \quad \begin{cases} v = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cdot \sin \varphi \sqrt{3} + C_4 \cdot \cos \varphi \sqrt{3} + C_5 \varphi \cdot \sin \varphi \sqrt{3} \\ + C_6 \varphi \cdot \cos \varphi \sqrt{3} \end{cases}$$

erhalten wird. Führen wir die allgemeine Lösung in die Randbedingungen Gl. (17) ein, dann gelangen wir wieder auf sechs lineare, homogene Gleichungen für C_1 bis C_6 , die nur dann mit einer von der Nulllösung verschiedenen Lösung verträglich sind, wenn ihre Koeffizientendeterminante verschwindet. Im Fall $\mu > 4$ ist diese Forderung erfüllt, wenn eine der beiden Bedingungsgleichungen

$$(27a) \quad \mu = \frac{\left(\frac{n^2 \pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)^2}{\frac{n^2 \pi^2}{\varphi_0^2} - 2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(27b) \quad \begin{cases} \lambda_2^3 (\sin \lambda_1 \varphi_0 - \lambda_1 \varphi_0 \cdot \cos \lambda_1 \varphi_0) \cos \lambda_2 \varphi_0 \\ - \lambda_1^3 (\sin \lambda_2 \varphi_0 - \lambda_2 \varphi_0 \cdot \cos \lambda_2 \varphi_0) \cos \lambda_1 \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

befriedigt wird, und im Sonderfall $\mu = 4$ ist sie erfüllt, wenn $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (im Gradmaß $\varphi_0 = 103^\circ 55'$) beträgt.

Die kritische Belastungsintensität p_k wird wieder durch die Gl. (19) festgelegt, wobei die der tiefsten Verzweigungsstelle zugeordneten Beiwerte beispielsweise für $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}$ der Reihe nach die Werte $\mu = 36,03, 9,14, 4,50, 5,73, 4,79$ und $4,50$ annehmen. Die Kurve II in Bild 4 läßt erkennen, daß diese Lösungswerte in den Fällen $\varphi_0 \leq 0,661\pi$ von der Gl. (27a) mit $n = 1$, in den Fällen $0,661\pi \leq \varphi_0 \leq 0,896\pi$ von der Gl. (27b) — [die z. B. für $\varphi_0 = 0,685\pi, 0,710\pi, 0,745\pi, 0,812\pi, 0,866\pi, 0,892\pi$ der Reihe nach auf $\mu = 5,50, 5,25, 5,00, 4,75, 5,00, 5,25$ führt] — und in den Fällen $\varphi_0 \geq 0,896\pi$ von der Gl. (27a) mit $n = 2$ geliefert werden⁶⁾. Der absolut kleinste Wert der kritischen Last ist einem Bogenträger mit $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ zugeordnet und beträgt $p_k = 4,00 \cdot \frac{EJ}{r^3}$.

Die für $\varphi_0 = \frac{3\pi}{6}$ gefundene Lösung entspricht wieder der maßgebenden Lösung des ebenen Knickproblems eines biegesteif geschlossenen Kreisringes, so daß dieser auszuknicken beginnt, wenn die dem „Fall II“ entsprechende Radiallast den Wert $p_k = 4,50 \cdot \frac{EJ}{r^3}$ erreicht⁷⁾.

Im Grenzfalle des gelenkig geschlossenen Kreisringes ($\varphi_0 = \pi$) ergibt sich unter den Laststufen $p < 4,50 \cdot \frac{EJ}{r^3}$ ein stabiles Gleichgewicht; die Verdrehung des Kreisringes um seinen Gelenkpunkt erfordert im „Fall II“ — wie man auch unmittelbar einzusehen vermag — einen positiven Arbeitsaufwand. Erst unter der Last $p_k = 4,50 \cdot \frac{EJ}{r^3}$ wird die Stabilitätsgrenze erreicht, so daß der Ring in seiner Ebene auszuknicken beginnt.

Führen wir an Stelle von φ_0 die halbe Bogenlänge $b = r\varphi_0$ und an Stelle von p_k die im Bogen auftretende Normalkraft $N_k = -p_k r = \text{konst}$ in die Gl. (19) ein, dann geht sie in die Gl. (20) über; der Beiwert ν ist hierbei grundsätzlich größer als Eins und kann für Bogenträger mit geringem Pfeilverhältnis aus Bild 5, Kurvenast II, entnommen werden.

5. Die Lösung des Knickproblems im Fall III; der Bogen mit veränderlichem Trägheitsmoment. Setzen wir voraus, daß die Wirkungsgeraden der Elementarlasten auch während des Ausknickens auf den zugeordneten Achsenelementen senkrecht stehen, dann verdrehen sich diese Wirkungsgeraden, wie Bild 3c zeigt, beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage um den unendlich kleinen Betrag ψ , dessen Größe mit Hilfe der Gl. (2) festgelegt werden kann. Um die Verschiebungsarbeit bequem berechnen zu können, zerlegen wir wieder die Elementarlast nach erfolgter Verdrehung in zwei Komponenten, deren Richtungen mit den positiven Richtungen von u und v zusammenfallen und für deren Größe — wenn bloß die Glieder erster Kleinheitsordnung in Rücksicht gezogen werden —

$$(28) \quad \begin{cases} R_1 ds = + (p_k ds) \cos \psi \approx + (p_k ds), \\ T_1 ds = - (p_k ds) \sin \psi \approx - (p_k ds) \psi \end{cases}$$

⁶⁾ J. Ratzersdorfer (loc. cit.) leitet die Differentialgleichung (24) in anderer Weise ab, läßt jedoch bei ihrer Auswertung die Knickbedingung Gl. (27b) unberücksichtigt; die von ihm für $\varphi_0 = \frac{4\pi}{6}$ und $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ angegebenen Lösungswerte stellen daher nicht die maßgebenden Kleinste werte vor.

