

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
 Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
 Fernsprecher: 87 7421
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

11. Jahrgang

BERLIN, 11. November 1938

Heft 23

Praktische Ratschläge für die Herstellung der Röntgenaufnahmen von Schweißnähten und ihre Auswertung.

Alle Rechte vorbehalten.

Von F. Wulff, Wittenberge.

Infolge der immer größeren Anwendung der Röntgenstrahlen bei der Prüfung von Schweißnähten hat sich besonders in letzter Zeit ein Mangel an Fachingenieuren und Facharbeitern auf diesem Gebiet der Werkstoffprüfung herausgestellt. Da aber nur einwandfrei hergestellte Röntgenaufnahmen von wirklichem Wert sind und die Auswertung der Röntgenfilme von Schweißnähten nicht nur eine schweißtechnische Fachausbildung voraussetzt, sondern auch eine jahrelange Erfahrung erfordert, mögen die nachfolgenden Zeilen dazu dienen, dem Praktiker wichtige Anweisungen für die Herstellung von Röntgenaufnahmen zu geben und ihm die Beurteilung der Röntgenfilme zu erleichtern. Der Mangel an technischem Röntgenpersonal darf nicht dazu führen, daß durch ungenügende Fachkenntnisse Fehlurteile gefällt werden, die einerseits bei zu milder Beurteilung der Schweißfehler zu Unfällen führen und andererseits bei zu harter Bewertung durch Verwerfen des Werkstückes wertvolles Volksvermögen vernichten können. — Bevor auf das eigentliche Thema eingegangen wird, sollen zunächst die für die Herstellung von Röntgenaufnahmen wichtigsten Grundlagen der Röntgentechnik gestreift werden.

A. Allgemeine Grundlagen.

Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Schwingungen von ganz kurzer Wellenlänge. Sie entstehen durch Entladungen hochgespannter elektrischer Ströme in einem fast luftleeren Glasbehälter, der Röntgenröhre. Sie breiten sich geradlinig nach allen Seiten aus und sind wesensähnlich mit den Lichtstrahlen. Für das Zustandekommen des Röntgenbildes gelten demgemäß die gleichen Gesetze der Zentralprojektion wie für das optische Licht bei der Entstehung eines Schattenbildes. Auf Grund ihrer kurzen Wellenlänge sind die Röntgenstrahlen imstande, feste Stoffe zu durchdringen. Weitere Eigenschaften der Röntgenstrahlen sind, daß photographische Schichten von ihnen geschwärzt und gewisse chemische Substanzen, wie Bariumplatinzyanür, Zinksilikat, Kalzium-Wolframat usw. zum Leuchten (Fluoreszieren) angeregt werden. Auf diesen drei Eigenschaften ist die Grobstruktur-Untersuchung aufgebaut.

Die Durchdringungsfähigkeit der Röntgenstrahlen ist abhängig von ihrer Wellenlänge und diese wieder von der Röhrenspannung. Je höher die Röhrenspannung, um so kurzwelliger, härter und durchdringungsfähiger, je niedriger die Spannung, um so langwelliger, weicher und weniger durchdringungsfähig sind die Röntgenstrahlen. Durch ein Verändern der Röntgenröhre zugeführten Hochspannung kann die Härte der Röntgen-

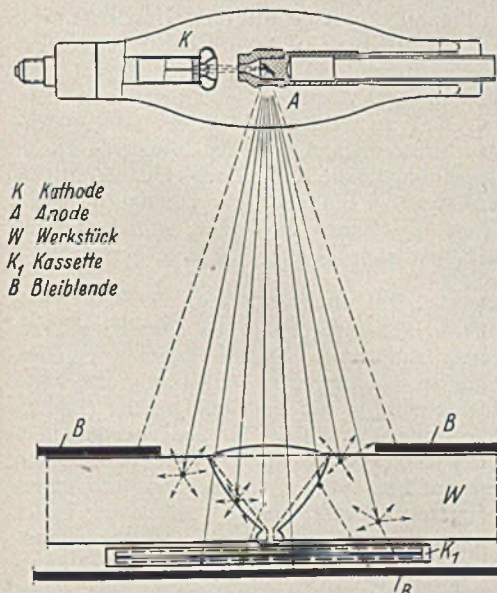
strahlen geregelt werden. — Die Durchdringungsfähigkeit ist weiter um so größer, je geringer die Werkstoffdicke und je niedriger das spezifische Gewicht bzw. Atomgewicht des zu untersuchenden Werkstoffes ist.

Beim Durchgang der Röntgenstrahlen durch einen Werkstoff gelangt nur ein Bruchteil der ausgesandten Röntgenstrahlen auf den Film. Ein Teil der Strahlen wird absorbiert, ein weiterer Teil gestreut. Es haben also nicht sämtliche Strahlen, die auf den Film treffen, eine bildgebende Richtung; ein Teil wird im Innern des Werkstoffes bei ihrem Auftreffen auf Atomverbände von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt (Bild 1). Dadurch wird auf dem Film eine bildverschleiende Wirkung hervorgerufen, die im starken Maße die erwünschten Kontraste verringert. Die Streuung ist um

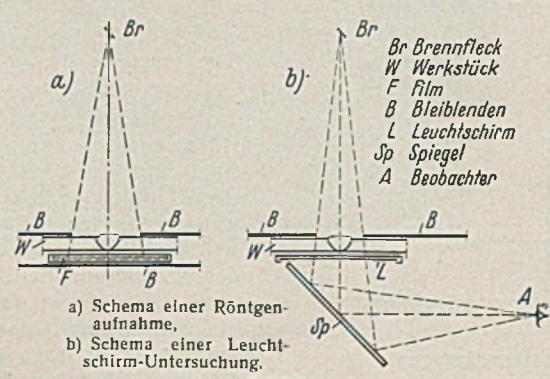
- so größer,
- je größer die Werkstoffdicke,
- je härter die Röntgenstrahlung und
- je geringer die Dichte des Werkstoffes (spez. Gew. bzw. Atomgewicht) ist.

Für die Sichtbarmachung des Röntgenbildes gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wird ein auf der der Röntgenröhre abgelegenen Seite des Prüfstückes angeordneter Leuchtschirm zum Aufleuchten gebracht oder ein an Stelle des Leuchtschirmes verwendeter doppelseitig begonnener Röntgenfilm mehr oder weniger geschwärzt (Bild 2). Dementsprechend unterscheiden wir die Leuchtschirm-Untersuchung von dem Röntgenaufnahmeverfahren. Bei beiden Verfahren erhalten wir ein Schattenbild. Auf dem Leuchtschirm zeichnen sich die Werkstoff- bzw. Schweißnahtfehler auf Grund der an diesen Stellen größeren Intensität der auffallenden Röntgenstrahlen hell, auf dem Röntgenfilm dagegen als dunkle Schatten ab. Während beim Aufnahmeverfahren mit den neuzeitlichen hochspannungssicheren und strahlengeschützten Röntgenanlagen Werkstücke bis 100 mm Dicke und darüber untersucht werden können und eine Fehlererkennbarkeit von 1 bis 2% der Werkstoffdicke erreicht wird, ist das Anwendungsgebiet der Leuchtschirm-Untersuchung nur sehr beschränkt, da es sich nur für geringe Werkstoffdicken (Stahl bis etwa 12 mm, Leichtmetall bis etwa 30 mm) eignet. Infolge der geringen Fehlererkennbarkeit — es lassen sich günstigstenfalls nur Werkstoff- bzw. Schweißfehler von 7% der Werkstoffdicke mit Sicherheit nachweisen¹⁾ — eignet sich die Leuchtschirm-Unter-

¹⁾ Mit einer von der Firma Rich. Seifert & Co., Hamburg, entwickelten sogenannten Feinfokusröhre, die in der Hauptsache für Leuchtschirm-Untersuchungen gedacht ist, kann eine bedeutend höhere Fehlererkennbarkeit erreicht werden. Der äußerst kleine Brennfleck dieser Röntgenröhre ermöglicht es, das Röntgenbild auch in mehrfacher Vergrößerung auf den Leuchtschirm zu projizieren. Das zu durchleuchtende Werkstück wird zu diesem Zweck in geringem Abstand vor das Strahlenfenster geführt und der Leuchtschirm in entsprechend großer Entfernung vom Werkstück angeordnet.



K Kathode
 A Anode
 W Werkstück
 K₁ Kassette
 B Bleiblende



a) Schema einer Röntgenaufnahme.
 b) Schema einer Leuchtschirm-Untersuchung.

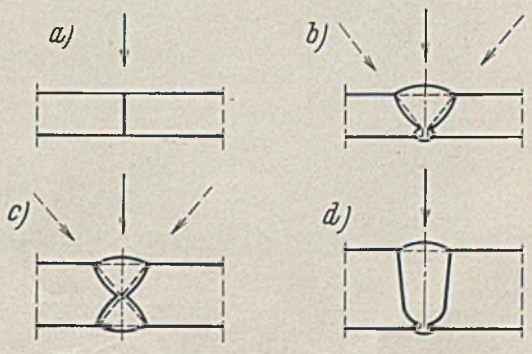


Bild 3. Zweckmäßigste Strahlenrichtung bei Stumpfnähten.

Bild 1. Schematische Darstellung einer Durchstrahlung mit Röntgenstrahlen.

Bild 2.

suchung nicht für Abnahmezwecke. Sie wird in der Hauptsache angewendet bei der serienmäßigen Prüfung dünnwandiger Gußstücke, besonders bei solchen aus Leichtmetall. Ein bleibendes Dokument, wie der Röntgenfilm bei dem Aufnahmeverfahren, wird nicht geschaffen. Man ist daher im starken Maße von der Geschicklichkeit und dem Verantwortungsbewußtsein des die Untersuchung ausführenden Röntgenprüfers abhängig.

B. Die Herstellung der Röntgenaufnahmen.

Bei der Beurteilung eines Röntgenfilms muß vorausgesetzt werden, daß die Röntgenaufnahme sachgemäß hergestellt worden ist. Hierbei ist zu beachten:

1. sachgemäße Anordnung der Röntgenröhre und des Röntgenfilms;
2. richtige Wahl der Strahlenhärte (Röhrenspannung) und der Belichtungszeit;
3. Verwendung guter Röntgenfilme und zweckentsprechender Verstärkerfolien;
4. sorgfältige Entwicklung des belichteten Röntgenfilms in der Dunkelkammer.

1. Anordnung der Röntgenröhre und des Röntgenfilms.

Sehr wichtig für die Auffindung eines Schweißnahtfehlers ist seine Lage zur Strahlenrichtung. Treffen die Röntgenstrahlen z. B. rechtwinklig auf einen Riß, so wird er sich entweder gar nicht oder nur dann — und zwar als breites Band — auf dem Film abzeichnen, wenn der Rißspalt größer oder mindestens gleich der prozentualen Fehlererkennbarkeit zu der Werkstoffdicke ist. Verlaufen dagegen die Röntgenstrahlen parallel zu den Rißflächen, so wird er seinem Verlauf entsprechend als strichartige, zackige Schwärzung deutlich auf dem Film sichtbar werden. Das gleiche gilt für die Auffindung eines Bindefehlers. Es muß daher stets danach getrachtet werden, die Strahlenrichtung in die Tiefenausdehnung der vermuteten Fehler zu bringen. Bei Stumpfnähten, seien sie in I-, V-, X- oder U-Form ausgeführt, ist normalerweise unter 90° zur Schweißnahtebene zu strahlen (Bild 3). Werden jedoch bei V- oder X-Nähten auf Grund der Senkrechtaufnahme oder des äußeren Befundes Bindefehler vermutet, so ist zweckmäßig in Richtung der abgeschrägten Blechkanten zu durchstrahlen, oder es sind zusätzlich Aufnahmen von den betr. Nahtabschnitten in dieser Richtung anzufertigen. Darüber hinaus ist es empfehlenswert, hin und wieder eine Aufnahme in Richtung der Bindeflächen zur Auffindung etwa vorhandener Bindefehler herzustellen. Bei der Schrägbestrahlung werden sich auch alle übrigen Fehler, bis auf eine allgemeine geringe Verschlechterung, die durch den größeren zu durchstrahlenden Querschnitt hervorgerufen wird, annähernd gleich gut auf dem Röntgenfilm abzeichnen.

Bei der Untersuchung von Kehlnähten treten infolge der ungleichen Werkstoffdicke Schwierigkeiten bei der Sichtbarmachung des Röntgenbildes auf. Der geringere Querschnitt bewirkt auf dem betr. Filmabschnitt eine zu große, der größere Querschnitt eine zu geringe Schwärzung. Eine einwandfreie Auswertung eines derartigen Röntgenbildes ist daher nur bei schwachen Querschnitten möglich. Bei größeren Querschnitten muß die ungleiche Werkstoffdicke durch ein Paßstück aus Stahl oder durch

einen Zinnkeil ausgeglichen werden (Bild 4 b u. 4 c). Theoretisch eignet sich der Zinnkeil für den Dickenausgleich am besten, da er filmlahe angeordnet gleichzeitig infolge der größeren Dichte und der günstigen Eigenstrahlung des Zinns als Streustrahlenfilter dient. Er ist jedoch sehr empfindlich gegen mechanische Beschädigungen, sei es durch Stoß, Druck, Fall usw. Aus diesem Grunde hat sich das Stahlpaßstück in der Praxis mehr durchgesetzt. Die Gegenüberstellung der Röntgennegative in Bild 4 a bis c bestätigt eindeutig die Verbesserung von Kehlnahtaufnahmen bei Verwendung der Ausgleichkeile. In Bild 5 ist die zweckmäßigste Strahlenrichtung sowie die Anordnung des Röntgenfilms und des Paßstückes für die Kehlnahtuntersuchung an verschiedenen Profilen dargestellt. Bei Doppelkehlnähten ist es falsch, in Richtung der Stoßkante des Stegbleches (Bild 5 c) zu durchstrahlen, da die Stoßkante mit den beiden waagerechten Bindeflächen in einer Ebene liegt. Etwa vorhandene Bindefehler fallen mit der von der Stoßfuge hervorgerufenen strichartigen Schwärzung auf dem Röntgenfilm zusammen und sind daher nicht nachweisbar.

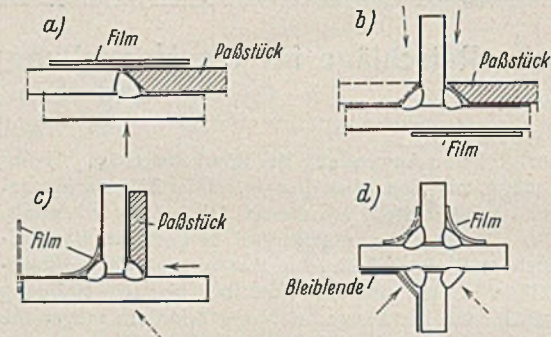


Abb. 5. Durchstrahlungsanordnung bei Kehlnahtaufnahmen.

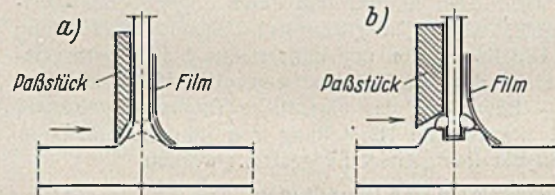


Bild 6. Durchstrahlungsanordnung bei Aufnahmen von Sonderprofilen für Brücken.

Bei dem in Bild 6 b dargestellten Profil ist es zweckmäßig, den beiderseitigen Dickenunterschied nur durch ein, und zwar fokusnahe angeordnetes Paßstück auszugleichen, um den Röntgenfilm möglichst dicht an die Kehlnaht anlegen zu können.

Wie die Erfahrungen gezeigt haben, hat die Untersuchung von Kehlnähten nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn die ihr hintergelagerte und mit zu durchstrahlende Werkstoffdicke nicht das Dreifache der Kehlnahthöhe überschreitet.

Für die Anordnung der Kassette mit dem Röntgenfilm gilt grundsätzlich, daß sie möglichst dicht an das Untersuchungsstück herangelegt werden muß. Je größer der Abstand von der Rückseite der Schweißnaht bis zum Röntgenfilm ist, um so unschärfer und auch größer zeichnen sich infolge der Zentralprojektion der Röntgenstrahlen die Fehler auf dem Film ab. Bei geringem Brennfleckabstand tritt diese Unschärfe ganz besonders in Erscheinung. Nach DIN-Blatt 1914 wird daher empfohlen, den Abstand der Strahlenquelle (Brennfleck) von der ihr zugekehrten Seite der Schweißverbindung zu dem Abstand dieser Seite von dem Röntgenfilm nicht kleiner als 6:1 zu wählen. Liegt der Film gleichzeitig noch nicht rechtwinklig zur Strahlenrichtung, so entsteht außerdem noch eine Verzerrung auf dem Röntgenfilm, die die Auswertung eines derartigen Röntgenbildes wesentlich erschwert, wenn nicht gar unmöglich macht.

Um einen Röntgenfilm ganz auszeichnen zu können, muß der Brennfleckabstand mindestens das Eineinhalbfache der Filmlänge betragen.

2. Strahlenhärte, Belichtungszeiten.

Die Wahl der Strahlenhärte (Röhrenspannung) ist ausschlaggebend für den Kontrastreichtum einer Aufnahme. Weiche Strahlen ergeben nach dem Durchgang durch das zu untersuchende Werkstück große, harte Strahlen, dagegen nur geringe Kontraste auf dem Röntgenfilm (Bild 7), bedingt durch die bildverschleiende Wirkung der Streuung der Röntgenstrahlen im Werkstück, die, wie schon erwähnt, mit der Härte der Strahlen zunimmt. Da eine Aufnahme mit kurzweiliger, weicher Strahlung naturgemäß eine längere Belichtungszeit erfordert als eine solche mit harter Strahlung, müssen Belichtungszeit und Strahlenhärte aufeinander abgestimmt sein. Wenn auch dem Röntgenfilm ein gewisser Belichtungs-spielraum gegeben ist, so muß doch darauf geachtet werden, daß nicht zu kurz oder zu lange belichtet wird. Bei einer Überbelichtung wird der Film zu sehr geschwärzt, bei zu kurzer Belichtung dagegen zu wenig.

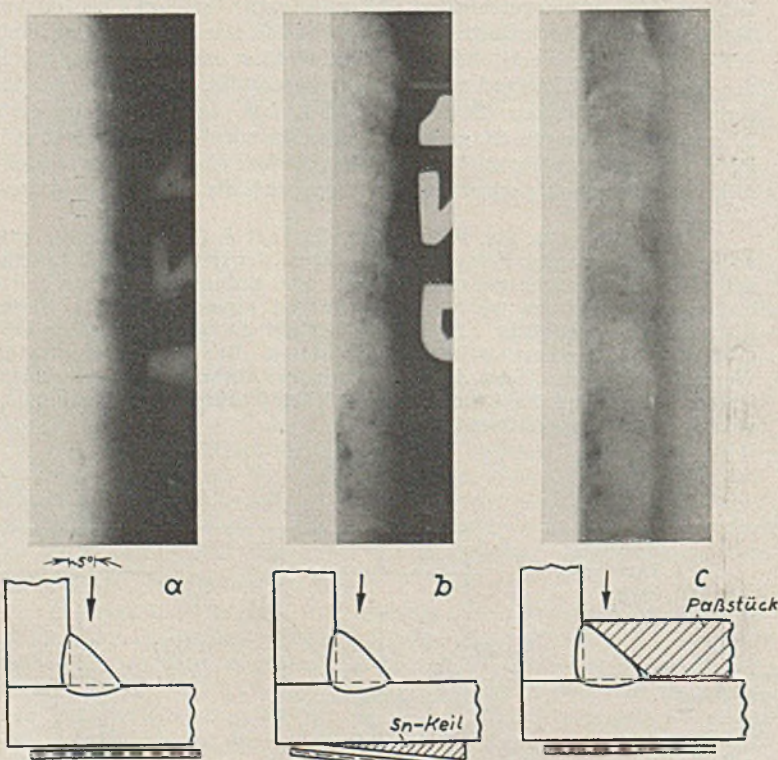


Bild 4. Dickenausgleich bei Kehlnahtuntersuchungen.
a) Ohne Dickenausgleich, b) Mit Zinnkeil, c) Mit Stahlpaßstück.

In beiden Fällen gehen die Feinheiten auf dem Röntgenfilm verloren. Wird ein überbelichteter Film dann, um eine zu große Schwärzung zu vermeiden, nicht voll ausentwickelt, so ist sein Kontrast derart gering, daß unter Umständen eine fehlerhafte Schweißnaht im Röntgenbild gut erscheint. Erkennlich sind derart unsachgemäß hergestellte Röntgenfilme an ihrem gelblich-braunen Farbton.

Zur Feststellung der Belichtungszeiten, die abhängig sind von:

- a) der Dicke des Werkstückes,
- b) der Dichte des Werkstoffes (spez. Gew. bzw. Atomgewicht),
- c) der Härte der Röntgenstrahlen (Röhrenspannung),
- d) der Menge der Röntgenstrahlen (Heizstromstärke der Röhre),
- e) dem Brennfleckabstand,
- f) der Empfindlichkeit des Röntgenfilmes und
- g) der Verstärkerwirkung der Verstärkerfolien,

sind den Röntgenprüfgeräten Belichtungskurven beigegeben.

