

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Geh. Regierungsrat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43

Fernsprecher: 87 7421

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

11. Jahrgang

BERLIN, 25. November 1938

Heft 24

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. A. Schleusner, VDI, Berlin.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist so alt wie die Mechanik überhaupt. Hamel macht in seiner Elementaren Mechanik¹⁾ darauf aufmerksam, daß schon die goldene Regel des Aristoteles den Grundgedanken des Prinzips der virtuellen Verrückungen enthält. Als erster hat Johann Bernoulli im Jahre 1717 das Prinzip allgemein ausgesprochen²⁾, und Lagrange hat es 1788 in erweiterter Form zur Grundlage der gesamten Mechanik gemacht³⁾.

Man sollte es für überflüssig halten, über ein so altes Prinzip heute noch zu schreiben. Aber die Erfahrung hat gezeigt, daß trotz der jahrhundertelangen Anwendung des Prinzips und seiner ständig zunehmenden Bedeutung, trotz der klassischen Prägung der Begriffe durch Lagrange immer wieder Unklarheiten auftauchen, die Verwirrung anrichten, und zwar besonders bei der Anwendung des Prinzips auf die Probleme der Elastizitätstheorie.

In den achtziger Jahren (1883 bis 1886) gab es eine scharfe Auseinandersetzung zwischen Mohr und Müller-Breslau. Zu Beginn des Jahrhunderts lebte die Diskussion im Anschluß an einen Aufsatz Weingarten's vom Jahre 1901 wieder auf⁴⁾ und nahm teilweise sehr heftige und unerfreuliche Formen an. Weingarten, Weyrauch, Hertwig, Müller-Breslau, Koetter, Mohr, Mehrtens, Föppl und andere haben damals in verschiedenen Zeitschriften jahrelang aneinander vorbeigeredet. In einer Arbeit vom Mai 1914 hat dann Domke⁵⁾ die Streitpunkte dieser Diskussion von der Grundlage der Variationsprinzipien aus klar und einwandfrei dargestellt. Dagegen bleiben in dieser Arbeit einige andere Fragen offen. Auch Föppl⁶⁾ hat in „Drang und Zwang“ alle jene Streitfragen eingehend berücksichtigt. Gründlich und streng stellt Treffitz im Handbuch der Physik einen großen Teil der mit diesen Fragen zusammenhängenden Probleme dar⁷⁾.

In jüngster Zeit hat sich eine neue Diskussion über das Prinzip der virtuellen Verrückungen entwickelt. Im Mai 1936 veröffentlichte Pöschl einen Aufsatz⁸⁾ mit dem Zweck, eine anschauliche Deutung der Minimalprinzipien der Elastizitätstheorie zu geben. Pöschl kommt dort zu dem Schluß, daß das Prinzip zu grundsätzlich verschiedenen Folgerungen führt, „je nachdem es sich um gewöhnliche Aufgaben des elastischen Gleichgewichts oder um Knickaufgaben handelt“. Domke weist in seinen Erwiderungen⁹⁾ die Unhaltbarkeit dieser Schlußfolgerung nach. Denselben Nachweis erbringt Marguerre in einer in ihrer Art vollkommenen Arbeit¹⁰⁾ von ganz anderen Gesichtspunkten her. Diese Arbeit gewinnt besonderen Wert durch die Anwendung des Prinzips auf Verformungen von endlicher Größe.

Wie stark man sich neuerdings wieder mit diesem alten Prinzip beschäftigt, beweist, daß die Tagesordnung der diesjährigen Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Göttingen einen Vortrag von C. Weber, Dresden, über diese Fragen enthielt. Auch Kammüller hat kürzlich das Thema von einer besonderen Seite her aufgegriffen¹¹⁾. Das veranlaßte mich zu einigen grundsätzlichen Ausführungen¹²⁾, die zu einer kurzen Diskussion zwischen Kammüller und mir führten¹³⁾. Diese Diskussion überzeugte mich von der Notwendigkeit eines Versuchs, die bei der Anwendung des Prinzips auf die Elastizitätstheorie sich ergebenden grundsätzlichen Probleme einmal möglichst kurz zusammenfassend darzustellen. Besonders kam es mir darauf an, die verschiedenen Formen, in denen das Prinzip angewendet wird, in ihren gegenseitigen Beziehungen und Unterschieden darzustellen und die Grenzen zu zeigen, innerhalb deren jede dieser Formen angewendet werden darf. Auf die Einbeziehung der Wärmewirkungen mußte ich leider verzichten, da sie den Umfang der Arbeit erheblich vergrößert hätte. Die Voraussetzungen, von denen ausgegangen wird, sind kurz die folgenden:

