

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:  
 Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43  
 Fernsprecher: 87 7421  
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
 zur Zeitschrift

## DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

11. Jahrgang

BERLIN, 30. September 1938

Heft 20

Alle Rechte vorbehalten.

### Die Arbeit der äußeren Kräfte beim langsamen Befahren eines Trägers mit beliebig geformter Fahrbahn.

Von Prof. Dr.-Ing. Friedrich Hartmann, Wien.

Zusammenfassung: Es wird klargelegt, warum die Arbeit einer im Kriechtempo sich über einen Träger bewegenden Last  $P$  stets  $\frac{1}{2} P \delta$  sein muß, wobei  $\delta$  nur die Durchbiegung unter der Last bedeutet. Es wird im besonderen gezeigt, woher der Faktor  $\frac{1}{2}$  rührt und warum die äußere Arbeit von einer allenfalls vorhandenen Sprengung der Fahrbahn nach oben oder von einem Durchhang nach unten unabhängig ist.

I. Ein Zug von Lasten bewege sich ganz langsam, also stoß- und schwingungsfrei über einen Träger mit vollkommen waagerechter Fahrbahn, um dann schließlich zum Stillstand zu kommen (Bild 1). Unter den Lasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  sind die Durchbiegungen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ , und die Biegemomente für diese Belastungen werden mit  $M$  bezeichnet. Der Einfachheit halber berücksichtigen wir bei den Durchbiegungen nur den Einfluß der Biegemomente. Eine der Lasten für sich, etwa  $P_i$  im Punkte  $i$ , verursache die Biegemomente  $P_i \bar{M}_i$ , wobei  $\bar{M}_i$  die Momente im Träger sind, wenn  $P_i = 1$  an der Stelle  $i$  steht (Bild 2). Es ist also

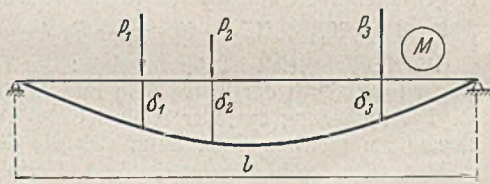


Bild 1.

(1)  $M = \sum P_i \bar{M}_i$ .  
 Die Arbeit der inneren Kräfte oder Formänderungsarbeit ist, da die Momente von 0 bis zur vollen Größe langsam anwachsen,

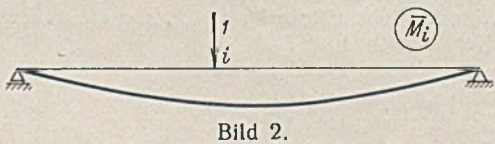


Bild 2.

$$(2) \quad \mathfrak{A}_i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l (\sum P_i \bar{M}_i) \frac{M dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l (P_1 \bar{M}_1 + P_2 \bar{M}_2 + \dots) \frac{M dx}{EJ}$$

Nun ist nach bekannter Gleichung

$$(3) \quad \delta_1 = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M dx}{EJ}, \quad \delta_2 = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M dx}{EJ}, \quad \text{usw.}$$

Aus Gl. (2) u. (3) folgt

$$(4) \quad \mathfrak{A}_i = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots) = \frac{1}{2} \sum P_i \delta_i$$

Da nun die Arbeit der inneren Kräfte gleich sein muß der Arbeit  $\mathfrak{A}_a$  der äußeren Kräfte, folgt

$$(5) \quad \mathfrak{A}_a = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots) = \frac{1}{2} \sum P_i \delta_i$$

An dieser Gleichung fällt der Faktor  $\frac{1}{2}$  auf, der in der Literatur, soweit mir bekannt, bisher damit erklärt wurde, daß die Lasten nicht plötzlich auf den Träger kommen, sondern von 0 aus anwachsen. Das wäre jedoch nur dann richtig, wenn jede Last etwa mit einem Kran langsam an ihre endgültige Stelle niedergelassen würde. Die Lasten rollen aber langsam auf den Träger auf, und jede Last  $P_i$  senkt sich in voller Größe um den Betrag  $\delta_i$ . Es ist somit diese Arbeit der Kräfte ganz zweifellos  $\sum P_i \delta_i$  und nicht die Hälfte davon. Andererseits aber muß die Gleichung  $\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_i$

unbedingt erfüllt sein. Es besteht also hier scheinbar ein Widerspruch, dessen Beseitigung notwendig ist.

Wenn der Träger anfänglich gerade ist und waagrecht liegt, so wird eine ganz langsam darüberrollende Last einer Rückhaltekräfte bedürfen, da sich ja der Träger durchbiegt. Ohne diese Rückhaltekräfte müßte die Last besonders bei stärkeren Einsenkungen ins Rollen kommen und sich mit steigender Geschwindigkeit weiterbewegen, wodurch lotrecht nach abwärts wirkende Flichkräfte und Schwingungen entstehen müßten, die unserer Voraussetzung nach (Kriechfahrt) auszuschließen sind. Bei den sehr geringen Durchbiegungen unserer Brückenträger ist die Rückhaltekräfte durch die Reibung gegeben. In Bild 3 ist die vollgezogene Kurve A die Biegelinie des Trägers, wenn sich die Last  $P$  an der Stelle  $x = c$  befindet. Die Durchbiegung an beliebiger Stelle  $x$  ist für unveränderlichen Trägerquerschnitt („Hütte“ I, Festigkeitslehre)

$$(6) \quad \delta_x = \frac{P c c_1^2}{6 E J l} \left( \frac{2x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1} \right)$$

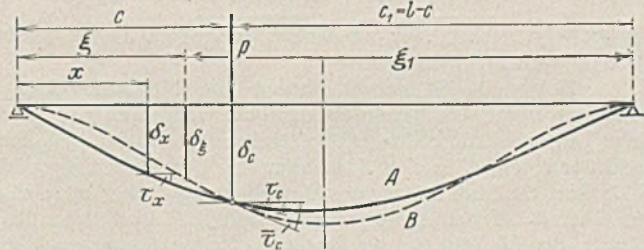


Bild 3.

Für  $x = c$  ist

$$(7) \quad \delta_c = \frac{P c^2 (l - c)^2}{3 E J l}$$

Differenziert man Gl. (6), so erhält man die Verdrehung an beliebiger Stelle

$$(8) \quad \tau_x = \frac{P c^2 c_1^2}{6 E J l} \left( \frac{2}{c} + \frac{1}{c_1} - \frac{3x^2}{c^2 c_1} \right)$$

und für  $x = c$

$$(9) \quad \tau_c = \frac{P c^2 c_1^2}{3 E J l} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c_1} \right) = \frac{P c c_1}{3 E J l} (c_1 - c)$$

In Bild 3 stellt die gestrichelte Kurve B den geometrischen Ort der Durchbiegungen für veränderliches  $c$  dar, also jener Durchbiegungen, die stets am Orte der Last  $P$  entstehen. Die Gleichung dieser Kurve erhält man aus Gl. (7), wenn man  $c$  durch ein veränderliches  $\xi$  ersetzt:

$$(10) \quad \delta_\xi = \frac{P \xi^2 (l - \xi)^2}{3 E J l}$$

Durch Differentiation nach  $\xi$  ergibt sich der Neigungswinkel

$$(11) \quad \tau_\xi = \frac{P}{3 E J l} (2 l^2 \xi - 6 l \xi^2 + 4 \xi^3) = \frac{2 P \xi (l - \xi)(l - 2 \xi)}{3 E J l} = \frac{2 P \xi (l - \xi)(\xi_1 - \xi)}{3 E J l}$$

Für  $x = c$  ist  $\tau_c = \tau_c$  und man erhält

$$(12) \quad \tau_c = \frac{2 P c c_1}{3 E J l} (c_1 - c)$$

Der Vergleich von Gl. (9) u. Gl. (12) ergibt die interessante Beziehung

$$(13) \quad \tau_c = 2 \tau_c$$

Bewegt sich die Last von der Stelle  $x$  um die Strecke  $dx$  weiter (Bild 4), so gelangt sie von  $a$  nach  $b$ , erfährt also eine Senkung  $d\delta_x = \tau_x dx$ , wobei eine Arbeit geleistet wird

$$(14) \quad d\mathfrak{A} = P \tau_x dx = 2 P \tau_x dx.$$

Hier ist  $\tau_x = \tau_x$  zu setzen, also ist nach Gl. (11)

$$(15) \quad d\mathfrak{A} = \frac{P^2}{3 E J l} (2 l^2 x - 6 l x^2 + 4 x^3) dx.$$

Durch Integration ergibt sich

$$(16) \quad \mathfrak{A}_a = \int_0^c d\mathfrak{A} = \frac{P^2}{3 E J l} (l^2 c^2 - 2 l c^3 + c^4) = \frac{P^2 c^2 (l - c)^2}{3 E J l}.$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (7) ist also, wie früher bemerkt wurde, die Senkungsarbeit der Kraft  $P$  tatsächlich

$$(17) \quad \mathfrak{A}_a = P \delta_c.$$

Die Biegelinie des Trägers ist hierbei aus der Lage  $A_1$  in die hiervon nur unendlich wenig verschiedene Lage  $A_2$  gekommen. Der Neigungswinkel der Biegelinie im Punkt  $x$  ist  $\tau_x$  und ändert sich bei der Bewegung der Last um  $dx$  nur unendlich wenig. Dieser Neigungswinkel erfordert eine Rückhaltekraft  $P \cdot \sin \tau_x$  in der Richtung der Tangente an die Biegelinie in  $a$ , wenn sich  $P$  im Kriechtempo weiterbewegen soll. Die Arbeit dieser Kraft bei der Weiterbewegung um  $dx$  ist negativ (Kraft entgegengesetzt der Wegrichtung  $dx \cdot \sec \tau_x$  wirkend)

$$(17) \quad d\mathfrak{A} = -P \cdot \sin \tau_x dx \cdot \sec \tau_x = -P \cdot \operatorname{tg} \tau_x dx = -P \tau_x dx.$$

Da nun nach Gl. (13)  $\tau_x = \frac{1}{2} \tau_x$  ist, erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (14) u. (17)

$$(18) \quad \mathfrak{A}_a = \int_0^c d\mathfrak{A} = -\frac{1}{2} P \delta_c.$$

Die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte bei der langsamen Bewegung der Last  $P$  von  $x=0$  bis  $x=c$  ist demnach

$$(19) \quad \mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_a + \mathfrak{A}_a = \frac{1}{2} P \delta_c.$$

Ebenso groß ist nach Gl. (4) die Arbeit der inneren Kräfte, so daß nun kein Widerspruch mehr besteht.