⁷⁾ E. L. Nicolai, Z. ang. Math., 1923, S. 227.

erhalten wird. Beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage leistet die radiale Komponente die in der Gl. (8) schon in Rechnung gestellte Verschiebungsarbeit $(p_k ds)u = p_k r u d\varphi$, während die Verschiebungsarbeit der tangentialen Komponente — die in der ersten Gleichgewichtslage noch nicht vorhanden ist und erst während des Übergangs zur zweiten Lage von Null anwächst — offenbar $-\frac{1}{2}(p_k ds)\psi v = -\frac{p_k r}{2} \cdot \psi v d\varphi$ beträgt; die von mehr als zweiter Ordnung kleinen Glieder sind hierbei vernachlässigt worden. Es gilt demnach

$$(29) \quad V_1^* = -\frac{p_k r}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \psi v d\varphi = -\frac{p_k r}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} v \left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) d\varphi,$$

so daß die Grundgleichung (I) die Form

$$(Ic) \quad \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[\delta \int \left(\left(\frac{dv}{d\varphi} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right)^2 - \mu \left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right)^2 + \mu v \left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) \right) d\varphi = 0 \right. \\ \left. \mu = \frac{p_k r^3}{EJ} \right]$$

annimmt und die zugeordnete Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

$$(30) \quad \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + (2 + \mu) \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + (1 + \mu) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0$$

lautet.

Führen wir die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} v = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cdot \sin \varphi + C_4 \cdot \cos \varphi + C_5 \cdot \sin \varphi \sqrt{1 + \mu} \\ + C_6 \cdot \cos \varphi \sqrt{1 + \mu} \end{aligned} \right.$$

in die sechs Randbedingungen Gl. (17) ein, dann gelangen wir wieder auf ein System linearer, homogener Bestimmungsgleichungen für C_1 bis C_6 , das nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet; diese Forderung ist erfüllt, wenn eine der beiden Bedingungen⁸⁾

$$(32a) \quad \mu = \frac{\pi^2 n^2}{\varphi_0^2} - 1, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$(32b) \quad \left[\mu - (1 + \mu) \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\varphi_0} \right] \cos \varphi_0 \sqrt{1 + \mu} + \frac{\sin \varphi_0 \sqrt{1 + \mu}}{\varphi_0 \sqrt{1 + \mu}} = 0$$

befriedigt wird.

Die praktisch maßgebenden (kleinsten) Eigenwerte werden für alle φ_0 aus der Gl. (32a) mit $n=1$ erhalten, so daß wir für die der tiefsten Verzweigungsstelle zugeordnete Belastungsintensität unmittelbar die einfache Beziehung⁹⁾

$$(33) \quad p_k = \frac{EJ}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)$$

anschreiben können; für $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}$ liefert diese

Beziehung der Reihe nach $\mu = \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) = 35,00, 8,00, 3,00, 1,25, 0,44$

und 0,00 (Bild 4, Kurve III). Im Grenzfall $\varphi_0 = \pi$ gelangen wir zu einem gelenkig geschlossenen Kreisring, dessen Gleichgewicht unter allen Laststufen indifferent ist, da der Ring eine Verdrehung um seinen Gelenkpunkt ohne Aufwand oder Gewinn von Arbeit zuläßt. Die für $\varphi_0 = \frac{3\pi}{6}$

gewonnene Lösung entspricht wieder der praktisch maßgebenden Lösung des ebenen Knickproblems eines biegesteif geschlossenen Kreisringes, so daß dieser an die Verzweigungsstelle gelangt, wenn die dem „Fall III“ entsprechende Radiallast den Wert $p_k = 3,00 \cdot \frac{EJ}{r^3}$ erreicht¹⁰⁾.

Führen wir an Stelle von φ_0 die halbe Bogenlänge $b = r\varphi_0$ und an Stelle von p_k die im Bogen auftretende Normalkraft $N_k = -p_k r = \text{konst}$ in die Gl. (33) ein, dann geht sie in die Gl. (20) über, wobei ν durch die Ordinaten der Kurve III in Bild 5 bestimmt wird. Setzen wir die Beziehung (33) in die erwähnten linearen und homogenen Bestimmungsgleichungen für C_1 bis C_6 ein, dann können wir die relativen Größen von C_1 bis C_6 berechnen und mit Hilfe von (31) und (12) die Verschiebungs-komponenten u, v bis auf einen gemeinsamen, an der Stabilitätsgrenze unendlich klein zu denkenden Parameter C festlegen; wir erhalten hierbei die in Bild 1c u. 1d dargestellten einfachen Gesetze

$$(34) \quad v = C \left(\cos \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} + 1 \right), \quad u = \frac{dv}{d\varphi} = -C \cdot \frac{\pi}{\varphi_0} \cdot \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0},$$

so daß die Knickfigur die in Bild 1b gezeichnete unsymmetrische Form annimmt.