Wir betrachten einen elastischen Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte, die an seiner Oberfläche angreifen. Von Massenkraften, etwa dem Eigengewicht, sehen wir zur Vereinfachung der Gleichungen ab. Vorausgesetzt wird, daß der Körper als Ganzes sich in Ruhe befindet, d. h. daß er in der erforderlichen Weise gestützt ist. Rechnen wir dann die Reaktionen an den Stütz- und Einspannstellen zu den äußeren Kräften, so befinden sich diese untereinander im Gleichgewicht. Wenn also im folgenden von dem Eintreten des Gleichgewichts oder seiner Störung die Rede ist, so handelt es sich stets nur um das Gleichgewicht der inneren Kräfte (Spannungen) mit den äußeren Kräften.

Ist dann das Körpermaterial gegeben, d. h. sind die Spannungen σ , τ als Funktionen der Dehnungen ϵ und der Gleitungen γ bekannt, und sind weiter die äußeren Kräfte nach Größe, Richtung und Angriffspunkten gegeben, so nimmt jeder Punkt des Körpers im allgemeinen — d. h. wenn wir den Fall sogenannter Verzweigungspunkte des elastischen Gleichgewichts ausschließen — eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtslage an. Diese zu ermitteln, ist die Aufgabe.

Wir nehmen an, daß die Lasten allmählich aufgebracht werden, also stetig von Null an bis zu ihrem Endwert wachsen. Wir setzen weiter voraus, daß dieser Prozeß so langsam vor sich geht, daß in dem Ausdruck für die Energie die Beschleunigungsglieder vernachlässigt werden dürfen. Ebenso verzichten wir der Einfachheit halber auf die Berücksichtigung aller Wärme- und Temperaturwirkungen und setzen vollkommene Elastizität des Körpermaterials voraus, sehen also von inneren und äußeren Reibungsverlusten ab, obgleich ein Teil unserer Gleichungen auch bei Berücksichtigung dieser Umstände noch gültig bleibt.

Wir bedienen uns ferner des de St. Venantschen Prinzips, das die äußeren Kräfte als Einzelkräfte behandelt, also die Integration über die Oberflächenkräfte durch die Summation über die Einzelkräfte ersetzt¹⁴⁾.

¹¹⁾ Kammüller, Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Eine grundsätzliche Betrachtung. B. u. E., Jahrg. 36 (1937), Heft 22, S. 363 ff.

¹²⁾ Schleusner, Zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen. B. u. E., Jahrg. 37 (1938), Heft 15, S. 252 ff.

¹³⁾ Zeitschrift von Kammüller, Erwiderung von Schleusner, Entgegnung von Kammüller. B. u. E., Jahrg. 37 (1938), Heft 16, S. 271 f.

¹⁴⁾ Vgl. den Aufsatz von Tedone-Timpe in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften IV, 25, Nr. 15.

¹⁾ Hamel, Elementare Mechanik, S. 471. Leipzig und Berlin 1912.

²⁾ Varignon, Nouvelle mécanique 1725. — Vgl. Hamel a. a. O.

³⁾ Lagrange, Mécanique analytique 1788.

⁴⁾ Weingarten, Rezension der Vorlesungen über technische Mechanik von A. Föppl, Archiv der Mathematik und Physik III, Reihe I, 1901, S. 342.

⁵⁾ Domke, Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1915, S. 174 ff.

⁶⁾ Föppl, Drang und Zwang, München und Berlin 1920, I. Bd., S. 58 ff.

⁷⁾ Treffitz, Handbuch der Physik, Bd. VI, Kap. 2.

⁸⁾ Pöschl, Über die Minimalprinzipien der Elastizitätstheorie. Bauing., Jahrg. 17 (1936), Heft 17/18, S. 160 ff.

⁹⁾ Domke, Zum Aufsatz „Über die Minimalprinzipien der Elastizitätstheorie“ von Th. Pöschl. Bauing., Jahrg. 17 (1936), Heft 41/42, S. 459 f.

¹⁰⁾ Marguerre, Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. Z. ang. Math., Bd. 18, (1938) Heft 1, S. 57 ff.

