

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43

Fernsprecher: 87 7421

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

11. Jahrgang

BERLIN, 5. August 1938

Heft 16

Alle Rechte vorbehalten.

Zur Mechanik des Fließvorganges.

Von Prof. Dr. techn. J. Fritsche, Prag, Deutsche Technische Hochschule.

In Fachkreisen setzt sich immer mehr die Überzeugung durch, daß die bisherigen, durch Deutung der Versuche gewonnenen Fließbedingungen nur bei gleichmäßigen Spannungszuständen angewendet werden dürfen und daß der Fließvorgang bei ungleichmäßigen Spannungszuständen (Spannungsfeldern) von neuen, zusätzlichen Erscheinungen beherrscht wird, die noch einer sorgfältigen, sowohl versuchsmäßigen als auch gedanklichen Durchforschung bedürfen und auf die bei der Aufstellung der Fließbedingung zu achten sein wird. Diese Fließbedingung muß auch zahlenmäßig alle jene Umstände erfassen, die auf den Fließvorgang Einfluß nehmen; sie ist die Grundlage der Plastizitätslehre, und es ist einleuchtend, daß ohne sorgfältig durchdachte und versuchsmäßig wohl begründete Fließbedingung ein wirklicher Fortschritt in der Durchdringung dieser Fragen nicht erzielt werden kann. Das bisherige Schrifttum enthält zur Beurteilung von Fließvorgängen bei Spannungsfeldern lediglich die Fließbedingungen von Prager¹⁾ und Kuntze²⁾, die beide wohl einzelne Beobachtungen zutreffend beschreiben, doch grundlegende Zusammenhänge nicht erkennen lassen und nicht vermögen, ihre Vorstellungen in gedankliche Verbindung mit den bisherigen Auffassungen in der Festigkeitslehre zu bringen; sie erscheinen deshalb fremd und unbefriedigend und sie konnten sich daher nur wenig durchsetzen.

Bei einer rechnerischen Behandlung von Festigkeitsfragen wird man sich wohl niemals vom Kontinuumsbegriff frei machen können; es wird sich daher bei der Aufstellung einer Fließbedingung nur darum handeln, dem Kontinuum neue, rechnerisch festgelegte Eigenschaften zuzuordnen, die naturgemäß nur grobmechanischer oder statistischer Art sein und nur in diesem Sinne richtig sein können, als sie die grobmechanischen Beobachtungen zutreffend wiedergeben. Die Gesetze selbst sind nur aus dem strukturellen Aufbau des Werkstoffes heraus zu verstehen.

Alles Fließen geht auf das Gleiten und auf das Trennen, auf Plastizität und auf Kohäsionsüberwindung im Kristallhaufwerk zurück, und man wird bei der Aufstellung der Fließbedingung immer wieder auf diese beiden „plastischen Formänderungselemente“ Rücksicht zu nehmen haben. Ich habe vor kurzem ausgeführt³⁾, wie man sich die Fließvorgänge im Baustahl zu denken hat, und im folgenden soll nun versucht werden, diese allgemeinen Überlegungen durch rechnerische Ansätze zu ergänzen. Es ist dort auseinandergesetzt worden, daß bei gleitfähigen Bestandteilen des Haufwerkes zwei hauptsächliche Formen des Gefüges zu unterscheiden sind:

1. lückenlose Lagerung der einzelnen Kristallite; sie führt zu einem Fließen in Schichten und damit zu einem Anpassen der Werkstoffeigenschaften an den Verlauf des Spannungsfeldes;

2. porenreiches Gefüge mit reichlichen Einschlüssen fremder Beimengungen milderer Festigkeit und Bindung; es führt infolge verfrühter Kohäsionsüberwindung an den Spannungsspitzen zu einem plastischen Abbau derselben und hat durch „örtliches“ Fließen eine Anpassung des Spannungsfeldes an die Werkstoffeigenschaften zur Folge. Für den Baustahl ist die erste Gefügeform die maßgebendere; wenn er sich in seinem tatsächlichen Verhalten auch nicht völlig mit dieser Idealisierung deckt und immer auch Anklänge an die zweite Form durchbrechen, so können die Fließvorgänge in ihren wesentlichen Erscheinungsformen nur auf Grund der unter 1. angeführten Auffassung verstanden werden.

Die Fließlinien folgen den Hauptschubspannungslinien des Spannungsfeldes, und der Fließvorgang, der in einer Fließschichtenbildung durch „Abgleiten“ oder durch „Biegefließen“ längs einer solchen Hauptschubspannungslinie besteht, ist nicht bestimmt durch die Höhe der Spannungs-

¹⁾ W. Prager, Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933, Bd. 83.

²⁾ W. Kuntze, Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Stahlbau 1933, S. 49.

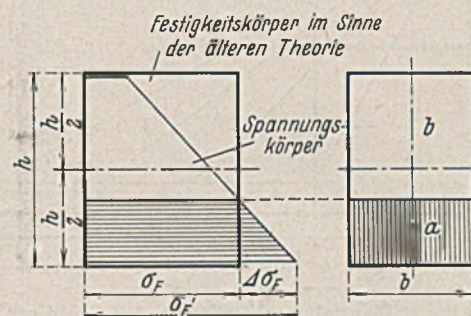
³⁾ J. Fritsche, Die Fließbehinderung bei der Biegung von Balken und Stützen aus Baustahl. Stahlbau 1938, S. 54.

spitze allein, sondern durch die gesamte Spannungsverteilung längs der Fließschicht oder wenigstens durch größere Teile derselben. Abgleiten und Biegefließen sind grundsätzlich die gleichen Vorgänge; durch eine Kohäsionsüberwindung an der Spannungsspitze wird das Gefüge längs einer Fließschicht aufgelockert, die Kristalle dieser Schicht vermögen nun entweder ihre Gleitrichtungen parallel zu stellen und dadurch ein Abgleiten zweier Teile des Körpers aneinander hervorzurufen oder entsprechend dem angelegten Spannungsfelde in gesetzmäßig veränderliche Richtung einzudrehen, so daß eine von der elastischen nur der Größe nach verschiedene plastische Winkeländerung zustande kommt (Biegefließen).

Bei linear veränderlichen Spannungsfeldern, wie sie bei reiner Biegung und bei Längsdruck mit Biegung auftreten, sind die Hauptschubspannungslinien unter 45° zur Stabachse geneigte Gerade, längs welcher auch die Schubspannungen linear veränderlich sind. Da man über die ertragbare Grenzspannung, bei der der Zusammenbruch des Zementitgerüstes das Gleiten in den welchen Ferritkörnern auslöst, derzeit keine theoretischen Überlegungen anstellen kann, folgt, daß man bei linear veränderlichen Spannungsfeldern aus der Längsspannungsverteilung im Querschnitt die Fließbedingung in derselben Weise entwickeln kann wie aus der Schubspannungsverteilung längs einer Hauptschubspannungsfläche. Ist die Hauptschubspannungslinie keine Gerade und die Schubspannungsverteilung nicht linear, so würde sich bei einer Übertragung der Untersuchung in die Querschnittsfläche das Rechenergebnis um so mehr von den wirklichen Voraussetzungen entfernen, je stärker diese Verallgemeinerungen zur Geltung kommen. Beim gelochten oder beim gekerbten Zugstabe wäre daher die Kenntnis der Spannungsverteilung im nutzbaren Querschnitt zur Aufstellung der Fließbedingung streng genommen noch nicht ausreichend.

Bei Voraussetzung eines elastisch-idealplastischen Werkstoffes hat die bisherige Plastizitätslehre angenommen, daß ein plastischer Abbau der Spannungsspitze beginnt, wenn dort die Längsspannung den Wert σ_F bzw. die Schubspannung den Wert $\tau_F = \frac{\sigma_F}{2}$ erreicht hat. Der Spannungsabbau ist an die Möglichkeit eines örtlichen Fließens gebunden; wenn man aber beachtet, daß bei dichter Lagerung der einzelnen Kristallite des Haufwerkes Fließen nur in der Form von Fließschichtenbildung auftreten kann, so erscheint die ausschließliche Bindung der Fließbedingung an den Knick in der Spannungs-Dehnungs-Linie des Zugversuches zu eng. Fließen ist strukturell nichts anderes als ein seitliches Ausweichen des Werkstoffes vor der Inanspruchnahme durch die äußeren Lasten und wird ermöglicht durch Gleitschichten- und Zwillingbildung in den Kristallen; man darf aber dabei nicht übersehen, daß ein solcher Vorgang erst auftreten kann, wenn ein in der Fließschicht voranstehendes Element dem nachfolgenden Platz macht; alle Elemente längs einer Schicht müssen diesen Vorgang gleichzeitig mitmachen. Unterbeanspruchte Querschnittsteile müssen danach das Fließen so lange hemmen, bis ein Kohäsionsbruch an der Spannungsspitze diese Erscheinung auslöst (Bild 1).

Die obigen Überlegungen gelten zunächst nur für den Fall des einseitigen Fließeinbruches; für die reine Biegung dürften sie nicht angewendet



a) Überbeanspruchter, nach der älteren Theorie plastizierter Querschnittsteil.

b) Unterbeanspruchter Querschnittsteil, der elastische Kern nach der älteren Theorie.