Beziehen wir uns auf die Stabilitätsuntersuchungen, die in der einleitend genannten Abhandlung¹⁾ für einen Bogenträger mit beliebigem Achsenform und beliebigem Querschnittsgesetz durchgeführt worden sind, und leiten wir die dort angeführte „Differentialgleichung (II)“ unter der Voraussetzung ab, daß die Elementarlasten auch während des Ausknickens senkrecht auf den Achsenelementen stehen, dann verschwinden die beiden letzten Terme dieser Gleichung, so daß sie nach Berücksichtigung der Fußnote ⁴⁾ die schon von Lockschin¹¹⁾ angegebene Form

$$(35) \quad \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right) \left[k_0 \cdot \frac{d}{d\varphi} (EJx) \right] + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_0 x}{k_0^2} \right) = 0$$

annimmt; wird mit Bezug auf den von uns untersuchten Kreisbogen für die Biegesteifigkeit $EJ = \text{konst}$, für die örtliche Primärkrümmung $k_0 = 1/r = \text{konst}$ und für die radiale Lastkomponente $R_0 = p_k = \text{konst}$ gesetzt, dann geht die Gl. (35) — wie zu erwarten war — nach Einführung von (3) und (12) in unsere Differentialgleichung (30) über.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß das ebene Knickproblem des Kreisbogens — unter der dem Fall III entsprechenden Voraussetzung, daß die Elementarlasten während des Ausknickens senkrecht auf den Achsenelementen bleiben — auch für den Zweigelenkbogen mit veränderlichem Querschnitt der Lösung zugeführt worden ist¹²⁾. Bedeutet J_S und J_K das Querschnitts-Trägheitsmoment im Scheitel und im Kämpfer, und gilt für J das lineare Gesetz

$$(36) \quad J = J_S + (J_K - J_S) \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

dann wird für die kleinste kritische Normalkraft $N_k = -p_k r = \text{konst}$ die Beziehung

$$(37) \quad N_k = -\nu \cdot \frac{\pi^2 EJ_K}{b^2}$$

erhalten, in welcher b die halbe Bogenlänge und ν einen aus der Tafel 1 zu entnehmenden Beiwert bedeutet. Ist $J_S = J_K$, also $J = \text{konst}$, dann gelangen wir zu dem schon behandelten Fall; die Gl. (37) geht dann in die Gl. (20) über und ν wird durch die Ordinaten der in Bild 5 gezeichneten Kurve III bestimmt. Würden wir N_k nach dem von der DIN 1075 zugelassenen Näherungsverfahren berechnen, dann würden wir für den

Beiwert ν die Beziehung $\nu_{\text{DIN}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{J_S}{J_K} \right)$ erhalten; die Werte ν_{DIN} sind durchweg größer als die in der Tafel I angegebenen Werte.

Tafel 1.

$\frac{J_S}{J_K} =$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\varphi_0 = 30^\circ$	0,460	0,527	0,657	0,768	0,873	0,973
$\varphi_0 = 60^\circ$	0,421	0,488	0,602	0,703	0,799	0,889
$\varphi_0 = 90^\circ$	0,358	0,413	0,509	0,594	0,675	0,750

6. Die Energiebilanz bei der Bogenknickung. Bei der Behandlung des Knickproblems der Bogenträger kommt der Klarstellung des Energiehaushaltes besondere Bedeutung zu. Wir wollen diesen Energiehaushalt im folgenden ein wenig beleuchten, wobei wir uns — um die Darstellung einfach und übersichtlich zu gestalten — auf einen kreisförmigen Zweigelenkbogen mit „Stützlinienbelastung“ beziehen und hinsichtlich des Lastverhaltens den „Fall III“ voraussetzen. Die kritischen Lasten und die ihnen zugeordneten Verschiebungskomponenten u, v werden dann durch die einfachen, geschlossenen Beziehungen (33) und (34) bestimmt, so daß es keine Schwierigkeiten bereitet, die relative Größe der Änderungen zu berechnen, die die gesamte potentielle Energie des belasteten Bogens beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur erfährt. Führen wir (33) und (34) in (4), (5), (8) ein und beachten wir die Gl. (29), dann erhalten wir nach Streichung der von mehr als zweiter Ordnung kleinen Glieder der Reihe nach

$$(38) \quad A_1 = \frac{EJr}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} x^2 d\varphi + \frac{EFr}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} z^2 d\varphi \\ = + \frac{EJC^2}{2r^3} \cdot \varphi_0 \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\varphi_0^2},$$

$$(39) \quad A_2 = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} N_k \cdot \varepsilon r d\varphi \\ = - \frac{EJC^2}{2r^3} \cdot \varphi_0 \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \left(3 + \frac{\pi^4}{\varphi_0^4} - 2 \cdot \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \right),$$

¹¹⁾ A. Lockschin, Z. f. angew. Math. 1936, S. 49.

¹²⁾ Vgl. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, New York und London 1936, S. 229.

⁸⁾ Vgl. auch E. Chwalla, Sitzungsber. Akad. Wiss., Wien IIa, 1927, S. 645.

⁹⁾ Diese Formel findet sich schon bei E. Hurlbrink (Schiffbau 1907/08, S. 640), S. Timoshenko (loc. cit.) und R. Mayer (Z. Math. Phys. 61, 1913, S. 318). Die strenge Differentialgleichung sechster Ordnung [siehe Gl. (30)] wurde zuerst von K. Federhofer (Eisenbau 1921, S. 291) angegeben; sie liegt auch den Knickuntersuchungen zugrunde, die S. Woinowsky-Krieger (Stahlbau 1937, S. 185) für den Kreisbogenträger mit Zwischen-gelenken durchgeführt hat.

¹⁰⁾ M. Lévy, Journ. de Liouville 1884, S. 5.

$$(40) \quad V_1 = p_k r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \dot{u} d\varphi - \frac{p_k}{2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} v \left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) d\varphi \\ = + \frac{EJC^2}{2r^3} \cdot \varphi_0 \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\varphi_0^2} - 3 \right),$$

wobei C den in der Gl. (34) auftretenden, an der Stabilitätsgrenze unendlich klein zu denkenden Parameter bedeutet. Die Größe $(A_1 + A_2 - V_1)$ stellt die Änderung der gesamten potentiellen Energie des belasteten Bogens beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage vor und ist — wie wir mit Hilfe von (38), (39) und (40) leicht feststellen können — gleich Null; die im 1. Abschnitt abgeleitete Gl. (13) ist demnach tatsächlich erfüllt.