1. Die Ableitung des Hauptprinzips.

Wir betrachten einen Massenpunkt unter der Wirkung von Kräften. Die Kräfte — unter denen auch Momente sein können — bezeichnen wir als Vektoren durch Frakturbuchstaben, ihre Beträge durch die entsprechenden Antiquabuchstaben. Da der Massenpunkt mit anderen zu einem Körper verbunden ist, können die angreifenden Kräfte entweder eine von außen auf den Körper wirkende Kraft \mathfrak{P} oder innere Kräfte \mathfrak{D}_m des Körpers sein. Die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte an dem betrachteten Punkte ist

$$(1) \quad \mathfrak{P} + \sum_m \mathfrak{D}_m = 0.$$

Geometrisch besagt dies, daß Anfangspunkt und Endpunkt des Polygonzuges der aneinandergereihten Vektoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \dots$ zusammenfallen müssen (vgl. Bild 1). Gl. (1) bleibt richtig, wenn sie skalar mit einem völlig willkürlichen Verschiebungsvektor $\delta \mathfrak{s}$ multipliziert wird, den wir nur, wie später begründet wird, unendlich klein annehmen müssen. Da er aber nicht funktional gebunden, sondern willkürlich ist, bezeichnen wir ihn auch nicht mit dem Differentiationszeichen d , sondern mit dem Variationszeichen δ . Wir erhalten

$$(2) \quad \mathfrak{P} \cdot \delta \mathfrak{s} + \sum_m \mathfrak{D}_m \cdot \delta \mathfrak{s} = 0.$$

Gl. (2) läßt zwei Deutungen zu, je nachdem, wie man die drei Faktoren in dem skalaren Produkt $\mathfrak{D}_m \cdot \delta \mathfrak{s} = Q_m \cdot \delta s \cdot \cos(\mathfrak{D}_m, \delta \mathfrak{s})$ zusammenfaßt. Erstens kann man es schreiben $[Q_m \cdot \cos(\mathfrak{D}_m, \delta \mathfrak{s})] \cdot \delta s$. So gedeutet, sagt Gl. (2) nur die Trivialität aus, daß bei Projektion eines geschlossenen Polygonzuges auf eine beliebige Richtung auch die Projektionen des Anfangs- und des Endpunktes zusammenfallen (Bild 2).

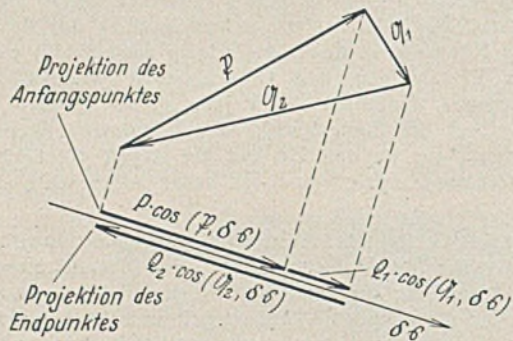


Bild 2.

Zweitens kann man schreiben $\mathfrak{D}_m \cdot \delta \mathfrak{s} = Q_m \cdot [\delta s \cdot \cos(\mathfrak{D}_m, \delta \mathfrak{s})]$. Führen wir dabei noch eine besondere Bezeichnung für die Projektion des Verschiebungsvektors $\delta \mathfrak{s}$ auf die Richtung der Kraft \mathfrak{D} ein: $\delta s \cdot \cos(\mathfrak{D}, \delta \mathfrak{s}) = \delta q$, so nimmt Gl. (2) die folgende Form an:

$$(3) \quad P \cdot \delta p + \sum_m Q_m \cdot \delta q_m = 0.$$

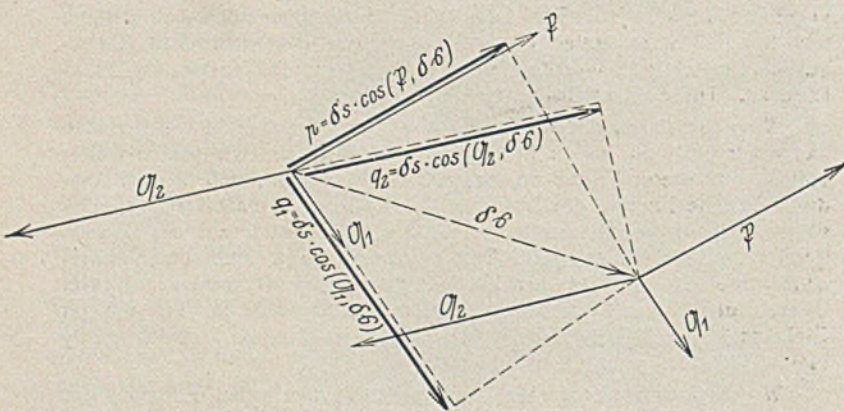


Bild 3.