Bild 1. Die Voraussetzungen der älteren Plastizitätstheorie.

werden, bei der ja ein beiderseitiger Fließeinbruch stattzufinden scheint. Über die Fließschichtenbildung bei reiner Biegung ist aber das folgende zu sagen: Sie erfolgt durch den Zusammenbruch des Zementitgerüsts an einer beliebigen Stelle des bedrohten Randes, die strukturell festgelegt ist und innerhalb bestimmter Grenzen durch Zufälligkeiten im Feingefüge bestimmt wird. Bei niedrigen Balkenhöhen reißt der Fließeinbruch am Druckrande den ganzen Querschnitt mehr oder weniger plötzlich durch. Man wird nun aber nicht gut annehmen können, daß in derselben Fließschicht bei reiner Biegung auch im bedrohten Zugteil dieselbe Zufälligkeit vorhanden ist, so daß dadurch eine verfrühte Fließschichtbildung zu erwarten wäre, daß nun gleichzeitig von zwei Seiten aus ein Angriff zur Auslösung derselben erfolgt. Man wird eher zu der Annahme gezwungen sein, daß nach einer Fließschicht, die durch Einbruch im Druckteil ausgelöst worden ist, eine solche auftreten wird, deren Ursache in einem Versagen des bedrohten Zugteils zu suchen ist. Im Falle der reinen Biegung werden daher Fließschichten nacheinander von beiden bedrohten Rändern aus auftreten, ohne daß sich die Bedrohung beider Ränder in ein und dieselbe Fließschicht auswirkt. Dieser Auffassung habe ich bereits früher⁴⁾ durch Ausdehnung der Kuntzeschen Widerstandsmittelbildung auf das ganze Spannungsfeld Rechnung getragen und schon dadurch verbesserte Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie erzielt.

Es entsteht nun die Frage, wie weit der elastische Spannungszustand in der Spitze über σ_F hinaus gesteigert werden muß, bevor dort eine Kohäsionsüberwindung eintritt, die bewirkt, daß von der Bruchstelle aus eine Fließschicht bis zu bestimmter Tiefe des Querschnitts vordringt. Es ist nicht notwendig, daß diese in einem Stoße die ganze Höhe des Körpers durchsetzt; sie kann in entweder vorhandenen oder durch verfrühte örtliche Brüche geschaffene Lockerstellen des Gefüges einmünden. Den ganzen Querschnitt durchsetzende Fließschichten werden nur bei Körpern geringer Höhe möglich sein. Bezeichnet man die Festigkeit gegen innere Gefügeveränderungen an der Spannungsspitze mit σ_F , so besteht nun auf Grund der vorstehenden Überlegungen kein Zweifel, daß $\Delta\sigma_F = \sigma_F' - \sigma_F$ von der Form des Querschnitts und unter Umständen auch von der Oberflächen-gestaltung abhängig sein muß. Die oberste Grenze für ein völliges Durchschießen der Fließschicht wäre wohl dann gegeben, wenn der elastische

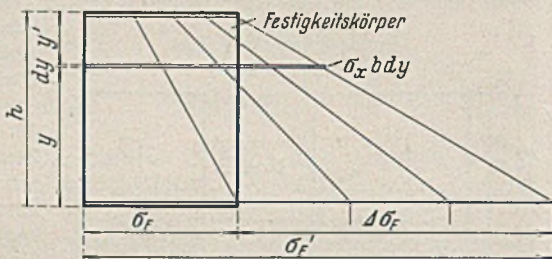


Bild 2.

Kern des Querschnitts verschwunden wäre, d. h. wenn auch die kleinste Querschnittsspannung die Grenzspannung σ_F erreicht hätte. Ganz abgesehen davon, daß sich diese Forderung im Falle der reinen Biegung gar nicht verwirklichen läßt, führt sie auch im Falle der Biegung mit Längskraft auf eine ertragbare Längskraft $P_T > \sigma_F F$, was erfahrungsgemäß nicht möglich ist, da eine Stütze höchstens einen mittigen Druck von der Größe $P_T = \sigma_F F$ aufnehmen und die Wirkung eines zusätzlichen Biegemoments dann nicht mehr zu Gleichgewichtszuständen führen kann. Das Spannungsfeld mit der Spitzen-spannung σ_F' bleibt daher an die Bedingung $\int \sigma_x dF \leq \sigma_F F$ gebunden (Bild 2).

Bei einem gleichmäßigen Spannungszustand ist natürlich $\sigma_F' = \sigma_F$ oder $\Delta\sigma_F = 0$; in der Größe $\Delta\sigma_F$ kommt daher die Wirkung der Art des elastischen Spannungsfeldes zum Ausdruck, und es ist daher zweckmäßig, sie als „Feldwirkung“ zu bezeichnen. Wenn man von der auf Grund der Vorstellungen über das Fließen naheliegenden Annahme ausgeht, daß alle Fasern mit der Faserspannung $\sigma_x < \sigma_F'$ den Fließvorgang hemmen müssen (nicht nur diejenigen, für die $\sigma_x < \sigma_F$ ist), so muß sich nun jedem Feld ein Wert $\Delta\sigma_F$ zuordnen lassen. Die Festigkeit σ_F' wird damit eine von der Form des Feldes abhängige Größe: (Gestaltfestigkeit).

1. Ermittlung der Feldwirkung $\Delta\sigma_F$

unter der Annahme gleicher Festigkeit σ_F aller Fasern und Fließschichtenbildung in der ganzen Balkenhöhe.

Es soll zunächst angenommen werden, daß alle Fasern die gleiche, mit dem Feld veränderliche Festigkeit σ_F' haben; der Festigkeitskörper wird dann durch ein Rechteck von der Höhe σ_F' wiedergegeben. Unter Festigkeit ist hier wieder nicht die Spannung beim Auftreten eines sichtbaren Bruches, sondern die beim Auftreten innerer Gefügeveränderungen (z. B. Zertrümmerung des Zementitgerüsts beim Baustahl) zu verstehen.

⁴⁾ J. Fritsche, Grundlagen der Plastizitätstheorie. Vorbericht des 2. Kongresses der Int. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau. Berlin 1936, Wilh. Ernst & Sohn.

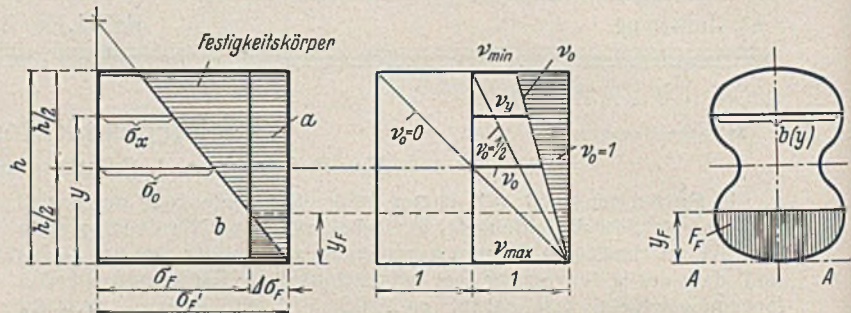
Für ein linear veränderliches Spannungsfeld erhält man mit Bezug auf Bild 3 das Verhältnis $(e + \frac{h}{2}) : (e + h) = \nu_0 : \sigma_F'$.

Bezeichnet man $\frac{\sigma_0}{\sigma_F} = \nu_0$, so ergibt sich daraus

$$(1) \quad e = -\frac{h}{2} \cdot \frac{2\nu_0 - 1}{\nu_0 - 1}$$

ν_0 kann innerhalb der Grenzen $0 < \nu_0 < 1$ jeden beliebigen Wert annehmen; $\nu_0 = 0$ entspricht dem Fall der reinen Biegung, $\nu_0 = 1$ dem Fall des reinen Druckes. Gemäß seiner Bedeutung ist

$$\nu_0 = \frac{N}{F} : \left(\frac{N}{F} + \frac{M}{W} \right) = \frac{1}{1 + \frac{p}{k}}$$



a) Fläche der Festigkeitsreste. b) Fläche der elastischen Überladung.

Bild 3. Die Voraussetzungen der neueren Plastizitätstheorie.

Darin bezeichnet p die Außermittlung des Lastangriffs, k die zu dem durch Fließeinbruch bedrohten Rand gehörige Kernweite. Führt man wie üblich das Verhältnis von p zu k als das Außermittlungsmaß m ein, so erhält man weiter

$$(2) \quad \nu_0 = \frac{1}{1 + m}$$

Nun ist $\sigma_x = \sigma_F' \left(1 - \frac{y}{h + e} \right)$; nach Einsetzen von e ergibt sich

$$(3) \quad \sigma_x = \sigma_F' \left(1 - \frac{2y}{h} \cdot \frac{m}{1 + m} \right)$$

oder der auf die Randspannung 1 bezogene Vergleichswert

$$(4) \quad \nu_y = \frac{\sigma_x}{\sigma_F'} = 1 - \frac{2y}{h} \cdot \frac{m}{1 + m}$$

Die bezogene Kleinstspannung an dem dem Fließeinbruch gegenüberliegenden Rand bekommt man daraus mit

$$(5) \quad \nu_{min} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

In einer früheren Arbeit⁵⁾ habe ich bereits ausgeführt, daß der Fließhemmung H der Fließschicht ein Fließdruck S der überlasteten Querschnittsteile gegenübersteht; H wird mit wachsenden äußeren Kräften immer kleiner, S immer größer, und in dem Augenblick, in dem die beiden Kräfte einander gleich geworden sind, tritt der Kohäsionsbruch an der Spannungsspitze und damit die Fließschichtenbildung ein. Alle Fasern tragen nur dann gleichmäßig zur Fließhemmung H bei, wenn die Fließschicht plötzlich durch die ganze Höhe des Balkens oder der Stütze durchschießt; erfahrungsgemäß wird diese Annahme jedoch auf Balken geringer Höhe zu beschränken sein. Es liegt nun nahe, die Fließhemmung H dem Flächeninhalt der Festigkeitsreste und den Fließdruck S dem Flächeninhalt der Spannungsüberhöhungen über die gewöhnliche Fließgrenze σ_F hinaus verhältnismäßig zu machen. Man erhält damit ganz allgemein

$$(6) \quad H = c \sigma_F' \int_0^h (1 - \nu_y) b(y) dy,$$

worin c eine Verhältniszahl bedeutet, welche auf Grund von Versuchen zu bestimmen ist. Die dimensionslose Festigkeitsziffer c bringt in einem gewissen Sinne die „Rauhigkeit“ der Fließschicht zum Ausdruck und ist ein Maß für die Fähigkeit des Werkstoffes, in Schichten zu fließen. $c = 0$ ordnet sich damit einem Werkstoff zu, der durch plastischen Abbau der Spannungsspitzen gekennzeichnet ist, $c > 0$ einem Werkstoff, bei dem sich das Fließen an das Spannungsfeld anpaßt. c ist für verschiedene Werkstoffe naturgemäß verschieden. Es ist zu beachten, daß durch c das erste Fließen gekennzeichnet ist; wie lang der anschließende Fließbereich ist, kommt damit nicht unmittelbar zum Ausdruck. Er kann lang sein wie beim Baustahl, bedingt durch den plötzlichen Zusammenbruch eines Gefügebestandteils, es kann aber auch bereits nach sehr kurzem Fließen längs der Hauptschubspannungslinie zu einer Verfestigung kommen. Eine ständige Wiederholung dieses Vorgangs, unterbrochen von jeweiliger Verfestigung, erzeugt dann eine abgetreppte Spannungs-Dehnungs-Linie, die bei fortgesetzter Verfeinerung der Treppe ein vergleichsweise stetiges

⁵⁾ J. Fritsche, Ein Beitrag zum Verständnis der „neueren Fließbedingung“. Stahlbau 1936, S. 137.