Ist nun ein Kreisbogen vom Radius r und der Biegesteifigkeit EJ gegeben, und führen wir eine numerische Berechnung der Größe $(A_1 + A_2 - V_1) = 0$ für verschieden große Kämpferwinkel φ_0 (also verschieden große Pfeilverhältnisse des Bogens) durch, dann gelangen wir auf die in der Tafel 2 zusammengestellten Zahlenwerte. Wir erkennen, daß der erste der drei eingeklammerten Zahlenwerte und damit auch A_1 immer positiv ist, daß somit die potentielle Energie der Federkraft des Bogens beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage als Folge der Verbiegung grundsätzlich zunimmt, wobei der Betrag dieser Energiezunahme allerdings um so kleiner ist, je größer φ_0 , je größer also das Pfeilverhältnis des Bogens ist. Weiter sehen wir, daß der zweite der drei eingeklammerten Zahlenwerte und daher auch die Größe A_2 immer negativ ist. Die Bogenachse wird beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage ein wenig gedehnt, so daß sich der axial gedrückte Bogen ein wenig entspannt und ein Energiebetrag A_2 frei wird, der — wie ein Blick auf die Tafel 2 lehrt — in den Fällen $\varphi_0 < \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

nahezu so groß wie der Energieaufwand A_1 und in den Fällen $\varphi_0 \cong \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ gleich oder größer als dieser Energieaufwand ist.

Die von den äußeren Kräften beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage geleistete Verschiebungsarbeit V_1 deckt den Unterschied zwischen dem Energiebedarf A_1 und dem zur Verfügung stehenden Energiebetrag A_2 und macht auf diese Weise $(A_1 + A_2 - V_1)$ zu Null. Sie nimmt für $\varphi_0 < \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ durchweg positive Werte an, ist im

Sonderfall $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ gleich Null und wird in den Fällen $\varphi_0 > \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ negativ, so daß die potentielle Energie der äußeren Belastung beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtslage keine Reduktion, sondern eine Erhöhung erfährt. In den praktisch wichtigeren Fällen $\varphi_0 < \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ist V_1 — wie die Zahlenwerte in der Tafel 2 lehren — relativ sehr klein,

so daß hier der Knickvorgang vornehmlich durch eine rein innere Umlagerung von potentieller Energie (Umwandlung von frei werdender Dehnungsenergie in aufzuwendende Biegeenergie) eingeleitet wird. Die Aufgabe der äußeren Belastung besteht dann bei der Auslösung des Knickvorganges vor allem darin, im Bogen eine axiale Pressung zu erzeugen, die genügt, um die beim Ausknicken frei werdende Dehnungsenergie auf den erforderlichen Betrag zu heben.

Tafel 2.

φ_0	$\left(\frac{r^3}{EJ}\right) p_k$	$\left(\frac{2r^3}{EJC^2}\right) (A_1 + A_2 - V_1) = 0$
$\frac{\pi}{6}$	30°	35,00
$\frac{\pi}{4}$	45°	15,00
$\frac{\pi}{3}$	60°	8,00
$\frac{\pi}{2}$	90°	3,00
$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	≈ 104°	2,00
$\frac{7\pi}{10}$	126°	1,04
$\frac{8\pi}{10}$	144°	0,562
$\frac{9\pi}{10}$	162°	0,235
		23 090,71 — 22 485,95 — 604,76
		2 827,43 — 2 674,28 — 153,15
		603,19 — 552,92 — 50,27
		56,55 — 51,84 — 4,71
		21,77 — 21,77 — 0,00
		4,862 — 7,057 + 2,195
		1,243 — 3,275 + 2,032
		0,192 — 1,363 + 1,171

Führen wir die gleiche Untersuchung bei einem Kreisbogen durch, dessen Elementarlasten ($p_k \cdot ds$) die Eigenschaft besitzen, ihre Richtung auch während des Ausknickens des Bogens beizubehalten („Fall I“), dann wird nicht nur für $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, sondern auch für alle anderen Werte φ_0

die Beziehung $V_1 = 0$ erfüllt. Die beim Ausknicken als Folge der axialen Entspannung frei werdende Dehnungsenergie muß hier bei allen Pfeilverhältnissen des Bogenträgers befähigt sein, den Bedarf an Biegeenergie restlos zu decken, so daß der Knickvorgang hier immer durch eine rein innere Umlagerung von potentieller Energie gekennzeichnet ist. Die Aufgabe der äußeren Belastung besteht bei der Auslösung des Knickvorganges vom Standpunkt der Energiebilanz hier immer bloß darin, im Bogen einen axialen Druck zu erzeugen, der ausreicht, die beim Ausknicken frei werdende Dehnungsenergie auf den zur Deckung der Biegeenergie erforderlichen Betrag zu heben. (Schluß folgt.)

Alle Rechte vorbehalten.

Kontinuierliche Rostträgerbrücken.

Von Dipl.-Ing. Friedrich Geiger Dortmund.

Es wird der Einfluß der Kontinuität der Hauptträger von Rostträgerbrücken auf das Lastverteilungsvermögen gegenüber statisch bestimmten Hauptträgern untersucht und ein einfacher Rechnungsgang für lastverteilende Querscheiben gegeben.

Einleitung.

Im Brückenbau werden häufig mehrere Hauptträger mit Querscheiben so verbunden, daß ein Trägerrost gebildet wird. Besonders in neuester Zeit sieht man solche Bauwerke beim Bau der Reichskraftfahrbahnen entstehen.