Würde nun der betrachtete Massenpunkt samt den an ihm angreifenden Kräften $\mathfrak{P}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \dots$ um den Vektor $\delta \mathfrak{s}$ verschoben, so würde dabei der Angriffspunkt der Kraft \mathfrak{D}_m in der Richtung der Kraft um die Strecke δq_m verschoben (Bild 3). Das heißt: Bei dieser Verschiebung würde die Kraft \mathfrak{D}_m die Arbeit $Q_m \cdot \delta q_m$ leisten, ebenso die Kraft \mathfrak{P} die Arbeit $P \cdot \delta p$. (In dem in Bild 3 dargestellten Beispiel würden die Kräfte \mathfrak{P} und \mathfrak{D}_1 positive Arbeit leisten, da sie eine Verschiebung im Sinne der Krafrichtung erfahren; die Kraft \mathfrak{D}_2 würde negative Arbeit leisten, da sie

eine Verschiebung in dem der Krafrichtung entgegengesetzten Sinne erfährt.) Man kann also Gl. (2) in der Form (3) auch folgendermaßen deuten: Bei einer Verschiebung des betrachteten Punktes um den willkürlichen Vektor $\delta \mathfrak{s}$ verschwindet die Summe der dabei geleisteten Arbeiten sämtlicher an dem Punkt angreifenden Kräfte. Da der Punkt diese Verschiebung nicht tatsächlich erfährt, da diese Verschiebung vielmehr nur eine gedachte und obendrein willkürliche ist, wird sie virtuelle Verschiebung genannt. Ebenso sind die Arbeiten $P \cdot \delta p$ und $Q_m \cdot \delta q_m$ keine wirklich geleisteten, sondern gedachte Arbeiten und werden daher mit dem klassischen, von Lagrange geprägten Ausdruck³⁾ als virtuelle Arbeiten bezeichnet.

Gl. (3) wurde als notwendige Folge aus der Gleichgewichtsbedingung (1) abgeleitet. Fordert man, daß (3) nicht nur für irgendeine, sondern für jede beliebige Verschiebung $\delta \mathfrak{s}$ gilt, so folgt umgekehrt auch Gl. (1) als notwendige Folge aus Gl. (3). Wir können also das Ergebnis so zusammenfassen:

Notwendig und hinreichend dafür, daß sich ein Punkt unter der Wirkung angreifender Kräfte im Gleichgewicht befindet, ist, daß bei jeder beliebigen virtuellen Verrückung des Punktes die Summe der virtuellen Arbeiten der angreifenden Kräfte verschwindet.

Dieser Satz wird nach Lagrange³⁾ als Prinzip der virtuellen Verrückungen bezeichnet. Man beachte jedoch, daß dieses Prinzip nichts anderes ist als eine willkürliche Deutung (und, wie wir sahen, nicht einmal die einzig mögliche Deutung!) einer willkürlichen mathematischen Operation an der Gleichgewichtsbedingung (1), die keinerlei wirkliche, physikalische Bedeutung hat.

Wir betrachten nunmehr ein Volumelement $dV = dx dy dz$ eines unter der Wirkung äußerer Kräfte im elastischen Gleichgewicht befindlichen Körpers. Als Folge der Deformation greifen an dem Volumelement Normalspannungen σ und Schubspannungen τ an. Wählen wir das Volumelement klein genug, so daß wir es im Sinne der Gl. (1) bis (3) als Massenpunkt ansehen können, so bestimmen mithin die Spannungen σ_x, \dots, τ_z die inneren Kräfte \mathfrak{D}_m in Gl. (3). Als virtuelle Verschiebung wählen wir ein zusammengehöriges System von Dehnungen $\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z$ und Gleitungen $\delta \gamma_x, \delta \gamma_y, \delta \gamma_z$. Diese virtuellen Dehnungen und Gleitungen treten also zusätzlich zu den wirklichen Dehnungen $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ und den wirklichen Gleitungen $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, die bei der Deformation des Körpers entstanden sind, hinzu. Wir setzen bei den $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z$ Verträglichkeit (Kompatibilität) voraus; d. h. sie dürfen das Volumelement verformen, aber nicht zerstören.