II. Die Notwendigkeit der Einführung von Rückhaltekräften in die äußere Arbeit ergibt sich besonders deutlich, wenn man den Arbeitssatz auf einen Träger mit durchhängender Fahrbahn anwendet. Die Fahrbahn sei nach der Kurve  $C$  in Bild 5 gekrümmt. Der Krümmungspfeil  $\Delta$  in der Mitte sei ein Mehrfaches der Durchbiegung  $\delta$ , die unter einer sich langsam über den Träger bewegendem Einzellast  $P$  an gleicher Stelle entsteht, aber der Einfachheit der Rechnung halber immer noch so klein,

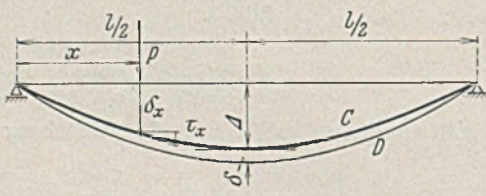


Bild 5.

daß man mit guter Näherung überall  $ds$  durch  $dx$  ersetzen darf. Rückt nun eine Einzellast  $P$  vom Trägerende im Kriechtempo bis zur Trägermitte, dann ist nach Gl. (4) die Arbeit der inneren Kräfte (wenn wieder nur die Momente berücksichtigt werden, die für  $ds = dx$  dieselben sind wie beim waagerechten Träger)

$$(20) \quad \mathfrak{A}_i = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{E J} = \frac{1}{2} P \delta.$$

Die lotrechte Kraft  $P$  aber durchläuft in voller Größe den lotrechten Weg  $\Delta + \delta$ , so daß die Senkungsarbeit hierfür gleich ist

$$(21) \quad \mathfrak{A}_{a1} = P(\Delta + \delta).$$

Würde sich der Träger nicht durchbiegen ( $\delta = 0$ ), dann wäre an der Stelle  $x$  die zur langsamen Bewegung erforderliche Rückhaltekraft  $P \cdot \sin \tau_x$ , und ihr Weg bei der Lagenveränderung um  $dx$  wäre  $dx \cdot \sec \tau_x$ . Somit erhält man die Rückhaltearbeit

$$(22) \quad \mathfrak{A}_{a2} = -\int_0^{l/2} P \tau_x dx = -P \Delta.$$

Die Form der Krümmung der Linie  $C$  ist dabei ganz gleichgültig. Es ist stets

$$\int_0^{l/2} \tau_x dx = \Delta.$$

Nun biegt sich aber der Träger bei der Bewegung der Last  $P$  durch. Nachdem man unter der Voraussetzung  $ds = dx$  die Durchbiegungen nach derselben Gleichung erhält wie für einen geraden Träger, ist auch die äußere Arbeit der Rückhaltekraft hierfür nach Gl. (18) zu berechnen

$$(23) \quad \mathfrak{A}_{a3} = -\frac{1}{2} P \delta.$$

Die Gesamtarbeit der äußeren Kraft ist also

$$(24) \quad \mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_{a1} + \mathfrak{A}_{a2} + \mathfrak{A}_{a3} = P(\Delta + \delta) - P \Delta - \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} P \delta,$$

womit wieder die Gleichheit zwischen äußerer und innerer Arbeit hergestellt scheint.

III. Ist ein Träger in unbelastetem Zustand nach aufwärts gekrümmt, etwa nach der Kurve  $E$  in Bild 6 mit der größten Sprengung  $\Delta$ , und bewegt sich eine Kraft von der Stütze bis zur Mitte, so ist die in lotrechter Richtung geleistete Arbeit negativ, weil der Weg entgegengesetzt der Kraft gerichtet ist. Biegt sich dabei der Träger um  $\delta$  durch, so erhält man

$$(25) \quad \mathfrak{A}_{a1} = -P(\Delta - \delta).$$

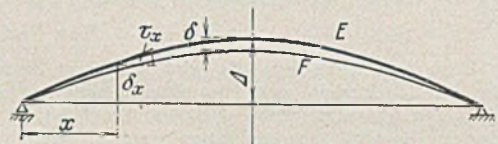


Bild 6.

Zur Bewegung der Kraft sind aber Antriebskräfte erforderlich, die auf der Kurve  $E$  die Größe  $P \cdot \sin \tau_x$  haben und in der Krafrichtung die Wege  $dx \cdot \sec \tau_x$  durchlaufen, so daß man die Arbeit erhält

$$(26) \quad \mathfrak{A}_{a2} = + \int P \tau_x dx = + P \Delta.$$

Diese Arbeit verringert sich wegen der Durchbiegung wieder um den Betrag

$$(27) \quad \mathfrak{A}_{a3} = \frac{1}{2} P \delta;$$

die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte wird daher

$$(28) \quad \mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}_{a1} + \mathfrak{A}_{a2} - \mathfrak{A}_{a3} = -P(\Delta - \delta) + P \Delta - \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} P \delta.$$

IV. Ein Sonderfall ist der folgende: Der Träger erhält eine Sprengung nach aufwärts nach der Kurve  $B$  in Bild 7, die durch Gl. (10) dargestellt ist. Die Sprengung an jeder Stelle ist also ebenso groß wie die Durchbiegung am gleichen Orte, wenn sich die Einzellast  $P$  gerade daselbst befindet. Die Fortbewegung der Last  $P$  erfolgt somit auf einer Waagerechten, und man könnte geneigt sein, die Arbeit der äußeren Kraft gleich Null zu setzen, während die Arbeit der inneren Kräfte (durch die Biegemomente) doch wieder  $\mathfrak{A}_i = \frac{1}{2} P \delta$  sein muß. Es sind also offenbar auch hier Antriebskräfte erforderlich, die die äußere Arbeit liefern. Stellt die Kurve  $B$  in Bild 7 in stark verzerrem Maßstab den überhöhten Träger dar, so wird bei der angenommenen Laststellung ( $P$  in der Entfernung  $x$  vom Auflager)  $C$  die Biegelinie sein. Ist etwa  $x$  gleich  $c$  in Bild 3, dann erhält man die Biegelinie  $C$ , wenn man die Ordinaten der Biegelinie  $A$

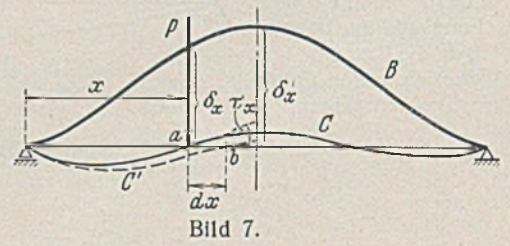


Bild 7.

in Bild 3 von den Ordinaten  $B$  in Bild 7 abzieht. Bewegt sich die Last um  $dx$  weiter, so gelangt sie vom Punkt  $a$  nach  $b$ , wobei die Biegelinie  $C$  in die Linie  $C'$  übergeht. Diese Weiterbewegung ist nur durch eine Antriebskraft  $P \cdot \sin \tau_x$ , die stets in der Richtung  $dx \cdot \sec \tau_x$  wirkt, möglich, was für diesen Fall schon E. Melan vermutet hat. Der Winkel  $\tau_x$  ergibt sich nach Gl. (12) u. (9) aus  $|\tau_c - \tau_x|_{c=x}$ . Mit Berücksichtigung von Gl. (13) ist nach Gl. (9)  $\tau_x = |\tau_c|_{c=x}$  und daher die Arbeit der Antriebskraft bei der Bewegung der Kraft bis zur Mitte unter Berücksichtigung der Gl. (17) u. (18)

$$(29) \quad \mathfrak{A}_a = \int_0^{l/2} P \cdot \sin \tau_x dx \cdot \sec \tau_x = \int_0^{l/2} P \tau_x dx = \frac{1}{2} P \delta.$$

V. Da für mehrere Lasten genau dasselbe gilt, was hier für eine Last bewiesen wurde, und da für anders als Balkenträger gelagerte Tragwerke genau dieselben Überlegungen gelten, ist für alle möglichen Fälle klar gestellt, warum die Arbeit der äußeren Kräfte beim langsamen Befahren eines Trägers stets den Faktor  $\frac{1}{2}$  enthalten muß.

Alle Rechte vorbehalten.

## Beziehung zwischen dem Kraftverfahren und dem Formänderungsverfahren bei Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke.

Von Prof. Dr.-Ing. G. Unold, Chemnitz.