Verhalten vortauschen kann. Wenn sich darüber auch noch keine zahlenmäßigen Angaben machen lassen, so liegt trotzdem die Vermutung nahe, daß zu einer langen Fließstrecke, gleichbedeutend mit einem tiefen Oberflächeneinbruch⁶⁾, ein großes c und zu einer kurzen Fließstrecke ein kleines c gehört. Es wird Aufgabe entsprechender Versuchsreihen sein, diese Abhängigkeit festzustellen.

Man erhält aus Gl. (4)

$$1 - \nu_y = \frac{2y}{h} \cdot \frac{m}{1+m}$$

und damit

$$(7) \quad H = c \sigma_F' \int_0^h \frac{2y}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot b(y) dy = \sigma_F' \cdot \frac{2c}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot \gamma_A$$

Die Höhe des Gebietes, in welchem $\sigma_x > \sigma_F$ ist, berechnet sich aus $\sigma_x = \sigma_F$ nach Gl. (3) mit

$$(8) \quad y_F = \frac{1+m}{m} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\Delta \sigma_F}{\sigma_F'}$$

und damit bekommt man

$$(9) \quad S = \int_0^{y_F} (\sigma_x - \sigma_F) b(y) dy = \sigma_F' \int_0^{y_F} \left[\frac{\Delta \sigma_F}{\sigma_F'} - \frac{2y}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \right] b(y) dy$$

Mit Gl. (8) kann man Gl. (9) auch in der Form

$$(9a) \quad S = \Delta \sigma_F \left(F_F - \frac{\gamma_{AF}}{y_F} \right)$$

darstellen, wenn man mit F_F den Flächeninhalt und mit γ_{AF} das statische Moment des überlasteten Querschnittsteils, bezogen auf eine zur Nulllinie gleichgerichtete Achse AA durch den Ort des Fließeinbruches, bezeichnet. Aus der Gleichsetzung von H und S ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(10) \quad \Delta \sigma_F = \frac{\frac{2c}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot \gamma_A}{\left(F_F - \frac{\gamma_{AF}}{y_F} \right) - \frac{2c}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot \gamma_A} \cdot \sigma_F'$$

Darin bedeutet $\gamma_A = \int_0^h y b(y) dy$. Eine unmittelbare, zahlenmäßige Auswertung dieser Gleichung ist nicht möglich, da y_F nicht bekannt ist und auf Grund von Gl. (8) wieder erst nach Kenntnis von $\Delta \sigma_F$ angegeben werden kann. Es muß daher das Wertepaar $\Delta \sigma_F$ und y_F aus der gleichzeitigen Gültigkeit der beiden Gleichungen (8) und (10) ermittelt werden.

Nimmt man auf Grund der Versuchsergebnisse mit einem weichen Baustahl für den elastisch-idealplastischen Werkstoff bei reiner Biegung des Rechteckquerschnitts $\Delta \sigma_F = \frac{1}{2} \cdot \sigma_F$ an, so erhält man mit Gl. (8) $y_F = \frac{h}{6}$.

Damit berechnet sich

$$\Delta \sigma_F = \frac{12c}{1-12c} \cdot \sigma_F = \frac{1}{2} \cdot \sigma_F,$$

und daraus folgt, daß man $c = \frac{1}{36}$ zu setzen hat, um dieser Annahme zu entsprechen. Für das auf die Spitze gestellte Quadrat ist nun in der folgenden Weise vorzugehen: Man erhält aus Gl. (8)

$$(8a) \quad \Delta \sigma_F = \frac{y_F}{\frac{1+m}{m} \cdot \frac{h}{2} - y_F} \cdot \sigma_F = \frac{2 \mu_F}{1+m - 2 \mu_F} \cdot \sigma_F$$

und aus Gl. (10) mit $F_F = y_F^2$ und $\gamma_{AF} = \frac{2}{3} \cdot y_F^3$

$$\Delta \sigma_F = \frac{1}{24 \cdot \frac{1+m}{m} \left(\frac{y_F}{h} \right)^2 - 1} \cdot \sigma_F$$

Bezeichnet man $\frac{y_F}{h} = \mu_F$, so erhält man durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\Delta \sigma_F$

$$\frac{2 \mu_F}{1+m - 2 \mu_F} = \frac{1}{24 \cdot \frac{1+m}{m} \cdot \mu_F^2 - 1}$$

und, da $m = \infty$ ist, daraus $\mu_F = \frac{1}{\sqrt[3]{48}} = 0,275$. Damit ergibt sich nun endlich

$$(11) \quad \Delta \sigma_F = 1,23 \sigma_F,$$

ein Wert, der den eingeschlagenen Weg rechtfertigt, da die Versuche für $\Delta \sigma_F$ etwa $0,8 \sigma_F$ bis $0,9 \sigma_F$ liefern, denn es ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß der Wert Gl. (11) nur für einen idealisierten Werkstoff gilt, der in Wirklichkeit gar nicht besteht, so daß er als eine Art oberste, nicht übersteigbare Grenze aufgefaßt werden muß. Es empfiehlt sich aber trotzdem, zur Verminderung dieser Widersprüche die theoretischen Grundlagen der Untersuchung zu verschärfen. Wahrscheinlich sind doch noch wesentliche Erscheinungen außerhalb des Ansatzes geblieben.

⁶⁾ W. Kuntze u. G. Sachs, Zur Kenntnis der Streckgrenze von Stahl, Z. d. VdI 1928, Bd. 72.

2. Ermittlung der Feldwirkung bei veränderlicher Festigkeit der einzelnen Fasern.

Eine Verfeinerung der Theorie wird zunächst den Festigkeitskörper betreffen müssen. Die Festigkeitsüberhöhung $\Delta \sigma_F$ durch die Wirkung des Spannungsfeldes entsteht dadurch, daß sich der Fließabsicht eines Elements der Schicht ein dabei durchzustößender Kern vorlagert. Da dieser Kern für die einzelnen Fasern verschieden mächtig ist, wird die Festigkeit einer Stelle des Körpers keine unveränderliche Größe mehr sein, sondern sie wird abhängig vom Einbau dieser Stelle in das Ganze oder von der Festigkeit ihrer Umgebung. Der dem Fließeinbruch gegenüberliegende Rand ist nicht gestützt, einem Abgleiten dieser Stelle legt sich kein Kern vor, ihr wird daher eine Festigkeit gleich der beim gleichmäßigen Spannungszustande zuzuordnen sein. Je tiefer im Querschnitt die betrachtete Stelle liegt, je schwieriger wird für sie das Bestreben, einen etwaigen Fließeinbruch weiterzugeben, je größer ist daher ihre Festigkeit, und es liegt nahe, diese der Mächtigkeit der vorgelagerten Werkstoffmasse verhältnismäßig zu setzen. Die größte Festigkeit hat der Körper naturgemäß an der Stelle des Fließeinbruches, d. h. an der Spannungsspitze des elastischen Feldes. Das Gesetz, in welcher Weise die Festigkeit einer Faser von dem Randabstande y' derselben abhängig zu machen ist, kann nur durch Deutung von Versuchsreihen gewonnen werden. Naheliegend ist ein geradliniger Ansatz

$$(12) \quad \sigma_{Fy} = \sigma_F + \Delta \sigma_F \cdot \frac{\int_0^{y'} b(y') dy'}{\int_0^h b(y') dy'} = \sigma_F + \Delta \sigma_F \cdot \frac{F_{y'}}{F}$$

oder ein quadratischer Ansatz

$$(13) \quad \sigma_{Fy} = \sigma_F + \Delta \sigma_F \cdot \frac{\int_0^{y'} y' b(y') dy'}{\int_0^h y' b(y') dy'} = \sigma_F + \Delta \sigma_F \cdot \frac{\gamma_{y'}}{\gamma_B}$$

Für den rechteckigen Querschnitt erhält man damit

$$(12a) \quad \Delta \sigma_{Fy} = \sigma_{Fy} - \sigma_F = \Delta \sigma_F \cdot \frac{h-y}{h} \quad \text{bzw.}$$

$$(13a) \quad = \Delta \sigma_F \cdot \frac{(h-y)^2}{h^2}$$

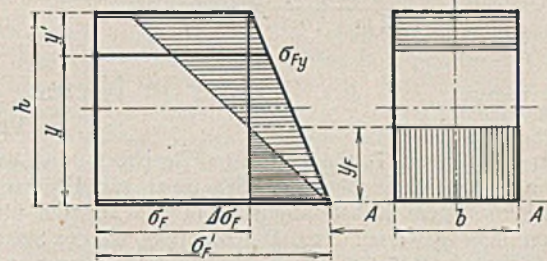


Bild 4.

Der Festigkeitskörper für den Rechteckquerschnitt.