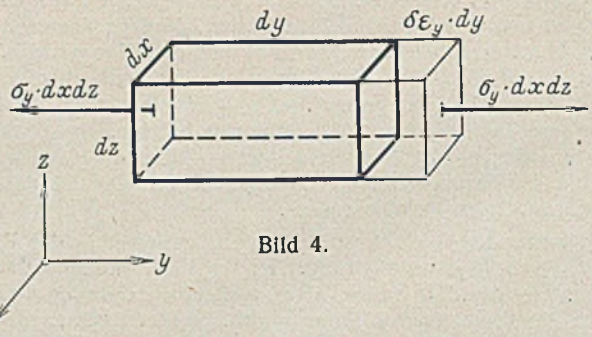


Bild 4.

An der linken und rechten Seitenfläche des Volumelements in Bild 4 greift dann die Kraft $\sigma_y \cdot dx dz$ an. Der Verschiebungsweg in der Krafrichtung ist, wenn wir die linke Seitenfläche festgehalten denken, links Null und rechts gleich $\delta \epsilon_y \cdot dy$, die virtuelle Arbeit also

$$(\sigma_y \cdot dx dz) \cdot (\delta \epsilon_y \cdot dy) = \sigma_y \delta \epsilon_y \cdot dV.$$

Bei einer Gesamtverschiebung des Volumelements in der y -Richtung dagegen verschwindet die Summe der virtuellen Arbeiten, da dann die von der linken und der rechten Seitenfläche herrührenden Beträge sich gegenseitig aufheben.

Als Schubkraft greift in Bild 5 an der linken und rechten Seitenfläche $\tau_x \cdot dx dz$ an. Denken wir die Kante links unten festgehalten, so ist der Verschiebungsweg der Schubkraft in der linken Seitenfläche Null, der in der rechten Seitenfläche $\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dy$, wenn die Gesamtgleitung $\delta \gamma_x$ ist. Die virtuelle Arbeit ist also

$$(\tau_x \cdot dx dz) \cdot \left(\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dy\right) = \frac{1}{2} \tau_x \delta \gamma_x \cdot dV.$$

In der oberen und unteren Randfläche greift die Schubkraft $\tau_x \cdot dx dy$ an.

Ihr Verschiebungsweg ist unten Null, oben $\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dz$, also die virtuelle Arbeit

$$(\tau_x \cdot dx dy) \cdot \left(\frac{1}{2} \delta \gamma_x \cdot dz\right) = \frac{1}{2} \tau_x \delta \gamma_x \cdot dV.$$

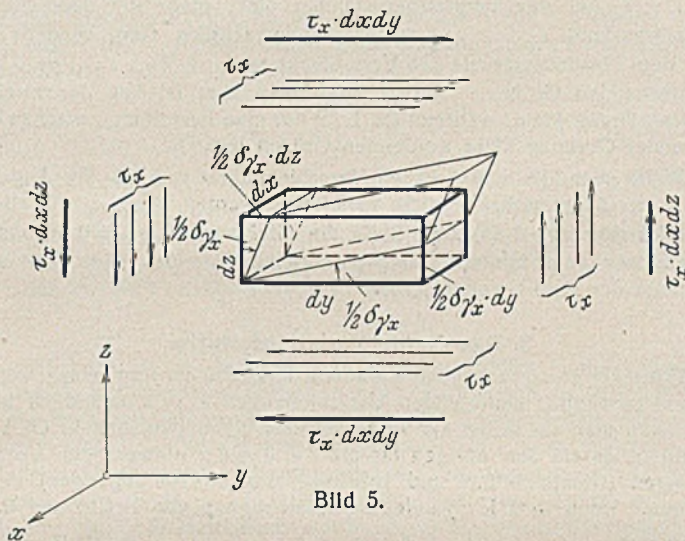
Da sich bei einer Gesamtdrehung des Volumenelements um die x -Achse die verschiedenen Anteile der virtuellen Arbeiten gegenseitig aufheben, ist die gesamte auf die Schubspannung τ_x entfallende virtuelle Arbeit

$$\tau_x \delta \gamma_x \cdot dV.$$

Entsprechendes gilt für die vier anderen Spannungskomponenten. Bei der Verformung eines Körpers unter der Wirkung äußerer Kräfte leisten diese Arbeit. Ihr Arbeitsanteil ist also positiv einzusetzen. Dagegen wird diese Verformungsarbeit gegen den Widerstand der inneren Kräfte geleistet. Deren Arbeitsanteil muß demnach mit negativem Vorzeichen eingesetzt werden. Gl. (3) geht also in unserem Falle über in

$$(4) \quad P \delta p - dV \cdot (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) = 0.$$

Dabei kann nach unseren Voraussetzungen nur für Volumenelemente an der Körperoberfläche $P \neq 0$ sein.