Die Wirkungsweise einer solchen Rostbrücke besteht nun darin, daß eine an einer beliebigen Stelle stehende Last sämtliche Rostglieder unter Spannung setzt: „Die Last verteilt sich“. Die unmittelbar von der Last getroffenen Glieder werden entlastet und weiter entfernt liegende zum Mittragen gezwungen. Daß in einer solchen Wirkungsweise besondere wirtschaftliche Vorteile liegen, dürfte sehr leicht einzusehen sein. Werden die Spannungen und Durchbiegungen kleiner, so lassen sich aus solch günstiger Lastverteilung besonders geringe Bauhöhen — eine der bedeutendsten Forderungen im heutigen Brückenbau — erzielen; auch nicht zuletzt können die Fahrbahndecken wesentlich leichter gehalten werden.

Die Forderungen des Vierjahresplanes verlangen eine äußerst sparsame Verwendung von Stahl. Das konstruktive Bauen muß daher den statischen Erfordernissen genügen. Unnütze Materialanhäufungen, Überbemessung von Konstruktionen sind Stellen der Verschwendung, die wir uns nicht leisten können. Um Werkstoff- und Gesamtkosten klein halten zu können, muß bei den Brücken für ein günstiges Verhältnis zwischen ständiger Last und Verkehrslast gesorgt werden. Und bei den sich infolge der

großzügigen Linienführung unserer Autobahnen ergebenden teilweise ganz gewaltigen Bauwerken, bei denen die ständige Belastung eine ausschlaggebende Rolle spielt, müssen die Möglichkeiten des immer leichteren Überspannens größerer Öffnungen gesucht werden.

Der Rost verdrängt die alte unwirtschaftliche Trägerwirkung. Ist die Erkenntnis der Rostwirkung schon sehr alt, so ist doch ihre Ausnutzung wegen gewisser Rechnungsschwierigkeiten sehr oft gemieden worden. Für die Praxis soll jede Rechnung klar und durchsichtig und dabei für einen größeren Kreis leichtverständlich sein.

In der bekannten Bemessung von Rostträgerbrücken wird für lastverteilende Querscheiben der Einfluß der Kontinuität der Hauptträger unberücksichtigt gelassen, man rechnet mit der Bemerkung „vernachlässigbar“ die Lastverteilung so, als ob die Hauptträger Balken auf 2 Stützen wären. Da man andererseits bei häufigem Vorkommen nicht gern willkürlich überdimensionieren wird, lohnt es sich, die Voraussetzungen zu untersuchen, unter denen eine äußerste Materialausnutzung möglich ist, ohne andererseits zu günstige Annahmen zu machen. In dieser vorliegenden Arbeit will ich einen Weg gehen, der die Berechnung nicht sonderlich erschwert und zum anderen einen ausreichenden Aufschluß über die wirklichen Verhältnisse gibt.

Theoretische Grundlagen.

Bei der Berechnung eines Rostes kommt es darauf an, die anteilmäßige Belastung der Hauptträger zu erfassen.

In Bild 1 ist eine Rostbrücke gezeichnet, bestehend aus 4 Hauptträgern auf 3 Stützen mit den Stützweiten l_1 und l_2 , der ganzen Rostlänge l . Die Hauptträger liegen in den Abständen λ_1 , λ_2 und λ_3 . Diese Abstände sind gleichzeitig die Stützweiten der Querscheiben.

Ist der gesamte Trägerrost an sich ein hochgradig statisch unbestimmtes System, das in seiner exakten Rechnung zu partiellen Differenzgleichungen führt, deren Lösung für die Praxis nicht gerade einfach zu nennen ist, so kann unter Beachtung der für die Praxis ausreichenden Erfordernisse eine Lösung angegeben werden.

Ich teile die Roste in zwei große Kapitel ein:

- a) starre Querverteilung,
- b) elastische Querverteilung.

Gemäß der Verbindung der Rostglieder an den Kreuzungspunkten zerlege ich die letztere Gruppe in

- α) Roste mit gelenkigen Knoten,
- β) Roste mit steifen Knoten.

Die am meisten in der Praxis anzufindende Berechnung der Lastverteilung ist die der starren Querverteilung. Die Berechnung ist sehr einfach, man geht von völlig starren Querscheiben aus und rechnet so, daß bei zentraler Belastung der Brückenquerschnitt unverändert gerade bleibt und nur bei unsymmetrischer Belastung lediglich Verdrehungen erfährt.

Da für die Dimensionierung eines Rostes die Profile bekannt sein müssen, geht man bei einer Neuberechnung so vor, daß man zunächst in einer Überschlagsrechnung von starren Querscheiben ausgeht, da, wie später an einem Beispiel gezeigt wird, das Gesamtergebnis für elastische Querscheiben von dem starren Querscheiben nicht allzu weit abweicht.

Die einzelnen Glieder eines Rostes stellen, einzeln für sich betrachtet, durchlaufende Träger auf elastisch senkbaren und elastisch verdrehbaren Stützpunkten dar. Die elastische Verdrehbarkeit stellt die Steifheit der Knoten vor. Die Verbindungen an den Kreuzungspunkten bewirken, daß sich eine Winkeldrehung an alle anderen Glieder mitteilt. Es werden also Momente durch die Knotenverbindungen überführt; die konstruktive Ausbildung dieser Knoten wird demgemäß die Verteilung beeinflussen.