Bild 8 u. 9 zeigen eindeutig, daß mit zunehmender Dicke und Dichte des Werkstoffes länger belichtet werden muß. Bei zunehmender Strahlenhärte (kV) und Strahlenmenge (mA) wird die Belichtungszeit geringer. Sie steigt wieder mit zunehmendem Brennfleckabstand. Das Gesetz, nach dem die Belichtungszeiten mit dem Quadrat der Entfernung steigen, gilt nur für Aufnahmen, die ohne Verstärkerfolien hergestellt werden; bei Verwendung von Verstärkerfolien stimmt es nur annähernd. Bei hochempfindlichen Röntgenfilmen und hochverstärkenden Verstärkerfolien muß wieder kürzer belichtet werden.

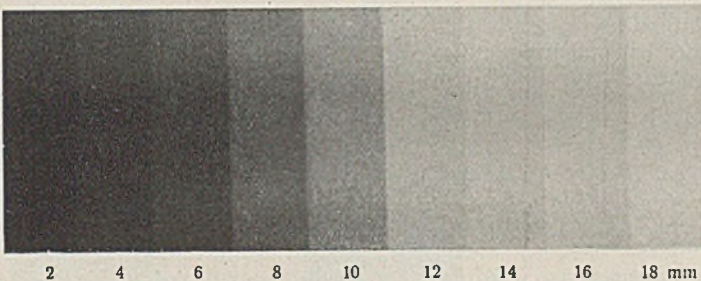


Bild 8. Schwärzungsunterschiede im Röntgenbild beim Durchstrahlen verschiedener Werkstückdicken (Stahl 2 bis 18 mm).

3. Röntgenfilme und Verstärkerfolien.

Von ausschlaggebender Bedeutung für die Güte eines Röntgenbildes ist die Verwendung guter Röntgenfilme und geeigneter Verstärkerfolien. Der Röntgenfilm soll neben hoher Empfindlichkeit großen Kontrastreichtum aufweisen. Es sind stets frische Filme zu verwenden, denn durch ein zu langes Lagern wird der Film alt und bekommt allmählich einen Grauschleier. Bei den Aufnahmen ohne Verstärkerfolien wird der Röntgenfilm unmittelbar von den Röntgenstrahlen, bei Aufnahmen mit Verstärkerfolien in der Hauptsache von dem von den Folienschichten ausgehenden Fluoreszenzlicht und nur im geringen Maße unmittelbar von den Röntgenstrahlen geschwärzt. Da der Röntgenfilm auf beide Strahlenarten verschieden reagiert, ist für Aufnahmen ohne Folien ein besonders für die kurzwelligen Röntgenstrahlen, bei Aufnahmen mit Folien ein besonders für das langwellige Folienschichtempfindlicher Röntgenfilm zu verwenden. Wir unterscheiden außerdem den farblosen Film von dem Blaufilm, bei dem die Unterlage eine schwache Blaufärbung erhalten hat. Hierdurch soll beim Betrachten des Röntgenfilmes das gelbliche Licht des Betrachtungskastens dem Tageslicht angeglichen und so die Kontrastempfindung des Auges gesteigert werden. Die Blaufärbung ändert also die photographischen Eigenschaften der Emulsionsschicht nicht, sondern verbessert lediglich den Bildeindruck beim Betrachten des Filmes.

Die Verwendung der Verstärkerfolien hat den Zweck, den photochemischen Prozeß zu beschleunigen und damit die Belichtungszeiten herabzusetzen. Unter Umständen können

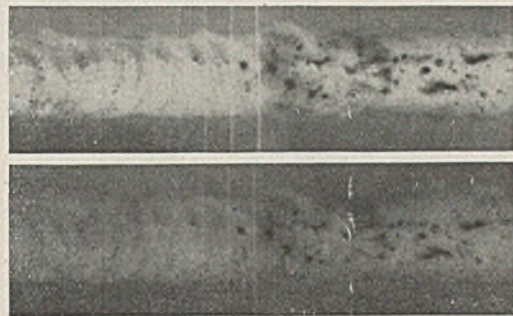


Bild 7. Röntgennegative einer elektrischen Lichtbogenschweißung (Stahl 10 mm).

- a) Aufgenommen mit weicher Strahlung (120 kV),
- b) Aufgenommen mit harter Strahlung (180 kV).

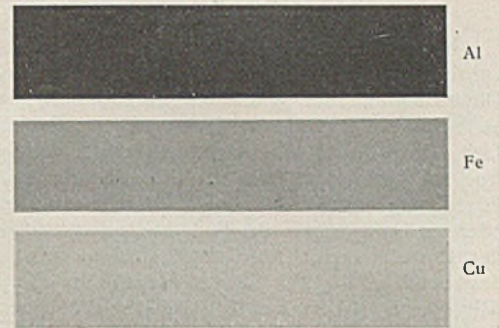


Bild 9.

Schwärzungsunterschiede im Röntgenbild beim Durchstrahlen verschiedener Werkstoffe von gleicher Schichtdicke (6 mm).

die Zeiten bei Verwendung höchstverstärkender Folien bis auf $\frac{1}{50}$ gekürzt werden. Die beiden Hauptanforderungen, die an die Verstärkerfolien gestellt werden, sind gute Zeichenschärfe und hohe Verstärkerwirkung. Beide Forderungen lassen sich jedoch nicht gleichzeitig gleich gut erfüllen. Eine Erhöhung der Verstärkerwirkung bedingt eine Verringerung der Zeichenschärfe und umgekehrt. Wir unterscheiden daher Folien mit vornehmlich

- a) hoher Verstärkerwirkung und
- b) großer Zeichenschärfe.

Bei der Durchstrahlung geringer Werkstückdicken nimmt man die etwas längeren Belichtungszeiten mit in Kauf und verwendet die scharfzeichnenden Folien, um eine größere Fehlererkennbarkeit zu erzielen. Bei größeren Werkstückdicken muß infolge der bei höheren Spannungen und größeren Werkstoffdicken vermehrt auftretenden Streustrahlen, sowie der sonst sehr langen Belichtungszeiten das Hauptaugenmerk auf eine hohe Verstärkerwirkung der Folien gelegt werden. Die Durchstrahlung großer Werkstückdicken ist überhaupt erst bei Verwendung höchstverstärkender Folien möglich. Eine, wenn auch nur geringe Unschärfe des Röntgenbildes läßt sich bei der Verwendung von Verstärkerfolien, selbst bei den scharfzeichnenden, gegenüber einer Aufnahme ohne Folien nicht vermeiden (Bild 10). Die Unschärfe wird dadurch hervorgerufen, daß jedes fluoreszierende Kalziumwolframteilchen der Folienschicht Lichtstrahlen nach allen Seiten aussendet, die unter verschiedenen Winkeln auf den Film treffen.

Es ist daher für die Erreichung der größten Fehlererkennbarkeit unter Berücksichtigung der Wirtschaftlichkeit der Röntgenuntersuchungen bei Aufnahmen von Stahl zu empfehlen,

- unter 8 mm Dicke ohne Verstärkerfolien,
- von 8 bis 35 mm mit scharfzeichnenden,
- und darüber mit hochverstärkenden Folien

zu arbeiten. Bild 11 zeigt die Röntgennegative einer 10 mm dicken Schweißnaht, bei denen bei Aufnahme a ein scharfzeichnendes, bei Aufnahme b ein hochverstärkendes Foliennenpaar verwendet wurde. Der Umstand, daß die Verstärkerfolien der einzelnen Herstellerfirmen in ihrer Verstärkerwirkung sehr verschieden sind, führt oft bei Zugrundelegung einer Belichtungstabelle, die stets auf ein bestimmtes Foliennenpaar abgestimmt ist, zu Fehlaufnahmen. Wünschenswert wäre es daher, wenn die Verstärkerfolien in ihrer Verstärkerwirkung genormt und für jedes Foliennenpaar ein Verstärkungsfaktor angegeben würde. Von großer Wichtigkeit ist bei dem Gebrauch von Verstärkerfolien das feste Anlegen der Folien an dem Röntgenfilm, da sonst durch die Streuung des Folienschichtlichtes eine Unschärfe auf dem Röntgenfilm hervorgerufen wird.

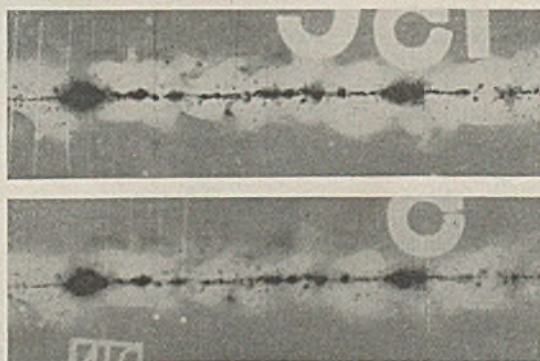


Bild 10. Röntgennegative einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit starken Wurzelfehlern und zahlreichen Gasporen.

- a) Ohne Verstärkerfolien,
- b) Mit Verstärkerfolien aufgenommen. Verhältnis der Belichtungszeiten 30:1.

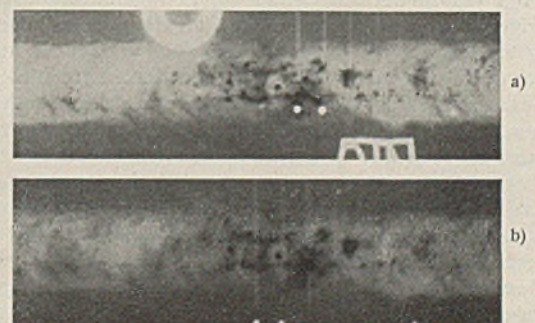


Bild 11. Röntgennegative einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit größeren Schlackeneinschlüssen und zahlreichen Gasporen.

- a) Mit scharfzeichnenden Verstärkerfolien aufgenommen,
- b) Mit hochverstärkenden Verstärkerfolien aufgenommen.

4. Entwicklung des belichteten Röntgenfilmes.

Eine unter richtigen Bedingungen hergestellte Röntgenaufnahme kann nur dann zu einem einwandfreien Bilde führen, wenn der Röntgenfilm in der Dunkelkammer mit peinlichster Sorgfalt behandelt wird. Hierzu gehört in erster Linie eine sachgemäß eingerichtete Dunkelkammer. Neben völliger Lichtsicherheit soll sie so geräumig sein, daß getrennte Arbeitsplätze für trockene und nasse Arbeiten eingerichtet werden können, um nicht die Filme und Verstärkerfolien beim Einlegen und Herausnehmen durch Wasser- oder gar Entwickler- oder Fixierbadspritzer zu beschädigen. Der Anstrich der Dunkelkammer soll möglichst hell sein, um durch die Reflexion des durch ein einwandfreies Filter fallenden Dunkelkammerlichtes die Allgemeinhelligkeit des Raumes zu erhöhen und das Arbeiten in der Dunkelkammer zu erleichtern. Die vorgeschriebene Entwicklertemperatur

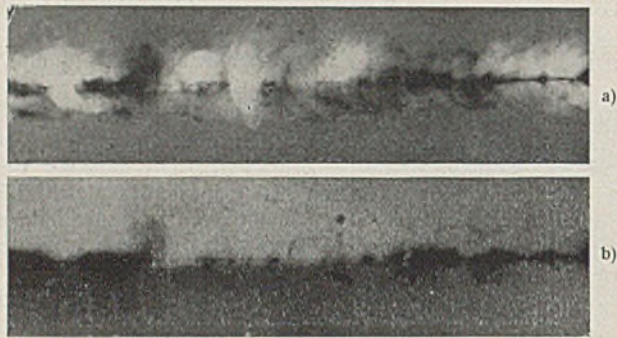


Bild 12. Röntgennegative einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit starken Wurzelfehlern, Schlackeneinschlüssen und kleinen Gasporen.
a) Mit Schweißwulst, b) Ohne Schweißwulst.

und Entwicklungszeit sind unbedingt einzuhalten. Vor Benutzung eines alten oder gar verunreinigten Entwickler- oder Fixierbades muß gewarnt werden. Um die Kontraste auf dem Röntgenfilm zu erhöhen, muß für das Entwickeln ein möglichst hart arbeitender Entwickler verwendet werden. Von den bekannten Entwicklern eignet sich aus diesem Grunde der Metol-Hydrochinon-Entwickler am besten. Der besonders für das Entwickeln von Röntgenfilmen empfohlene Röntgen-Rapid-Entwickler ist gleichfalls ein Metol-Hydrochinon-Entwickler von besonders günstiger Zusammensetzung. Bei serienmäßiger Herstellung der Röntgenaufnahmen ist die Tank- oder Trogentwicklung der Schalenentwicklung vorzuziehen

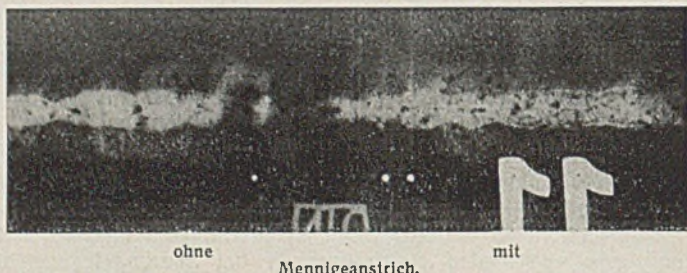


Bild 13. Beeinflussung der Güte des Röntgenbildes durch einen Bleimennigeanstrich.

C. Auswertung von Röntgenaufnahmen.

Der Röntgenfilm ist ein regelrechtes Schattenbild, in dem sich die Fehler infolge des an den betreffenden Stellen verminderten Querschnitts ihren Abmessungen entsprechend als Schwärzungen abzeichnen. Die Länge und Breite eines Fehlers ist unmittelbar zu ersehen, seine Tiefenausdehnung kann jedoch nur auf Grund der geringeren oder größeren Schwärzungen angenommen werden. Auf die Tiefenlage eines Fehlers in der Schweißnaht kann nur auf Grund der Randschärfe und der Charakteristik der Schwärzungen sowie ihrer Lage zur Mitte der Schweißnaht geschlossen werden. Filmnahe liegende Fehler zeichnen sich randschärfer, filmfern liegende dagegen unschärfer und der Zentralprojektion der Röntgenstrahlen entsprechend auch etwas größer ab, als sie in Wirklichkeit sind. Bei geringen Werkstückdicken kann diese Erscheinung jedoch vernachlässigt werden. Liegen mehrere Fehler in Strahlenrichtung gesehen übereinander, so werden sich auch die durch sie hervorgerufenen Schwärzungen im Röntgenbild überlagern. Oftmals ist dann ein Auseinanderhalten der Schweißfehler auf dem Röntgenfilm nicht möglich. In besonderen Fällen sei daher empfohlen, zusätzlich eine zweite Aufnahme unter einem bestimmten Winkel zu der ersteren herzustellen, bei der die Fehler dann auf den Röntgenfilm nebeneinander fallen und so auseinander gehalten werden können. Das Stereo-Aufnahmeverfahren gestattet gleichfalls, die Tiefenlage eines Fehlers mit Sicherheit festzustellen. Da hierbei jedoch stets zwei Aufnahmen notwendig sind, bei denen die Röntgenröhre um Augenabstand verschoben werden muß, scheidet die Anwendung dieses Verfahrens an der Kosten-

frage. Nur in Ausnahmefällen oder bei Laboratoriumsversuchen werden Stereo-Aufnahmen hergestellt. Da alle Unebenheiten an der Nahtoberfläche auf dem Röntgenfilm Schwärzungen verursachen, die unter Umständen mit Schweißfehlern verwechselt werden können, sollen bei starken Unebenheiten die zu untersuchenden Schweißnähte nach Möglichkeit vorher geglättet werden. Die Charakteristik einer Schweißnaht geht dadurch im Röntgenbild verloren, etwa vorhandene Schweißfehler sind jedoch um so leichter zu deuten. Als Beispiel sei auf Bild 12 hingewiesen, bei dem das Röntgenbild einer Schweißnaht mit Wulst dem dergleichen Naht mit abgearbeiteter Wulst gegenübergestellt ist.

Ein Anstrich vor der Röntgenuntersuchung ist nicht ratsam, da alle Vertiefungen an der Nahtoberfläche mit Farbe (Mennige) ausgefüllt werden, die dann unter Umständen anstatt eine Schwärzung eine Aufhellung auf dem Film hervorrufen (Bild 13). Deutlich ist die helle Begrenzung der Wurzelnaht zu erkennen, die auf eine Ansammlung der Bleimennige zurückzuführen ist. In der Praxis werden daher alle röntgentechnisch zu untersuchenden Stellen an fertigen Bauwerken zunächst mit einem dünnen Leinölüberzug versehen.

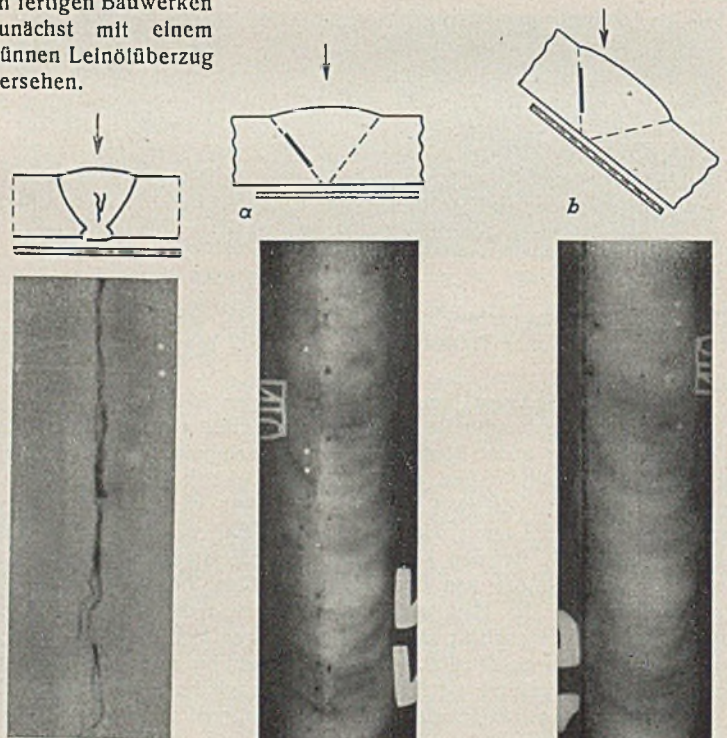


Bild 14. Röntgennegative einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit starkem Spannungsriß (Stahl 12 mm).

Bild 16. Röntgennegative einer Gasschmelzschweißung mit starkem, einseitigem Bindefehler (Stahl 18 mm).
a) Senkrechtaufnahme, b) Winkelaufnahme.

Die bei Schweißnähten an Stahl vorkommenden Fehler sind:

- Risse,
- Bindefehler,
- Wurzelfehler,
- Schlackeneinflüsse,
- Gasporen und
- Einbrandkerben.

Risse sind im Röntgenbild in erster Linie daran zu erkennen, daß sie nicht geradlinig, sondern im Bogen oder Zickzack, oftmals mit zahlreichen Verzweigungen verlaufen und ihr Querschnitt veränderlich ist. Sie entstehen infolge der im Werkstück auftretenden Spannungen oder

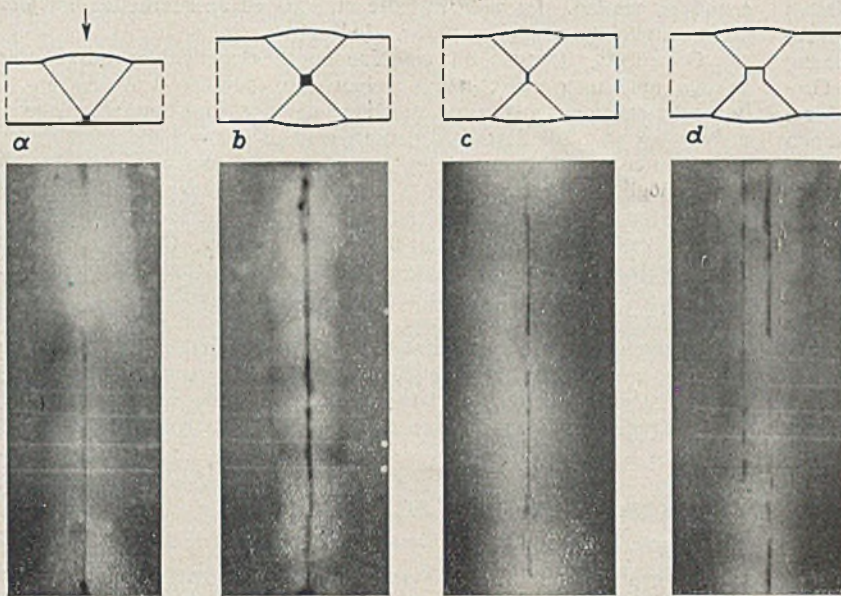


Bild 17. Röntgennegative von elektrischen Lichtbogenschweißungen mit verschiedenartigen Wurzelfehlern.

durch Schrumpfungen des eingeschmolzenen Zusatzwerkstoffes. Häufig ist ein Riß bereits äußerlich sichtbar. Bild 14 zeigt das Röntgennegativ einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit einem starken Spannungsriß.