Für jedes Volumenelement des Körpers gilt eine Gl. (4). Wollen wir erreichen, daß alle diese Gleichungen gleichzeitig bestehen können, so müssen wir lediglich dafür sorgen, daß die an sich voneinander unabhängigen virtuellen Verrückungen der einzelnen Volumenelemente keine Auflösung des Körperzusammenhangs zur Folge haben. Dazu ist erstens erforderlich, daß die $\delta \epsilon$, $\delta \gamma$ unendlich klein sind; zweitens, daß sie stetige, den Kompatibilitätsgleichungen genügende Funktionen der Ortskoordinaten sind; und drittens, daß sie mit den Auflagerbedingungen des Körpers im Einklang stehen. Im übrigen bleiben sie willkürlich. Für die δp folgt dann automatisch das entsprechende, da sie durch die virtuellen Verformungen derjenigen Volumenelemente, an denen die äußeren Kräfte P angreifen, bestimmt sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen können wir Gl. (4) über den ganzen Körper integrieren. Multiplizieren wir noch mit -1 , so erhalten wir endlich

$$(5) \quad \int dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) - \sum_n P_n \delta p_n = 0.$$

Das ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen für elastische Körper in seiner allgemeinsten Form, gültig auch dann, wenn das Körpermaterial nicht vollkommen elastisch ist, gültig bei beliebigem Elastizitätsgesetz und gültig auch für endliche Verformungen des Körpers. Dabei sind, wie gesagt, $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z$ unendlich kleine, stetig von den Ortskoordinaten abhängige, den Kompatibilitäts- und Stützbedingungen genügende, im übrigen aber völlig willkürlich wählbare Verschiebungen und Gleitungen.

In dem Sonderfall vollkommener Elastizität des Körpermaterials ist die Arbeit der inneren Kräfte bei der tatsächlich eintretenden Formänderung

$$(6) \quad A_i = \int dV \int_0^{\epsilon, \gamma} (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z).$$

In diesem Fall ist also das erste Glied in Gl. (5) die Variation der Formänderungsarbeit nach den Verschiebungsgrößen: $\delta_v A_i$. Ebenso ist das zweite Glied die Variation der Summe $\sum_n P_n \delta p_n$ nach den in ihr auftretenden Verschiebungsgrößen p_n , kann also $\delta_v (\sum_n P_n \delta p_n)$ geschrieben werden. Für den Ausdruck $\sum_n P_n \delta p_n$ führen wir noch eine besondere Bezeichnung ein. Diese Größe ist nicht etwa die von den äußeren Kräften P_n bei der tatsächlichen Verformung geleistete Arbeit; denn die

Kräfte P_n wachsen ja erst während der Verformung von Null bis zu ihrem Endwert P_n . $\sum_n P_n \delta p_n$ ist vielmehr diejenige Arbeit, die die Kräfte P_n bei der Verformung geleistet hätten, wenn sie während der ganzen Verschiebung p_n von vornherein mit ihrem Endwert P_n gewirkt hätten. Ich habe daher für diese Größe die Bezeichnung „Endwertarbeit“ der äußeren Kräfte gewählt¹⁵⁾:

$$(7) \quad A_{ea} = \sum_n P_n p_n.$$

Demgegenüber ist die bei der Verformung von den äußeren Kräften tatsächlich geleistete Arbeit

$$(8) \quad A_a = \sum_n \int_0^{p_n} P_n dp_n.$$

Endlich ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte bei den willkürlichen, virtuellen Verschiebungen $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z, \delta p_n$ [vgl. Gl. (5)]

$$(9) \quad A_{va} = \sum_n P_n \delta p_n = \delta_v A_{ea}.$$

Entsprechend bezeichnen wir als Endwertarbeit der inneren Kräfte¹⁵⁾ die Größe

$$(10) \quad A_{ei} = \int dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z).$$