In der schon mehrfach erörterten Frage, ob zur Durchrechnung eines statisch unbestimmten Tragwerks das Kraftverfahren oder das Formänderungsverfahren besser geeignet ist, sind verschiedene Meinungen im Umlauf, die, ohne eben falsch zu sein, oft am Kernpunkt der Frage vorbeigehen. So wird u. a. behauptet, das Formänderungsverfahren sei nur bei hochgradiger Unbestimmtheit zweckmäßig; nach anderer Meinung paßt es nur für zusammengesetzte Rahmentragwerke; man bringt auch das altbekannte Knotendrehwinkelverfahren mit dem Formänderungsverfahren derart in Verbindung, daß es den Anschein hat, als wären beide Verfahren identisch. Nachstehende ganz einfach gehaltene Entwicklung soll zur Klärung der aufgeworfenen Frage beitragen.

Die Bemessung eines Tragwerks erfolgt auf Grund einer gegebenen zulässigen Spannung und einer gegebenen zulässigen Verformung. Die Spannungsforderung wird oft aus alter Gewohnheit wichtiger genommen als die Durchbiegungsforderung, wengleich wohlbekannt ist, daß für sperrige mäßig belastete Tragwerke stets die Formänderung maßgebend ist.

Für das Weitere sei die unbedingte Gleichwertigkeit beider Forderungen vorausgesetzt; das Tragwerk sei also derart zu bemessen, daß jede der beiden Forderungen mindestens erfüllt ist. Unter diesem Gesichtswinkel gewinnt das Formänderungsverfahren eine erhöhte Bedeutung, und beide Verfahren gelangen zu einer gewissen Gleichwertigkeit.

Zur Abkürzung sei das Kraftverfahren und das Formänderungsverfahren mit *KV* und *FV* bezeichnet.

Die Behandlung eines statisch unbestimmten Tragwerks zerfällt in nachstehende Teilarbeiten:

I. Zerlegung des Tragwerks in einzelne je statisch bestimmte Teiltragwerke.

II. An den Auflagerstellen oder Gelenken oder Schnittstellen von Fachwerks- oder Biegestäben treten statisch unbestimmte Kräfte oder Momente  $X_1, X_2, X_3 \dots$  auf; an denselben Stellen liegen unbekannte Formänderungen in Form von Längs- oder Querverschiebungen oder Knotendrehwinkeln oder Stabendrehwinkeln vor, die mit  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$  oder  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  bezeichnet seien.

III. Zwischen den Lasten  $P$ , den  $X$  und den  $\delta$  bestehen allgemeine lineare Beziehungen, die symbolisch mit  $(AB)$  bezeichnet seien.

Von hier ab ist zwischen dem *KV* und dem *FV* zu unterscheiden:

*KV*: Man formt die  $(AB)$  derart um, daß die  $\delta$  in  $P$  und den  $X$  ausgedrückt werden.

Man stellt die „Formänderungsbeziehungen“ (*FB*) auf, die stets zwischen benachbarten  $\delta$  bestehen.

Diese (*FB*) in Verbindung mit obigen (*AB*) liefern Beziehungen zwischen den  $X$  und den  $P$ , das sind die „Elastizitätsgleichungen“. Die hieraus folgenden  $X$ , in die (*AB*) eingesetzt, liefern die  $\delta$ .

Die vorstehend skizzierten allgemeinen Verfahren sollen auf nachstehende Beispiele übertragen werden.

1. Bogen mit Zugband (Bild 1).  $\delta$  bezeichnet die endgültige Verschiebung des Rollenslagers nach rechts;  $\delta_p$  ist die Verschiebung infolge der Lasten  $P$  allein. Die  $(AB)$  lauten

$$\delta = \delta_p - X \delta_r \quad \text{und} \quad \delta = X \delta_s,$$

worin

$\delta_r$  die Ausweichung infolge Kraft  $X=1$  und  
 $\delta_s$  die Verlängerung der Zugstange infolge Zug  $X=1$ .

*KV*: Die (*FB*) lautet  
 $\delta = \delta$  oder  $\delta_p - X \delta_r = X \delta_s$ ,  
woraus

$$X = \frac{\delta_p}{\delta_r + \delta_s} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\delta_p \delta_s}{\delta_r + \delta_s}.$$

Die (*KB*) lautet

$$X = X \quad \text{oder} \quad \frac{\delta_p - \delta}{\delta_r} = \frac{\delta}{\delta_s},$$

woraus

$$\delta = \frac{\delta_p \delta_s}{\delta_r + \delta_s} \quad \text{und} \quad X = \frac{\delta_p}{\delta_r + \delta_s}$$

wie beim *KV*.

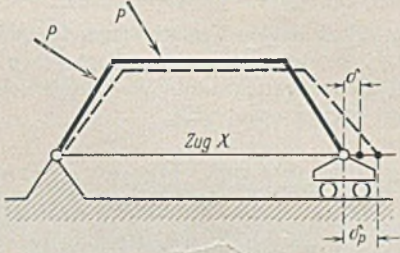


Bild 1.

Beide Verfahren liefern somit dieselben Ergebnisse, was auch zu erwarten war.

2. Durchlaufträger mit Stiel (Bild 2 u. 3).

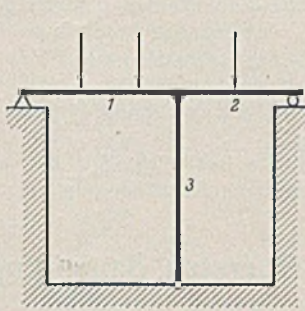


Bild 2.

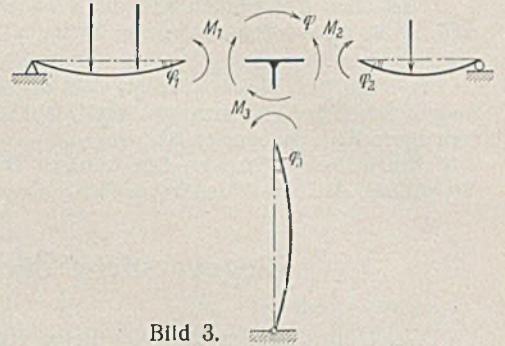


Bild 3.

*KV*: Die  $(AB)$  lauten

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{1p} + M_1 c_1 \\ \varphi_2 &= \varphi_{2p} + M_2 c_2 \\ \varphi_3 &= M_3 c_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{die } \varphi_{1p} \text{ und } \varphi_{2p} \\ &\text{rühren von den} \\ &\text{Belastungen her,} \\ &\text{die } c_1, c_2 \text{ und} \\ &c_3 \text{ von } M_1 = M_2 \\ &= M_3 = 1. \end{aligned}$$

Nach (*FB*) ist

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\varphi, \quad \varphi_2 = \varphi \quad \text{und} \quad \varphi_3 = \varphi, \\ \text{worin } \varphi &\text{ der unbekannte Knoten-} \\ \text{drehwinkel, somit} \\ -\varphi &= \varphi_{1p} + M_1 c_1 \\ \varphi &= \varphi_{2p} + M_2 c_2 \\ -\varphi &= M_3 c_3. \end{aligned}$$

Daraus folgen die beiden Elastizitätsgleichungen und eine statische Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi_{1p} + M_1 c_1 &= M_3 c_3 \\ 0 &= \varphi_{2p} + M_2 c_2 + M_3 c_3 \\ M_1 + M_3 &= M_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $M_1, M_2, M_3$  und  $\varphi$ .

Wir vermerken, daß das *KV* drei Gleichungen der unbekanntenen  $M$  ergibt, während das *FV* eine Gleichung für das unbekanntene  $\varphi$  liefert; für diese und ähnliche Fälle ist demnach das *FV* angezeigt<sup>1)</sup>.

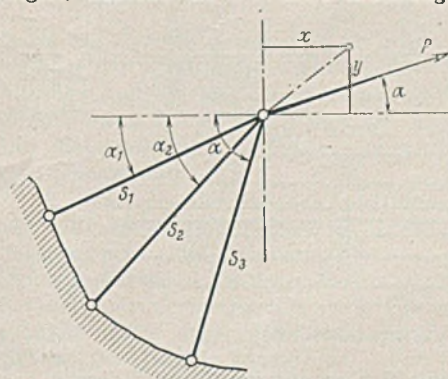


Bild 4.

Nachstehende (*AB*) drücken die Verlängerungen der einzelnen Stäbe aus:

$$\begin{aligned} S_1 s_1 / E_1 F_1 &= x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \sin \alpha_1^* \\ S_2 s_2 / E_2 F_2 &= x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \sin \alpha_2^* \\ S_3 s_3 / E_3 F_3 &= x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \sin \alpha_3^* \end{aligned}$$

woraus

$$S_1 = x \cdot \cos \alpha_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{s_1} + y \cdot \sin \alpha_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{s_1} \text{ usw.}$$

Nach (*KB*) gilt

$$\begin{aligned} P \cdot \cos \alpha &= S_1 \cdot \cos \alpha_1 + S_2 \cdot \cos \alpha_2 + S_3 \cdot \cos \alpha_3 + \dots^* \\ P \cdot \sin \alpha &= S_1 \cdot \sin \alpha_1 + S_2 \cdot \sin \alpha_2 + S_3 \cdot \sin \alpha_3 + \dots^* \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Vgl. Stahlbau-Kalender, Stahlskelettrahmen.