Die im Röntgenbild aufgefundenen Risse setzen die Güte einer Schweißnaht ganz wesentlich herab. Sie sind daher in jedem Falle zu beseitigen. Selbst schwache Oberflächenrisse müssen unbedingt beseitigt werden (oftmals genügt schon ein leichtes Ausschleifen mit der Schmirgelscheibe), da sie im Laufe der Zeit größere Ausmaße annehmen werden.

Binfelder sind im Gegensatz zu Rissen an den mehr geradlinig und meistens in gleichbleibender Breite verlaufenden strichartigen Schwärzungen zu erkennen. Es sei hierbei erwähnt, daß man als Binfelder nur solche Fehlstellen bezeichnet, die bei der Lichtbogenschweißung auf einen mangelhaften oder gar keinen Einbrand, bei der Gasschmelzschweißung auf eine ungenügende Auflösung des Werkstoffes entlang der abgeschrägten Blechkanten zurückzuführen sind. Das Schweißen mit zu niedriger Stromstärke, das Halten eines zu langen Lichtbogens oder ungünstige Blaswirkung des Lichtbogens können bei der Lichtbogenschweißung, falsche Brennerführung oder die Wahl eines zu kleinen Brenners (also zu geringe Wärmezufuhr) können bei der Gasschmelzschweißung die Ursachen der Binfelder sein.

Bild 15 u. 16 zeigt je einen Binfelder in einer elektrischen Lichtbogen- bzw. einer Gasschmelzschweißung bei senkrechter und schräger Bestrahlung.

Bei hochwertigen Schweißnähten muß beim Auffinden eines Binfelders die Naht wieder geöffnet und nachgeschweißt werden. Bei weniger beanspruchten Schweißnähten können geringe Binfelder unter Umständen vernachlässigt werden.

Sehr häufig ist ein Binfelder nicht ein hohler, sondern ein mit Eisenoxyd angefüllter Spalt. Da Eisenoxyd je nach seiner Zusammensetzung etwa $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$ so dicht ist als Stahl, wird hierdurch bei geringen Binfeldern auf dem Röntgenfilm oftmals eine nur kaum wahrnehmbare Schwärzung hervorgerufen.

Wurzelfehler sind, wie der Name schon sagt, Fehler in der Wurzel oder im Scheitel einer Schweißnaht. Sie erscheinen deshalb im Röntgenbild auch in der Mitte der Naht, und zwar in verschiedenartigen, länglichen Schwärzungen. Es können Hohlräume, Schlackenreste oder auch Fehlbindungen sein. Sie entstehen bei nicht genügendem Durchschweißen oder mangelhaftem Gegenschweißen einer Naht. Aber auch das Ausarbeiten einer Wurzel vor dem Gegenschweißen mit einem unvorschriftsmäßigen Meißel kann den Anlaß zu Wurzelfehlern geben (s. Bild 17d). Bild 17a zeigt eine wurzelseitig nicht gegengeschweißte V-Naht mit einem bereits äußerlich sichtbaren Wurzelfehler. Bei Bild 17b ist der Wurzelfehler darauf zurückzuführen, daß der Scheitel der X-Naht vor dem Schweißen der zweiten Nahthälfte nicht genügend von der dort angesammelten Schlacke gesäubert wurde. Ein Zusammenziehen der nicht bis zur Spitze abgeschrägten Bleche gestattet oftmals kein einwandfreies Durchschweißen und verursacht so den in Bild 17c dargestellten Wurzelfehler.

Bei hochwertigen Schweißnähten müssen die Wurzelfehler im allgemeinen ausgebessert werden, da die durch sie hervorgerufene innere Kerbwirkung die Dauerfestigkeit einer Schweißnaht wesentlich herabsetzt. Bei weniger beanspruchten Schweißnähten können Wurzelfehler, wenn sie nicht zu große Ausmaße haben und die Naht sonst fehlerfrei ist, vernachlässigt werden. Bei einer V-Naht bereitet das Öffnen der Nahtwurzel kaum Schwierigkeiten, anders dagegen bei einer X-Naht.

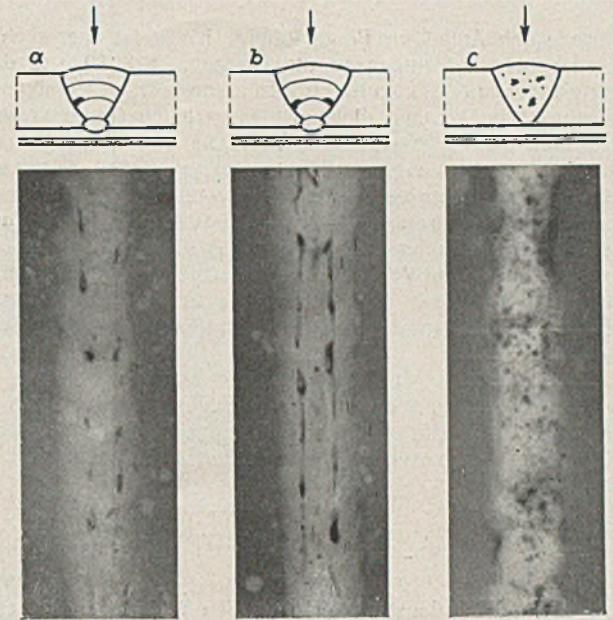


Bild 18. Röntgennegative elektrischer Lichtbogenschweißungen mit verschiedenen Schlackeneinschlüssen.

a) Einzelne Schlackeneinschlüsse, b) Längliche Schlackenzeilen, c) Zahlreiche kleine Schlackenreste und Gasporen.

Schlackeneinschlüsse zeichnen sich im Röntgenbild als ungleichmäßig geformte, wolkenartige Schwärzungen ab. Sie entstehen hauptsächlich beim Schweißen mit zu geringer Stromstärke, aber insbesondere bei Verwendung umhüllter Elektroden infolge schlechter Säuberung zwischen den einzelnen Lagen. Eine zu schmale Schweißfuge, die ein Entweichen der Schlacke an die Oberfläche verhindert, kann gleichfalls die Ursache sein. Längliche, zwischen den einzelnen Lagen verlaufende Schlackeneinschlüsse sind besser mit Schlackenzeilen zu bezeichnen. Sie

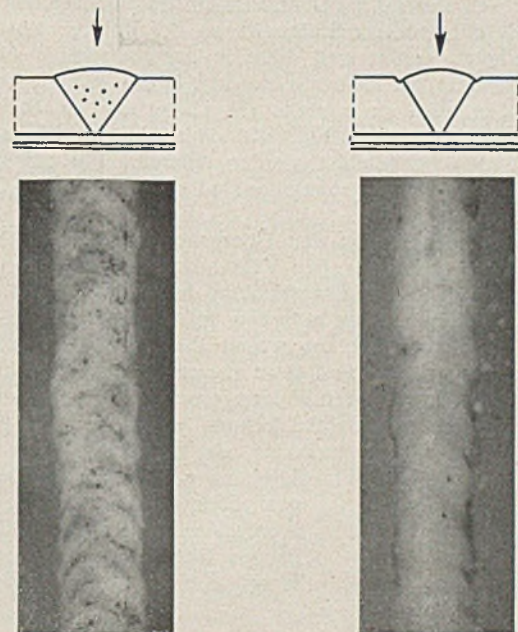


Bild 19. Röntgennegativ einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit zahlreichen kleinen Gasporen.

Bild 20. Röntgennegativ einer elektrischen Lichtbogenschweißung mit vereinzelten Gasporen und mittelstarken Einbrandkerben.

sind auch gefährlicher als vereinzelt eingeschlossene Schlackenreste und müssen daher fast in allen Fällen beseitigt werden. Bild 18a zeigt vereinzelte Schlackeneinschlüsse in einer Naht, Bild 18b längliche Schlackenzeilen bei einer mit dickumhüllten Elektroden hergestellten Lichtbogenschweißung und Bild 18c zahlreiche Schlackenreste (und Gasporen) bei einer mit Seelenelektroden hergestellten elektrischen Lichtbogenschweißung.

Gasporen können auf Grund ihrer runden Form und gleichmäßigen Schwärzung im Röntgenbild eindeutig erkannt werden. Bei Verwendung von nackten Elektroden treten sie zahlreich, jedoch von ganz geringen Abmessungen, bei umhüllten Elektroden nur selten, allerdings dann meistens in größeren Abmessungen auf. Sie entstehen dadurch, daß die sich beim Schweißen entwickelnden Gase infolge zu schnellen Abkühlens des eingeschmolzenen Schweißgutes nicht an die Oberfläche entweichen können und eingeschlossen werden. Oftmals gibt die Beschaffenheit der

Elektrode den Anlaß zur Porenbildung, häufig ist aber auch das Halten eines zu langen Lichtbogens die Ursache. Bild 19 gibt das Röntgennegativ einer mit nackten Elektroden hergestellten Lichtbogenschweißung mit zahlreichen kleinen, gleichmäßig verteilten Gasporen wieder. Gasporen sind infolge ihrer runden Form im allgemeinen harmlos, es sei denn, daß sie sich zu ganzen Nestern zusammenballen, wie es z. B. beim Wiederansetzen einer neuen Elektrode vorkommen kann.

Einbrandkerben, die — an der Oberfläche liegend — bereits mit dem bloßen Auge zu erkennen sind, entstehen beim Schweißen mit zu hoher Stromstärke oder bei Verwendung von schlecht kletterfähigen Elektroden und treten besonders beim Schweißen in senkrechter Lage auf. Sie zeichnen sich am Rande der Schweißnaht als bogenförmige Schwärzungen ab (Bild 20).

Da sie besonders die Dauerfestigkeit einer Schweißnaht ganz erheblich herabsetzen, sind sie bei hochwertigen Schweißnähten unter allen Umständen zu beseitigen. Oftmals genügt ein geringes Ausschleifen, doch darf hierbei der Querschnitt des Werkstoffes um nicht mehr als 5% ge-

schwächt werden. Im anderen Falle müssen sie ausgearbeitet und dann nachgeschweißt werden.

Ob ein im Röntgenbild aufgefundener Schweißfehler ausgebessert werden muß oder nicht, hängt neben den räumlichen Ausmaßen des Fehlers stets von der Art und der Höhe der Beanspruchung der Schweißverbindung ab. Die Betriebssicherheit muß in jedem Falle gewährleistet sein. Zu berücksichtigen bleibt außerdem, daß durch die infolge des Ausbesserungsschweißens dem Werkstück neu hinzugeführte Wärme zusätzliche Spannungen auftreten können, die unter Umständen von größerem Nachteil sein können, als die beseitigten Fehler. Eine nachträgliche Röntgenaufnahme von einem ausgebesserten Nahtabschnitt ist unerlässlich.

Von großem Nutzen ist es, wenn die im Röntgenbild aufgefundenen Schweißfehler stets in Gegenwart des Schweißers, der die Arbeiten ausführte, durchgesprochen, ihre Entstehungsursache geklärt und die daraus zu ziehenden Schlüsse für eine zukünftige Vermeidung der Fehler erörtert werden. Der im Laufe der Jahre bewiesene große erzieherische Wert der Röntgenuntersuchungen kann dadurch noch gesteigert werden.

Beitrag zur Gestaltung von Übergangskonstruktionen an Brücken.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. Wilh. Blick, Oberingenieur, Duisburg.

Die Übergangskonstruktionen an den Widerlagern unserer Brückentragwerke oder zwischen sich gegeneinander bewegenden Überbauten lenkten stets das besondere Augenmerk des gestaltenden Ingenieurs auf sich und nehmen auch in der Unterhaltung der Bauwerke eine bevorzugte Stellung ein. Sie sind diejenigen Bauteile an unseren Brücken, welche die Fahrbahnen abschließen und die Verbindung mit dem angrenzenden Baukörper herstellen. Neben der Aufgabe der Überleitung der Verkehrslasten übernehmen sie auch den Ausgleich der Längen- und Formänderungen. Mit der Schaffung größerer Brückenöffnungen und damit größerer Dilatationslängen und ferner durch die mit dem ständigen Wachsen des schnellen Kraftwagenverkehrs zusammenhängende, notwendige Forderung einer immer größeren Ebenheit der Straßendecke — besonders bei den Straßen unseres Führers — erlangt die Übergangskonstruktion gerade in der Gegenwart ganz besondere Bedeutung.

Während sich nun für die Übergangskonstruktion bei den Eisenbahnbrücken selbst mit größerer Stützweite an der Brücke selbst eigentlich keine Schwierigkeit ergibt, weil diese in der Hauptsache nur in einem Schienenanzug oder bei kleineren Brücken in einem einfachen Schleppblech besteht, ergeben andererseits die Übergänge an Straßenbrücken besondere Konstruktionen aus Flußstahl oder Stahlguß, die mit ganz besonderer Sorgfalt durchgebildet werden müssen. Für die konstruktive Gestaltung dieser Übergangsbauweise sind nun verschiedene Gesichtspunkte zu beachten.

Zunächst müssen die an den Übergangsstellen auftretenden Formänderungen der Brücke aus den Verkehrslasten und den thermischen Einflüssen, die sich in der Längsrichtung bzw. der Vertikalebene auswirken, berücksichtigt werden, während man diejenigen aus der Windbelastung in Brückenquerrichtung wegen ihrer geringen Größe vernachlässigen kann. Aus Bild 1 sind diese Formänderungen in der Vertikalebene für die Übergänge zu den Widerlagern zu ersehen, die sich über den festen Auflagern als eine Winkeldrehung τ und an den beweglichen Lagern neben der Größe τ weiterhin als horizontale Verschiebung Δl darstellen. Als Folge der Winkeldrehung τ und auch der Durchbiegung des Endquerträgers bzw. der Stützkonstruktion des eigentlichen Überganges tritt eine senkrechte Verschiebung Δh des Auflagerpunktes der

Übergangsplatte auf. Diese Verschiebungsgröße hängt von dem Überstand der Stützkonstruktion über die Lagerverbindungsebene A—A ab und kann unter Einbeziehung der sowohl positiven wie auch negativen Durchbiegung der Stützkonstruktion ebenfalls wechselndes Vorzeichen besitzen. Da τ infolge der Verkehrsbelastung die Werte 0,005 bis 0,0066 annehmen kann, so können besonders bei Überbauten mit großer Bauhöhe, großem Hauptträgerabstand und oberliegender Fahrbahn die Verschiebungen $h\tau$ und Δh schon zu recht beträchtlicher Größe anwachsen und selbst am festen Lager zu besonderen Maßnahmen für die Ausbildung des Überganges Veranlassung geben.

Den auftretenden Bewegungen paßt sich am besten die Pendelplatte an, die als Flußstahl- oder Stahlgußplatte längs der Kanten in Brückenquerrichtung auf der Unterseite zwei durchlaufende oder auch unterbrochene, abgerundete Längsleisten besitzt, auf der Widerlagerseite frei aufliegt und auf der Brückenseite federnd befestigt ist. Durch die federnde Befestigung mittels Federwinkel und Schrauben wird die Pendelplatte stets mit sanftem Druck auf die Unterstützung gedrückt und ein Abheben und etwaiges Klappern vermieden. Um die Neigung zu diesen Bewegungen von vornherein auszuschalten, ist es notwendig, die einzelnen Platten nicht zu leicht zu machen und im übrigen deren Lagerung so zu wählen, daß keine negativen Auflagerdrücke auftreten können. Wenn man bei kleineren Überbauten am Übergang über dem beweglichen Lager mit der einfachen Pendelplatte nach Bild 2a auskommt und sich am festen Auflager damit begnügen kann, nur ein einfaches Schleppblech anzuordnen, so sollte man doch bei mittleren und besonders bei größeren Brücken mit oberliegender Fahrbahn auch über dem festen Auflager die Pendelplatte einführen.

Über den beweglichen Lagern ist jedoch schon bei mittleren Überbauten die einfache Pendelplatte nicht mehr ausreichend, weil durch die größeren Verschiebungen Δl eine über die ganze Bauwerksbreite reichende, mehr oder weniger breite Lücke in der Fahrbahn entsteht, die bei der Überleitung der Radlasten ganz erhebliche Stöße verursacht. Will man nun die weiterhin an die Übergänge zu stellende Forderung des stoßfreien Befahrens erfüllen, so kann man die Pendelplatten mit der bekannten Finger- oder Kammkonstruktion versehen. Die Bilder 2b u. 2c zeigen Ausführungen für mittlere und größere Stützweiten. Es sei besonders hervorgehoben, daß die gefingerten Pendelplatten allen auf-

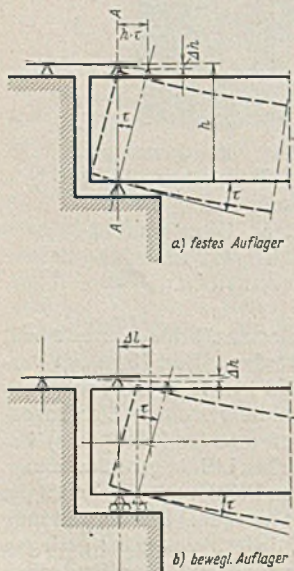


Bild 1. Formänderungen in der Vertikalebene an den Endauflagern und Übergängen einer Balkenbrücke.

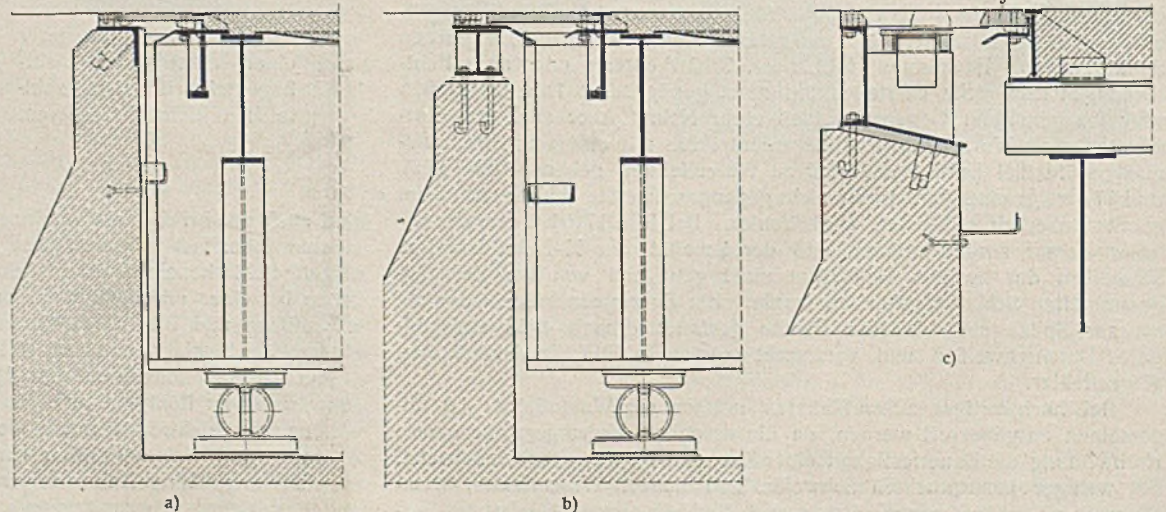


Bild 2. a) Einfache Pendelplatte, b) Fingerpendelplatte für Überbauten mittlerer Stützweite, c) Fingerpendelplatte für Überbauten größerer Stützweite.

tretenden Bewegungen und Drehungen ohne Zwängung folgen und bei ihrem Befahren mit Verkehrslast nur positive Auflagerdrücke auftreten. Die Zwischenräume zwischen den einzelnen Fingern müssen naturgemäß zur Gewährleistung des stoßfreien Befahrens bei Kraftwagenverkehr wenigstens schmäler als die kleinste Radbreite sein; dagegen müssen sie bei Übergängen an Brücken mit vorwiegend Pferdefuhrwerksverkehr sowie starkem Fahrrad- bzw. Kleinkraftverkehr besonders klein gehalten werden. Bei größeren Dilatationen stößt dann im letzteren Falle die Herstellung der relativ schlanken Fingerkörper aus dem meistens gebäuchlichen Material Stahlguß auf Schwierigkeiten. Eine Umgehung dieser Schwierigkeiten ermöglicht die Konstruktion der Pendelplatten mit flußstählernen Fingern, die im Bild 2c gezeigt ist. Diese Konstruktion ist mit geringer Änderung an einer größeren Talbrücke der Reichsautobahnen ausgeführt worden und gekennzeichnet durch ein Stahlstück, in dessen eingefräste Nuten Fingerstäbe aus Flachstahl eingeschweißt wurden. Der Abstand der Fingerstäbe von 14 mm Dicke aus St 52 betrug 20 mm. Die Pendelplatte ist so gelagert, daß nur positive Reaktionen an den Unterbau abgegeben werden. Sie stützt sich einerseits auf eine Fahrbahnabschlußkonstruktion und andererseits auf eine Laufbahnfläche von der Breite der auftretenden Gesamtverschiebung. An Stelle dieser Fingerkonstruktion in Verbindung mit Pendelplatten wurden bisher die bekannten auskragenden Stahlgußfingerkonstruktionen verwendet, die auf dem Widerlager und der Brücke verankert werden müssen. Daß die Pendelfingerplatten mit nur positiven Auflagerdrücken den Kragkonstruktionen vorzuziehen sind, bedarf wohl keiner besonderen Hervorhebung. Sie lassen sich außerdem im Gegensatz zu den vorerwähnten Kragkonstruktionen ohne Schäden am Widerlager und an der Fahrbahn entfernen. Ebenfalls läßt sich die notwendige Entwässerung als eine weitere Forderung an den Übergangskonstruktionen in einwandfreier Weise bei allen aufgeführten Pendelplatten vorsehen.