Die bei der Verformung von den inneren Kräften tatsächlich geleistete Arbeit ist durch die Größe A_i , Gl. (6) gegeben. Bei vollkommener Elastizität und beim Fehlen von Wärmewirkungen aller Art muß nach dem Energieprinzip stets

$$(11) \quad A_i = A_a$$

sein. Endlich ist nach Gl. (5) die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte bei den willkürlichen virtuellen Verschiebungen $\delta \epsilon_x, \dots, \delta \gamma_z$

$$(12) \quad A_{vi} = \int dV (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) = \delta_v A_i.$$

Man beachte also insbesondere, daß nur die Größen (6) und (8) wirkliche, physikalisch geleistete Arbeiten darstellen. Dagegen sind die Größen (7), (9), (10), (12) nur Rechengrößen, die man deshalb, weil sie die Dimension $\text{kg} \cdot \text{cm}$ haben, als gedachte Arbeiten deuten kann.

Auf Grund der letzten Darstellungen können wir im Falle vollkommener Elastizität dem Prinzip der virtuellen Verrückungen [Gl. (5)] die folgende Gestalt geben:

$$(13) \quad \delta_v (A_i - A_{ea}) = 0.$$

Der Index v bedeutet, daß jede der Größen in der Klammer nach den in ihr auftretenden Verschiebungsgrößen zu variieren ist, also A_i nach den ϵ und γ , A_{ea} nach den p_n . Im übrigen ist Gl. (13) nichts als eine mathematisch abgeleitete Rechengvorschrift. Sie gilt in dieser Gestalt auch dann, wenn die Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z$ in der Gleichgewichtslage endlich große Beträge haben, und sie gilt bei beliebigem Elastizitätsgesetz.

2. Die Deutung des Hauptprinzips als Bedingung für das Minimum der potentiellen Energie.

In Gl. (13) ist der Ausdruck in der Klammer die potentielle Energie des Gesamtsystems. Denn bezeichnen wir mit A_i^* die Formänderungsarbeit, bezogen auf die Volumeneinheit,

$$(1) \quad A_i^* = \int_0^{\epsilon, \gamma} (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z),$$

so ist bei vollkommen elastischen Körpern der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential, und es folgt

$$(2) \quad \begin{aligned} + \frac{\partial A_i^*}{\partial \epsilon_x} &= \sigma_x & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \epsilon_y} &= \sigma_y & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \epsilon_z} &= \sigma_z \\ + \frac{\partial A_i^*}{\partial \gamma_x} &= \tau_x & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \gamma_y} &= \tau_y & + \frac{\partial A_i^*}{\partial \gamma_z} &= \tau_z. \end{aligned}$$

Die Pluszeichen besagen, daß eine Zunahme von A_i^* bedeutet, daß die Fähigkeit der inneren Kräfte, Arbeit zu leisten, zugenommen hat. A_i ist also die gesamte potentielle Energie der inneren Kräfte

$$(3) \quad A_i = \Pi_i.$$

¹⁵⁾ Engeßer (Zeitschr. d. Architekten- u. Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. 35 (1889), Heft 8, S. 733 ff.) und Domke (a. a. O., Fußnote 5) bezeichnen die Größen (7) und (10) ohne einschränkende Bemerkungen als „virtuelle Arbeiten“. Diese Bezeichnungswiese kann nicht aufrechterhalten werden. Denn seit Lagrange ist der Begriff der virtuellen Arbeit im Sinne der Gl. (9) u. (12) festgelegt. Nur für ein besonderes System virtueller Verrückungen, von dem noch die Rede sein wird, nehmen (9) und (12) formal die gleiche Gestalt an wie (7) und (10).

Ebenso ergibt sich nach 1. (7):

$$-\frac{\partial(-A_{ea})}{\partial p_n} = P_n.$$

Die Minuszeichen besagen, daß eine Zunahme von A_{ea} (entsprechend bereits geleisteter Arbeit der äußeren Kräfte P_n) bedeutet, daß die Fähigkeit der äußeren Kräfte, weitere Arbeit zu leisten, abgenommen hat. Also ist $-A_{ea}$ die potentielle Energie der äußeren Kräfte:

$$(5) \quad -A_{ea} = II_a.$$

Aus (3) und (5) folgt für die potentielle Energie des Gesamtsystems

$$(6) \quad II = II_i + II_a = A_i - A_{ea},$$

und Gl. 1. (13) kann nunmehr geschrieben werden

$$(7) \quad \delta_v II = 0.$$

Das Verschwinden der ersten Variation eines Ausdruckes bedeutet, daß dieser Ausdruck zum Extremum wird. In diesem Falle läßt sich zeigen, daß es sich um ein Minimum handelt. Wir können also das Prinzip der virtuellen Verrückungen für den vollkommen elastischen Körper in der folgenden Form aussprechen: Der in der Gleichgewichtslage eintretende Verformungszustand ist derjenige Zustand, bei dem die potentielle Energie des elastischen Gesamtsystems ein Minimum wird.