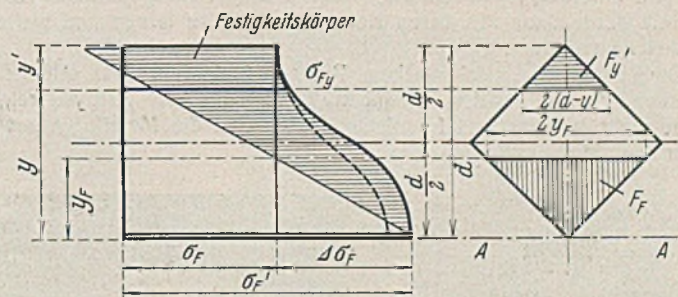


Bild 5. Der Festigkeitskörper für das auf die Spitze gestellte Quadrat.

Für das auf die Spitze gestellte Quadrat berechnet sich für geradlinigen Ansatz im Bereiche

$$(12b) \quad \begin{aligned} 0 < y < \frac{d}{2} & \quad \Delta \sigma_{Fy} = \Delta \sigma_F \left(1 - \frac{2y^2}{d^2} \right) \\ \frac{d}{2} < y < d & \quad \Delta \sigma_{Fy} = \Delta \sigma_F \cdot \frac{2(d-y)^2}{d^2}, \end{aligned}$$

für quadratischen Ansatz im Bereiche

$$(13b) \quad \begin{aligned} 0 < y < \frac{d}{2} & \quad \Delta \sigma_{Fy} = \Delta \sigma_F \left[1 - 4 \left(\frac{y}{d} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{y}{d} \right)^3 \right] \\ \frac{d}{2} < y < d & \quad \Delta \sigma_{Fy} = \Delta \sigma_F \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{(d-y)^3}{d^3}. \end{aligned}$$

Der zugehörige Festigkeitskörper für die beiden untersuchten Querschnittsformen ist in Bild 4 u. 5 dargestellt worden.

Mit dem verbesserten Festigkeitskörper kann nun neuerlich die vom Spannungsfeld bewirkte Fließhemmung H berechnet werden; der Festigkeitsrest ist jetzt nicht mehr $\sigma_F'(1 - \nu_y)$, sondern

$$\sigma_F'(1 - \nu_y) - (\Delta \sigma_F - \Delta \sigma_{Fy}),$$

und damit berechnet sich

$$(14) \quad H = c \sigma_F' \int_0^h [(1 - \nu_y) - (\Delta \sigma_F - \Delta \sigma_{Fy})] b(y) dy$$

$$= \frac{2c}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot \sigma_F' \gamma_A - c \Delta \sigma_F A,$$

worin A den Ausdruck

$$(15) \quad A = \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta \sigma_{Fy}}{\Delta \sigma_F} \right) b(y) dy$$

bedeutet. Da F unverändert bleibt, erhält man durch Gleichsetzen der Beziehungen Gl. (9a) u. (14)

$$(16) \quad \Delta \sigma_F = \frac{\frac{2c}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot \gamma_A}{\left(F_F - \frac{\gamma_{AF}}{y_F} \right) + cA - \frac{2c}{h} \cdot \frac{m}{1+m} \cdot \gamma_A} \cdot \sigma_F.$$

Gl. (16) ist natürlich wieder nur auswertbar unter dem gleichzeitigen Bestehen der Gl. (8), denn erst dann ist das Wertepaar $\Delta \sigma_F$ und y_F eindeutig bestimmt.

a) Geradliniger Ansatz.

Für das Rechteck ist $1 - \frac{\Delta \sigma_{Fy}}{\Delta \sigma_F} = \frac{y}{h}$ und damit $A = \frac{bh}{2}$. Um c

zu bestimmen, soll wieder für den Fall der reinen Biegung $\Delta \sigma_F = \frac{1}{2} \cdot \sigma_F$

und damit $y_F = \frac{h}{6}$ gesetzt werden; damit ergibt sich nach kurzer Rechnung $c = \frac{1}{30}$, mit dem nun andere Querschnittformen auf ihre Tragfähigkeit hin untersucht werden können.

Für das auf die Spitze gestellte Quadrat ergibt sich

$$A = \int_0^{d/2} \frac{2y^2}{d^2} \cdot 2y dy + \int_{d/2}^d \left[1 - \frac{2(d-y)^2}{d^2} \right] 2(d-y) dy = \frac{1}{4} \cdot d^2.$$

Daraus gewinnt man leicht

$$\Delta \sigma_F = \frac{1}{\frac{1+m}{2m} \left(\frac{4}{3c} \cdot \mu_F^2 + 1 \right) - 1} \cdot \sigma_F.$$

Alle Rechte vorbehalten.

Fehler in Nieten, deren Ursachen und Verhütung.¹⁾

Von Th. Hövel, Dortmund.

Eine der wichtigsten Verbindungen im Eisenhoch- und Brückenbau ist heute noch die Nietverbindung. Sie dient zur Übertragung von Kräften, die von einem Konstruktionsteil in den anderen übergeleitet werden. Von ihrer gewissenhaften Durchführung ist die Sicherheit des Bauwerkes in hohem Maße abhängig. Es ist deshalb auch erforderlich, daß der Werkstoff, der für die Nieten verwendet wird, einer dauernden Kontrolle unterliegt, und daß die Ursachen einmal stattgefundener Brüche ermittelt werden, um aus deren Nutzenanwendung zu lernen und weiteren Schaden zu verhüten.

Die einfachen mechanischen Prüfungsmethoden, wie Abscheren, Zerreißen, Feststellen der Brinellhärte und selbst die Analyse reichen hierfür nicht immer aus. In solchen Fällen gibt die Metallografie wertvollen Aufschluß.

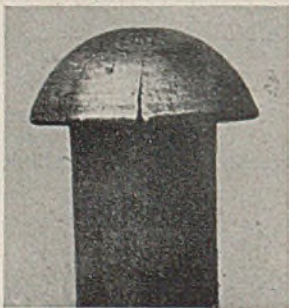


Bild 1.

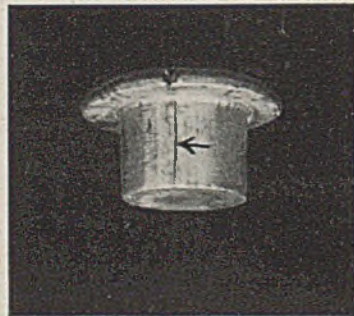


Bild 2.

Ein beim Kaltschlagen häufig auftretender und sich schon während der Fabrikation zeigender Fehler ist das Aufspalten des Kopfes bei seiner Herstellung (Bild 1). Die Ursache ist in einem Oberflächenfehler des gewalzten Materials zu finden, der aber durch Zunder und Walzhaut verdeckt, dem bloßen Auge hier nicht sichtbar ist. Erst durch Abschmirgeln, Polieren und Ätzen tritt er, sich oft über den ganzen Stab hinziehend, in Erscheinung (Bild 2). Es ist deshalb auch erklärlich, daß

Durch Gleichsetzen mit Gl. (8a) bekommt man zur Berechnung von μ_F die kubische Gleichung $\mu_F^3 + \frac{3}{4} \cdot c \mu_F - \frac{3}{4} \cdot c = 0$, für die der frühere

Wert eine Näherungslösung vorstellt, die man nun, am zweckmäßigsten mit dem Verfahren von Newton zu verbessern hat. Nach einmaliger

Rechnung erhält man $\mu_F = \mu_{F0} - \frac{f(\mu_{F0})}{f'(\mu_{F0})} = 0,275 - \frac{0,107}{10,07} = 0,264$ und damit

$$(17) \quad \Delta \sigma_F = 1,12 \sigma_F.$$

b) Quadratischer Ansatz.

Für das Rechteck ist nun $1 - \frac{\Delta \sigma_{Fy}}{\Delta \sigma_F} = \frac{1}{h^2} (2hy - y^2)$, und damit wird $A = \frac{2}{3} \cdot bh$.

Damit berechnet sich aus Gl. (16)

$$\Delta \sigma_F (m = \infty) = \frac{12c}{1-4c} \cdot \sigma_F,$$

und man erhält daraus mit den früheren Annahmen $c = \frac{1}{28}$. Zur Berechnung der Feldwirkung $\Delta \sigma_F$ bei dem auf die Spitze gestellten Quadrat ergibt sich nun

$$A = 8 \int_0^{d/2} \left[\left(\frac{y}{d} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{d} \right)^3 \right] y dy$$

$$+ 2 \int_{d/2}^d \left[1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{(d-y)^3}{d^3} \right] (d-y) dy = 0,3083 d^2,$$

und damit berechnet sich aus den Beziehungen Gl. (16) u. (8a)

$$\Delta \sigma_F = \frac{1}{\frac{56}{3} \cdot \frac{1+m}{m} \cdot \mu_F^2 + 0,616 \cdot \frac{1+m}{m} - 1} \cdot \sigma_F = \frac{2 \mu_F}{\frac{1+m}{m} - 2 \mu_F} \cdot \sigma_F$$

die kubische Gleichung für $37,33 \mu_F^3 + 1,232 \mu_F - 1 = 0$, deren Wurzel sich mit $\mu_F = 0,261$ ergibt. Daraus bekommt man endlich

$$(19) \quad \Delta \sigma_F = 1,09 \sigma_F.$$

Das erhaltene Ergebnis ist mit der Erfahrung bereits in besserer Übereinstimmung. Aus dem folgenden Abschnitt wird jedoch ersichtlich, daß es nur bei sehr kleinen Trägerhöhen als brauchbar und ausreichend genau erscheint. (Schluß folgt.)

dieser Fehler gewöhnlich serienweise auftritt. Das im Querschnitt des Nietschaftes hergestellte Schliiffbild (Bild 3) läßt wohl das Vorliegen dieser Ursache am klarsten erkennen.