Wenn auch durch die Fingerkonstruktionen ein verhältnismäßig stoßfreies Befahren gewährleistet ist, so haftet ihnen doch der Nachteil an, daß die Zwischenräume zwischen den Fingern leicht verschmutzen und sich verstopfen und daß schließlich auch Pferde mit spitz beschlagenen Hufen in den Zwischenräumen steckenbleiben. Diese Nachteile vermeidet bei gleichem stoßfreiem Befahren eine Übergangskonstruktion, die gelegentlich des Entwurfes der neuen Straßenbrücke über den Rhein zwischen Duisburg und Rheinhausen, der Admiral-Graf-Spee-Brücke¹⁾, vom Verfasser entwickelt worden ist. Im Gegensatz zu allen anderen Übergangskonstruktionen vermeidet dieser Vorschlag nach dem DRP. 639 510 jeglichen Dilatationsspalt und weist außer den üblichen Konstruktionsfugen zwischen den eigentlichen Abdeckplatten von 2 bis 3 mm überhaupt keine Spielräume auf. Dieser also vollkommen lückenlose Übergang, der sich für jede beliebig große Dilatation eignet, arbeitet nach dem Grundsatz der bekannten Rollverschlüsse. Er besteht nach Bild 3 aus einer den Erfordernissen des jeweiligen Überganges entsprechenden breiteren Pendelplatte, an die sich je nach Größe des zu überbrückenden Ausdehnungspaltes eine bestimmte Anzahl von Gleitplatten anschließt. Für kleinere Übergänge kommt man mit einer Gleitplatte aus. Die Gleitplatten sind unter sich und mit der Pendelplatte in einfachster Weise gelenkig verbunden. Sie sind ebenso wie die Pendelplatte mit Rücksicht auf das Auftreten nur positiver Auflagerdrücke und damit die Verhütung des Klapperns als einfache Balken ausgebildet und auf Verschleibeböcken gelagert, deren oberer Flansch dem vorgesehenen Verschleibekreis folgt. Die Entfernung der Verschleibeböcke in der Querrichtung der Brücke richtet sich nach der Länge der Pendel- bzw. Gleitplatten und kann etwa 1 bis 2 m betragen. Über den Gleitplatten ist eine auf der Unterseite nach dem Verschleibekreis ausgehobelte Abdeckplatte angeordnet, die durch ihre federnde Befestigung einen ständigen

Druck auf die Gleitplatten ausübt. Die Abdeckplatte liegt mit der Straßenoberkante bündig. Da sie durch die Aushobelung einseitig an der Vorderkante bis auf eine Dicke von 4 bis 5 mm zugespitzt ist, wird auch ein äußerst gutes Anpassen des gesamten Überganges an die Straßenoberfläche erreicht. Es ist nun notwendig, die gesamte Oberseite der bei größter Auszugstellung sich ergebenden Stahlfahrbahn des Überganges möglichst rau und griffig auszubilden. Daher werden Pendel- und Abdeckplatten sowie die Gleitstäbe zweckmäßig aus Stahlguß hergestellt und oberseitig profiliert, wobei die Gleitstäbe außerdem nach einer Zylinderfläche bearbeitet werden müssen. Bei Übergängen an Brücken mittlerer Stützweite dürfte diese Maßnahme ausreichend sein. Für größere Auszüge empfiehlt es sich jedoch, gemäß den Vorschlägen für einige neue Großbauten im Reich, auch die Pendel- und Abdeckplatten mit einer Fahrschicht zu versehen und auf diese Weise die Breite der nicht zu umgehenden Stahlfahrbahn am Übergang auf ein Mindestmaß zu beschränken. Die erwähnten Stahlplatten erhalten bei dieser Ausführung oberseitig Aus-

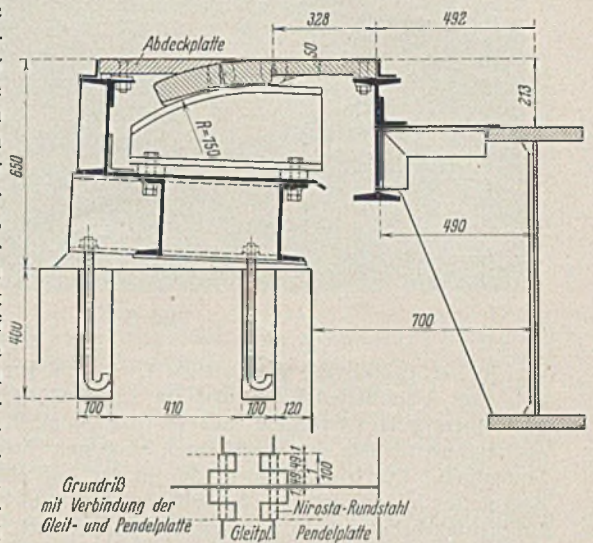


Bild 3. Beweglicher Übergang nach DRP. 639 510 (Demag A.-G.,-Duisburg).

sparungen von etwa 30 mm Tiefe zur Ausfüllung mit dem bekannten, besonders rauhen und griffigen sowie verschleißfesten Hartestrich Lonsicar. Andererseits ist jedoch die Ausführung der gesamten Übergangskonstruktion in Flußstahl St 37.12 oder in Verbindung mit St 52 möglich.

Wie schon angedeutet, ist die Wirkungsweise des neuen Überganges ähnlich derjenigen der Rollverschlüsse, d. h. es verschiebt sich die gekoppelte Gleit- und Pendelplattenschürze bei einer gewissen Längenänderung des Überbaues auf den Verschleibeböcken, wobei die Gleitplatten sich wie bei einem Rollverschluß in dem Spalt zwischen der Abdeckplatte und dem Verschleibebock auf einem Zylindermantel je nach der Bewegungsrichtung vor- oder rückwärts bewegen. Die Pendelplatte bewegt sich dagegen nur auf einer horizontalen Verschleibebockbahn. Sie kann jedoch außer der Translation auch alle Winkeldrehungen und Vertikalbewegungen ausführen. Zur Verhinderung eines etwaigen Aufstauchens bei Verschiebung infolge größerer Erwärmung an weitgespannten Bauwerken sind die einzelnen Platten der Gleitschürze auf der Unterseite mit Bügeln versehen, die um den oberen Flansch der Verschleibebockträger herumfassen. Bei größeren Brücken können die Einzelplatten der Abdeckung auch durch ein biegsames Zugmittel untereinander verbunden werden, das durch ein Gewicht gespannt wird. Die auf diese Weise unter einer ständigen Zugspannung stehende Übergangskonstruktion wird ganz einwandfrei auch bei den größten Verschiebungen arbeiten.

Die Verwendbarkeit des zuvor beschriebenen Überganges beschränkt sich nicht etwa nur auf die rechtwinklig abschließenden Brücken, sondern ist auch bei schiefen Brücken möglich. Es ist jedoch bei schiefen Brücken etwa die doppelte Anzahl von Verschleibeböcken erforderlich, weil die einzelnen Abschnitte des eigentlichen Überganges, bestehend

¹⁾ Bautechn. 1937, Heft 45 u. 47.

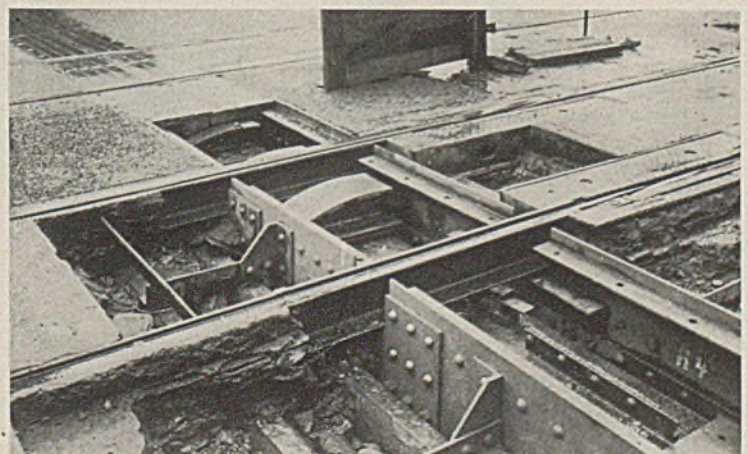
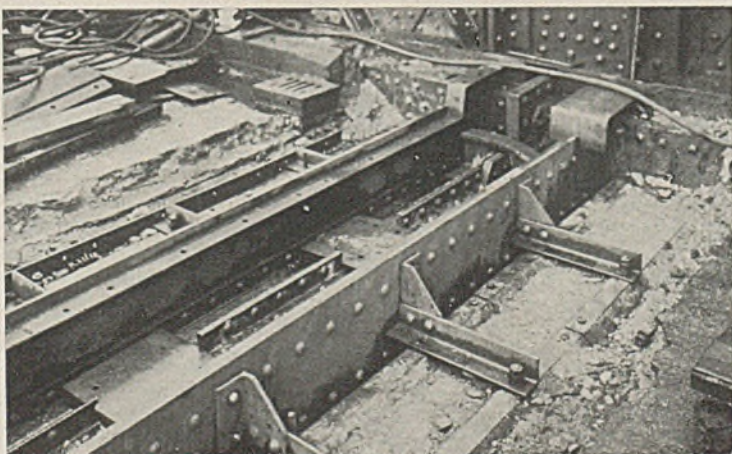


Bild 4.

Bild 5.

Bild 4 bis 8. Einbau des beweglichen Überganges nach DRP. 639 510 an der Rheinbrücke zwischen Duisburg-Ruhrort und Homberg.

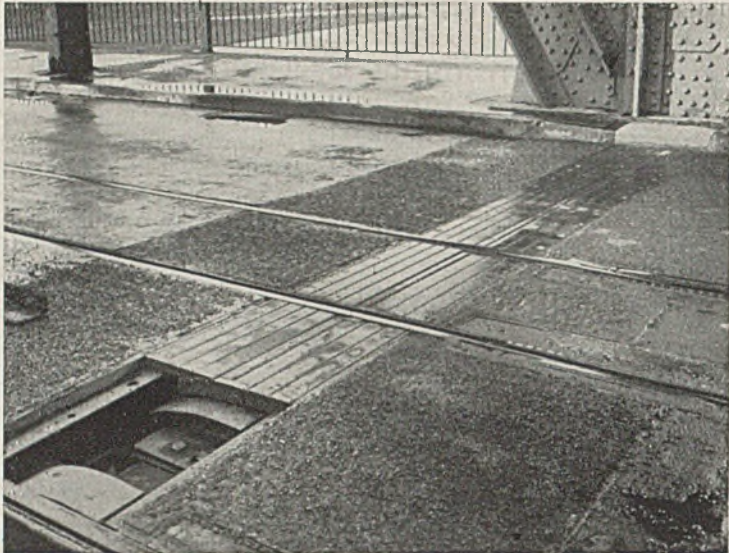


Bild 6.

aus der rechtwinkligen, gekoppelten Gleit- und Pendelplatte, je für sich auf zwei Verschiebeböcken und im übrigen längs des schiefen Endquerträgers gelagert werden müssen. Im Grundriß gesehen, entsteht so als Begrenzungslinie der eingebauten einzelnen Übergangsabschnitte eine Stufenlinie. Durch den Einbau der in der Aufsicht trapezförmigen Abdeckplatten einerseits und besonderer Einsatzstücke auf der Seite der Brückenfahrbahn werden die gleichlaufenden Abschlußkanten der fertigen Übergangskonstruktion wieder erreicht.

Der neue Übergang wurde erstmalig auf dem östlichen Landpfeiler der bereits erwähnten Admiral-Graf-Spee-Brücke eingebaut und ist jetzt auf Grund der bei diesem Bauwerk gemachten guten Erfahrungen auch bei der Duisburg/Ruhrort-Homberger Rheinbrücke, und zwar über dem linken, auch nach der Verstärkung und dem Umbau im Jahre 1928²⁾ beweglich gehaltenen Auflager des eingehängten, mittleren Überbaues von 135 m Stützweite ausgeführt worden. Die verschiedenen Bauzustände beim Einbau dieses

Überganges, der auch zwischen den Schienen der über die Brücke führenden zweigleisigen Straßenbahn vorgesehen ist, gehen aus Bild 4 bis 8 hervor. Als maßgebende Verschiebung war ± 90 mm einzuhalten, weshalb außer der Pendelplatte nur eine Gleitplatte ausgeführt wurde. Mit Rücksicht auf die vorhandene Konstruktion, die an der Unterbrechungsstelle einen verhältnismäßig hohen Querträger mit einseitig beweglichem Längsträgeranschluß aufweist, mußten die Verschiebeböcke, von denen in Bild 4 erst ein Stück eingebaut ist, und die besonders deutlich in Bild 7 zu erkennen

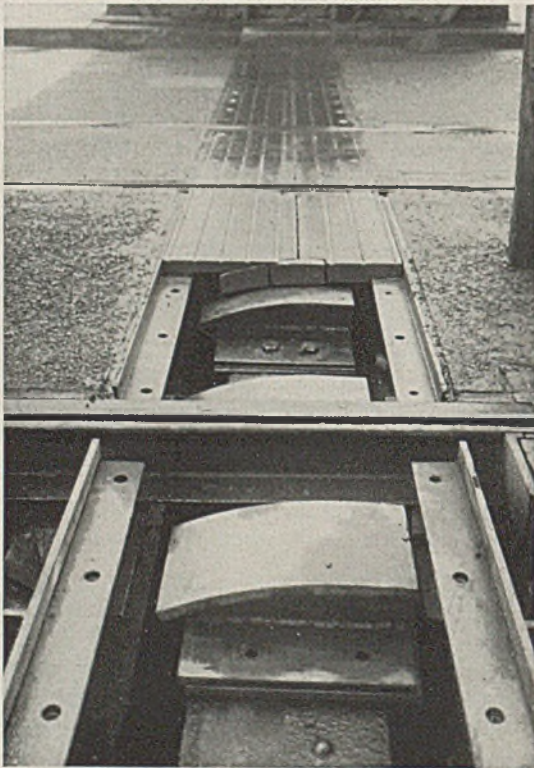


Bild 7.

sind, recht niedrig gehalten werden. Der Umbau wurde ohne Unterbrechung des äußerst lebhaften Verkehrs unter nur teilweiser Einschränkung der Fahrbahnbreite durchgeführt.

Auch bei den Reichsautobahnen und anderen großen Baubehörden hat die neue Übergangskonstruktion Eingang gefunden. Die in Bild 3 dargestellte Ausführung überbrückt z. B. die Dehnungsfuge bei einem

²⁾ Bautechn. 1931, Heft 25, 27 u. 29.

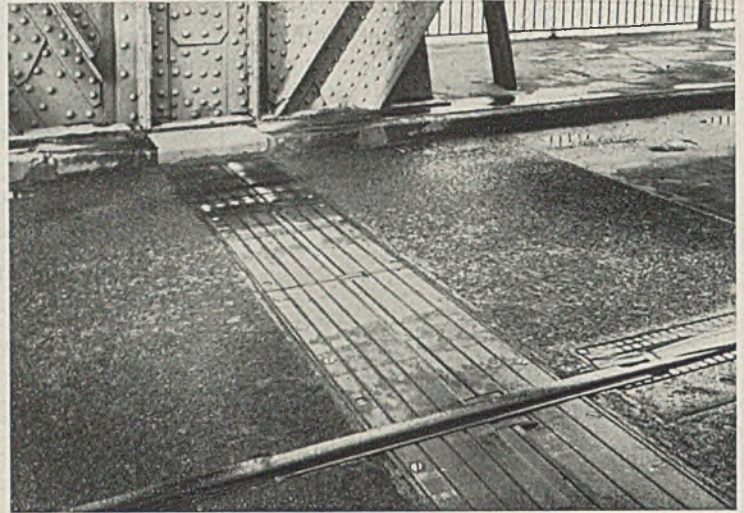


Bild 8.

52,2 m weit gespannten Stabbogen für die Reichsautobahnen. Der maßgebende Dilatationsspalt ist jedoch mit 250 mm — bedingt durch gewisse zu erwartende Bodenbewegungen — wesentlich größer als der Stützweite entsprechend und fast so groß wie bei der Admiral-Graf-Spee-Brücke. Zu diesem bisher also größten ausgeführten Rollenübergang an der Graf-Spee-Brücke sollen nun noch einige Angaben gemacht werden. Der Übergang liegt zwischen der Strombrücke und der rechtsseitigen Vorlandbrücke. Die maßgebende Dilatationslänge beträgt rd. 260 m. Dafür ergeben sich die größten Längenänderungen zu 260 mm. Es wurde daher eine Konstruktion, bestehend aus einer Pendelplatte und zwei anschließenden Gleitplatten, gewählt. Die Pendel- und Gleitplatten waren bei einer mittleren Länge von etwa 1,20 m und einer Dicke von 45 bzw. 70 mm aus Stahlguß 52.81 S hergestellt und in einfachster Weise durch kurze Nirosta-Rundstähle gelenkig verbunden. Soweit die Oberseiten der Platten unbearbeitet blieben, was immer bei den Pendel- und Abdeckplatten möglich ist, waren sie mit angegossenen Riffeln versehen, was man auch aus dem Bilde von der fertigen Übergangskonstruktion (Bild 9)

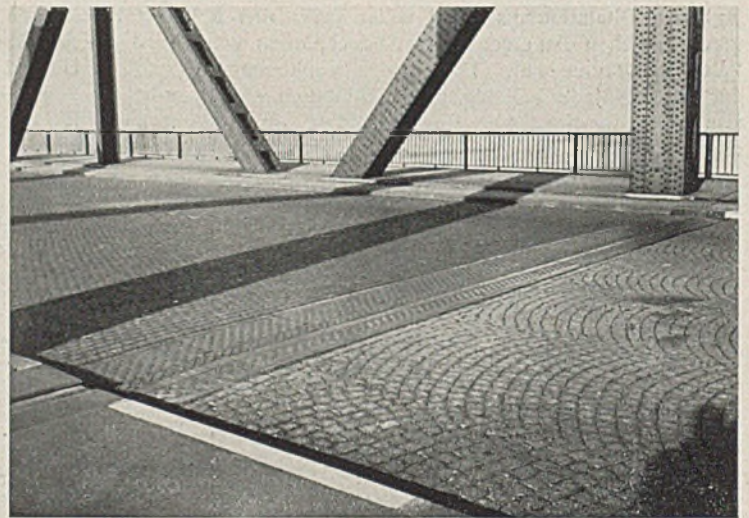


Bild 9. Beweglicher Übergang nach DRP. 639 510 auf der Admiral-Graf-Spee-Brücke bei Duisburg-Rheinhausen.

erkennen kann. Die oberseitig gehobelten Gleitplatten erhielten dagegen eine eingehobelte Riffelung, die an den Seitenkanten der Gleitplatten auf Null ausläuft und im Mittellängsschnitt als Tiefe die Pfeilhöhe der oberseitig angehobelten Rundung besitzt. Für die Verschiebeböcke aus Flußstahl 37.12 ergab sich entsprechend der Plattenlänge eine mittlere Entfernung von 1,20 m. Durch Ausgleichfütter unterhalb dieser Verschiebeböcke konnte die gesamte Konstruktion der Höhe nach sehr gut ausgerichtet werden. Nach dem Ausrichten wurde die Entwässerung eingebaut, welche sich über die gesamte Länge der Übergangskonstruktion erstreckt. Seit Mitte Mai 1936 befindet sich der Übergang in Betrieb und hat sich sehr gut bewährt.

INHALT: Praktische Ratschläge für die Herstellung der Röntgenaufnahmen von Schweißnähten und ihre Auswertung. — Beitrag zur Gestaltung von Übergangskonstruktionen an Brücken.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43

Fernsprecher: 87 7421

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

11. Jahrgang

BERLIN, 25. November 1938

Heft 24

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. A. Schleusner, VDI, Berlin.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist so alt wie die Mechanik überhaupt. Hamel macht in seiner Elementaren Mechanik¹⁾ darauf aufmerksam, daß schon die goldene Regel des Aristoteles den Grundgedanken des Prinzips der virtuellen Verrückungen enthält. Als erster hat Johann Bernoulli im Jahre 1717 das Prinzip allgemein ausgesprochen²⁾, und Lagrange hat es 1788 in erweiterter Form zur Grundlage der gesamten Mechanik gemacht³⁾.