Die wenige Literatur, die über Trägerroste zu finden ist, behandelt mit nur wenigen Ausnahmen den Einfluß der Verdrehungsmomente nicht. Bei Vernachlässigung der elastisch verdrehbaren Stützpunkte werden die einzelnen Glieder des Rostes zu durchlaufenden Trägern auf elastisch senkbaren Stützpunkten. In der Benutzung des Dreimomentensatzes von Clapeyron erscheinen dann als Unbekannte die Senkungen dreier aufeinander folgender Stützpunkte und die Stützmomente, die für beide Richtungen an jedem Knoten aufzustellen sind. Eine dritte Gleichung ergibt sich dann aus der Gleichgewichtsbedingung in lotrechter Richtung an jedem Knoten.

Für die Lastverteilung in einem Trägerrost ist es für verschiedene Lastarten wie Einzellasten, Streckenlasten usw., sehr nützlich, die auf die einzelnen Hauptträger entfallenden Lastanteile aus sogenannten Quereinflußlinien zu ermitteln.

Ausgehend von den Quereinflußlinien der starren Querverteilung, werden für elastische Querverteilung Quereinflußlinien zunächst für Roste mit gelenkigen Knoten, also ohne Verdrehungsmomente, und dann in einem weiteren Rechnungsgang solche mit elastisch verdrehbaren Stützpunkten behandelt. Durch diese Zerlegung wird jeder Einfluß durchsichtig und klar.

In der Untersuchung des Einflusses der Kontinuität der Hauptträger von Rostbrücken ist die Kenntnis des Einflusses der Verdrehungsmomente unbedeutend. Dieser letzte Einfluß erscheint in einer späteren größeren Arbeit.

Federkonstante.

Bei elastischer Querverteilung ist die Lagerung der Querscheiben nachgiebig. Dieses Nachgeben in den Querscheibenaufslagern rührt von der Weichheit der Hauptträger her.

Die Nachgiebigkeit der Hauptträger wird in einer Federkonstanten δ_K ausgedrückt. Man versteht darunter dasjenige Maß δ_K einer Durchbiegung, das von einer Last $P=1$ erzeugt wird.

Für alle vorkommenden Fälle kann für die Federkonstante allgemein geschrieben werden:

$$(1) \quad \delta_K = \mu \cdot \frac{l^3}{E J_H}$$

Hierin bedeutet:

- l = Rostlänge = Hauptträgerlänge,
- J_H = Trägheitsmoment des Hauptträgers,
- E = Elastizitätsmaß abhängig vom Werkstoff,
- μ = einen Wert, der von zwei Varianten abhängig ist:

1. Variante ist die statische Lagerung des Hauptträgers,
2. Variante ist der Ort der Querscheibe am Hauptträger.

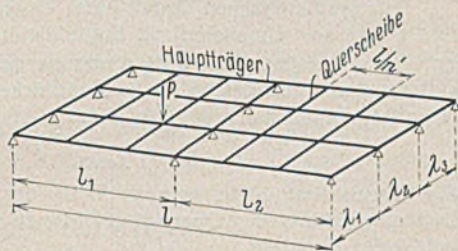


Bild 1.

Für eine Reihe von häufig vorkommenden Fällen werden μ -Kurven abgeleitet, z. B. Träger auf 2 Stützen, Träger auf 3 Stützen usw. Für diese Sonderfälle ist dann der Wert μ nur noch eine Funktion des Querscheibenortes, also

$$\mu = f\left(\frac{l}{n}\right),$$

wenn n = Querscheibeneinteilung ist.

Mit Hilfe des Maxwell'schen Vertauschungssatzes findet man rasch die Federkonstante bei statisch unbestimmt gelagerten Hauptträgern durch den Ausdruck

$$(2) \quad \delta_K = 1 e_{aa} - C e_{aC} - D e_{aD}.$$

Hierin ist e eine Einflußzahl, C und D sind die inneren Auflagerkräfte eines statisch unbestimmt gelagerten Hauptträgers.

Der Hauptträger auf 2 Stützen (Bild 2).

Das Trägheitsmoment werde als gleichbleibend über den ganzen Hauptträger angenommen, was aber nicht unbedingt erforderlich ist.

Aus der Gleichung der elastischen Linie $y'' = -\frac{M(x)}{EJ}$ ergibt sich

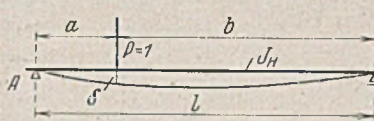


Bild 2.

nach zweimaliger Integration unter Beachtung der Rand- und Übergangsbedingungen die Federkonstante

$$(3) \quad \delta_K = e_{aa} = \frac{a^2 b^2}{3 E J_H l}.$$

Für eine Reihe von Querscheibenteilen $\frac{l}{n}$ lassen sich die μ -Werte bilden, deren Kenntnis eine wesentliche Rechnungserleichterung bringt. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Querscheibenteile als Abszisse und die zugehörigen μ -Werte als Ordinaten auf, so erhält man die μ -Kurve oder auch Einflußlinie der Durchbiegung, aus der dann für jede Querscheibe sofort der zugehörige μ -Wert angegeben werden kann.