*FV*: Die  $(AB)$  ergeben mit Knotendrehwinkel  $\varphi$

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{\varphi}{c_1} - \frac{\varphi_{1p}}{c_1} \\ M_2 &= \frac{\varphi}{c_2} - \frac{\varphi_{2p}}{c_2} \\ M_3 &= -\frac{\varphi}{c_3} \end{aligned}$$

Nach (*KB*) ist

$$M_1 - M_2 + M_3 = 0$$

oder

$$-\frac{\varphi}{c_1} - \frac{\varphi_{1p}}{c_1} - \frac{\varphi}{c_2} + \frac{\varphi_{2p}}{c_2} - \frac{\varphi}{c_3} = 0,$$

woraus die Unbekannte

$$\varphi = \frac{-\frac{\varphi_{1p}}{c_1} + \frac{\varphi_{2p}}{c_2}}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}}$$

und die  $M_1, M_2, M_3$  nach obigen Ausdrücken.

3. Sternstab mit drei oder mehr Stäben (Bild 4). Am Knoten wirkt Kraft  $P$  in Neigung  $\alpha$ ; jeder Stab hat am Knoten und am Boden Gelenkanschluss. Die unbekanntenen Stabkräfte heißen  $S_1, S_2 \dots$

Nach dem *FV* führt man als unbekanntene Verformungen die Verschiebungskomponenten  $x$  und  $y$  ein, als klein gegen die Stablängen vorausgesetzt.

Nach Einsetzen der obigen  $S$  in diese ( $KB$ ) und Ordnen der Glieder folgen die Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 &x [\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 E_1 F_1/s_1 + \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 E_2 F_2/s_2 + \dots] \\
 &+ y [\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 E_1 F_1/s_1 + \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 E_2 F_2/s_2 + \dots] = P \cdot \cos \alpha, \\
 &x [\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 E_1 F_1/s_1 + \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_2 E_2 F_2/s_2 + \dots] \\
 &+ y [\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 E_1 F_1/s_1 + \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_2 E_2 F_2/s_2 + \dots] = P \cdot \sin \alpha,
 \end{aligned}$$

daraus folgen die Unbekannten  $x$  und  $y$  und dann die  $S$ .

Nach dem  $KV$  würden sich bei  $n$  Stäben die Unbekannten  $x$  und  $y$  und  $S_1$  bis  $S_n$  aus den mit \* bezeichneten  $n + 2$  Gleichungen unmittelbar ergeben, was aber unvergleichlich viel umständlicher ist als das obige  $FV$ .

In ähnlicher Weise erledigt sich der Fall des Anschlusses einer starren Scheibe durch mehr als drei Stäbe; auch auf den Raum lassen sich diese Fälle sinngemäß übertragen.

Schlußbetrachtung. Die wenigen Beispiele haben gezeigt, daß Tragwerke, die sowohl nach Spannung als auch nach Formänderung zu

bemessen sind und bei denen die Formänderungswerte  $\delta$  oder  $\varphi$  an den Angriffsstellen der  $X$  nicht Null sind, sowohl nach dem  $KV$  als auch nach dem  $FV$  behandelt werden können, daß aber die Anzahl der sich ergebenden Elastizitätsgleichungen bei beiden Verfahren im allgemeinen verschieden ist. Da die Auflösung der Elastizitätsgleichungen den Hauptanteil der gesamten statisch unbestimmten Rechnung ausmacht und sehr stark von der Anzahl der Gleichungen abhängt, ist stets dasjenige Verfahren zu bevorzugen, das die kleinere Anzahl von Gleichungen ergibt.

Die Frage, welches Verfahren die jeweils kleinere Anzahl von Gleichungen ergibt, ist hier nicht behandelt; solches hat Hertwig<sup>2)</sup> an anderer Stelle sehr ausführlich getan. Jedenfalls sollte dem  $FV$  eine größere Bedeutung eingeräumt werden, als es bisher üblich ist; in vielen Fällen gelangt man dadurch zu überraschend einfachen Lösungen, die sonst unbekannt bleiben müssen.

<sup>2)</sup> Stahlbau 1933, S. 145.

## Biegeversuche der Obersten Bauleitung Dresden mit geschweißten Trägern.

Von Dipl.-Ing. Kurt Schreiner, Oberste Bauleitung Dresden.

Alle Rechte vorbehalten.

Wenn im folgenden über eine Reihe von statischen Biegeversuchen mit geschweißten Trägern berichtet wird, so möchte ich an erster Stelle hervorheben, daß es weder beabsichtigt noch im Rahmen der ganzen Versuchsanordnung überhaupt möglich war, bei den Versuchen Verhältnisse nachzubilden, wie sie bei einigen größeren Reichsautobahnbrücken vorliegen.

horizontale Träger  $\square 16$  mit Ansätzen in Höhe des Untergurtes verhinderten ein vorzeitiges Ausknicken.

3. Mit Rücksicht auf die unter 1 und 2 geschilderten Umstände konnten nur 3 m lange und etwa 0,50 m hohe Versuchsträger hergestellt werden, die nur schwer in ein richtiges Maßstabverhältnis zu den Hauptträgern der ausgeführten Bauwerke zu bringen waren.
4. Wie in Bild 4 dargestellt ist, ist der Einfluß der Querkraft auf die Beanspruchung und Durchbiegung bei dieser Versuchsanordnung unverhältnismäßig groß, was jedoch im allgemeinen noch ungünstigere Verhältnisse schafft.

Die Aufgabe, die unter diesen Voraussetzungen gestellt werden konnte, lautete:

Es sind 3 m lange Versuchsträger aus St 52 zu untersuchen, für die in den folgenden Punkten ähnliche Verhältnisse wie bei einigen geschweißten Reichsautobahnbrücken mit Hauptträgern aus Breitflachstählen vorlagen. Die Brückenträger und die Versuchsträger haben gemeinsam:

- a) die Zusammensetzung des verwendeten St 52,
- b) das Lieferwerk für den Stahl,
- c) die Stahlbaufirma,
- d) die verwendeten Elektroden,
- e) den Arbeitsvorgang.

Zu diesem Zwecke wurden zunächst die in Bild 3 dargestellten beiden Versuchsträger  $I_A$  und  $II_A$  hergestellt. Die Gurtplatten  $150 \times 30$  wurden mit den Stegblechen  $500 \times 20$  automatisch mit Böhlerelektroden verschweißt. Waagerechte und lotrechte Aussteifungen wurden nachträglich angebracht.

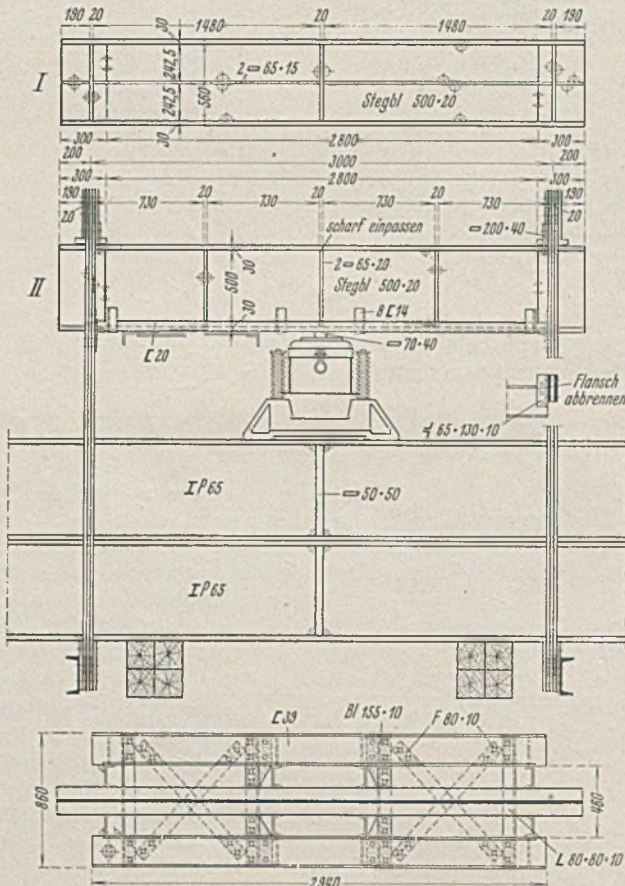


Bild 1. Versuchsanordnung.

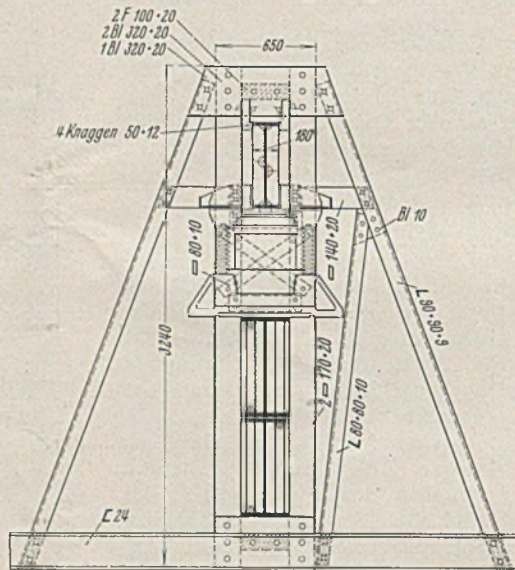


Bild 2. Versuchsanordnung.