Man sollte es für überflüssig halten, über ein so altes Prinzip heute noch zu schreiben. Aber die Erfahrung hat gezeigt, daß trotz der jahrhundertelangen Anwendung des Prinzips und seiner ständig zunehmenden Bedeutung, trotz der klassischen Prägung der Begriffe durch Lagrange immer wieder Unklarheiten auftauchen, die Verwirrung anrichten, und zwar besonders bei der Anwendung des Prinzips auf die Probleme der Elastizitätstheorie.

In den achtziger Jahren (1883 bis 1886) gab es eine scharfe Auseinandersetzung zwischen Mohr und Müller-Breslau. Zu Beginn des Jahrhunderts lebte die Diskussion im Anschluß an einen Aufsatz Weingarten's vom Jahre 1901 wieder auf⁴⁾ und nahm teilweise sehr heftige und unerfreuliche Formen an. Weingarten, Weyrauch, Hertwig, Müller-Breslau, Koetter, Mohr, Mehrtens, Föppl und andere haben damals in verschiedenen Zeitschriften jahrelang aneinander vorbeigeredet. In einer Arbeit vom Mai 1914 hat dann Domke⁵⁾ die Streitpunkte dieser Diskussion von der Grundlage der Variationsprinzipien aus klar und einwandfrei dargestellt. Dagegen bleiben in dieser Arbeit einige andere Fragen offen. Auch Föppl⁶⁾ hat in „Drang und Zwang“ alle jene Streitfragen eingehend berücksichtigt. Gründlich und streng stellt Trefftz im Handbuch der Physik einen großen Teil der mit diesen Fragen zusammenhängenden Probleme dar⁷⁾.

In jüngster Zeit hat sich eine neue Diskussion über das Prinzip der virtuellen Verrückungen entwickelt. Im Mai 1936 veröffentlichte Pöschl einen Aufsatz⁸⁾ mit dem Zweck, eine anschauliche Deutung der Minimalprinzipien der Elastizitätstheorie zu geben. Pöschl kommt dort zu dem Schluß, daß das Prinzip zu grundsätzlich verschiedenen Folgerungen führt, „je nachdem es sich um gewöhnliche Aufgaben des elastischen Gleichgewichts oder um Knickaufgaben handelt“. Domke weist in seinen Er widerungen⁹⁾ die Unhaltbarkeit dieser Schlußfolgerung nach. Denselben Nachweis erbringt Marguerre in einer in ihrer Art vollkommenen Arbeit¹⁰⁾ von ganz anderen Gesichtspunkten her. Diese Arbeit gewinnt besonderen Wert durch die Anwendung des Prinzips auf Verformungen von endlicher Größe.

Wie stark man sich neuerdings wieder mit diesem alten Prinzip beschäftigt, beweist, daß die Tagesordnung der diesjährigen Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Göttingen einen Vortrag von C. Weber, Dresden, über diese Fragen enthielt. Auch Kammüller hat kürzlich das Thema von einer besonderen Seite her aufgegriffen¹¹⁾. Das veranlaßte mich zu einigen grundsätzlichen Ausführungen¹²⁾, die zu einer kurzen Diskussion zwischen Kammüller und mir führten¹³⁾. Diese Diskussion überzeugte mich von der Notwendigkeit eines Versuchs, die bei der Anwendung des Prinzips auf die Elastizitätstheorie sich ergebenden grundsätzlichen Probleme einmal möglichst kurz zusammenfassend darzustellen. Besonders kam es mir darauf an, die verschiedenen Formen, in denen das Prinzip angewendet wird, in ihren gegenseitigen Beziehungen und Unterschieden darzustellen und die Grenzen zu zeigen, innerhalb deren jede dieser Formen angewendet werden darf. Auf die Einbeziehung der Wärmewirkungen mußte ich leider verzichten, da sie den Umfang der Arbeit erheblich vergrößert hätte. Die Voraussetzungen, von denen ausgegangen wird, sind kurz die folgenden:

Wir betrachten einen elastischen Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte, die an seiner Oberfläche angreifen. Von Massenkraften, etwa dem Eigengewicht, sehen wir zur Vereinfachung der Gleichungen ab. Vorausgesetzt wird, daß der Körper als Ganzes sich in Ruhe befindet, d. h. daß er in der erforderlichen Weise gestützt ist. Rechnen wir dann die Reaktionen an den Stütz- und Einspannstellen zu den äußeren Kräften, so befinden sich diese untereinander im Gleichgewicht. Wenn also im folgenden von dem Eintreten des Gleichgewichts oder seiner Störung die Rede ist, so handelt es sich stets nur um das Gleichgewicht der inneren Kräfte (Spannungen) mit den äußeren Kräften.

Ist dann das Körpermaterial gegeben, d. h. sind die Spannungen σ , τ als Funktionen der Dehnungen ϵ und der Gleitungen γ bekannt, und sind weiter die äußeren Kräfte nach Größe, Richtung und Angriffspunkten gegeben, so nimmt jeder Punkt des Körpers im allgemeinen — d. h. wenn wir den Fall sogenannter Verzweigungspunkte des elastischen Gleichgewichts ausschließen — eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtslage an. Diese zu ermitteln, ist die Aufgabe.

Wir nehmen an, daß die Lasten allmählich aufgebracht werden, also stetig von Null an bis zu ihrem Endwert wachsen. Wir setzen weiter voraus, daß dieser Prozeß so langsam vor sich geht, daß in dem Ausdruck für die Energie die Beschleunigungsglieder vernachlässigt werden dürfen. Ebenso verzichten wir der Einfachheit halber auf die Berücksichtigung aller Wärme- und Temperaturwirkungen und setzen vollkommene Elastizität des Körpermaterials voraus, sehen also von inneren und äußeren Reibungsverlusten ab, obgleich ein Teil unserer Gleichungen auch bei Berücksichtigung dieser Umstände noch gültig bleibt.

Wir bedienen uns ferner des de St. Venantschen Prinzips, das die äußeren Kräfte als Einzelkräfte behandelt, also die Integration über die Oberflächenkräfte durch die Summation über die Einzelkräfte ersetzt¹⁴⁾.

¹¹⁾ Kammüller, Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Eine grundsätzliche Betrachtung. B. u. E., Jahrg. 36 (1937), Heft 22, S. 363 ff.

¹²⁾ Schleusner, Zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen. B. u. E., Jahrg. 37 (1938), Heft 15, S. 252 ff.

¹³⁾ Umschrift von Kammüller, Erwiderung von Schleusner, Entgegnung von Kammüller. B. u. E., Jahrg. 37 (1938), Heft 16, S. 271 f.

¹⁴⁾ Vgl. den Aufsatz von Tedone-Timpe in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften IV, 25, Nr. 15.

¹⁾ Hamel, Elementare Mechanik, S. 471. Leipzig und Berlin 1912.

²⁾ Varignon, Nouvelle mécanique 1725. — Vgl. Hamel a. a. O.

³⁾ Lagrange, Mécanique analytique 1788.

⁴⁾ Weingarten, Rezension der Vorlesungen über technische Mechanik von A. Föppl, Archiv der Mathematik und Physik III, Reihe I, 1901, S. 342.

⁵⁾ Domke, Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1915, S. 174 ff.

⁶⁾ Föppl, Drang und Zwang, München und Berlin 1920, I. Bd., S. 58 ff.

⁷⁾ Trefftz, Handbuch der Physik, Bd. VI, Kap. 2.

⁸⁾ Pöschl, Über die Minimalprinzipien der Elastizitätstheorie. Bauing., Jahrg. 17 (1936), Heft 17/18, S. 160 ff.

⁹⁾ Domke, Zum Aufsatz „Über die Minimalprinzipien der Elastizitätstheorie“ von Th. Pöschl. Bauing., Jahrg. 17 (1936), Heft 41/42, S. 459 f.

¹⁰⁾ Marguerre, Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. Z. ang. Math., Bd. 18, (1938) Heft 1, S. 57 ff.

1. Die Ableitung des Hauptprinzips.

Wir betrachten einen Massenpunkt unter der Wirkung von Kräften. Die Kräfte — unter denen auch Momente sein können — bezeichnen wir als Vektoren durch Frakturbuchstaben, ihre Beträge durch die entsprechenden Antiquabuchstaben. Da der Massenpunkt mit anderen zu einem Körper verbunden ist, können die angreifenden Kräfte entweder eine von außen auf den Körper wirkende Kraft \mathfrak{P} oder innere Kräfte \mathfrak{Q}_m des Körpers sein. Die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte an dem betrachteten Punkte ist

$$(1) \quad \mathfrak{P} + \sum_m \mathfrak{Q}_m = 0.$$

Geometrisch besagt dies, daß Anfangspunkt und Endpunkt des Polygonzuges der aneinandergereihten Vektoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \dots$ zusammenfallen müssen (vgl. Bild 1). Gl. (1) bleibt richtig, wenn sie skalar mit einem völlig willkürlichen Verschiebungsvektor $\delta \mathfrak{s}$ multipliziert wird, den wir nur, wie später begründet wird, unendlich klein annehmen müssen. Da er aber nicht funktional gebunden, sondern willkürlich ist, bezeichnen wir ihn auch nicht mit dem Differentiationszeichen d , sondern mit dem Variationszeichen δ . Wir erhalten

$$(2) \quad \mathfrak{P} \cdot \delta \mathfrak{s} + \sum_m \mathfrak{Q}_m \cdot \delta \mathfrak{s} = 0.$$

Gl. (2) läßt zwei Deutungen zu, je nachdem, wie man die drei Faktoren in dem skalaren Produkt $\mathfrak{Q}_m \cdot \delta \mathfrak{s} = Q_m \cdot \delta s \cdot \cos(\mathfrak{Q}_m, \delta \mathfrak{s})$ zusammenfaßt. Erstens kann man es schreiben $[Q_m \cdot \cos(\mathfrak{Q}_m, \delta \mathfrak{s})] \cdot \delta s$. So gedeutet, sagt Gl. (2) nur die Trivialität aus, daß bei Projektion eines geschlossenen Polygonzuges auf eine beliebige Richtung auch die Projektionen des Anfangs- und des Endpunktes zusammenfallen (Bild 2).

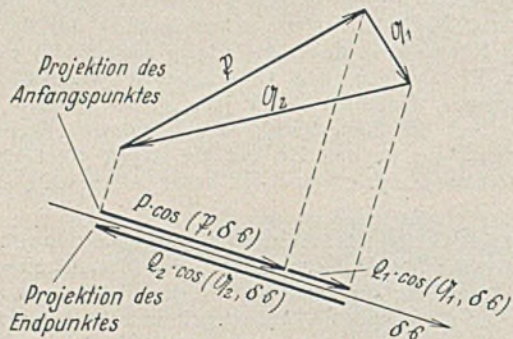


Bild 2.

Zweitens kann man schreiben $\mathfrak{Q}_m \cdot \delta \mathfrak{s} = Q_m \cdot [\delta s \cdot \cos(\mathfrak{Q}_m, \delta \mathfrak{s})]$. Führen wir dabei noch eine besondere Bezeichnung für die Projektion des Verschiebungsvektors $\delta \mathfrak{s}$ auf die Richtung der Kraft \mathfrak{Q} ein: $\delta s \cdot \cos(\mathfrak{Q}, \delta \mathfrak{s}) = \delta q$, so nimmt Gl. (2) die folgende Form an:

$$(3) \quad P \cdot \delta p + \sum_m Q_m \cdot \delta q_m = 0.$$

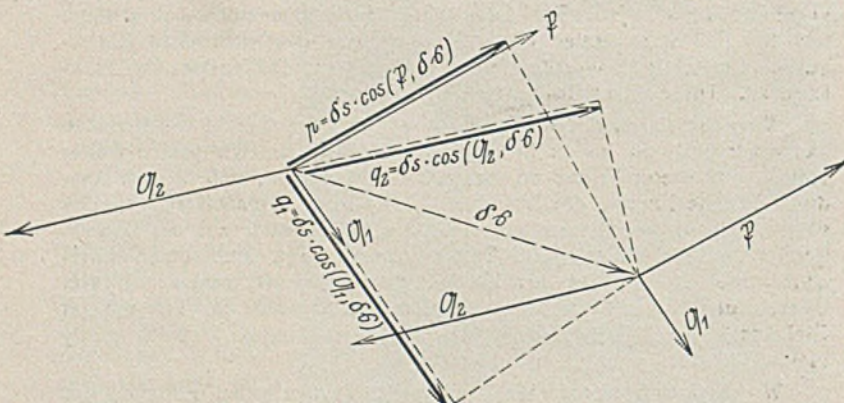


Bild 3.

Würde nun der betrachtete Massenpunkt samt den an ihm angreifenden Kräften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \dots$ um den Vektor $\delta \mathfrak{s}$ verschoben, so würde dabei der Angriffspunkt der Kraft \mathfrak{Q}_m in der Richtung der Kraft um die Strecke δq_m verschoben (Bild 3). Das heißt: Bei dieser Verschiebung würde die Kraft \mathfrak{Q}_m die Arbeit $Q_m \cdot \delta q_m$ leisten, ebenso die Kraft \mathfrak{P} die Arbeit $P \cdot \delta p$. (In dem in Bild 3 dargestellten Beispiel würden die Kräfte \mathfrak{P} und \mathfrak{Q}_1 positive Arbeit leisten, da sie eine Verschiebung im Sinne der Krafrichtung erfahren; die Kraft \mathfrak{Q}_2 würde negative Arbeit leisten, da sie

eine Verschiebung in dem der Krafrichtung entgegengesetzten Sinne erfährt.) Man kann also Gl. (2) in der Form (3) auch folgendermaßen deuten: Bei einer Verschiebung des betrachteten Punktes um den willkürlichen Vektor $\delta \mathfrak{s}$ verschwindet die Summe der dabei geleisteten Arbeiten sämtlicher an dem Punkt angreifenden Kräfte. Da der Punkt diese Verschiebung nicht tatsächlich erfährt, da diese Verschiebung vielmehr nur eine gedachte und obendrein willkürliche ist, wird sie virtuelle Verschiebung genannt. Ebenso sind die Arbeiten $P \cdot \delta p$ und $Q_m \cdot \delta q_m$ keine wirklich geleisteten, sondern gedachte Arbeiten und werden daher mit dem klassischen, von Lagrange geprägten Ausdruck³⁾ als virtuelle Arbeiten bezeichnet.

Gl. (3) wurde als notwendige Folge aus der Gleichgewichtsbedingung (1) abgeleitet. Fordert man, daß (3) nicht nur für irgendeine, sondern für jede beliebige Verschiebung $\delta \mathfrak{s}$ gilt, so folgt umgekehrt auch Gl. (1) als notwendige Folge aus Gl. (3). Wir können also das Ergebnis so zusammenfassen:

Notwendig und hinreichend dafür, daß sich ein Punkt unter der Wirkung angreifender Kräfte im Gleichgewicht befindet, ist, daß bei jeder beliebigen virtuellen Verrückung des Punktes die Summe der virtuellen Arbeiten der angreifenden Kräfte verschwindet.

Dieser Satz wird nach Lagrange³⁾ als Prinzip der virtuellen Verrückungen bezeichnet. Man beachte jedoch, daß dieses Prinzip nichts anderes ist als eine willkürliche Deutung (und, wie wir sahen, nicht einmal die einzig mögliche Deutung!) einer willkürlichen mathematischen Operation an der Gleichgewichtsbedingung (1), die keinerlei wirkliche, physikalische Bedeutung hat.

Wir betrachten nunmehr ein Volumelement $dV = dx dy dz$ eines unter der Wirkung äußerer Kräfte im elastischen Gleichgewicht befindlichen Körpers. Als Folge der Deformation greifen an dem Volumelement Normalspannungen σ und Schubspannungen τ an. Wählen wir das Volumelement klein genug, so daß wir es im Sinne der Gl. (1) bis (3) als Massenpunkt ansehen können, so bestimmen mithin die Spannungen σ_x, \dots, τ_z die inneren Kräfte \mathfrak{Q}_m in Gl. (3). Als virtuelle Verschiebung wählen wir ein zusammengehöriges System von Dehnungen $\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z$ und Gleitungen $\delta \gamma_x, \delta \gamma_y, \delta \gamma_z$. Diese virtuellen Dehnungen und Gleitungen treten also zusätzlich zu den wirklichen Dehnungen $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ und den wirklichen Gleitungen $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, die bei der Deformation des Körpers entstanden sind, hinzu. Wir setzen bei den $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z$ Verträglichkeit (Kompatibilität) voraus; d. h. sie dürfen das Volumelement verformen, aber nicht zerstören.

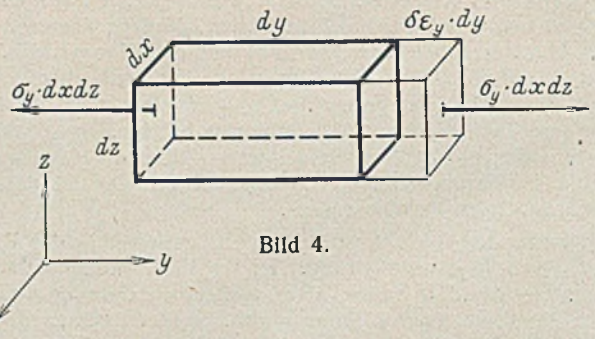


Bild 4.

An der linken und rechten Seitenfläche des Volumelements in Bild 4 greift dann die Kraft $\sigma_y \cdot dx dz$ an. Der Verschiebungsweg in der Krafrichtung ist, wenn wir die linke Seitenfläche festgehalten denken, links Null und rechts gleich $\delta \epsilon_y \cdot dy$, die virtuelle Arbeit also

$$(\sigma_y \cdot dx dz) \cdot (\delta \epsilon_y \cdot dy) = \sigma_y \delta \epsilon_y \cdot dV.$$

Bei einer Gesamtverschiebung des Volumelements in der y -Richtung dagegen verschwindet die Summe der virtuellen Arbeiten, da dann die von der linken und der rechten Seitenfläche herrührenden Beträge sich gegenseitig aufheben.

Als Schubkraft greift in Bild 5 an der linken und rechten Seitenfläche $\tau_x \cdot dx dz$ an. Denken wir die Kante links unten festgehalten, so ist der Verschiebungsweg der Schubkraft in der linken Seitenfläche Null, der in der rechten Seitenfläche $\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dy$, wenn die Gesamtgleitung $\delta \gamma_x$ ist. Die virtuelle Arbeit ist also

$$(\tau_x \cdot dx dz) \cdot \left(\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dy\right) = \frac{1}{2} \tau_x \delta \gamma_x \cdot dV.$$

In der oberen und unteren Randfläche greift die Schubkraft $\tau_x \cdot dx dy$ an.

Ihr Verschiebungsweg ist unten Null, oben $\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dz$, also die virtuelle Arbeit

$$(\tau_x \cdot dx dy) \cdot \left(\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dz\right) = \frac{1}{2} \tau_x \delta \gamma_x \cdot dV.$$

Da sich bei einer Gesamtdrehung des Volumelements um die x -Achse die verschiedenen Anteile der virtuellen Arbeiten gegenseitig aufheben, ist die gesamte auf die Schubspannung τ_x entfallende virtuelle Arbeit

$$\tau_x \delta \gamma_x \cdot dV.$$

Entsprechendes gilt für die vier anderen Spannungskomponenten. Bei der Verformung eines Körpers unter der Wirkung äußerer Kräfte leisten diese Arbeit. Ihr Arbeitsanteil ist also positiv einzusetzen. Dagegen wird diese Verformungsarbeit gegen den Widerstand der inneren Kräfte geleistet. Deren Arbeitsanteil muß demnach mit negativem Vorzeichen eingesetzt werden. Gl. (3) geht also in unserem Falle über in

$$(4) \quad P \delta p - dV \cdot (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) = 0.$$

Dabei kann nach unseren Voraussetzungen nur für Volumelemente an der Körperoberfläche $P \neq 0$ sein.

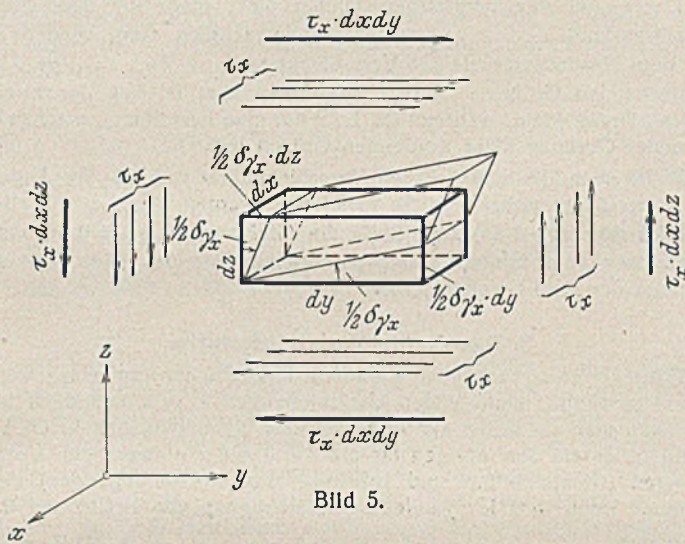


Bild 5.