Setzt man in vorstehender Gleichung $a = \xi l$ den Abstand des betrachteten Querscheibenortes vom linken Auflager A und $b = \xi' l$ den Abstand vom rechten Auflager B, dann ergibt sich der μ -Koeffizient für den Querscheibenort eines Trägers auf 2 Stützen zu

$$(4) \quad \mu = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \xi'^2.$$

Ist n die Anzahl der Querscheiben, dann ist $\xi = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n'}$ und $\xi' = \frac{n}{n+1}$, soweit der μ -Wert

$$(4a) \quad \mu = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

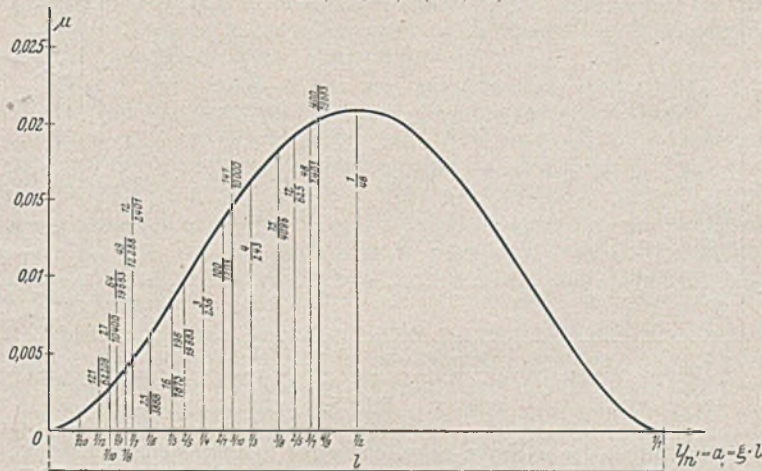


Bild 3.

In Bild 3 sind die μ -Werte für häufig vorkommende Fälle eingetragen. Zwischenwerte lassen sich mit für die Rechnung ausreichender Genauigkeit entnehmen.

Der Hauptträger auf 3 Stützen.

Es wird die μ -Kurve für gleiche Feldweiten (Bild 4) und konstantes Trägheitsmoment entwickelt. Für verschiedene Feldweiten wird die Federkonstante allgemein angegeben, aus der dann für bestimmte Stützweitenverhältnisse sehr leicht die μ -Kurven gezeichnet werden können.

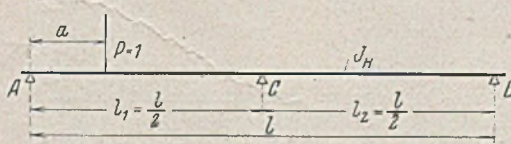


Bild 4.

Für einen beliebigen Querscheibenort im Abstand a vom Auflager A beträgt die Federkonstante nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen

$$\delta_K = 1 e_{aa} - C e_{aC}$$

Hierin ist der Auflagerdruck C noch unbekannt. Dieser wird mit demselben Satz ermittelt in der Weise, daß man in „ C “ die Verschiebung aufstellt und gleich Null setzt.

$$\delta_C = 1 e_{Ca} - C e_{CC} = 0, \text{ daraus } C = \frac{e_{Ca}}{e_{CC}}$$

Die allgemeine Form der Einflußzahl e_{ab} lautet:

$$(5) \quad e_{ab} = \frac{a b}{6 E J_H l} (l^2 - a^2 - b^2),$$

d. h. die Durchbiegung im Träger auf 2 Stützen an der Stelle „ b “, hervorgerufen durch eine Last $P=1$ an der Stelle „ a “.

Der statisch unbestimmt gelagerte Träger wird dann mit den Endlagern als statisch bestimmt gelagerter Träger aufgefaßt und an die Stellen der inneren Lager werden Kräfte angebracht.

Somit wird:

$$C = \frac{a}{l^3} (3 l^2 - 4 a^2)$$

und damit die Federkonstante

$$\delta_K = \frac{a^2(l-a)^2}{3 E J_H l} - \frac{a}{l^3} (3 l^2 - 4 a^2) \frac{a \cdot \frac{l}{2}}{6 E J_H l} \left[l^2 - a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right] \text{ zu}$$

$$(6) \quad \delta_K = \frac{1}{48 E J_H} \cdot \frac{a^2}{l^3} [16 l^2(l-a)^2 - (3 l^2 - 4 a^2)^2]$$

Die μ -Kurve des Hauptträgers auf 3 Stützen.

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$$

$$\delta_K = \mu \cdot \frac{l^3}{E J_H} \text{ ist allgemein die Federkonstante.}$$

Für den Querscheibenort $a = \xi l$ gesetzt, ergibt sich allgemein der μ -Koeffizient zu

$$(7) \quad \mu = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \left[(1-\xi)^2 - \left(\frac{3}{4} - \xi^2 \right)^2 \right]$$

In Bild 5 ist die μ -Kurve für jeden Querscheibenort gezeichnet.

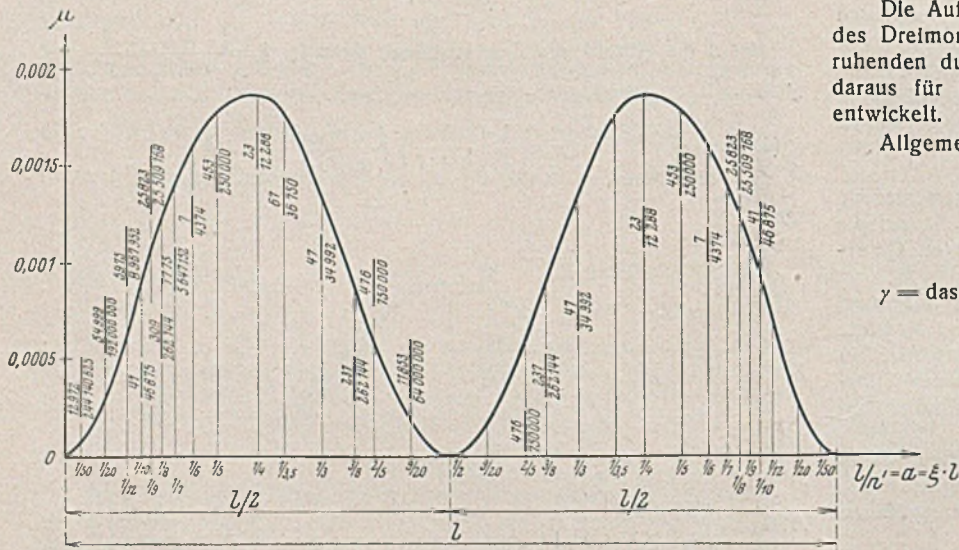


Bild 5.