Solche Niete werden durch die Kontrolle ausgeschlossen. Es kann kein weiterer Schaden durch sie mehr entstehen. Weit unangenehmer und gefährlicher sind aber die Materialfehler, die einen Bruch des Nietes zur Folge haben und erst nach dem Einschlagen, vielleicht erst bei einer Beanspruchung, in Erscheinung treten. Hier kann nur eine ständige Materialkontrolle und das Abklopfen eines jeden geschlagenen Nietes vor Schaden bewahren, wobei sich ein gebrochener Niet durch den lockeren Sitz bemerkbar macht. Die Bruchflächen zeigen gewöhnlich ein körniges Aussehen und sind von graublauer Farbe. „Der Niet ist verbrannt“ ist gewöhnlich das erste Urteil. In Wirklichkeit sind aber Materialverunreinigungen die Schuld. Bezeichnend für solche Fehler sind die schon in ungeätztem Zustande auf dem Schliiffbild im Mikroskop erkennbaren fadenförmig angeordneten dunklen Punkte (Bild 4), die Querschnitte durch Unreinigkeitshäutchen darstellen; sie lockern den Zusammenhang des Materials und führen bei geringer Beanspruchung den Bruch herbei. (Zur besseren Kenntlichmachung ist es manchmal erforderlich, den Schliff erst leicht anzuätzen und wieder leicht zu polieren, weil dann eine etwa durch das erste Polieren über die Einschlüsse gezogene dünne Metallschicht weggeätzt ist). Bild 5 zeigt solche perl-schnurartig angeordneten Einschlüsse im geätzten Schliiffbild. Einen Beweis, daß diese Verunreinigungen tatsächlich die Ursache des Bruches gewesen sind, liefert Bild 6, das unmittelbar am Rande des Bruches aufgenommen ist und das erkennen läßt, daß die Ausläufer des Risses in die erwähnten perl-schnurartigen Linien endigen.



Bild 3.

¹⁾ Die Untersuchungen wurden in der Firma C. H. Jucho, Dortmund, durchgeführt.

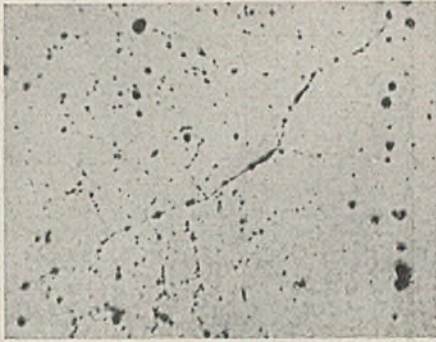


Bild 4. Unreinigkeitshäutchen.

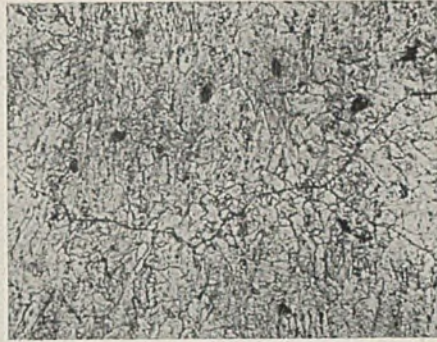


Bild 5.

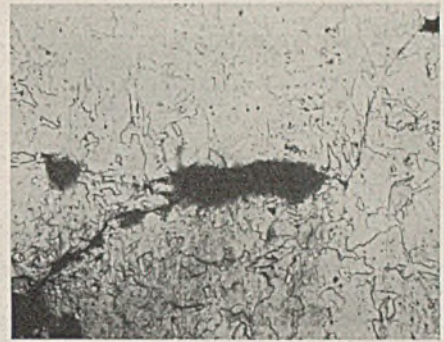


Bild 6.

Im folgenden soll jetzt ein auf falsche Wärmebehandlung zurückzuführender Fehler behandelt werden. Zum besseren Verständnis hierfür seien jedoch erst an einem kaltgeschlagenen und im Laboratorium wärmetechnisch richtig behandelten Nietkopf die Gefügeänderungen gezeigt und die Notwendigkeiten besprochen, die sich daraus ergeben.

Bild 7 zeigt den Faserverlauf eines solchen Nietkopfes, der die Stauchung gut erkennen läßt. Das Normalgefüge im Anlieferungszustand des Materials ist in Bild 8 dargestellt. Es ist am unteren Ende des Schaftes aufgenommen, also an einer Stelle, die durch eine Kaltverformung nicht beeinflußt ist. Das Gefüge besteht aus verhältnismäßig kleinen Ferritkörnern, in deren Grenzen kleine Perlitinseln gelagert sind. Dieses Gefüge in allen Teilen des Nietes zu erreichen, muß das Bestreben der

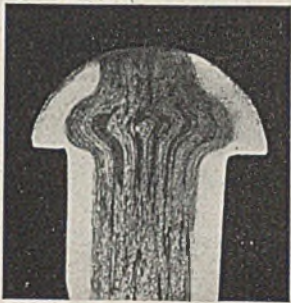


Bild 7. Faserverlauf.

Fabrikation sein, weil es die günstigsten Festigkeitseigenschaften mit sich bringt. Durch das Kaltschlagen des Nietkopfes wird aber dieses Gefüge teilweise zerstört. Eine solche Störung läßt sich bis etwa 2 mm tief in den Schaft hinein nachweisen. Sie äußert sich hier noch durch ein Zusammenquetschen der Körner, wie es in Bild 9 deutlich zu erkennen ist. Am stärksten hat eine Kaltreckung in den Ecken am Übergang des Schaftes zum Kopf stattgefunden. Hier ist die Begrenzung der einzelnen Körner nicht mehr zu erkennen (Bild 10), es hat eine Kristallzertrümmerung eingesetzt, die sich in einer starken Faserung äußert. Der Rand ist aber noch frei von Anrissen, was ein Zeichen dafür ist, daß die Kaltverarbeitung noch nicht zu weit getrieben ist.

Durch diese Kaltreckung ist aber an dieser Stelle eine Härtung eingetreten, die eine Sprödigkeit mit sich bringt und mit einer Abnahme der Dehnung und der Kerbzähigkeit verbunden ist. Es ist deswegen erforderlich, diese Erscheinung durch eine Umkristallisation, die durch ein geeignetes Glühen erfolgen kann, zu beseitigen. Die richtige Glüh-

temperatur hierfür ist von dem Kohlenstoffgehalt des Materials abhängig und kann aus dem Eisenkohlenstoffdiagramm abgelesen werden. Die hierfür in Frage kommende Kurve des Diagramms ist durch Bild 11 dargestellt. Der Kohlenstoffgehalt des Materials wurde mit 0,1% ermittelt. Damit ergibt sich also eine zweckmäßige Glüh-temperatur von 910°²⁾. Bei dieser Temperatur wurde jetzt der Niet im Laboratorium kurz geglüht und an der Luft abgekühlt. Ein jetzt an derselben Stelle hergestelltes Schliffbild (Bild 12), wo vorher (Bild 10) die größte Kaltreckung nachgewiesen wurde, zeigt, daß die Spuren der Kaltreckung vollständig verschwunden sind. Es ist jetzt hier, wie auch an allen anderen Teilen des Nietes das Gefüge vorhanden, das im Anfang der Untersuchung (Bild 8) als das anzustrebende bezeichnet wurde.

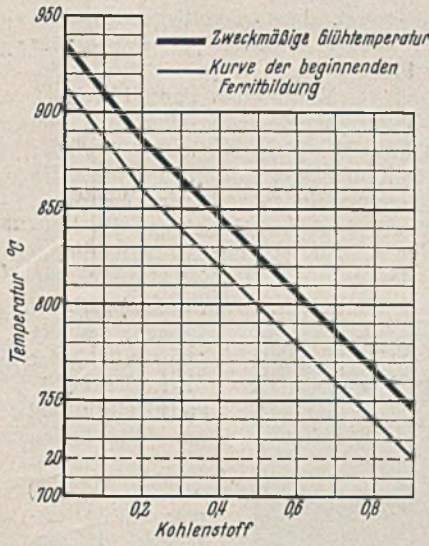


Bild 11.

Zur Erläuterung des später zu behandelnden Fehlers sei hier noch in Bild 13 dasselbe Gefüge in einer etwa 600fachen Vergrößerung gezeigt. (Die bisherigen Mikroaufnahmen dieser

Untersuchung waren alle 200fach). Aus der hieraus zu erkennenden scharfen Umrandung der Perlitinseln ist zu schließen, daß die Umkristallisation vollständig erfolgt ist, daß also die im Diagramm (Bild 11) dargestellte Kurve durch die Temperatur tatsächlich erreicht worden ist.

²⁾ Diese Temperatur heißt zweckmäßig, weil bei ihr gerade die Umkristallisation beendet ist, die bei 720° beginnt und daher ein Gefüge mit den besten mechanischen Eigenschaften hervorbringt.

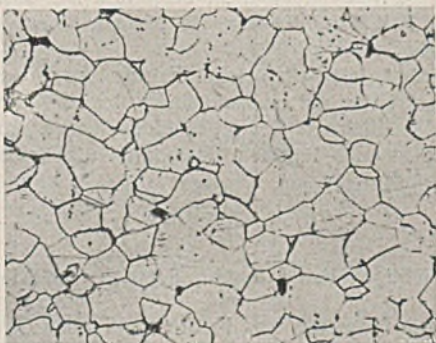


Bild 8. Normalgefüge.

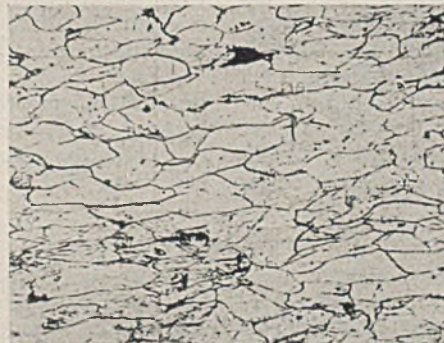


Bild 9. Verformung.

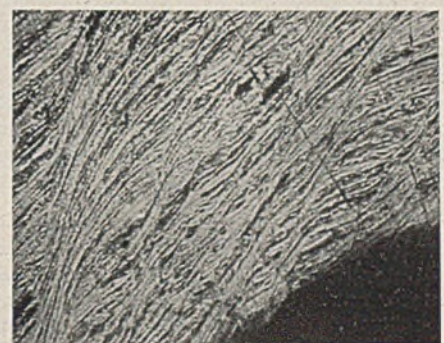


Bild 10. Kaltreckung.