Für jedes Volumelement des Körpers gilt eine Gl. (4). Wollen wir erreichen, daß alle diese Gleichungen gleichzeitig bestehen können, so müssen wir lediglich dafür sorgen, daß die an sich voneinander unabhängigen virtuellen Verrückungen der einzelnen Volumelemente keine Auflösung des Körperzusammenhangs zur Folge haben. Dazu ist erstens erforderlich, daß die $\delta \epsilon$, $\delta \gamma$ unendlich klein sind; zweitens, daß sie stetige, den Kompatibilitätsgleichungen genügende Funktionen der Ortskoordinaten sind; und drittens, daß sie mit den Auflagerbedingungen des Körpers im Einklang stehen. Im übrigen bleiben sie willkürlich. Für die δp folgt dann automatisch das entsprechende, da sie durch die virtuellen Verformungen derjenigen Volumelemente, an denen die äußeren Kräfte P angreifen, bestimmt sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen können wir Gl. (4) über den ganzen Körper integrieren. Multiplizieren wir noch mit -1 , so erhalten wir endlich

$$(5) \quad \int dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) - \sum_n P_n \delta p_n = 0.$$

Das ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen für elastische Körper in seiner allgemeinsten Form, gültig auch dann, wenn das Körpermaterial nicht vollkommen elastisch ist, gültig bei beliebigem Elastizitätsgesetz und gültig auch für endliche Verformungen des Körpers. Dabei sind, wie gesagt, $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z$ unendlich kleine, stetig von den Ortskoordinaten abhängige, den Kompatibilitäts- und Stützbedingungen genügende, im übrigen aber völlig willkürlich wählbare Verschiebungen und Gleitungen.

In dem Sonderfall vollkommener Elastizität des Körpermaterials ist die Arbeit der inneren Kräfte bei der tatsächlich eintretenden Formänderung

$$(6) \quad A_i = \int dV \int_0^{\epsilon, \gamma} (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z).$$

In diesem Fall ist also das erste Glied in Gl. (5) die Variation der Formänderungsarbeit nach den Verschiebungsgrößen: $\delta_v A_i$. Ebenso ist das zweite Glied die Variation der Summe $\sum_n P_n \delta p_n$ nach den in ihr auftretenden Verschiebungsgrößen p_n , kann also $\delta_v (\sum_n P_n \delta p_n)$ geschrieben werden. Für den Ausdruck $\sum_n P_n \delta p_n$ führen wir noch eine besondere Bezeichnung ein. Diese Größe ist nicht etwa die von den äußeren Kräften P_n bei der tatsächlichen Verformung geleistete Arbeit; denn die

Kräfte P_n wachsen ja erst während der Verformung von Null bis zu ihrem Endwert P_n . $\sum_n P_n \delta p_n$ ist vielmehr diejenige Arbeit, die die Kräfte P_n bei der Verformung geleistet hätten, wenn sie während der ganzen Verschiebung p_n von vornherein mit ihrem Endwert P_n gewirkt hätten. Ich habe daher für diese Größe die Bezeichnung „Endwertarbeit“ der äußeren Kräfte gewählt¹⁵⁾:

$$(7) \quad A_{ea} = \sum_n P_n p_n.$$

Demgegenüber ist die bei der Verformung von den äußeren Kräften tatsächlich geleistete Arbeit

$$(8) \quad A_a = \sum_n \int_0^{p_n} P_n dp_n.$$

Endlich ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte bei den willkürlichen, virtuellen Verschiebungen $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z, \delta p_n$ [vgl. Gl. (5)]

$$(9) \quad A_{va} = \sum_n P_n \delta p_n = \delta_v A_{ea}.$$

Entsprechend bezeichnen wir als Endwertarbeit der inneren Kräfte¹⁵⁾ die Größe

$$(10) \quad A_{ei} = \int dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z).$$

Die bei der Verformung von den inneren Kräften tatsächlich geleistete Arbeit ist durch die Größe A_i , Gl. (6) gegeben. Bei vollkommener Elastizität und beim Fehlen von Wärmewirkungen aller Art muß nach dem Energieprinzip stets

$$(11) \quad A_i = A_a$$

sein. Endlich ist nach Gl. (5) die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte bei den willkürlichen virtuellen Verschiebungen $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z$

$$(12) \quad A_{vi} = \int dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) = \delta_v A_i.$$

Man beachte also insbesondere, daß nur die Größen (6) und (8) wirkliche, physikalisch geleistete Arbeiten darstellen. Dagegen sind die Größen (7), (9), (10), (12) nur Rechengrößen, die man deshalb, weil sie die Dimension $\text{kg} \cdot \text{cm}$ haben, als gedachte Arbeiten deuten kann.

Auf Grund der letzten Darstellungen können wir im Falle vollkommener Elastizität dem Prinzip der virtuellen Verrückungen [Gl. (5)] die folgende Gestalt geben:

$$(13) \quad \delta_v (A_i - A_{ea}) = 0.$$

Der Index v bedeutet, daß jede der Größen in der Klammer nach den in ihr auftretenden Verschiebungsgrößen zu variieren ist, also A_i nach den ϵ und γ , A_{ea} nach den p_n . Im übrigen ist Gl. (13) nichts als eine mathematisch abgeleitete Rechenvorschrift. Sie gilt in dieser Gestalt auch dann, wenn die Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z$ in der Gleichgewichtslage endlich große Beträge haben, und sie gilt bei beliebigem Elastizitätsgesetz.

2. Die Deutung des Hauptprinzips als Bedingung für das Minimum der potentiellen Energie.

In Gl. (13) ist der Ausdruck in der Klammer die potentielle Energie des Gesamtsystems. Denn bezeichnen wir mit A_i^* die Formänderungsarbeit, bezogen auf die Volumeneinheit,

$$(1) \quad A_i^* = \int_0^{\epsilon, \gamma} (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z),$$

so ist bei vollkommen elastischen Körpern der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential, und es folgt

$$(2) \quad \begin{aligned} + \frac{\partial A_i^*}{\partial \epsilon_x} &= \sigma_x & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \epsilon_y} &= \sigma_y & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \epsilon_z} &= \sigma_z \\ + \frac{\partial A_i^*}{\partial \gamma_x} &= \tau_x & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \gamma_y} &= \tau_y & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \gamma_z} &= \tau_z. \end{aligned}$$

Die Pluszeichen besagen, daß eine Zunahme von A_i^* bedeutet, daß die Fähigkeit der inneren Kräfte, Arbeit zu leisten, zugenommen hat. A_i ist also die gesamte potentielle Energie der inneren Kräfte

$$(3) \quad A_i = \Pi_i.$$

¹⁵⁾ Engeßer (Zeitschr. d. Architekten- u. Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. 35 (1889), Heft 8, S. 733 ff.) und Domke (a. a. O., Fußnote 5) bezeichnen die Größen (7) und (10) ohne einschränkende Bemerkungen als „virtuelle Arbeiten“. Diese Bezeichnungswiese kann nicht aufrechterhalten werden. Denn seit Lagrange ist der Begriff der virtuellen Arbeit im Sinne der Gl. (9) u. (12) festgelegt. Nur für ein besonderes System virtueller Verrückungen, von dem noch die Rede sein wird, nehmen (9) und (12) formal die gleiche Gestalt an wie (7) und (10).

Ebenso ergibt sich nach 1. (7):

$$-\frac{\partial(-A_{ea})}{\partial p_n} = P_n.$$

Die Minuszeichen besagen, daß eine Zunahme von A_{ea} (entsprechend bereits geleisteter Arbeit der äußeren Kräfte P_n) bedeutet, daß die Fähigkeit der äußeren Kräfte, weitere Arbeit zu leisten, abgenommen hat. Also ist $-A_{ea}$ die potentielle Energie der äußeren Kräfte:

$$(5) \quad -A_{ea} = II_a.$$

Aus (3) und (5) folgt für die potentielle Energie des Gesamtsystems

$$(6) \quad II = II_i + II_a = A_i - A_{ea},$$

und Gl. 1. (13) kann nunmehr geschrieben werden

$$(7) \quad \delta_v II = 0.$$

Das Verschwinden der ersten Variation eines Ausdruckes bedeutet, daß dieser Ausdruck zum Extremum wird. In diesem Falle läßt sich zeigen, daß es sich um ein Minimum handelt. Wir können also das Prinzip der virtuellen Verrückungen für den vollkommen elastischen Körper in der folgenden Form aussprechen: Der in der Gleichgewichtslage eintretende Verformungszustand ist derjenige Zustand, bei dem die potentielle Energie des elastischen Gesamtsystems ein Minimum wird.

Auch diese Formulierung ist nichts anderes als eine Deutung einer rein mathematischen Operation. Diese Formulierung hat den Vorzug der Kürze und Einprägsamkeit. Sie hat den weiteren Vorzug, daß sie die Erscheinungen des elastischen Gleichgewichts einem allgemeinen, durch die Erfahrung immer von neuem bestätigten physikalischen Axiom unterordnet, dem Axiom vom Minimum der potentiellen Energie. Bei dieser Deutung — nicht bei dem rechnerischen Ansatz! — ergibt sich jedoch in unserem Fall eine Schwierigkeit, die schon viel Verwirrung angerichtet hat.

Spricht man von einem Minimum der potentiellen Energie, so bedeutet das: In dem gesuchten Gleichgewichtszustand ist die potentielle Energie des Gesamtsystems kleiner als in jedem anderen (benachbarten) Verschiebungszustand. Betrachten wir ein um seine Gleichgewichtslage schwingendes Pendel oder irgendein anderes schwingendes System, so nimmt es während der Schwingungen die Vergleichszustände, in denen die potentielle Energie größer als in der Gleichgewichtslage ist, tatsächlich an. Die Vergleichszustände sind also ihrerseits physikalisch mögliche Zustände. In unserem Fall haben wir Schwingungsvorgänge ausdrücklich ausgeschlossen, um in dem Energieansatz keine von der Zeit abhängigen Beschleunigungsglieder zu erhalten. Die Belastung sollte ja so allmählich erfolgen, daß die Beschleunigungskomponenten vernachlässigt werden durften. Dann ist jeder Durchgangszustand bis zur vollen Belastung selbst ein Gleichgewichtszustand, nämlich derjenige, der dem jeweils erreichten Grad der Belastung entspricht. Da bei gegebenem Material (d. h. gegebenem Elastizitätsgesetz) und gegebener Belastung P_n nur ein einziger Verschiebungszustand, eben der gesuchte Gleichgewichtszustand $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ möglich ist, sind unsere Vergleichszustände unter den Bedingungen des Systems physikalisch nicht möglich. Um überhaupt von Vergleichszuständen sprechen zu können, müssen wir für diese irgendeine der geometrisch und physikalisch gegebenen Bedingungen des Problems aufheben. In unserem Fall haben wir diese Entscheidung bereits getroffen: Wir suchen unter allen mit den geometrischen Bedingungen des Systems verträglichen Verschiebungszuständen den einzigen, der bei dem geltenden Elastizitätsgesetz dem Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften entspricht. Wir heben also für die Vergleichszustände die Bedingung des Gleichgewichts auf¹⁹⁾ und charakterisieren sie dadurch in der Tat als physikalisch nicht mögliche Zustände.

Mathematisch macht dies nicht die geringsten Schwierigkeiten. Wir haben einfach in Gl. 1. (5) für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ irgendwelche, in den erwähnten Grenzen willkürliche Größen einzusetzen. Für die Deutung im Sinne der Gl. 2. (7) bzw. 1. (13) aber entsteht die Schwierigkeit, daß wir den Begriff der potentiellen Energie, also der Fähigkeit, Arbeit zu leisten, für einen physikalisch gar nicht möglichen Zustand unseres Systems definieren müssen. Diese Definition kann demgemäß keine physikalische sein. Sie ist eine mathematische, und zwar eine willkürliche mit der

¹⁹⁾ Kammüller irrt, wenn er a. a. O. (Fußnote 13), S. 272, letzter Absatz, sagt, daß bei dem Ansatz $\sigma_x \delta \epsilon_x$ sich $\delta \epsilon_x$ nicht mit dem körperlichen Zusammenhang vereinbaren läßt. Genau das Gegenteil ist der Fall! Wir fordern von den $\delta \epsilon_x, \dots$, daß sie mit dem körperlichen Zusammenhang vereinbar seien. Dann aber können diejenigen Spannungen, die dem variierten Verformungszustand $\epsilon_x + \delta \epsilon_x, \dots, \gamma_z + \delta \gamma_z, p_n + \delta p_n$ nach dem geltenden Elastizitätsgesetz entsprechen, nicht mehr mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sein.

einzigen Einschränkung, daß sie bei der Feststellung des Minimums auf die mathematischen Operationen der Gl. 1. (5), (13) bzw. 2. (7) führen muß. Im vorliegenden Fall ist die Entscheidung nahegelegt: Wir definieren die potentielle Energie formal nach Gl. (6), indem wir für die Vergleichszustände setzen

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_i &= \int dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) \\ A'_{ea} &= \sum_n P_n (p_n + \delta p_n). \end{aligned} \right.$$

Da wir Reversibilität des Verformungsvorganges vorausgesetzt haben, kann der Integrationsweg stets über den Gleichgewichtszustand $\epsilon_x, \dots, \gamma_z$ geführt werden. Da das Elastizitätsgesetz, das die σ, τ als Funktionen der ϵ, γ bestimmt, auch für die Vergleichszustände als gültig vorausgesetzt wurde, ist diese Definition mithin eindeutig und führt, in Gl. 1. (13) eingesetzt, in der Nähe des Gleichgewichtszustandes wieder zu Gl. 1. (5) zurück. Der Unterschied besteht darin, daß nach unserer Definition die σ_x, \dots, τ_z bei den Vergleichszuständen nicht mehr die dem Gleichgewichtszustand $\epsilon_x, \dots, \gamma_z$ entsprechenden Größen sind, sondern die nach dem Elastizitätsgesetz den Verschiebungen $\epsilon_x + \delta \epsilon_x, \dots, \gamma_z + \delta \gamma_z$ entsprechenden Größen. Dieser Unterschied aber ist von der zweiten Größenordnung klein, während Gl. 1. (5) nur eine Beziehung zwischen den von erster Ordnung klein werdenden Größen darstellt.

Wählt man die willkürlichen Verschiebungen so, daß die Angriffspunkte der äußeren Kräfte nicht verschoben werden, $\delta p_n = 0$ für alle n , so erhält man aus 1. (5) statt 2. (7) die Gleichung $\delta_v A_i = 0$, also statt eines Satzes vom Minimum der potentiellen Energie einen Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.

3. Das zweite Variationsprinzip.

Unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die im Gleichgewichtszustand tatsächlich eintretenden Verschiebungen ϵ, γ, p unendlich klein sind, kann man sie selbst als virtuelles Verschiebungssystem in Gl. 1. (5) einführen, da sie den übrigen für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ notwendigen Voraussetzungen (Kompatibilität und Erfüllung der Stützbedingungen) sicher genügen. Dann wird 1. (5) unter Berücksichtigung von 1. (10) und 2. (7)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) - \sum_n P_n p_n &= 0 \\ A_{ei} - A_{ea} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung¹⁷⁾ gilt nur im Falle des Gleichgewichts, da Gl. 1. (5), aus der sie gewonnen wurde, die Gleichgewichtsbedingung mathematisch formulierte. Andererseits gilt 1. (5) auch für ein beliebiges anderes, benachbartes System von äußeren Kräften $P_n + \delta P_n$ und das ihm entsprechende Gleichgewichtssystem von Spannungen $\sigma_x + \delta \sigma_x, \dots, \tau_z + \delta \tau_z$:

$$\int dV [(\sigma_x + \delta \sigma_x) \delta \epsilon_x + (\sigma_y + \delta \sigma_y) \delta \epsilon_y + (\sigma_z + \delta \sigma_z) \delta \epsilon_z + (\tau_x + \delta \tau_x) \delta \gamma_x + (\tau_y + \delta \tau_y) \delta \gamma_y + (\tau_z + \delta \tau_z) \delta \gamma_z] - \sum_n (P_n + \delta P_n) \delta p_n = 0.$$

Für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ können wir darin ein beliebiges kompatibles Verschiebungssystem einsetzen, also insbesondere das zu den Spannungen und Kräften $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ gehörige System $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$, sofern wir diese Größen als unendlich klein voraussetzen:

$$\int dV [(\sigma_x + \delta \sigma_x) \epsilon_x + (\sigma_y + \delta \sigma_y) \epsilon_y + (\sigma_z + \delta \sigma_z) \epsilon_z + (\tau_x + \delta \tau_x) \gamma_x + (\tau_y + \delta \tau_y) \gamma_y + (\tau_z + \delta \tau_z) \gamma_z] - \sum_n (P_n + \delta P_n) p_n = 0.$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die Gl. (1), so folgt

$$(2) \quad \int dV (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_x \delta \tau_x + \gamma_y \delta \tau_y + \gamma_z \delta \tau_z) - \sum_n p_n \delta P_n = 0.$$

Damit haben wir das zweite Variationsprinzip der Elastizitätstheorie gewonnen, bei dem nicht die Verschiebungen, sondern die Kräfte (Spannungen) variiert werden. Man könnte es daher als Prinzip der virtuellen Kräfte dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gegenüberstellen. In dieser Gleichung sind die $\delta \sigma, \delta \tau, \delta P$ unendlich kleine, stetig von den Ortskoordinaten abhängige, untereinander im Gleichgewicht befindliche, im übrigen aber völlig willkürlich wählbare Spannungen und Kräfte.

Das zweite Variationsprinzip ist in der Form der Gl. (2) bei beliebigem Elastizitätsgesetz gültig, und zwar auch dann, wenn das Körpermaterial nicht vollkommen elastisch ist. Dagegen ist es im allgemeinen bei endlich großen Deformationen nicht gültig, da wir die unendliche Kleinheit der $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ bei seiner Ableitung voraussetzen mußten.

¹⁷⁾ Dies ist das oben erwähnte, besondere System virtueller Verschiebungen, bei dem die virtuellen Arbeiten formal gleich den Endwertarbeiten werden, und das Engeßer und Domke a. a. O. (Fußnote 15) zu der mit der klassischen Definition Lagranges allgemein nicht zu vereinbarenden Verwendung des Begriffs der virtuellen Arbeit führte.

Wir sehen hier bereits einen entscheidenden Unterschied des zweiten Prinzips gegenüber dem ersten, der zeigt, daß beide trotz der formalen Ähnlichkeit der Gl. 3. (2) und 1. (5) wesentlich verschieden sind.

In dem Sonderfall vollkommener Elastizität ist die in Gl. (2) in der Klammer stehende Größe ein vollständiges Differential. Wir führen in diesem Fall eine neue Größe B_i durch folgende Definition ein:

$$(3) \quad B_i = \int_0^{\sigma, \tau} dV \int (\epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z).$$

B_i hat die Dimension einer Arbeit und wird nach Engeßer als Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte bezeichnet¹⁸⁾. Entsprechend definieren wir die Ergänzungsarbeit der äußeren Kräfte durch

$$(4) \quad B_a = \sum_n \int_0^{P_n} p_n dP_n.$$

Durch partielle Integration gewinnt man aus 1. (6), 1. (10) und 3. (3) sowie aus 1. (8), 1. (7) und 3. (4) ganz allgemein, auch für endliche Deformationen

$$(5) \quad A_i = A_{ei} - B_i$$

$$(6) \quad A_a = A_{ea} - B_a.$$

Nach 1. (11) und 3. (1) ergibt sich daraus $B_i = B_a$. Jedoch gilt diese Gleichung nur dann, wenn 3. (1) gilt, d. h. sie gilt im allgemeinen nur für unendlich kleine Deformationen¹⁸⁾. Führt man (3) in (2) ein, so erhält man für den Fall vollkommener Elastizität und bei beliebigem Elastizitätsgesetz das zweite Variationsprinzip in der Gestalt

$$(7) \quad \delta_k (B_i - A_{ea}) = 0.$$

Dabei bedeutet der Index k , daß jede der Größen in der Klammer nach den in ihr auftretenden Kräften bzw. Spannungen zu variieren ist, also die Ergänzungsarbeit nach den σ, τ , die Endwertarbeit nach den äußeren Kräften P_n . Gl. (7) entspricht formal Gl. 1. (13). Dennoch ist die Bedeutung der beiden Gleichungen, wie aus ihrer Herleitung folgt, eine ganz verschiedene. 1. (13) war die Bedingung dafür, daß die Größe $(A_i - A_{ea})$ ein Minimum wurde. 3. (7) dagegen ist die Bedingung dafür, daß die Größe $(B_i - A_{ea})$ ein Maximum wird. Am einfachsten überzeugt man sich davon, wenn man 3. (2) unmittelbar durch die vollständige Variation der Größen A_{ei} und A_{ea} aus 1. (5) ableitet. Die vollständigen Variationen von A_{ei} und A_{ea} heben sich dann nach 3. (1) heraus, wenn man die Bedingung stellt, daß nur Gleichgewichtssysteme von Kräften betrachtet werden sollen. Denn dann ist $(A_{ei} - A_{ea})$ beständig gleich Null, und folglich verschwindet auch die Variation dieses Ausdrucks. Man erhält als Ergebnis, daß $(-B_i + A_{ea})$, nach den Kräften (Spannungen) variiert, ein Minimum werden muß, also $(B_i - A_{ea})$ ein Maximum.