### 1. Versuche an Trägern mit Gurten aus Breitflachstählen.

Die Oberste Bauleitung Dresden wurde mit den Versuchen beauftragt, weil sich bei der Firma Christoph & Unmack in Niesky, die im Dresdener Bezirk Überbauten in St 52 geschweißt hat, eine Möglichkeit zur raschen Durchführung ergab. Es bot sich hierbei Gelegenheit, bisherige Erfahrungen bei der Schweißung von St 52 nochmals zu überprüfen. Dabei war man sich über die Notwendigkeit klar, die folgenden Umstände und Erschwernisse in Kauf nehmen zu müssen:

1. Mit Rücksicht auf die Stahlknappheit und die Schwierigkeit einer schnellen Stahlbeschaffung begnügte man sich mit einem geringsten Aufwand an Stahl.
2. Zur Durchführung der Versuche gab man sich mit der in Bild 1 u. 2 dargestellten Versuchsanlage zufrieden, die von der Firma in kürzester Zeit aufgebaut werden konnte. Dabei war es möglich, die Versuchsträger mit einer 300 t-Pressen von einem Gegenträgerpaar abzudrücken. Die Versuchsträger und Gegenträger wurden an den Enden durch Bügel zusammengehalten, die durch den Druck der Presse gezogen werden. Besondere

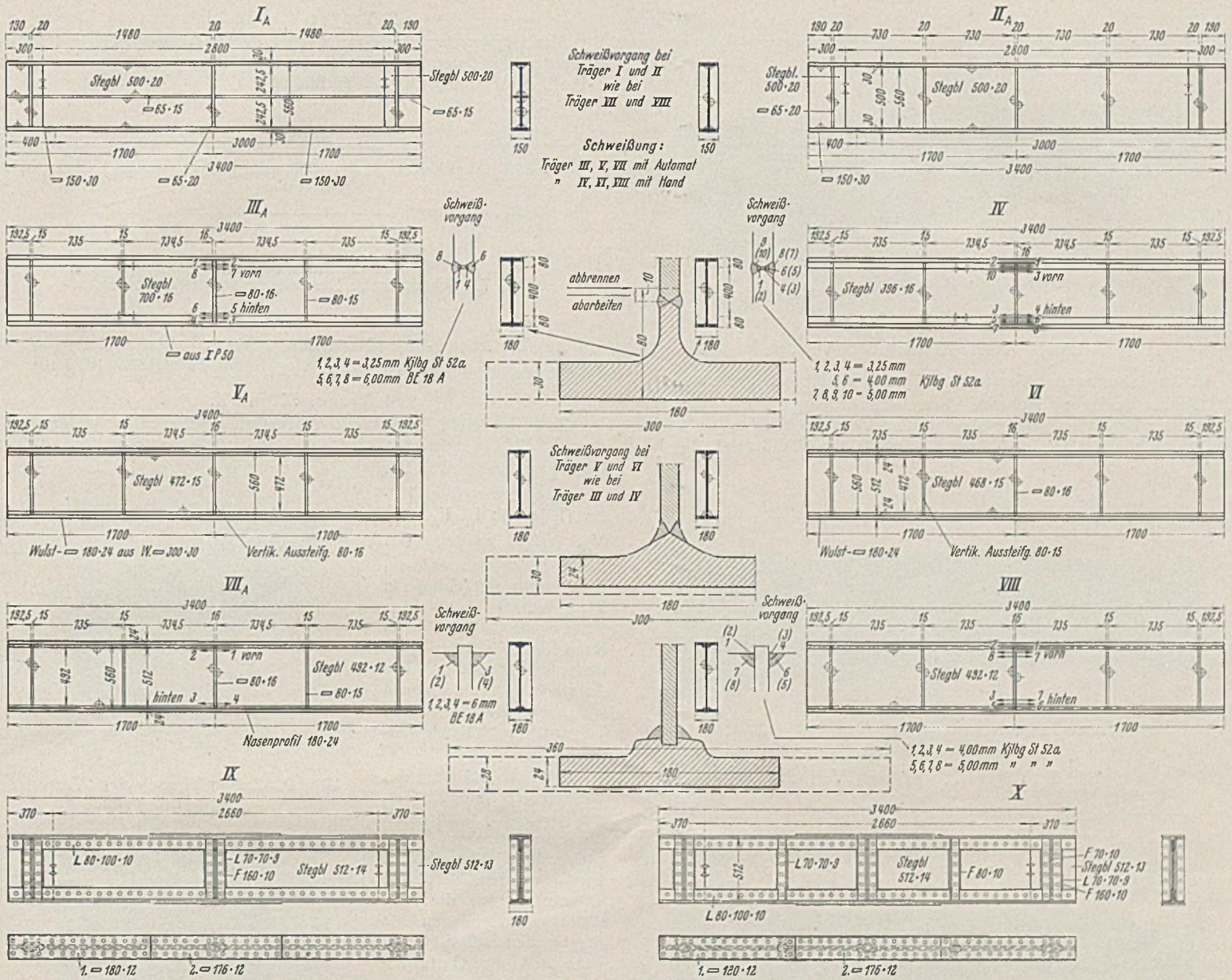


Bild 3. Zusammenstellung der Versuchsträger.

Die Versuche wurden im Freien, auf dem Werkplatz der Firma Christoph & Unmack durchgeführt (Bild 2). Zur Messung der Druckkräfte wurde ein vorher geeichtes Manometer benutzt. Mit Hilfe von Stegermeßuhren (Dosenapparaten Prinzip Leuner) wurden Hebungen und Senkungen der Trägermitten und der Trägerenden in bezug auf ein

festes Standgerüst gemessen (Bild 2) und daraus die absolute Durchbiegung der Versuchsträger errechnet. — Nebenher wurden die gleichen Messungen mit Nivellierinstrumenten ausgeführt. Huggenberger-Spannungsmesser waren in Trägermitte im Ober- und Untergurt angebracht worden. Die Meßergebnisse wurden aufgetragen und den errechneten Werten gegenübergestellt.

Die Versuche der ersten beiden Träger zeigten, wie zu erwarten war, das vollkommen einwandfreie Verhalten von Werkstoff und Schweißgut. Beanspruchung und Verformung stimmten mit den Ergebnissen der Berechnung gut überein. Die Ergebnisse waren sogar besonders günstig. Bei Träger I<sub>A</sub> konnte eine Beanspruchung von rd. 6100 kg/cm<sup>2</sup> erreicht werden, während der Träger II<sub>A</sub> bis zur Grenze von 5900 kg/cm<sup>2</sup> belastet wurde.

Bild 5 u. 6 zeigen die Träger nach dem Versuch. — In beiden Fällen wichen die Druckgurte seitlich aus, bevor die Träger durchbrechen konnten. In den Schweißnähten zeigten sich nur wenig Risse. Die größten Durchbiegungen wurden mit 50 mm gemessen. Wie Bild 5 u. 6 zeigen, hatten die verbogenen Träger im Scheitel einen ziemlich scharfen Knick. Der am Träger gemessene Winkel  $\alpha$  (Bild 7) betrug etwa 4 bis 5° (s. Tafel 1).

Bild 5. Träger II<sub>A</sub> nach dem Versuch.

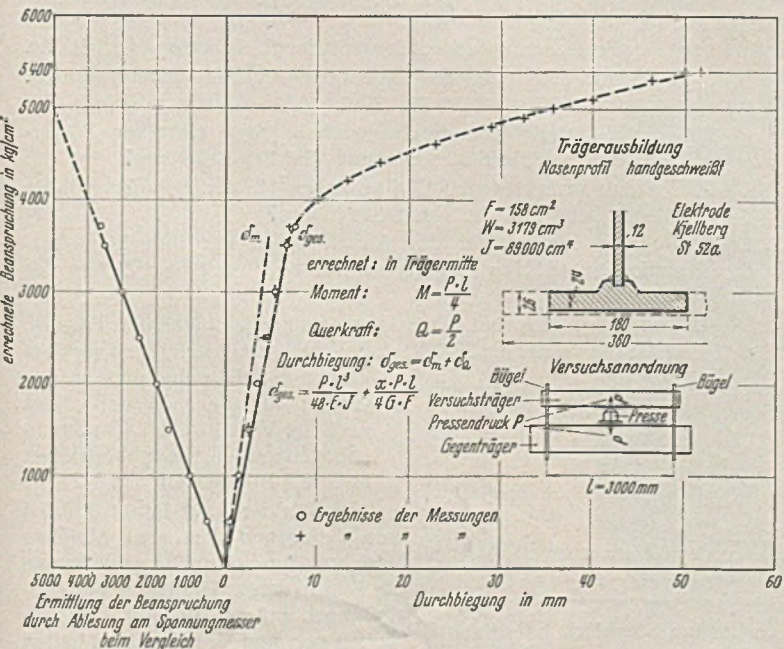
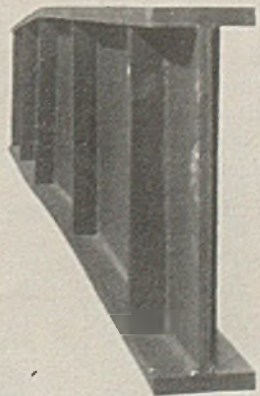


Bild 4. Graphische Darstellung der Versuchsergebnisse.

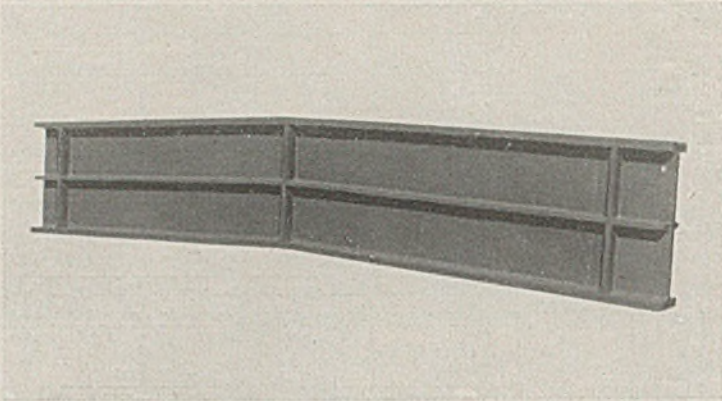


Bild 6. Träger II<sub>A</sub> nach dem Versuch.