Bild 12.
Nach dem Glühen bei 910°.

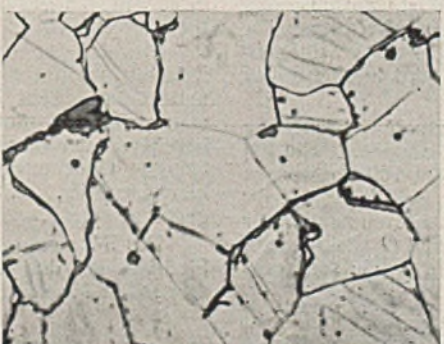


Bild 13. Gefüge wie Bild 12,
jedoch bei dreimal so starker Vergrößerung.



Bild 14.
Gefüge nach dem Glühen bei 810°.

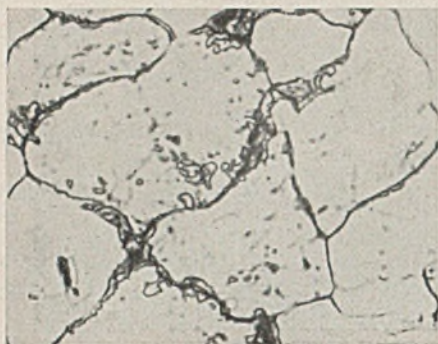


Bild 15. Gefüge wie Bild 14, jedoch bei dreimal so starker Vergrößerung.

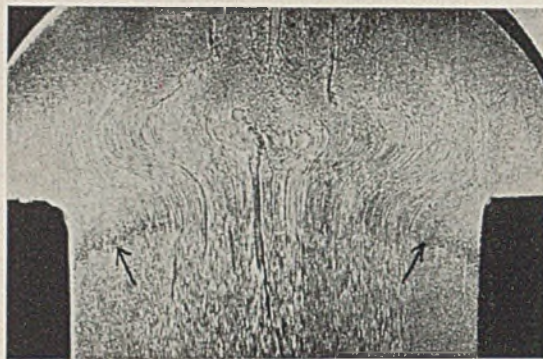


Bild 16. Grobkornzone, gegläht bei 810°.



Bild 17. Grobkornzone.

Es folgt jetzt die Untersuchung des fälschlich bei 810° geglähten Nietes. Das Eisenkohlenstoffdiagramm sagt schon, daß diese Temperatur zur vollständigen Umkristallisation nicht ausreicht. Sie hätte für einen Kohlenstoffgehalt von etwa 0,58% genügt. In dem vorliegenden Falle beträgt aber der Kohlenstoffgehalt wieder etwa 0,1%. Die hierfür richtige Temperatur ist also wieder 910°.

Im folgenden soll nun an Hand der Schlißbilder gezeigt werden, welche Fehler durch die falsche Glüh-temperatur entstanden sind und wie diese wieder behoben werden können. Wenn wir zunächst wieder die Stelle betrachten, wo die größte Kaltreckung auftrat, also wieder in der Ecke am Übergang vom Kopf zum Schaft, so zeigt eine Aufnahme hier (Bild 14), daß die Temperatur wohl ausgereicht hat um die Kaltreckung zu vertreiben. Das faserige Gefüge ist verschwunden. Aber eine genauere Betrachtung dieses Gefüges in 600facher Vergrößerung



Bild 18. Nach dem Glühen bei 910°.

(Bild 15) läßt erkennen, daß die Umwandlung der Kristalle nicht vollständig erfolgt ist. Wir finden hier (im Gegensatz zu Bild 13) eine körnig zerfallene Umrandung der Perlitinseln. Die besten zu erreichenden Festigkeitseigenschaften sind hierdurch nicht gewährleistet.

Einen größeren Fehler läßt das makroskopische Bild 16 erkennen. Im oberen Schaft, am Übergang von dem verformten zu dem nicht verformten Material, ist deutlich eine Zone sichtbar. Diese ist auf eine durch Rekristallisation entstandene Grobkornbildung zurückzuführen, die leicht bei weichen Flußeisensorten bei einem bestimmten Verformungsgrad und einer darauffolgenden Temperatur von etwa 700 bis 860° auftritt. Wie grob hier das Korn ist im Vergleich zu irgendeiner anderen Stelle des Nietes, z. B. an der Stelle von Bild 14, die in derselben Vergrößerung dargestellt ist, zeigt Bild 17. Durch diese Grobkornzone ist also in dem Material eine scharf begrenzte Schicht geschaffen, in der dem übrigen Material gegenüber eine Verringerung der Streckgrenze,

Dehnung und Kerbzähigkeit vorhanden ist und die bei stärkerer Beanspruchung den Anlaß zum Bruch geben kann. Durch die als zweckmäßig angegebene Glüh-temperatur wäre diese Gefahrenzone nicht entstanden. Sie kann auch noch nachträglich durch die richtige Glüh-temperatur wieder beseitigt werden. Zum Beweise hierfür wurde der Niet jetzt noch einmal mit der Temperatur von 910° im Laboratorium kurz gegläht und an der Luft erkaltet. Das jetzt hergestellte makroskopische Schlißbild (Bild 18) zeigt, daß die Zone nun vollständig verschwunden ist. Ein gleichmäßiges Korn ist an allen Stellen vorhanden.

Zum Schluß dieser Untersuchung soll auch jetzt noch wieder das so erhaltene Gefüge in 600facher Vergrößerung (Bild 19) gezeigt werden. Der Perlit ist in scharf begrenzten Inseln vorhanden, ebenso wie es der Fall war bei dem anfangs untersuchten richtig geglähten Niet (Bild 13) und im Gegensatz zu dem zu niedrig geglähten Niet (Bild 15). Sollte jetzt beim Wärmen des Nietes, um ihn in die Konstruktion zu schlagen, der Kopf wieder auf die kritische Temperatur von 700 bis 850° kommen, die vorher die Grobkornbildung verursacht hat, so ist jetzt keine Gefahr mehr zu befürchten, da die durch die Kaltreckung entstandenen Spannungen zwischen den Kristallen durch das Normalglühen ausgelöst sind. Der Gleichgewichtszustand ist wiederhergestellt.

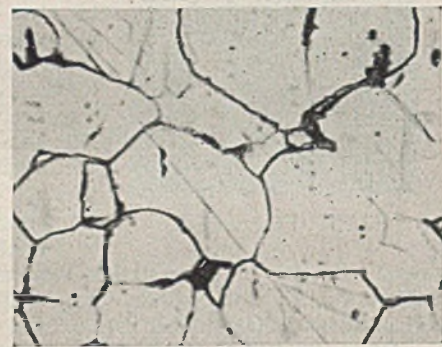


Bild 19. Nach dem Glühen bei 910°.

Es wird jetzt einleuchten, daß nur bei einem kaltgereckten und nicht ausgeglühten Niet oder nochmals kaltgereckten Niet derselbe Fall wieder eintreten könnte. Eine Abscherprobe wird diesen Fehler nicht ermitteln können, da sie gewöhnlich in einem Querschnitt vorgenommen wird, der durch die Kaltreckung nicht beeinflußt ist. Auch eine Analyse kann in diesem Fall nicht helfen, da sie nur über die Zusammensetzung des Materials Aufschluß gibt.

Es ist nun zwar nicht gesagt, daß ein solcher Fehler immer zum Bruch führen muß. Es wird auch von der Beanspruchung des Nietes abhängen. Es ist aber selbstverständlich das Bestreben eines Werkes, nur solche Nieten herzustellen, die in allen Punkten einwandfrei und immer zuverlässig sind.

Verschiedenes.

Untersuchung eines auf Biegung und Torsion beanspruchten, statisch unbestimmten Systems. Durchlaufende Rahmen und Stockwerkrahmen, die nur in ihrer Ebene beansprucht werden, sind mannigfaltig untersucht worden. In unseren Handbüchern sind die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle berücksichtigt.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Untersuchung von Systemen, die senkrecht zu ihrer Ebene belastet sind. Der Grund ist wahrscheinlich der, daß derartige Belastungsfälle seltener in der Praxis auftreten. Im folgenden soll die Berechnung des Untergestells (Bild 1) eines Schienendampfkranes, Bauart Cockerill, gezeigt werden. Man wird hierbei sicher nützliche Anregungen für ähnliche Fälle finden.

Bild 2 zeigt diesen Kran. Es handelt sich um ein Hebezeug von großer Leistungsfähigkeit, das imstande ist, bei normalem Betrieb 130 t Nutzlast zu heben, was in Ausnahmefällen bis auf 160 t gesteigert werden kann. Das zu untersuchende System ist in Bild 3 dargestellt. Es ist statisch unbestimmt und setzt sich aus zwei symmetrisch zueinander liegenden Rahmen zusammen, in deren Punkten *C*, *D* und *O* auskragende Träger (vgl. auch Bild 1) angebracht sind, an denen die Kräfte senkrecht zur Systemebene angreifen.

Es werden drei Belastungsfälle untersucht, die mit *A*, *B* und *C* in Bild 4 bezeichnet sind. In Wirklichkeit wird das Kranuntergestell niemals so wie im Fall *C* beansprucht. Der Vorteil dieser Untersuchung ist aber der, daß die Belastung im Fall *C* antimetrisch ist und daß eine Über-

lagerung von *B* und *C* den wichtigen Fall *D* ergibt, der sich tatsächlich im Betriebszustand einstellt.

Als Unbekannte werden die Momente und Kräfte am Punkte *O* in den Trägern *CO* und *DO* angenommen. Durch Ansetzen der Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen erhält man soviel Gleichungen wie Unbekannte. Durch das Hinzukommen von Torsionsmomenten wird diese Aufgabe gegenüber den sonst üblichen etwas schwieriger, aber dafür interessanter.