Der Verlauf der μ -Kurve zeigt, daß diese innerhalb einer Feldweite nicht mehr symmetrisch ist wie beim Träger auf 2 Stützen. Nur über die ganze Rostlänge hat die μ -Kurve in $\frac{l}{2}$ eine Symmetrieachse. Teilt

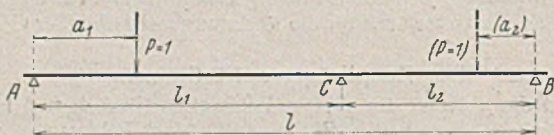


Bild 6.

man demnach ein Feld in gleiche Querscheibenabstände, so ist die Lastverteilung für jede einzelne Querscheibe eine andere, da die Federkonstante anders ist.

Der Hauptträger auf 3 Stützen mit ungleichen Feldweiten (Bild 6)

$$l_1 \neq l_2$$

Ganz analog wie vorausgegangen erhält man für

Feld l_1 :

$$(8) \quad \delta_{K_1} = \frac{1}{12 E J_H} \cdot \frac{a_1^2}{l_1^2} [4 l_1^2 (l - a_1)^2 - (l^2 - a_1^2 - l_2^2)^2],$$

Feld l_2 :

$$(8a) \quad \delta_{K_2} = \frac{1}{12 E J_H} \cdot \frac{a_2^2}{l_2^2} [4 l_2^2 (l - a_2)^2 - (l^2 - a_2^2 - l_1^2)^2],$$

wenn a_2 hier den Querscheibenabstand vom rechten Auflager B bedeutet.

Für Stützweitenverhältnisse z. B., $l_1 = 0,8 l_2$, $l_1 = 1,2 l_2$ usw., lassen sich daraus Kurventafeln der μ -Koeffizienten bilden.

Quereinflußlinien.

Den größtmöglichen Anteil einer Lastgruppe auf die Rosthauptträger erhält man am schnellsten mit Einflußlinien.

Bezeichnet man mit η die Ordinate der Quereinflußlinie, mit P die auftretenden Einzellasten, z. B. Raddrucke, so ist der Lastanteil eines Hauptträgers dann nur das Produkt:

$$P_{\text{Anteil}} = P \eta.$$

Für Streckenlast hätte man an Stelle der Ordinate η mit der von der Last eingeschlossenen Quereinflußfläche zu rechnen. Diese Flächen lassen sich leicht ermitteln.

Bei Brücken in Krümmungen — Gleisbrücken in Kurven — ist die Lastverteilung mit solchen Quereinflußlinien sehr vorteilhaft. Arbeitet man bei den Hauptträgern mit Einflußlinien, so läßt sich durch eine entsprechende Verzerrung die Lastverteilung in diese hineinnehmen.

Bei der Aufstellung von Quereinflußlinien können folgende Fälle unterschieden werden:

1. Abstand der Hauptträger ist untereinander verschieden (Bild 7)
 $l_1 \neq l_2 \neq l_3 \neq \text{usw.}$
2. Trägheitsmomente der Hauptträger sind verschieden
 $J_{0H} \neq J_{1H} \neq J_{2H} \neq J_{3H} \neq \text{usw.}$
3. Trägheitsmomente der Querscheiben sind verschieden
 $J_{Q_1} \neq J_{Q_2} \neq J_{Q_3} \neq \text{usw.}$

Die Aufstellung der Quereinflußlinien geschieht nun so, daß mit Hilfe des Dreimomentensatzes die Stützmomente der auf elastischen Stützen ruhenden durchlaufenden Querscheiben ermittelt werden und daß man daraus für den Lastfall des betrachteten Hauptträgers die Ordinaten entwickelt.

Allgemein ist dann:

$$x_1 l_1' + 2 x_2 (l_1' + l_2') + x_3 l_2' = 6 E J \gamma \text{ usw.}$$

$$l_1' = l_1 \cdot \frac{J_c}{J_{Q_1}} \text{ usw.}$$

γ = das Maß der elastischen Stützung

$$\gamma = \frac{1}{l_1} (\delta_1 - \delta_0) + \frac{1}{l_2} (\delta_1 - \delta_2)$$

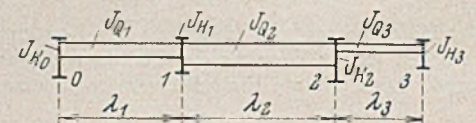


Bild 7.

Mit der Federkonstanten δ_K ergeben sich die Stützensenkungen zu

$$\delta_0 = \delta_{K_0} A \quad \delta_1 = \delta_{K_1} B \quad \delta_2 = \delta_{K_2} C \text{ usw.,}$$

worin A, B, C usw. die Auflagerdrücke bedeuten.

Für die am häufigsten im Brückenbau vorkommenden Fälle ist $l_1 = l_2 = l_3 = l$, ferner $J_{Q_1} = J_{Q_2} = J_{Q_3} = J_Q$ und auch $J_{H_1} = J_{H_2} = J_{H_3} = J_H$; demnach wird $\delta_{K_1} = \delta_{K_2} = \delta_{K_3} = \delta_K$ — letzteres braucht für die folgende Ableitung nicht der Fall zu sein —, so lassen sich für eine Reihe von oft sich wiederholenden Fällen für die Ordinaten der Quereinflußlinien fertige Formeln angeben. (Schluß folgt.)

INHALT: Beiträge zum Knickproblem des Bogenträgers und des Rahmens. — Kontinuierliche Rostträgerbrücken.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.