**II. Ausdehnung der Versuche auf verschiedene Trägersorten.**

Die zur Verfügung stehende Versuchseinrichtung war der Anlaß, mit möglichster Beschleunigung einige weitere Versuche durchzuführen. Es wurden noch die folgenden Träger hergestellt, die Bild 3 zeigt.

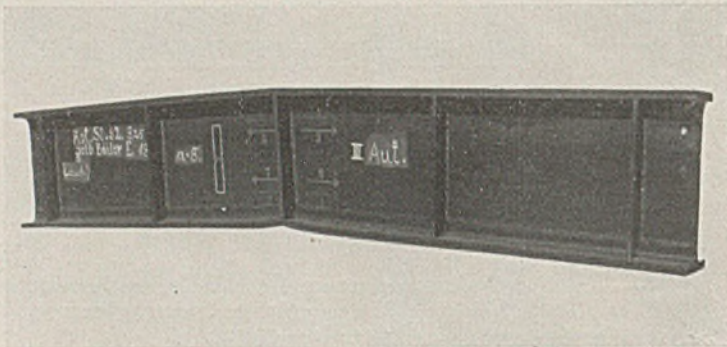


Bild 8. Träger III<sub>A</sub> nach dem Versuch.

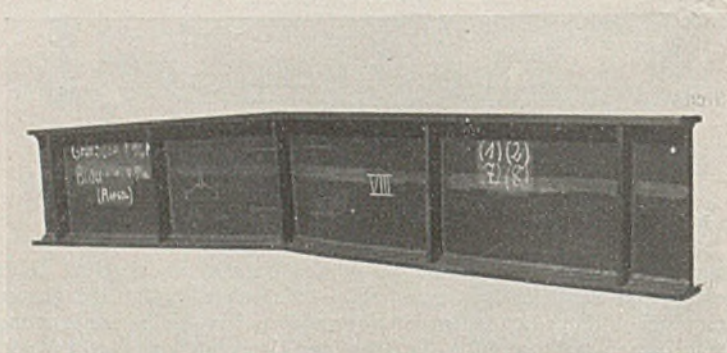


Bild 10. Träger VIII nach dem Versuch.

Die Versuchsträger sollten möglichst schnell aus greifbaren Profilen zusammengeschweißt werden. Die Querschnitte und Widerstandsmomente waren bedingt durch die Belastung, die das Versuchsgerät zuließ. —

Deshalb wurde es notwendig, die großen Querschnitte der vorhandenen Profilstähle durch Abarbeiten zu verkleinern, damit die Versuchsträger bis zu einer Beanspruchung von über 6000 kg/cm<sup>2</sup> belastet werden konnten.

In Frage kamen:

**1. Träger III<sub>A</sub> und IV.**

Die Stege von Peiner Trägern wurden oben und unten durchgeschnitten und nachträglich wieder mit den Gurten verschweißt, nachdem ihr Querschnitt 300×30 bis auf das Maß 180×30 abgearbeitet worden war (Nachahmung eines Krupp-Profiles). Bild 8 zeigt den Träger III<sub>A</sub> nach dem Versuch.

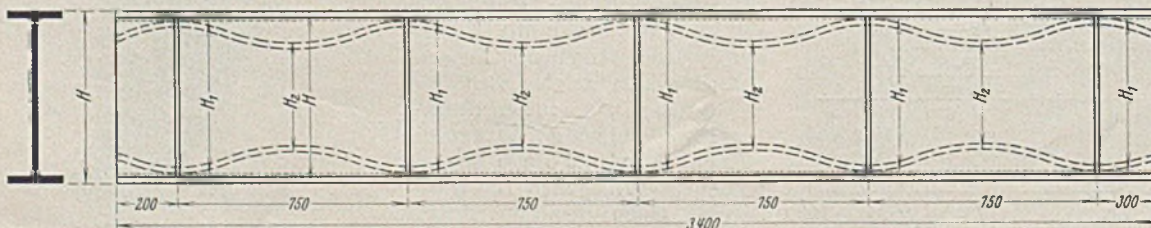


Bild 12. Schematische Darstellung des angeschweißten Gurtes über den vorher am Stegblech befestigten Aussteifungen (Zustand vor und nach dem Schweißen).

$H$  = Trägerhöhe vor dem Schweißen  
 $H_1$  = " nach " " (an der Aussteifung)  
 $H_2$  = " nach " " (in der Mitte zwischen zwei Aussteifungen)

**2. Träger V<sub>A</sub> und VI.**

Aus Dörnenschen Wulstflachstählen 300×30 wurden Gurte 180×24 herausgearbeitet und dann mit den 15 mm dicken Stegblechen zu einem I-Profil zusammengeschweißt (s. Bild 9).

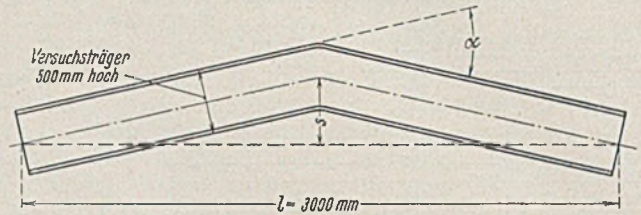


Bild 7. Schematische Darstellung des Knickwinkels  $\alpha$ .

**3. Träger VII<sub>A</sub> und VIII.**

Aus Dortmunder-Union-Nasenprofilen 360×26 wurden Gurte 180×24 hergestellt und mit 12 mm dicken Stegblechen verschweißt (Bild 10).

**4. Träger IX und X.**

Zwei genietete Träger mit einem nietgeschwächten Widerstandsmoment  $W_n$ , das dem Widerstandsmoment der geschweißten Träger nahezu entspricht (Bild 11).

Alle geschweißten Träger (Index A: I<sub>A</sub>, II<sub>A</sub>, III<sub>A</sub>, V<sub>A</sub>, VII<sub>A</sub>) wurden mit Böhler-Elektroden automatisch geschweißt (Gruppe 1). Die Wurzel bei allen Trägern wurde jedoch von Hand mit Kjellberg-Elektroden geschweißt. Die Aussteifungen sind genau wie bei den ersten beiden Trägern nachträglich angeschweißt worden.

Die Halsnähte der übrigen geschweißten Träger (Gruppe 2) wurden mit der Hand gezogen, wobei Elektroden Kjellberg, St52a, benutzt wurden. Bei diesen Trägern wurden die Aussteifungen vorher an den Stegblechen befestigt und dann erst die Gurte angeschweißt.

Die Schweißung aller Versuchsträger in der Werkstatt wurde scharf überwacht. Die Dicke der Schweißnähte, die Reihenfolge der einzelnen Schweißlagen und die Schweißrichtung ist in Bild 3 angegeben.

Teilweise ist eine Bezeichnung auch auf den einzelnen Lichtbildern zu erkennen.

Für die Versuche konnten die folgenden Aufgaben gestellt werden. Es war festzustellen:

1. Welche Unterschiede ergeben sich bei den einzelnen Trägerarten bei gleicher Stützweite und gleicher Belastung?
2. Welchen verschiedenen Einfluß haben im vorliegenden Fall die automatische und die Handschweißung?
3. Welchen Einfluß hat das Aufschweißen der lotrechten Aussteifungen auf den Stegblechen vor oder nach dem Ziehen der Halsnähte?
4. Was zeigt sich bei derartig zusammengeschweißten Trägern, wenn die vorher am Stegblech befestigten Aussteifungen vor dem Ziehen der Halsnähte prall an den Gurten anliegen, so daß diese nach der Verschweißung so durchgebogen werden, wie es übertrieben in Bild 12 dargestellt ist.

Mit Rücksicht auf Punkt 3 und 4 wurde entgegen dem sonst üblichen Verfahren ein Zustand hergestellt, wie ihn Bild 13 zeigt. Die Länge der Aussteifungen und der Abstand der Gurtplatten vor dem Verschweißen hatten somit das gleiche Maß. Wie Bild 12 zeigt, wurden vor und nach dem Schweißen die Höhen eines jeden

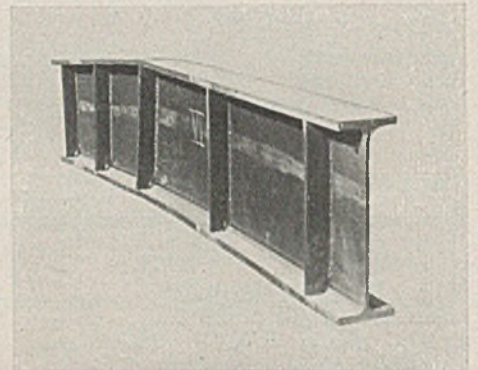


Bild 9. Träger VI nach dem Versuch.

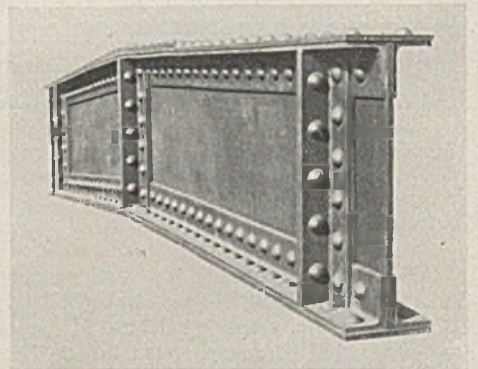


Bild 11. Träger IX nach dem Versuch.