Für den zu untersuchenden Fall nehmen wir an, daß die Rahmenfüße eingespannt sind (s. Bild 3). Das System ist daher sechsfach statisch unbestimmt. Drei der Unbekannten hierbei sind gleich Null, wovon man sich leicht überzeugen kann. Zur Vereinfachung der Untersuchung beseitigen wir diese von vornherein und stellen somit nur drei unabhängige Gleichungen für die drei gesuchten Unbekannten auf. Es sei hier bemerkt, daß sich die Untersuchung bedeutend umständlicher gestalten würde, wenn die Rahmenfüße nicht vollständig eingespannt wären.

Die Momente werden als Vektoren dargestellt (Bild 5). Für die Pfeilrichtung des Vektors sei vereinbart, daß z. B. bei einem linksdrehenden Moment der Pfeil in Blickrichtung des Beschauers zeigt.

I. Belastungsfall A.

In Bild 6 sind die Kräfte *X*, *Y*, *Z* und die Momente M_x , M_y , M_z eingetragen, die am Punkte *O* in den Trägern *CO* und *DO* angreifen. Wie

oben schon festgestellt, sind drei dieser Größen gleich Null. Das sind die Kräfte X und Y und das Moment M_z . Aus der Gleichgewichtsbedingung am Punkte O folgen sogleich die Werte der Kraftgrößen im Schnitt des Trägers OA beim Punkte O . Es sind die Kräfte

$$X' = 0, \\ Y' = 0, \\ Z' = -P - 2Z,$$

und die Momente

$$M_x' = 0, \\ M_y' = -P \cdot c + 2M_y, \\ M_z' = 0.$$

Die Reaktionen in der Einspannung der Trägerenden BCO und AO lassen sich leicht in der bekannten Weise ermitteln (Bild 7).

Um die drei Unbekannten Z, M_x und M_y zu bestimmen, stellen wir drei Gleichungen auf, die folgende Bedingungen zu erfüllen haben:

1. Die Verdrehung des Knotenpunktes O um die Kranlängsachse ist gleich Null aus Symmetriegründen.
2. Die Verdrehung des Querschnitts im Punkte O des Trägers BCO und die des Trägers AO um die Parallele zur Kranquerachse sollen im zerlegten System einander gleich sein.
3. Die vertikale Verschiebung des Punktes O soll im zerlegten System an den Trägerenden BCO und AO einander gleich sein.

Gleichung 1.

Die unter 1. bezeichnete Verdrehung zergliedert sich in eine Verdrehung ψ , die durch die Verdrehung des seitlichen Trägers BC verursacht wird:

$$\psi = \frac{1}{GJ_{da}} (M_x - Zb) a$$

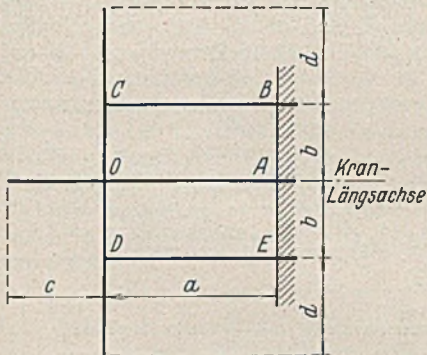


Bild 3. System.

und in eine Verdrehung φ , die durch Biegung des Trägers CO hervorgerufen wird:

$$\varphi = \frac{1}{EJ_b} \int_0^b [M_x - Z(b-x)] dx.$$

Die Bedingung für Gl. (1) lautet, daß $\psi + \varphi = 0$ sein muß.

Gleichung 2.

Die unter 2. bezeichnete Verdrehung zergliedert sich im geknickten Träger BCO in eine Verdrehung ψ , die von der Torsionsbeanspruchung des Trägers CO herrührt:

$$\psi = \frac{1}{GJ_{db}} \cdot M_y b$$

und in eine Verdrehung φ_1 , die von der Biegebeanspruchung des Trägers BC verursacht wird:

$$\varphi_1 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [M_y - Z(a-x)] dx.$$

Die Verdrehung φ_2 des Querschnitts am mittleren Träger AO , die durch Biegung hervorgerufen wird, beträgt:

$$\varphi_2 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [Pc - 2M_y + (P + 2Z)(a-x)] dx.$$

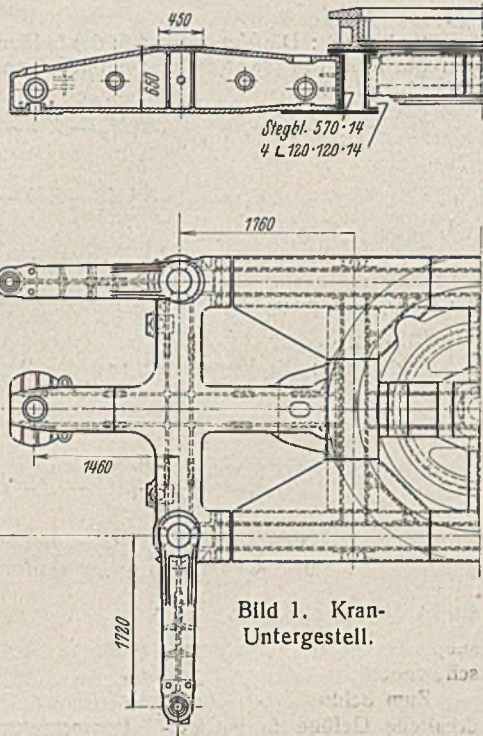


Bild 1. Kran-Untergestell.

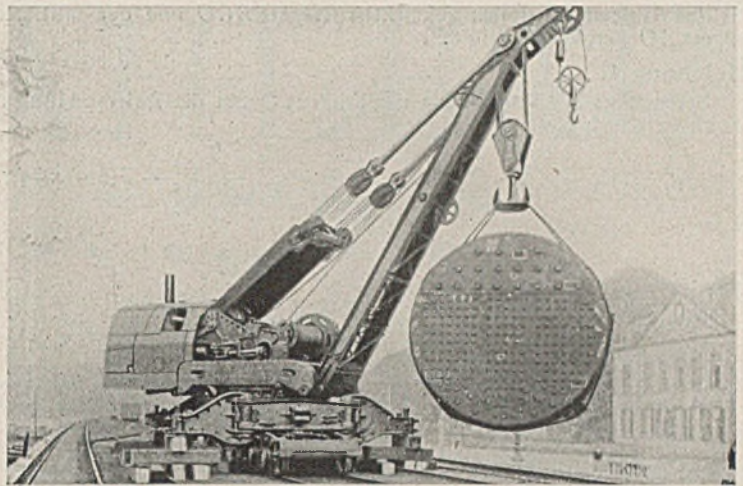


Bild 2. Ansicht des Kranes, Bauart Cockerill. 160 t Hubkraft.

Die Bedingung für Gl. (2) lautet, daß

$$\psi + \varphi_1 = \varphi_2$$

sein soll.

Gleichung 3.

Die unter 3. angegebene Verschiebung setzt sich im geknickten Träger BCO zusammen aus δ_1 , das die Verschiebung infolge Torsion des Trägers BC darstellt:

$$\delta_1 = \frac{1}{GJ_{da}} (M_x - Zb) ab,$$

aus δ_2 , das die Verschiebung infolge Biegung des Trägers BC darstellt:

$$\delta_2 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [M_y - Z(a-x)] (a-x) dx$$

und aus δ_3 , das die Verschiebung infolge Biegung des Trägers CO darstellt:

$$\delta_3 = \frac{1}{EJ_b} \int_0^b [M_x - Z(b-x)] (b-x) dx.$$

Beim mittleren Träger beträgt die gesuchte Verschiebung:

$$\delta_4 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [Pc - 2M_y + (P + 2Z)(a-x)] (a-x) dx.$$

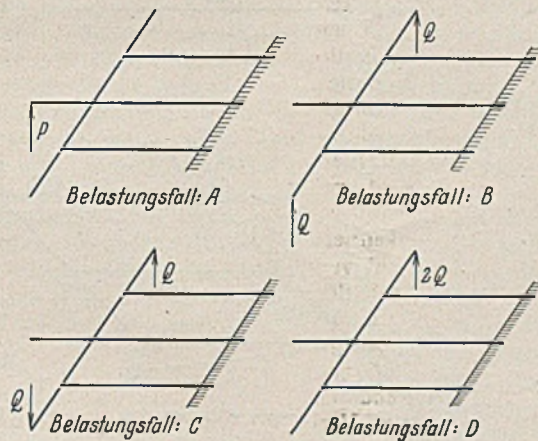


Bild 4.

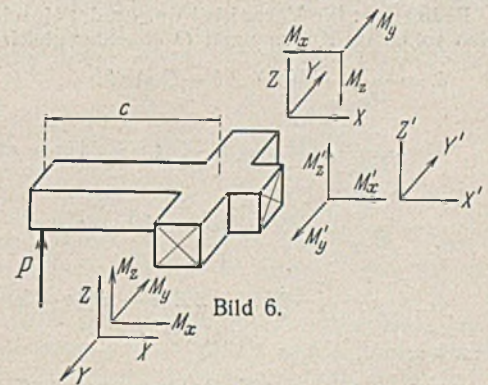


Bild 6.

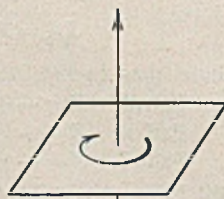


Bild 5.

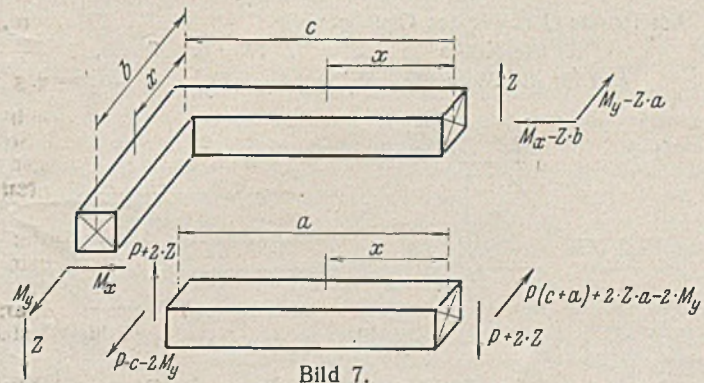


Bild 7.