Ferner ist der Ausdruck $(B_i - A_{ea})$ keineswegs gleich der potentiellen Energie des Gesamtsystems. Das zweite Variationsprinzip läßt sich also nicht wie das erste einem allgemeinen, von der Erfahrung bestätigten Naturgesetz unterordnen. Es ist eben nichts als eine mathematische Umformung des ersten Prinzips, die obendrein nur unter stark einschränkenden Bedingungen, nämlich unter der Voraussetzung unendlich kleiner Verformungen des Körpers gültig ist. Es ist vor allem ganz unsinnig, bei dem zweiten Prinzip, das in der Praxis viel häufiger angewendet wird als das erste, von einem „Minimum der potentiellen Energie“ zu sprechen, da einmal der zu variierte Ausdruck nicht die potentielle Energie ist, und zweitens nicht sein Minimum, sondern sein Maximum gesucht wird.

Man sieht also, daß und warum trotz der formalen Analogie zwischen Gl. 3. (2) u. 1. (5) bzw. zwischen 3. (7) u. 1. (13) durchaus keine Analogie zwischen dem Gültigkeitsbereich und der Deutung dieser Gleichungen besteht¹⁹⁾. Das drückt sich insbesondere darin aus, daß das zweite Prinzip keinen Übergang zu Gl. 2. (7) oder einer ihr analogen Gleichung von physikalischer Deutbarkeit gestattet. Das drückt sich weiter darin aus, daß man das zweite Prinzip nicht in einer dem Abschnitt 1 entsprechenden Weise unmittelbar aus physikalischen Grundgesetzen ableiten kann. Es ist eine Rechenregel ohne physikalische Deutbarkeit.

Daran ändert sich auch nichts durch die Tatsache, daß in dem in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, $B_i = A_i = \frac{1}{2} \cdot A_{ei}$ wird. Man macht dann zwar rechnerisch keinen Fehler, wenn man in 3. (7) die Formänderungsarbeit an die Stelle

¹⁸⁾ Engeßer, a. a. O. (Fußnote 13), S. 743, unterscheidet noch nicht zwischen der Ergänzungsarbeit der inneren und der der äußeren Kräfte, da er seine Betrachtungen auf unendlich kleine Verformungen beschränkt und in diesem Fall jene beiden Größen einander gleich werden. — Vgl. auch Domke, a. a. O. (Fußnote 5), S. 177.

¹⁹⁾ Kammüller, a. a. O. (Fußnote 13), S. 271, Entgegnung, Ziffer 4.

der Ergänzungsarbeit setzt und dadurch die Analogie zu Gl. 1. (13) vollständig macht. Aber man verfälscht den Sinn dieser Gleichung, wenn man den so gewonnenen Ausdruck als „potentielle Energie“ bezeichnet. Vor allem ist es einfach falsch, wenn man behauptet, daß man dann mit Gl. (7) das Minimum dieser „potentiellen Energie“ suche. Denn (7) bestimmt unter allen Umständen, ob nun das Hookesche Gesetz gilt oder nicht, das Maximum des in der Klammer stehenden Ausdrucks. Daß auch diese Verwechslung rechnerisch zu keinem Fehler führt, liegt lediglich daran, daß die notwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums mathematisch die gleiche ist wie die für das Eintreten eines Minimums, nämlich das Verschwinden der ersten Variation. Beide Fälle unterscheiden sich nur durch die für ihr Eintreten hinreichenden Bedingungen, nämlich das Vorzeichen der zweiten Variation. Und das pflegt der praktische Rechner wohl niemals zu prüfen, mit Recht, da diese Frage im allgemeinen praktisch keine entscheidende Bedeutung hat.

Ich möchte aber auch an dieser Stelle (wie schon a. a. O.)²⁰⁾ betonen, daß es mir pädagogisch bedenklich und mit den Grundsätzen einer Wissenschaft auf die Dauer nicht vereinbar erscheint, Sätze, deren Voraussetzungen und deren Grenzen man genau kennt, in einer Form auszusprechen, die zwar in ihrem heute wichtigsten Geltungsbereich richtige Ergebnisse liefert, in einem anderen Teil ihres Geltungsbereiches aber zu falschen Ergebnissen führt und in jedem Fall den wirklichen Inhalt des betreffenden Satzes nicht wiedergibt.

Es bleibt noch zu untersuchen, welcher Art die Vergleichszustände sind, unter denen Gl. (7) den einzigen wirklich eintretenden Zustand aussondert. Auch in diesem Fall sind die Vergleichszustände aus den in Abschnitt 2 angeführten Gründen unter den Bedingungen des Systems physikalisch nicht möglich. Entsprechend Gl. 2. (8) definieren wir die Ergänzungsarbeit und die Endwertarbeit für die Vergleichszustände durch

$$(8) \quad \begin{cases} B_i' = \int_0^{\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau} dV \int (\epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z) \\ A_{ea}' = \sum_n (P_n + \delta P_n) p_n \end{cases}$$

Damit setzen wir das Elastizitätsgesetz, das die ϵ, γ als Funktionen der σ, τ bestimmt, auch für die Vergleichszustände als gültig voraus. Ferner hatten wir bei der Ableitung des zweiten Variationsprinzips vorausgesetzt, daß auch die variierten Spannungen und äußeren Kräfte untereinander im Gleichgewicht seien. Wir müssen also notwendig für die Vergleichszustände die Bedingung der Kompatibilität, der Verträglichkeit mit den geometrischen Bedingungen des Systems, aufheben. D. h. wir müssen an einer oder mehreren Stellen, längs einer oder mehrerer Flächen den Körperzusammenhang gelöst oder die Stützbedingungen aufgehoben denken. Das Ergebnis ist also:

Bei der Anwendung des zweiten Variationsprinzips suchen wir unter allen Gleichgewichtssystemen von Kräften und Spannungen das einzige, dem nach dem geltenden Elastizitätsgesetz ein kompatibler, d. h. mit dem Körperzusammenhang und den Stützbedingungen verträglicher Verschiebungszustand entspricht.

Das zweite Variationsprinzip hat zwar einen engeren Geltungsbereich als das erste. In seinem Geltungsbereich aber ist es diesem im allgemeinen überlegen. Denn die beim zweiten Prinzip geforderte Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte ist bei verwickelten Systemen im allgemeinen leichter mathematisch zu formulieren als die beim ersten Prinzip geforderte Bedingung der Kompatibilität der Verschiebungen. Ein besonders wichtiges Anwendungsgebiet des zweiten Prinzips ist die Berechnung statisch unbestimmter Größen. Man kann sie entweder durch unmittelbare Anwendung des zweiten Prinzips in der Form der Gl. 3. (2) oder 3. (7) berechnen oder mit Hilfe des Satzes von Castigliano, der sich aufs einfachste aus dem zweiten Prinzip ableiten läßt.

Der Verformungszustand ist von den äußeren Kräften abhängig, zu denen wir, wie bemerkt, auch die Stützkräfte zählen. Man kann also die Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte B_i als Funktion der äußeren Kräfte darstellen: $B_i = B_i(P_n)$. Durch Variation dieser Funktion nach den Kräften erhält man

$$(9) \quad \delta_k B_i = \sum_n \frac{\partial B_i}{\partial P_n} \cdot \delta P_n.$$

Andererseits folgt aus 3. (2) mit 3. (3)

$$(10) \quad \delta_k B_i = \sum_n p_n \cdot \delta P_n.$$

Setzt man (10) in (9) ein, so folgt

$$(11) \quad \frac{\partial B_i}{\partial P_n} = p_n.$$

²⁰⁾ Schleusner, a. a. O. (Fußnote 12), S. 254. — Desgl. a. a. O. (Fußnote 13), S. 271.

Wir wählen nunmehr die Variationen der Kräfte so, daß die gegebenen äußeren Lasten nicht variiert werden. Für diese Größen wird also in (9) und (10) $\delta P_n = 0$. Dagegen denken wir uns an den Angriffspunkten oder -flächen statisch unbestimmter Kräfte den Körperzusammenhang gelöst und die statisch Unbestimmten (die wir in üblicher Weise durch X_n bezeichnen) an diesen Punkten oder Flächen als äußere Kräfte wirkend. Dann geht Gl. (11) über in

$$(12) \quad \frac{\partial B_i}{\partial X_n} = x_n,$$

wenn x_n den Verschiebungsweg der Kraft X_n in der Krafrichtung bedeutet. Dabei ist gemäß den Voraussetzungen des zweiten Prinzips die funktionale Abhängigkeit der Ergänzungsarbeit B_i von den statisch Unbestimmten X_n folgendermaßen zu verstehen: Ist der Körperzusammenhang in der oben beschriebenen Weise gelöst, so wählt man für die X_n ein willkürliches System von Kräften, das mit den gegebenen äußeren Kräften P_n im Gleichgewicht ist. Zu diesem erweiterten System von äußeren Kräften P_n , X_n bestimmt man das zugehörige Gleichgewichtssystem von Spannungen σ_x, \dots, τ_z . Sodann ist B_i gemäß dem geltenden Elastizitätsgesetz durch Gl. 3. (3) eindeutig als Funktion der X_n bestimmt und damit auch der Sinn der Gl. (12) eindeutig festgelegt. Die Bedingung für die Kompatibilität ist, daß alle an dem Körper angebrachten Schnitte sich schließen, daß also alle Verschiebungswege x_n verschwinden. Dann wird (12)

$$(13) \quad \frac{\partial B_i}{\partial X_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Das Gleichungssystem (13) kann man wieder als Bedingung für das Eintreten eines Extremums deuten, und zwar kann man zeigen, daß es sich um ein Minimum handelt. Man kann also den Inhalt der Gl. (13), den Satz von Castigliano, so aussprechen:

Die statisch unbestimmten Größen nehmen tatsächlich diejenigen Werte an, die die Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte zu einem Minimum machen.

Dabei ist B_i in dem oben beschriebenen Sinn als Funktion der X_n aufzufassen. Der Satz von Castigliano gilt in dieser Form wie das Variationsprinzip, aus dem er abgeleitet wurde, nur für unendlich kleine Verformungen und nur unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität des Körpermaterials, aber bei beliebigem Elastizitätsgesetz.

4. Eine dritte Form des Variationsprinzips: Die Arbeitsgleichung.

Wir hatten darauf hingewiesen, daß das Prinzip der virtuellen Verrückungen in seiner ursprünglichen, in den Abschnitten 1 und 2 behandelten Gestalt — Variation nach den Verschiebungen — nicht nur bei beliebigem Elastizitätsgesetz, sondern auch bei endlich großen Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ gilt. In der praktischen Statik sind nun häufig — aber durchaus nicht immer — die folgenden Voraussetzungen wenigstens näherungsweise erfüllt:

1. Die Verschiebungsgrößen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ sind als verschwindend klein im Verhältnis zu den Körperabmessungen anzusehen.
2. Die Dehnungen und Gleitungen ϵ, γ sind den Spannungen σ, τ proportional (Hookesches Elastizitätsgesetz).

Sind diese beiden Voraussetzungen erfüllt, dann gilt nicht notwendig, aber in der Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle:

3. Auch die Verschiebungswege p_n der äußeren Kräfte P_n sind der Größe dieser Kräfte proportional.

Daß die dritte Voraussetzung nicht notwendig aus den beiden ersten folgt, kann man leicht durch Beispiele belegen. Sie gilt z. B. nicht für den an den Enden gelenkig fest gelagerten, geraden Stab mit Mittelgelenk, der im Mittelgelenk quer zur Stabachse belastet ist. Sie gilt auch nicht für den axial gedrückten geraden Stab nach Überschreiten der Knickgrenze²¹⁾.

Sind alle drei Voraussetzungen gleichzeitig erfüllt, dann (und im allgemeinen nur dann) darf man für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ in 1. (5) formal endliche Größen einsetzen, indem man sich einen gemeinsamen, unendlich kleinen Proportionalitätsfaktor aus den Gleichungen herausgehoben denkt.

²¹⁾ Vielleicht hat diese Tatsache Pöschl zu dem eigenartigen Schluß geführt, daß man für Knickprobleme einer besonderen Form des Variationsprinzips bedürfe (vgl. Fußnote 8). Für Knickprobleme gilt freilich nicht die besondere, viel gebrauchte Form der Variationsansätze, die wir abzuleiten im Begriff sind, wohl aber die allgemein gültige erste Form des Prinzips [1. (5) bzw. 1. (13) oder 2. (7)], aus der alle anderen Formen erst durch einschränkende Sonderannahmen abgeleitet sind. Beschränkt man sich auf unendlich kleine Durchbiegungen, so gilt für Knickprobleme auch noch das zweite Variationsprinzip [3. (2) bzw. 3. (7)].

Ersetzt man in diesem Sinne in 1. (5) die Bezeichnungen $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ durch die Bezeichnungen ϵ, γ, p , so erhält man die Gleichung

$$(1) \quad \int dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) - \sum_n P_n p_n = 0.$$

Das ist formal dieselbe Gleichung wie 3. (1). Aber die Bedeutung der Größen ist in beiden Gleichungen wesentlich verschieden. Die σ, τ, P bedeuten in beiden Gleichungen die im Gleichgewichtszustand tatsächlich vorhandenen Spannungen und Kräfte. Die ϵ, γ, p aber bedeuten in 3. (1) die nach dem geltenden Elastizitätsgesetz den σ, τ, P entsprechenden, also die wirklich eintretenden Verschiebungsgrößen, in 4. (1) dagegen ein willkürliches, kompatibles System von Verschiebungen, das zu den wirklichen Spannungen und Kräften $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ in keiner Beziehung zu stehen braucht.

Ist die erste der drei obenerwähnten Bedingungen erfüllt, so ist auch das zweite Variationsprinzip anwendbar. Sind außerdem auch die beiden anderen Bedingungen erfüllt, so kann man in 3. (2) für die $\delta \sigma, \delta \tau, \delta P$ formal endliche Größen einsetzen, indem man sich einen gemeinsamen, unendlich kleinen Proportionalitätsfaktor aus der Gleichung herausgehoben denkt. Ersetzt man demgemäß in 3. (2) die Bezeichnungen $\delta \sigma, \delta \tau, \delta P$ durch die Bezeichnungen σ, τ, P , so nimmt diese Gleichung formal dieselbe Gestalt wie 4. (1) an. Aber die Bedeutung dieser Größen ist in diesem Falle wiederum eine ganz andere als vorher. Denn jetzt bedeuten die ϵ, γ, p die im Gleichgewichtszustand wirklich eintretenden Verschiebungsgrößen, die σ, τ, P dagegen ein beliebiges Gleichgewichtssystem von Spannungen und Kräften, das zu den wirklich eintretenden Verschiebungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ in keiner Beziehung zu stehen braucht.

Diese dritte Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen ist die in der praktischen Statik am häufigsten angewendete Form²²⁾. Müller-Breslau hat für sie die Bezeichnung „Arbeitsgleichung“ des untersuchten elastischen Systems eingeführt²³⁾. Diese dritte Form ist, wie seine Ableitung zeigt, kein selbständiges Variationsprinzip, sondern je nachdem, ob man die wirklichen Spannungen und Kräfte mit gedachten Verschiebungen verbindet, oder ob man die wirklichen Verschiebungen mit gedachten Spannungen und Kräften verbindet, eine modifizierte Form des ersten oder des zweiten Variationsprinzips mit stark eingeschränktem Geltungsbereich (unendlich kleine Verformungen, Hookesches Gesetz, Proportionalität zwischen Kraft und Verschiebung auch bei den äußeren Kräften). Man kann den Inhalt der Gl. (1) in seiner doppelten Bedeutung so aussprechen:

Wir suchen entweder unter allen kompatiblen Verschiebungssystemen das einzige, das nach dem Hookeschen Gesetz dem im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen System von Spannungen und Kräften entspricht; oder wir suchen unter allen Gleichgewichtssystemen von Kräften und Spannungen das einzige, das nach dem Hookeschen Gesetz dem im Gleichgewichtszustand wirklich eintretenden System von Verschiebungen entspricht.

Die Nützlichkeit dieser einfachen Zusammenfassung der beiden Variationsprinzipien in ein wenig modifizierter Form unter eine einzige Gleichung steht außer Frage. Aber man darf nicht vergessen, daß ihr Anwendungsbereich gegenüber dem Geltungsbereich der beiden Variationsprinzipien erheblich beschränkt ist, und daß die Zusammenfassung eine rein formale ist. In dieser Form ist das Prinzip einer einheitlichen, anschaulichen Deutung überhaupt nicht fähig. Es sagt inhaltlich ganz verschiedene Dinge aus, je nachdem man es im Sinne des ersten Prinzips (wirkliche Spannungen und Kräfte, gedachte Verschiebungen) oder im Sinne des zweiten Prinzips (wirkliche Verschiebungen, gedachte Spannungen und Kräfte) anwendet.

Praktisch verwertbar ist die Arbeitsgleichung nur dann, wenn es sich um die Bestimmung einer endlichen Anzahl unbekannter Größen (etwa der Verschiebungen einzelner Punkte oder der Größe einzelner statisch unbestimmter Auflagerkräfte und Einspannmomente) handelt. Sobald es sich um die Bestimmung unbekannter Funktionen (etwa von Biegelinien oder von Verformungen zwei- oder dreidimensionaler Gebilde) handelt, oder sobald eine der obengenannten Voraussetzungen nicht mehr zutrifft, wird die Arbeitsgleichung praktisch unverwertbar. Man muß dann auf die Variationsansätze 3. (7) bzw. 1. (13) zurückgreifen.

5. Der Begriff der virtuellen Arbeit und seine Beziehung zu den Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie.

Es ist der Vorschlag gemacht worden, die beiden Variationsprinzipien, das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das Prinzip der virtuellen Kräfte, unter dem Oberbegriff eines „Prinzips der virtuellen Arbeiten“

²²⁾ Von dieser Form des Prinzips geht auch Kamüller aus. A. a. O. (Fußnote 11), S. 363, Gl. (1)

²³⁾ Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, S. 23, Gl. (6). Leipzig 1904.

zusammenzufassen²⁴⁾. Ich habe bereits a. a. O.²⁵⁾ bemerkt, daß mir dieser Vorschlag nicht glücklich erscheint und will das hier etwas ausführlicher begründen.

Offenbar ist dieser Vorschlag durch die dritte Form des Prinzips, die Arbeitsgleichung 4. (1), angeregt worden, in der die grundsätzliche Verschiedenheit der beiden Variationsprinzipien formal verwischt erscheint. Um jeden Irrtum zu vermeiden, werden wir also auch bei der Betrachtung der Prinzipien in der Gestalt der Arbeitsgleichung stets auf die explizite Form des ersten bzw. des zweiten Variationsprinzips zurückgreifen müssen, je nachdem, in welchem Sinne die Arbeitsgleichung jeweils angewendet wird.

Der erste Einwand gegen den erwähnten Vorschlag gründet sich auf die verschiedenen Geltungsbereiche der beiden Prinzipien und der Arbeitsgleichung. Das erste Prinzip gilt allgemein. Das zweite gilt nur für unendlich kleine Verformungen, d. h. nur für einen Teil des Geltungsbereichs des ersten Prinzips. Die beiden Prinzipien sind also nicht einander gleichgeordnet, sondern das zweite ist dem ersten untergeordnet, es ist nur eine an besondere Voraussetzungen geknüpfte Folgerung aus dem ersten Prinzip. Die Arbeitsgleichung endlich gilt nur für einen Teil des Geltungsbereichs des zweiten Prinzips, ist also beiden Prinzipien untergeordnet. Es ist daher unmöglich, auf dem Geltungsbereich der Arbeitsgleichung einen neuen, beide Prinzipien umfassenden theoretischen Oberbegriff aufzubauen, da dieser keines der beiden Prinzipien voll umschließen würde. Dem Bedürfnis der Praxis aber nach einer möglichst einfachen Zusammenfassung der beiden Prinzipien in einer Form, die für die große Mehrzahl der Fälle des täglichen Bedarfs ausreicht, dürfte Gl. 4. (1) mit dem ihr von Müller-Breslau verliehenen schlichten Namen „Arbeitsgleichung“ vollauf genügen.