Tafel 1. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

Träger Nr.	Art des Trägers	Stahl St 52;		Halsnähte		Versuchsergebnisse		Knickwinkel $\alpha$	Bemerkung
		Stegbleche bezogen von	Gurte bezogen von	Elektroden	Schweißart	erreichte Beanspruchg. kg/cm <sup>2</sup>	größte Durchbieg. mm		
I <sub>A</sub>	Träger aus Breitflachstählen	Riesa <sup>1)</sup>	Riesa <sup>1)</sup>	Böhler BE 18	mit Automat	6100	59	4° 30'	nicht gebrochen
II <sub>A</sub>	desgl.	Riesa <sup>1)</sup>	Riesa <sup>1)</sup>	Böhler BE 18	mit Automat	5900	47	3° 36'	nicht gebrochen
III <sub>A</sub>	Peiner Träger mit abgeschnittenen und wieder angeschweißten Gurten	Riesa <sup>1)</sup>	Peine	Böhler BE 18	mit Automat	5500	65,5	5° 0'	nicht gebrochen
IV	desgl.	Riesa <sup>1)</sup>	Peine	Kjellberg St 52 a	von Hand	5600	60	4° 34'	nicht gebrochen
V <sub>A</sub>	Träger mit Dörnenschen Wulstprofilen	Riesa <sup>1)</sup>	Peine	Böhler BE 18	mit Automat	5700	54,8	4° 10'	nicht gebrochen
VI	desgl.	Riesa <sup>1)</sup>	Peine	Kjellberg St 52 a	von Hand	5900	77,8	5° 55'	nicht gebrochen
VII <sub>A</sub>	Nasenprofilträger	Dortmund-Hörde	Dortmund-Hörde	Böhler BE 18	mit Automat	5400	64	4° 54'	Bruch
VIII	desgl.	Dortmund-Hörde	Dortmund-Hörde	Kjellberg St 52 a	von Hand	5400	51,7	3° 58'	nicht gebrochen
IX	Genieteteter Träger	Riesa <sup>1)</sup>	Riesa <sup>1)</sup>	—	—	6600	68	5° 11'	nicht gebrochen
X	desgl.	Riesa <sup>1)</sup>	Riesa <sup>1)</sup>	—	—	6300	61	4° 40'	nicht gebrochen

<sup>1)</sup> Mitteldeutsche Stahlwerke Lauchhammerwerk Riesa.

Trägers bei jeder Aussteifung und in der Mitte zwischen benachbarten Aussteifungen gemessen. Dabei wurde festgestellt, daß bei den Aussteifungen eine Verkürzung bis zu 1,8 mm, das sind 0,32 %, aufgetreten war, wobei die Aussteifung natürlich gestaucht wurde.

Zwischen den Aussteifungen verkürzt sich die Hauptträgerhöhe von rd. 560 mm um 3 mm, also etwa 0,54 % der Höhe.

Die Versuchsergebnisse sind in Tafel 1 zusammengestellt. Sie bestätigen die bisherigen guten Erfahrungen, die bei statischer Belastung mit allen hier untersuchten Trägersorten gemacht wurden. Alle Träger waren einer Beanspruchung von über 5400 kg/cm<sup>2</sup> gewachsen. Dabei traten selbst bei den großen Knickwinkeln  $\alpha$  (s. Tafel 1 und Bild 7) vor Erreichung dieser Beanspruchung weder Risse im Material noch in den Schweißnähten auf. Die Beanspruchung der genieteteten Träger ist deshalb anders zu bewerten, weil sie mit dem Widerstandsmoment des nietgeschwächten Querschnitts ermittelt wurde, bei dem sowohl Nietlöcher im Druckgurt als auch im Zuggurt abgezogen worden sind.

Als oberste Grenze wurden bei den geschweißten Trägern 6100 kg/cm<sup>2</sup> (beim Träger I<sub>A</sub>) erreicht. — Bei allen Trägern wurde der Versuch erst dann abgebrochen, als sich nach längerem Pumpen kein Steigen des Manometers mehr zeigte. Hierbei brach nur der Träger VII<sub>A</sub> (Bild 14 u. 15). Die Bruchstellen zeigten ein in jeder Hinsicht einwandfreies Gefüge. Bei den meisten Trägern wich jedoch der Druckgurt, wenn auch erst nach Erreichung der Fließgrenze seitlich aus.

Unter voller Beachtung der durch die Wahl der Versuchsträger und der durch die gesamte Versuchsanordnung bedingten Verhältnisse kann zu den unter 1 bis 4 gestellten Aufgaben somit gesagt werden:

1. Beim statischen Biegeversuch war keinem der untersuchten Träger ein besonderer Vorzug zu geben. — Die Verschweißung der verschiedenen Sorten St 52 (Tafel 2) bleibt unbedenklich. Mit Ausnahme der Träger VII und VIII (Dortmunder-Union-Nasenprofile) wurden allgemein Beanspruchungen über 5700 kg/cm<sup>2</sup> erreicht. Ob diesem Umstand besondere Bedeutung beizumessen ist, sei dahingestellt.
2. Automatschweißung (Trägergruppe I) und Handschweißung (Trägergruppe II) bestehen vollkommen gleichberechtigt nebeneinander, falls auf eine einwandfreie und sorgfältige Schweißung jederzeit geachtet wird.
3. Für die Tragfähigkeit der vorliegenden Träger war es ohne Einfluß, ob die lotrechten Aussteifungen auf den Stegblechen vor oder nach dem Ziehen der Halsnähte angebracht werden. Bei vorher aufgeschweißten Aussteifungen wird es gut sein, auf einen ausreichenden Abstand zwischen Gurt und Aussteifung zu achten, obgleich beim Versuch jedoch selbst dann,

4. wenn die Aussteifungen vor dem Ziehen der Halsnähte prall an den Gurten anlagen, kein Nachteil für die Festigkeit der Träger beobachtet werden konnte. — Es ist anzunehmen, daß nach Verbiegen der Gurte durch die Schrumpfung der Träger sich die Spannungen ausgleichen und nur geringe innere Vorspannungen zurückbleiben, die unbedenklich sind.

Ganz allgemein muß abschließend nochmals ausdrücklich davor gewarnt werden, ohne Berücksichtigung der bei den einzelnen Tragwerken vorliegenden Verhältnisse die Versuchsergebnisse ohne weiteres zu verallgemeinern. Sie sind lediglich dazu angetan, zusammenfassend und vergleichend das zu bestätigen, was sich bisher auf diesem Gebiete als brauchbar erwiesen hat und was durch viele Versuche wie auch durch die Praxis vielfach erhärtet worden ist. In Anlehnung an alle bisherigen Untersuchungen können diese Versuche den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen bilden, die auch als Dauerversuche durchgeführt werden müssen. Bekanntlich sind solche Versuche in Stuttgart bereits im Gange.

Ferner sind selbstredend Versuche in größerem Maßstabe uner-

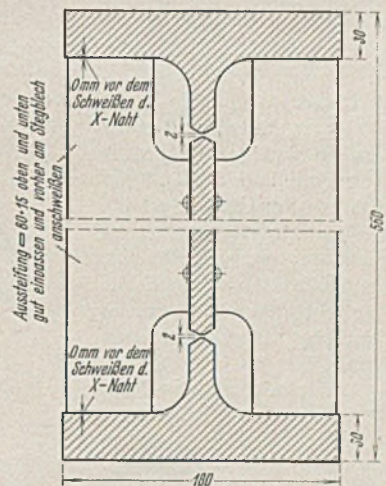


Bild 13. Zustand des Trägers vor dem Schweißen.

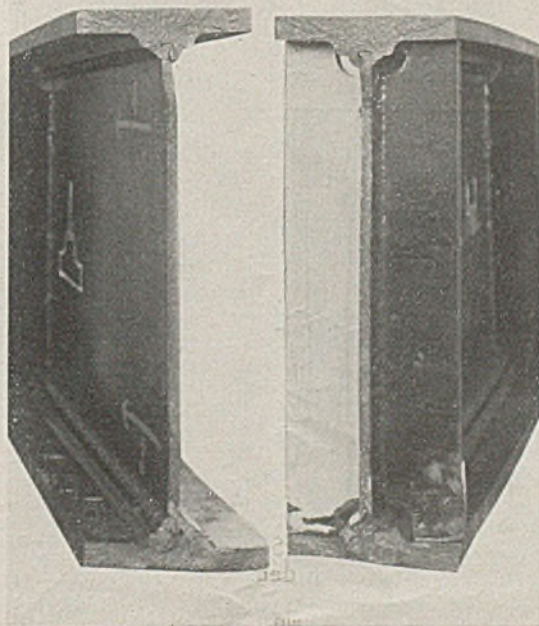


Bild 14. Der gebrochene Träger VII<sub>A</sub>.

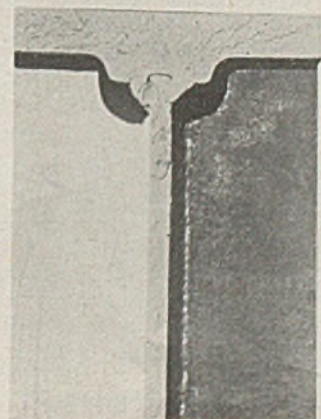


Bild 15. Der gebrochene Träger VII<sub>A</sub>.