Die Bedingung für Gl. (3) lautet, daß

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_4 \text{ ist.}$$

II. Belastungsfall B.

Die Untersuchung vollzieht sich in ähnlicher Weise wie bei A. Sie soll daher in gedrängter Form gebracht werden.

Aus dem Gleichgewicht am Knotenpunkt O (Bild 8) folgen

$$\text{die Kräfte } X' = 0, Y' = 0, Z' = -2Z, \\ \text{und die Momente } M_x' = 0, M_y' = 2M_y, M_z' = 0.$$

Für die Untersuchung des geknickten Trägers BCO und des mittleren Trägers AO vergleiche Bild 8.

Gleichung 1.

Bedingung: Die Verdrehung des Knotens O um die Rahmenlängsachse ist gleich Null.

$$\psi = \frac{1}{GJ_{da}} (M_x - Zb - Qd)a, \quad \varphi = \frac{1}{EJ_b} \int_0^b [M_x - Z(b-x)] dx.$$

Es ist $\psi + \varphi = 0$.

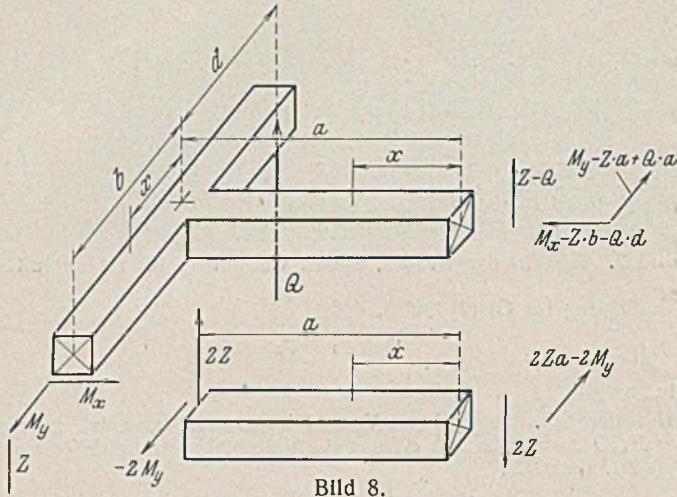


Bild 8.

Gleichung 2.

Bedingung: Die Verdrehungen der Querschnitte der einzelnen Träger im zerlegten System um die Parallele zur Rahmenquerachse im Knoten O sind einander gleich:

$$\psi = \frac{1}{GJ_{db}} \cdot M_y b,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [M_y - (Z - Q)(a-x)] dx,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [-2M_y + 2Z(a-x)] dx.$$

Es ist $\psi + \varphi_1 = \varphi_2$.

Gleichung 3.

Bedingung: Die Verschiebungen der einzelnen Trägerenden sollen im Knotenpunkt O einander gleich sein.

$$\delta_1 = \frac{1}{GJ_{da}} (M_x - Zb - Qd)ab,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [M_y - (Z - Q)(a-x)](a-x) dx,$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EJ_b} \int_0^b [M_x - Z(b-x)](b-x) dx,$$

$$\delta_4 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [-2M_y + 2Z(a-x)](a-x) dx.$$

Es muß sein $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_4$.

III. Belastungsfall C.

Am Punkte O liefert das Gleichgewicht

für die Kräfte $X' = 0, Y' = 0, Z' = 0,$
und für die Momente $M'_x = 2M_x, M'_y = 0, M'_z = 0.$

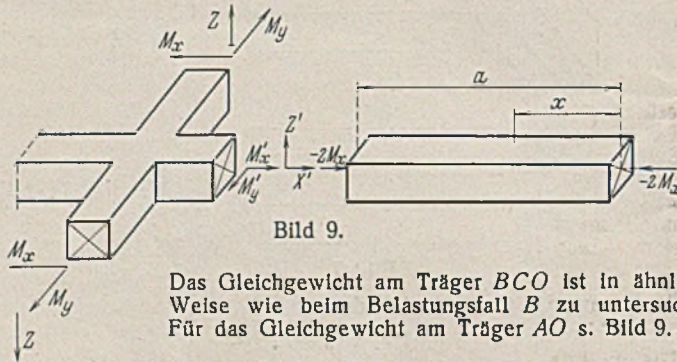


Bild 9.

Das Gleichgewicht am Träger BCO ist in ähnlicher Weise wie beim Belastungsfall B zu untersuchen. Für das Gleichgewicht am Träger AO s. Bild 9.

Gleichung 1.

Bedingung: Die Verdrehung des Knotenpunktes O um die Parallele zur Kranquerachse ist gleich Null.

$$\psi = \frac{1}{GJ_{db}} \cdot M_y b, \quad \varphi = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [M_y - (Z - Q)(a-x)] dx.$$

Es ist $\psi + \varphi = 0$.

Gleichung 2.

Bedingung: Die Verdrehungen der beiden Trägerenden BCO und AO um die Kranlängsachse sind am Knotenpunkt O im zerlegten System einander gleich.

$$\psi_1 = \frac{1}{GJ_{da}} (M_x - Zb - Qd)a,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{EJ_b} \int_0^b [M_x - Z(b-x)] dx,$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{GJ_{da}} \cdot 2M_x a.$$

Es ist $\psi_1 + \varphi_1 = \psi_2$.

Gleichung 3.

Bedingung: Die Verschiebung des Punktes O ist gleich Null.

$$\delta_1 = \frac{1}{GJ_{da}} (M_x - Zb - Qd)ab,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EJ_a} \int_0^a [M_y - (Z - Q)(a-x)](a-x) dx,$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EJ_b} \int_0^b [M_x - Z(b-x)](b-x) dx.$$

Es ist $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$.

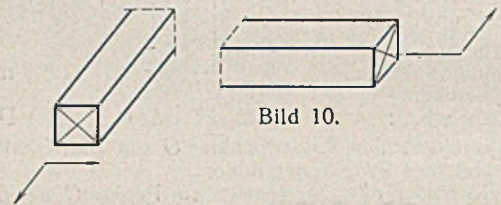


Bild 10.

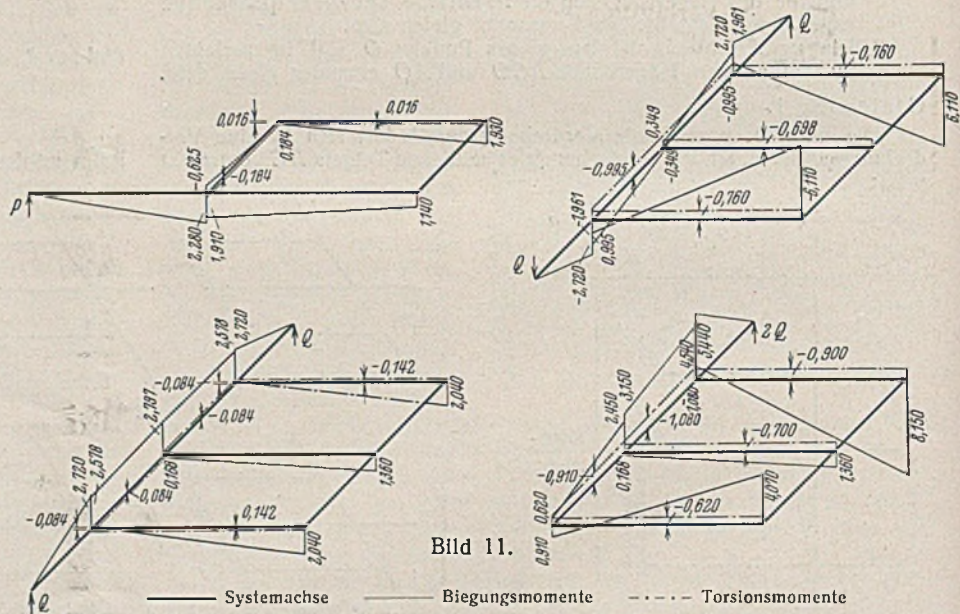


Bild 11.

— Systemachse — Biegemomente - - - - Torsionsmomente

IV. Zahlenbeispiel.

Indem man folgende Annahmen macht

$$\frac{a}{b} = 2,72, \quad \frac{c}{b} = 2,28, \quad \frac{d}{b} = 2,72,$$

$$J_{da} = J_{db} = J_d, \quad J_a = J_b = J, \quad \frac{EJ}{GJ_d} = 7.$$

findet man nachstehende Werte für die Unbekannten:

- Fall A. $Z = -0,641 P; M_x = -0,625 P b; M_y = +0,184 P b$
- Fall B. $Z = +0,219 Q; M_x = +2,797 Q b; M_y = -0,084 Q b$
- Fall C. $Z = -1,612 Q; M_x = +0,349 Q b; M_y = -0,995 Q b$

Mit Hilfe dieser Ergebnisse lassen sich leicht die Momentenlinien für Biegung und Torsion in den einzelnen Trägerabschnitten darstellen. Positiv werden diejenigen Momente bezeichnet, wie sie in Bild 10 dargestellt sind.

Eine Überlagerung der Fälle B und C ergibt schließlich den Belastungszustand D. Die Darstellung der Momente in Perspektive ist hier, wie aus Bild 11 ersichtlich, besonders am Platze. Bei Bild 11 ist zu beachten, daß die Zahlenwerte im Belastungsfall A mit dem Faktor Pb und im Falle B, C und D mit Qb zu multiplizieren sind.

(Nach L'Ossature Metallique 1937, Heft 9.)

Dipl.-Ing. W. Moheit, Berlin.

INHALT: Zur Mechanik des Fließvorganges. — Fehler in Nieten, deren Ursachen und Verhütung. — Verschiedenes: Untersuchung eines auf Biegung und Torsion beanspruchten, statisch unbestimmten Systems.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W. 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.