Richtete sich der erste Einwand gegen die Grundlage des vorgeschlagenen neuen Oberbegriffs, so richtet sich der zweite gegen seine Bezeichnung. Unter virtueller Arbeit versteht man seit Lagrange diejenige Arbeit, die die im Gleichgewichtszustand tatsächlich vorhandenen Kräfte oder Spannungen eines Systems (in unserem Fall also die Größen $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$) bei einer gedachten kleinen Verrückung aus der Gleichgewichtslage leisten würden (bei dem vor-

liegenden Problem also [vgl. 1. (9) u. 1. (12)] die Größen $\int dV(\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_z \delta \gamma_z)$ und $\sum_n P_n \delta p_n$). Wir haben in dieser Darstellung eine ganze Reihe anderer Größen kennengelernt, die ebenfalls die Dimension einer Arbeit haben und ebenfalls gedachte Größen, also gedachte Arbeiten sind $(\int dV(\sigma_x \epsilon_x + \dots), \sum_n P_n p_n, \int dV(\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots), \sum_n p_n \delta P_n, \int dV \int (\epsilon_x d\sigma_x + \dots))$. Wollte man auch diese Größen als „virtuelle Arbeiten“ bezeichnen²⁶⁾, so könnte man nur eins erreichen: einen seit 150 Jahren eindeutig und klar umrissenen Begriff zu verwischen und dadurch Verwirrung anzurichten.

Die Gleichungen des ersten Prinzips, 1. (5) u. 1. (13), und ebenso die Arbeitsgleichung 4. (1), wenn man sie im Sinne des ersten Prinzips anwendet (wirkliche Spannungen und Kräfte, gedachte Verschiebungen), sind also Gleichungen zwischen virtuellen Arbeiten des untersuchten Systems. Nicht aber die Gleichungen des zweiten Prinzips, 3. (2) u. 3. (7), auch nicht die Arbeitsgleichung 4. (1), wenn man sie im Sinne des zweiten Prinzips anwendet (wirkliche Verschiebungen, gedachte Spannungen und Kräfte)!

Die in der Gleichung des zweiten Prinzips [vgl. 3. (2)] auftretenden Größen $\int dV(\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots)$ und $\sum_n p_n \delta P_n$ haben zwar die Dimension einer Arbeit und sind gedachte Größen. Aber sie sind nicht gedachte Arbeiten der im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen Spannungen und Kräfte.

Man kann natürlich auch die Größen des zweiten Prinzips als virtuelle Arbeiten deuten, wenn man durchaus will. Da beim zweiten Prinzip die tatsächlich eintretenden Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ als unendlich klein vorausgesetzt werden mußten, kann man sie — wie wir es bei der Ableitung der Arbeitsgleichung taten — als besonderes virtuelles Verschiebungssystem ansehen. Bei dieser Annahme sind auch die Größen $\int dV(\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots), \sum_n p_n \delta P_n$ virtuelle Arbeiten im klassischen Sinne des Begriffs. Aber sie sind nicht virtuelle Arbeiten des im Gleich-

gewicht tatsächlich vorhandenen Kräftesystems $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$, sondern eines vollständig anderen Kräftesystems $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_z, \delta P_n$. Dieses Kräftesystem ist nicht nur von dem tatsächlich im Gleichgewicht vorhandenen verschieden, es ist ihm nicht einmal benachbart. Denn auch wenn wir die Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ unendlich klein voraussetzen, können — wie bekannt — die zugehörigen Spannungen und Kräfte $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ durchaus endliche Beträge haben. (Man braucht nur beim einachsigen Spannungszustand an die dem Hookeschen Gesetz entsprechende Beziehung $\sigma = \epsilon \cdot E$ und an die erhebliche Größe von E bei den gebräuchlichen Maßeinheiten zu denken.) Dagegen müßten die Spannungen und Kräfte $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_z, \delta P_n$ als unendlich klein vorausgesetzt werden. Will man also schon die Größen des zweiten Prinzips als virtuelle Arbeiten deuten, dann sind sie jedenfalls nicht die virtuellen Arbeiten der im Gleichgewichtszustand des untersuchten Systems wirklich vorhandenen Kräfte, sondern eines von diesen völlig, selbst größenordnungsmäßig verschiedenen Kräftesystems. Auch wenn man den Übergang vom zweiten Prinzip zur Arbeitsgleichung 4. (1) vollzieht, ändert sich daran nichts. Eigentlich muß man sich ja bei Anwendung der Arbeitsgleichung im Sinne des zweiten Prinzips alle Spannungen und Kräfte mit einem unendlich kleinen, gemeinsamen Proportionalitätsfaktor multipliziert denken. Dann bleiben die bisherigen Überlegungen wörtlich erhalten. Denkt man sich aber den Proportionalitätsfaktor herausgehoben, so werden die — nunmehr formal endlich großen — erdachten Spannungen und Kräfte im allgemeinen ebenfalls dem tatsächlichen Kräftesystem keineswegs benachbart sein²⁷⁾.

Will man also das zweite Prinzip als „Prinzip der virtuellen Arbeiten“ im klassischen Sinne deuten, so müßte man es nicht auf die im Gleichgewicht tatsächlich vorhandenen Kräfte anwenden, sondern auf irgendein beliebiges, ihnen nicht einmal benachbartes Gleichgewichtssystem von Kräften, die bei dieser Deutung den Charakter der Variation der gegebenen tatsächlichen Kräfte verlieren.

Während man also beim ersten Prinzip Gleichungen zwischen den virtuellen Arbeiten des untersuchten Systems erhält, ergeben sich bei dem zweiten Prinzip Gleichungen zwischen den virtuellen Arbeiten virtueller Ersatzsysteme, die von dem wirklichen System grundsätzlich verschieden und lediglich so ausgewählt sind, daß die mathematischen Operationen die gesuchten Ergebnisse für das wirkliche System liefern.

Es scheint mir keinen Gewinn an theoretischer Klarheit zu bedeuten, auf solcher Grundlage — der einzigen, auf der man den Begriff der virtuellen Arbeit für die Größen des zweiten Prinzips aufrechterhalten könnte — einen neuen theoretischen Begriff aufzubauen.

Übrigens geriete man bei dieser Deutung der Gl. 3. (2) auch in Widerspruch mit der Deutung als Extremalbedingung. Daß bei Gl. 3. (2) und daher auch bei der Arbeitsgleichung 4. (1), wenn man sie im Sinne des zweiten Prinzips anwendet (wirkliche Verschiebungen, gedachte Spannungen und Kräfte), nicht mehr von einem Minimum der potentiellen Energie die Rede sein kann, weil erstens ein Maximum und zweitens nicht das der potentiellen Energie gesucht wird, wurde bereits erwähnt. Deutet man aber Gl. 3. (2) als Gleichung zwischen virtuellen Arbeiten, so hat sie weder mit einem Minimum noch mit einem Maximum, weder der potentiellen Energie noch irgendeiner anderen Größe mehr etwas zu tun. Denn die Deutung der Gl. 3. (2) als Extremalbedingung ist mathematisch durch 3. (7) ausgedrückt. In dieser Gleichung aber sind B_1 und $A_e a$ nicht die Ergänzungsarbeit bzw. Endwertarbeit des willkürlichen Kräftesystems $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_z, \delta P_n$, sondern des im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen Kräftesystems $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ bzw. der ihm unmittelbar benachbarten Kräftesysteme $\sigma_x + \delta \sigma_x, \dots, \tau_z + \delta \tau_z, P_n + \delta P_n$.

Es gibt also nur drei Möglichkeiten: Entweder man bezieht Gl. 3. (2) und entsprechend Gl. 4. (1) bei Anwendung im Sinne des zweiten Prinzips bei der einen Deutung auf das wirkliche, zu untersuchende System, bei der anderen auf virtuelle Ersatzsysteme, die mit dem wirklichen System nichts mehr zu tun haben. Daß dies zur Klärung der theoretischen Begriffe beitragen sollte, kann ich mir nicht vorstellen. — Oder man gibt die anschauliche und einprägsame Deutung als Extremalbedingung preis. Dazu müßte man wohl schwerer wiegende Gründe haben als die Einführung eines neuen theoretischen Begriffs, der auch dann noch — gemäß dem ersten Einwand — unhaltbar erscheint. — Oder endlich, man verzichtet auf die künstliche und gesuchte Deutung der Größen des zweiten Prinzips als virtuelle Arbeiten und damit auch auf die Zusammenfassung beider Prinzipien unter der Bezeichnung eines Prinzips der virtuellen Arbeiten. Das Ergebnis ist also:

²⁴⁾ Kammüller, a. a. O. (Fußnote 13), S. 271, Zuschrift, Absatz 5: „Statt vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen würde man viel richtiger vom Prinzip der virtuellen Arbeiten sprechen, das dann auch vom theoretischen Standpunkt aus sowohl die Variation nach den Formänderungen wie auch nach den Kräften umfaßt.“ — Vgl. auch a. a. O., S. 272, Entgegnung, letzter Satz.

²⁵⁾ Schleusner, a. a. O. (Fußnote 13), S. 271, Erwiderung, letzter Absatz.

²⁶⁾ Kammüller, a. a. O. (Fußnote 13), S. 272, letzter Satz.

²⁷⁾ Hat man ein einfach statisch unbestimmtes System, so pflegt man als virtuelles Kräftesystem das System $P_1 = 0, P_2 = 0, \dots, X = -1$ und das mit diesen äußeren Kräften im Gleichgewicht stehende System von Spannungen zu wählen. Es ist offensichtlich, daß dieses System dem tatsächlich im Gleichgewicht vorhandenen Kräftesystem $P_1 = P_1, P_2 = P_2, \dots, X = X$ keineswegs benachbart ist.

Es gibt nur ein Prinzip, das alle Erscheinungen umfaßt: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen, im Falle vollkommener Elastizität deutbar als Bedingung für das Minimum der potentiellen Energie. Aus ihm läßt sich unter stark einschränkenden Voraussetzungen ein zweites Prinzip ableiten: Das Prinzip der virtuellen Kräfte, im Falle vollkommener Elastizität deutbar als Bedingung für das Maximum des Ausdrucks $(B_i - A_{e,a})$. Beide Prinzipien lassen sich unter nochmaliger erheblicher Einschränkung des Geltungsbereichs formal in eine einzige Gleichung zusammenfassen, die Arbeitsgleichung, die einer einheitlichen Deutung

nicht fähig ist, sondern je nach ihrer Anwendung im Sinne des ersten oder des zweiten Prinzips verschieden zu deuten ist. Für die praktische Anwendung ist die Arbeitsgleichung heute noch die wichtigste Gleichung von allen. Wer aber der theoretischen Klärung der Variationsprinzipien dienen will, kann sich als Grundlage kein ungeeignetes Objekt als die Arbeitsgleichung aussuchen. Er muß stets auf die Grundform der beiden Prinzipien und letzten Endes immer auf das grundlegende erste Prinzip, das Prinzip der virtuellen Verrückungen, zurückgreifen.

Zuschriften an die Schriftleitung

zum Aufsatz: Über Forschungsarbeiten zur Entwicklung von Schweißelektroden, insbesondere für den Stahlbau, von Dr.-Ing. Zeyen, Stahlbau 1938, S. 41 u. 59.

I.

In dem obengenannten Aufsatz berichtet Herr Dr.-Ing. Zeyen über Entwicklungsarbeiten der Firma Krupp und kommt hierbei auf die Baustellenarbeiten an der Strelasundbrücke im Zuge des Rügendamms (zehn Öffnungen von je 54 m Stützweite) zu sprechen, von der fünf Öffnungen durch die Firma Krupp, die anderen fünf durch die Brückenbauanstalt Dörnen erstellt worden sind. Die beiden Firmen haben die Baustellenarbeiten in grundsätzlich verschiedener Weise geleistet. Im vorliegenden Falle ist wesentlich, daß die Firma Krupp im Werk Hauptträgerstücke bis zu einer Länge von etwa 40 m fertig geschweißt hat. Aus diesen hat sie auf der Baustelle in Wälzringen zunächst zwei Stücke von je etwa 135 m Länge unter Vermeidung von Steh- und Überkopfnähten zusammengeschweißt. Die beiden Hälften hat sie dann senkrecht voreinander gestellt und den letzten Stoß (kenntlich an aufgebolzten Stegblechlaschen) in dieser Lage geschweißt, wobei naturgemäß nicht alle Nähte in waagerechter Lage von oben her geschweißt werden konnten. Dörnen hat die Hauptträger, wie bei der Brücke über den Ziegelgraben, in Längen bis zu rd. 62 m von Derne nach Stralsund geschafft, auf die Pfeiler gestellt und die Universalstöße in dieser Lage, also mit Steh- und Überkopfnähten geschweißt.

Zeyen vergleicht nun in einer Zusammenstellung, die er einer Veröffentlichung von Brückner in Bautechn. 1937, S. 336, entnommen hat, die Anzahl der Baustellennähte, die bei beiden Arbeitsvorgängen erneuert worden sind. Der Prozentsatz dieser Nähte beträgt bei Krupp 10% und 3,1%, bei Dörnen 50% und 25%. Diesen großen Unterschied führt Zeyen darauf zurück, daß Krupp die Nähte in Wälzringen alle von oben geschweißt hat, während Dörnen den größten Teil seiner Nähte als Steh- bzw. Überkopfnähte hat schweißen müssen. Dies steht im Widerspruch zu der Veröffentlichung Brückner, die Zeyen anführt. Brückner schreibt ausdrücklich, daß die Ursache die Verwendung von dünnen Elektroden ist, wie die damaligen Vorschriften sie verlangten. Denn nach Verwendung dickerer Elektroden, fährt Brückner fort, seien die Nähte durchaus einwandfrei gewesen. Diese schädliche Wirkung zu dünner Elektroden in den großen Querschnitten der Strelasundbrücke ist, wie Brückner schreibt, zu spät erkannt worden, weil es Dörnen nicht möglich war, früher eine seiner Röntgenanlagen für den Strelasund frei zu bekommen.

Zeyen bezeichnet sodann die ausgewechselten Nähte ohne Einschränkung als nicht einwandfrei. Tatsächlich ist aber nur ein kleiner Bruchteil der erneuerten Nähte nicht einwandfrei gewesen. Es wurden nämlich zur Ausbesserung der Fehlstellen, um Schrumpfspannungen aus äußeren Einspannungen möglichst zu vermeiden, einwandfreie Nähte mitgelöst. Wenn z. B. in einem Universalstoß eine fehlerhafte Stelle war, so wurde ohne Rücksicht auf den Umfang des Fehlers der ganze Stoß gelöst. In einem Falle wurde sogar der gegenüberliegende Universalstoß in der anderen Hauptträgerreihe vollständig mitgelöst, weil die beiden Hauptträger durch die Fahrbahn und die Verbände bereits miteinander verbunden waren. Die von Zeyen nach Brückner mit 50 bzw. 25 eingesetzten Prozentsätze für nicht einwandfreie Nähte enthalten aber diese einwandfreien Nähte. Ich habe bereits Gelegenheit gehabt, Herrn Zeyen auf diese irreführenden Darstellungen unmittelbar nach seinem Vortrag über den anstehenden Gegenstand vor dem Deutschen Ausschuss für Stahlbau in München am 10. Dezember 1937 aufmerksam zu machen.

Im Gegensatz zu der von Zeyen gebrachten Ansicht schreibt auch Reichsbahnrat J. Graf, der frühere Vorstand des Reichsbahn-Neubauamtes Rügendamm, im Ztrbl. d. Bauv. 1938, Heft 17, vom 27. April 1938:

„Die Röntgenaufnahmen der Nähte zeigten im allgemeinen gute Ergebnisse. Nur in einzelnen Fällen, wo anfangs mit zu dünner Elektrode geschweißt wurde, wurden Schlackenstellen festgestellt, die sich jedoch durch Auskreuzen und nochmaliges Verschweißen der Nähte restlos beseitigen ließen, wie die Nachröntung zeigte. Bei den übrigen Stößen, die mit stärkeren Elektroden geschweißt wurden, traten diese Mängel nicht mehr auf.“

Zeyen schreibt in seiner Veröffentlichung, daß die Schweißung in Wälzringen umständlich und teuer ist. Dies trifft zu, wenn man wie Krupp bei der Strelasundbrücke arbeitet. Man muß dann die Hauptträger zweimal in Wälzringe nehmen. Die Träger sind in der Werkstatt in Wälzringen zu schweißen, und auf der Baustelle sind die Wälzringe nochmals und nur für das Schweißen der Universalstöße nötig. In solchen Fällen empfiehlt es sich, für eine wirtschaftliche Herstellung die gesamten Schweißarbeiten auf die Baustelle zu verlegen.

Man ist dann in der Lage — schweißtechnisch ein sehr großer Vorteil! — Universalstöße zu vermeiden. Ich habe dieses Verfahren in mehreren Fällen erprobt und mich von seiner Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit überzeugen können und beziehe mich auf meine Ausführungen vor dem Internationalen Brückenkongreß Oktober 1936 in Berlin. Schließlich hat Krupp bei seinem Arbeitsverfahren, wie bereits oben erwähnt, den Gruppenstoß zwischen den beiden Hälften seines Anteils ja doch stehend schweißen müssen.

Für den Arbeitsvorgang Dörnen spricht heute weiter, daß jetzt — nach mehr als zwei Jahren — mit weiter entwickelten Mantelelektroden Steh- und Überkopfnähte mühelos und zuverlässig geschweißt werden können.

Dr.-Ing. A. Dörnen, Dortmund-Derne.

II.

Herr Dr.-Ing. Zeyen entnimmt aus meinem Aufsatz „Die Brücke über den Strelasund“ in Bautechn. 1937, Heft 26, zwei Tabellen, die den Umfang der von den beiden beteiligten Stahlbaufirmen an den Schweißnähten der Eisenbahnbrücke vorgenommenen Ausbesserungsarbeiten angeben. Er kommt auf Grund dieser Tabellen zu dem Schluß, daß der kleinere Umfang der Ausbesserungsarbeiten bei dem Anteil Krupp darauf zurückzuführen sei, daß die Firma unter Vermeidung von Überkopfschweißungen in Ringen geschweißt habe.

Diese Schlußfolgerung dürfte nicht gezogen werden, da ich in meinem Aufsatz ausdrücklich darauf hinwies, daß zunächst in der zweiten Lage mit zu dünnen Elektroden geschweißt worden sei, daß deshalb im Röntgenbild zuweilen zwei parallele, durchlaufende Schlackenstellen gefunden worden seien, daß wegen zu spätem Eintreffens der Röntgenanlage auf der Baustelle diese Mängel erst nach Herstellung des vierten Hauptträgerstoßes entdeckt worden seien und daß nach Verwendung von 4 mm dicken Elektroden in der zweiten Lage abgesehen von wenigen geringen und unbedeutenden Schlackeneinschlüssen keine Fehler mehr aufgetreten seien. Ich wies besonders darauf hin, daß sich der Umfang der Ausbesserungen nur aus dem Umstand der Verwendung einer zu dünnen Elektrode erklärt. Da die Firma Dörnen nur acht Hauptträgerstöße auf der Baustelle zu schweißen hatte, ist es klar, daß sie durch Änderung der Elektrodendicke nach Herstellung des vierten Stoßes den Anteil der Ausbesserungsarbeiten an dem Umfang der Gesamtschweißarbeiten nicht mehr wesentlich verbessern konnte.

Ergänzend zu meinen früheren Ausführungen möchte ich noch mitteilen, daß die beiden Tabellen die Länge der geöffneten Nähte und nicht die Länge der festgestellten Fehler angeben. Die Montageart der Firma Dörnen, bei der sofort die Verbände eingebaut wurden, erforderte es, daß bei einer späteren Ausbesserung eines ganzen Stoßes der entsprechende Stoß im gegenüberliegenden Hauptträger, auch wenn er nur geringe Fehler hatte, ebenfalls neu geschweißt werden mußte, damit die Brücke möglichst ihre gerade Lage beibehält und Spannungen im ganzen Überbau infolge der Verkürzung in nur einem Stoß vermieden wurden.

Brückner, Berlin.

Erwiderung.

Von dem Inhalt der beiden vorstehenden Zuschriften habe ich Kenntnis genommen. Ich möchte noch auf die Bemerkung in dem von mir angeführten Aufsatz von Brückner (Bautechn. 15 (1937), S. 337) über die nicht waagrecht geschweißten Baustellennähte hinweisen: „Die Überkopfschweißung wies im Röntgenbild das dafür typische, leicht porige Bild auf“. Eine solche Feststellung wird bei den waagrecht geschweißten Baustellennähten nicht gemacht. Poren in Schweißnähten sind bisher noch von keiner Seite als erstrebenswert angesehen worden, und es ergeben sich hieraus ohne weiteres entsprechende Folgerungen in bezug auf die Beurteilung der Güte von Waagrecht- und Überkopfschweißungen. Aus meinem Aufsatz geht hervor, daß meine Ausführungen über Schweißungen in nicht waagerechter Lage sich auf den Stand in der Elektroden-Entwicklung zur Zeit des Baues der Strelasundbrücke beziehen. Ich habe betont, daß in neuerer Zeit auch Mantelelektroden mit guter Überkopfschweißbarkeit entwickelt worden sind, und Dörnen bestätigt in seiner Zuschrift ja auch, daß solche Elektroden jetzt (nach mehr als 2 Jahren) zur Verfügung stehen. Dr.-Ing. Zeyen, Essen.

INHALT: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie. — Zuschriften an die Schriftleitung.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.

Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.