Tafel 2. Zusammenstellung der chemischen Analysen des zu den Trägern verwendeten Stahles.

Lfd. Nr.	Walzwerk	Stahlsorte	Chemische Analyse							Verwendet		
			C	Mn	P	Si	S	Cu	Cr	als	bei Träger	
1	Riesa	Breitflachstahl									Stegbleche u. Gurte	I <sub>A</sub> —II <sub>A</sub> —III <sub>A</sub> —IV VI—VIII—IX—X
		± 600 × 12; 580 × 15	0,20	1,45	0,023	0,45	0,038	0,28				
		± 200 × 12 ± 100 × 100 × 10	0,16	1,27	0,018	0,47	0,036	0,38				
2	Peine	IP 50 Peine	0,17	1,16	0,057	0,41	0,022	0,10			Gurte	III <sub>A</sub> —IV V <sub>A</sub> —VI
		W. f. 250 × 30, Dörnen	0,17	1,16	0,057	0,41	0,022	0,10				
3	Dortmund-Hörde	Breitflachstahl	0,18	0,99	0,035	0,30	0,024	0,47	0,33	}	Stegbleche	V <sub>A</sub> —VII <sub>A</sub>
		± 500 × 12; 500 × 15	0,16	0,95	0,026	0,31	0,019	0,53	0,38			
		Nasenprofil 360 × 26	0,18	1,01	0,029	0,28	0,032	0,46	0,36			

läßlich, bei denen die bei den Tragwerken tatsächlich vorliegenden Belastungsverhältnisse besser nachgeahmt werden können. Nur so kann man den neuerdings aufgetretenen Fragen einwandfrei auf den Grund gehen. — Unerläßlich bleibt weiterhin natürlich die Gründlichkeit und die Genauig-

keit, die bei derartigen Versuchen nur unter Zuhilfenahme der Einrichtungen unserer Materialprüfungsämter einwandfrei erreicht werden können. Hiervon hat man im vorliegenden Falle jedoch aus den oben angeführten Gründen Abstand nehmen müssen.

### Die Bemessung von Verstärkungsquerschnitten.

Ein Vorschlag zur Materialersparnis.

Von Dr.-Ing. H. Sievers, Duisburg.

Alle Rechte vorbehalten.

Die Notwendigkeit, Stahl zu sparen, zwingt mehr, als es bisher der Fall gewesen ist, dazu, zu prüfen, ob eine Brücke oder andere Konstruktion durch Verstärkung erhöhter Belastung angepaßt werden kann. Für die Bemessung der Verstärkungen ist die Annahme vorgeschrieben, daß sich die Verstärkungsquerschnitte nur an der Aufnahme der Nutzlast beteiligen. Die Beanspruchung des alten Querschnitts  $F_a$  wird, wenn  $F_n$  der Verstärkungsquerschnitt ist, somit errechnet aus

$$\sigma_a = \frac{S_g}{F_a} + \frac{\varphi S_p}{F_a + F_n}$$

die des Verstärkungsquerschnitts aus

$$\sigma_n = \frac{\varphi S_p}{F_a + F_n}$$

Letzterer wird also nicht voll ausgenutzt, und zwar um so weniger, je größer der Anteil der ständigen Last an der Gesamtlast ist.

Im folgenden soll untersucht werden, was geschieht, wenn im alten Querschnitt die Proportionalitätsgrenze beliebig oft überschritten wird.

Wir nehmen dabei an, daß der Verstärkungsquerschnitt so dimensioniert ist, daß bei  $\nu$ -facher Belastung ( $\nu =$  Proportionalitätsgrenze : zulässige Spannung) und unter der Voraussetzung gleichmäßiger Spannungsverteilung über den Gesamtquerschnitt sowohl im alten wie im neuen Querschnitt die Proportionalitätsgrenze erreicht wird. In Wirklichkeit nimmt der Verstärkungsquerschnitt bei der ersten Belastung nur einen Teil der Nutzlast auf. In nebenstehendem Bild ist das Kraftdehnungsdiagramm aufgetragen. Die Linie  $OI$  gilt für den Verstärkungsquerschnitt. Die Linie  $A_1 B_1 C_1$  gibt das Diagramm des alten Querschnitts. Es ist zwischen  $A_1$  ( $S = \nu S_g$ ) und  $B_1$  ( $S = \sigma_p F_a$ ) eine Gerade, nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$  eine Kurve, die der Spannungsdehnungslinie verhältnismäßig ist. Die Kurve  $A_1 B_1 C_1$  gibt die Gesamtabkraft als Funktion der Dehnung wieder. Die Entlastung folgt dem Hookeschen Gesetz. Das Bild zeigt, daß dabei die Stabkraft im alten Querschnitt unter  $\nu S_g$  sinkt, während der Verstärkungsquerschnitt den entsprechenden Anteil an der Stabkraft aus ständiger Last ( $A_2 A_2'$ ) übernimmt. Beim Wiederansteigen der Stabkraft wird die Proportionalitätsgrenze im alten Querschnitt erst bei einer höheren Nutzlast erreicht (Punkte  $B_2$  bzw.  $B_2'$ ). Die Punkte  $A$  und die Punkte  $B'$  liegen auf einer Geraden. Die Verbindungslinie der Punkte  $A$  schneidet die Gerade  $OI$  bei der Ordinate  $\frac{\nu S_g}{2}$ . Die Verbindungslinie der Punkte  $B'$  ist parallel zu der Geraden  $OI$ . Das Diagramm zeigt, daß nach

unendlich oft wiederholter Be- und Entlastung sich der gesamte Querschnitt rein elastisch verhält. Der Verstärkungsquerschnitt hat von der ständigen Last den Anteil  $A_n' A_n$  übernommen und gleichzeitig eine entsprechende bleibende Formänderung erfahren.

Man ist also berechtigt, bei der Dimensionierung des Verstärkungsquerschnitts anzunehmen, daß sich die ständige Last ebenso wie die Nutzlast gleichmäßig über den gesamten Querschnitt verteilt. Eine Einschränkung ist lediglich bei Druckstäben zu machen. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die  $\nu$ -fache Beanspruchung bleibt beim erstmaligen Aufbringen der Nutzlast unter der Proportionalitätsgrenze. Da die Tragfähigkeit des Stabes in diesem Falle lediglich vom Trägheitsmoment des Gesamtstabes abhängt, ist die Lastverteilung ohne Einfluß. Man kann also auch hier den Verstärkungsquerschnitt unter der Annahme gleichmäßiger Lastverteilung bemessen.

2. Die  $\nu$ -fache Beanspruchung überschreitet beim erstmaligen Aufbringen der Nutzlast die Proportionalitätsgrenze. Dann tritt in der Eulerformel an Stelle des Elastizitätsmoduls  $E$  der Knickmodul  $T$ . Dieser ist eine Funktion der Spannungen im alten und neuen Querschnitt und des Verhältnisses der Verstärkungsquerschnittsfläche zur Gesamtquerschnittsfläche. Untersuchungen des Verfassers, deren Wiedergabe hier zu weit führen würde, haben ergeben, daß die Materialersparnisse, die sich bei genauer Berechnung erzielen lassen, den Aufwand an Rechenarbeit nicht lohnen. Man wird also bei Druckstäben im plastischen Bereich an der bisherigen Rechnungsweise festhalten.

Die Ersparnisse, die sich in den übrigen Fällen erzielen lassen, sind beträchtlich. Ist vor der Verstärkung  $\varphi S_p = \alpha(S_g + \varphi S_p)$  und erfährt die Nutzlast eine Steigerung um  $\beta \varphi S_p$ , so muß nach der jetzt geltenden Vorschrift  $F_n = \beta F_a$  sein, da dann

$$\sigma_a = \frac{S_g}{F_a} + \frac{\alpha(1 + \beta)(S_g + \varphi S_p)}{F_a(1 + \beta)} = \frac{S_g + \varphi S_p}{F_a}$$

Nach der obigen Überlegung genügt eine Verstärkung um  $\alpha \beta F_a$ , da dann

$$\sigma_a = \sigma_n = \frac{(S_g + \varphi S_p)[1 - \alpha + \alpha(1 + \beta)]}{(1 + \alpha \beta)F_a} = \frac{S_g + \varphi S_p}{F_a}$$

Man braucht demnach nur das  $\alpha$ -fache der nach der bisherigen Vorschrift erforderlichen Verstärkung, also z. B. in dem Falle, daß vor der Verstärkung ständige Last und Nutzlast gleich groß waren, die Hälfte.

**Nachtrag zum Aufsatz Schleusner, „Die Flugsteighalle für den Neubau des Flughafens Tempelhof“ (Stahlbau 1938, Heft 12).**

Der Entwurf der Konstruktion für die Flugsteighalle ist von der Firma Steffens & Nölle in Zusammenarbeit mit der Neubauleitung Flughafen Tempelhof geschaffen worden.  
Dr.-Ing. A. Schleusner.

**INHALT:** Die Arbeit der äußeren Kräfte beim langsamen Befahren eines Trägers mit beliebig geformter Fahrbahn. — Beziehung zwischen dem Kraftverfahren und dem Formänderungsverfahren bei Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. — Biegeversuche der Obersten Bauleitung Dresden mit geschweißten Trägern. — Die Bemessung von Verstärkungsquerschnitten. — Nachtrag zum Aufsatz Schleusner, Heft 12.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.  
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.