Auch diese Formulierung ist nichts anderes als eine Deutung einer rein mathematischen Operation. Diese Formulierung hat den Vorzug der Kürze und Einprägsamkeit. Sie hat den weiteren Vorzug, daß sie die Erscheinungen des elastischen Gleichgewichts einem allgemeinen, durch die Erfahrung immer von neuem bestätigten physikalischen Axiom unterordnet, dem Axiom vom Minimum der potentiellen Energie. Bei dieser Deutung — nicht bei dem rechnerischen Ansatz! — ergibt sich jedoch in unserem Fall eine Schwierigkeit, die schon viel Verwirrung angerichtet hat.

Spricht man von einem Minimum der potentiellen Energie, so bedeutet das: In dem gesuchten Gleichgewichtszustand ist die potentielle Energie des Gesamtsystems kleiner als in jedem anderen (benachbarten) Verschiebungszustand. Betrachten wir ein um seine Gleichgewichtslage schwingendes Pendel oder irgendein anderes schwingendes System, so nimmt es während der Schwingungen die Vergleichszustände, in denen die potentielle Energie größer als in der Gleichgewichtslage ist, tatsächlich an. Die Vergleichszustände sind also ihrerseits physikalisch mögliche Zustände. In unserem Fall haben wir Schwingungsvorgänge ausdrücklich ausgeschlossen, um in dem Energieansatz keine von der Zeit abhängigen Beschleunigungsglieder zu erhalten. Die Belastung sollte ja so allmählich erfolgen, daß die Beschleunigungskomponenten vernachlässigt werden durften. Dann ist jeder Durchgangszustand bis zur vollen Belastung selbst ein Gleichgewichtszustand, nämlich derjenige, der dem jeweils erreichten Grad der Belastung entspricht. Da bei gegebenem Material (d. h. gegebenem Elastizitätsgesetz) und gegebener Belastung P_n nur ein einziger Verschiebungszustand, eben der gesuchte Gleichgewichtszustand $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ möglich ist, sind unsere Vergleichszustände unter den Bedingungen des Systems physikalisch nicht möglich. Um überhaupt von Vergleichszuständen sprechen zu können, müssen wir für diese irgendeine der geometrisch und physikalisch gegebenen Bedingungen des Problems aufheben. In unserem Fall haben wir diese Entscheidung bereits getroffen: Wir suchen unter allen mit den geometrischen Bedingungen des Systems verträglichen Verschiebungszuständen den einzigen, der bei dem geltenden Elastizitätsgesetz dem Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften entspricht. Wir heben also für die Vergleichszustände die Bedingung des Gleichgewichts auf¹⁹⁾ und charakterisieren sie dadurch in der Tat als physikalisch nicht mögliche Zustände.

Mathematisch macht dies nicht die geringsten Schwierigkeiten. Wir haben einfach in Gl. 1. (5) für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ irgendwelche, in den erwähnten Grenzen willkürliche Größen einzusetzen. Für die Deutung im Sinne der Gl. 2. (7) bzw. 1. (13) aber entsteht die Schwierigkeit, daß wir den Begriff der potentiellen Energie, also der Fähigkeit, Arbeit zu leisten, für einen physikalisch gar nicht möglichen Zustand unseres Systems definieren müssen. Diese Definition kann demgemäß keine physikalische sein. Sie ist eine mathematische, und zwar eine willkürliche mit der

¹⁹⁾ Kammüller irrt, wenn er a. a. O. (Fußnote 13), S. 272, letzter Absatz, sagt, daß bei dem Ansatz $\sigma_x \delta \epsilon_x$ sich $\delta \epsilon_x$ nicht mit dem körperlichen Zusammenhang vereinbaren läßt*. Genau das Gegenteil ist der Fall! Wir fordern von den $\delta \epsilon_x, \dots$, daß sie mit dem körperlichen Zusammenhang vereinbar seien. Dann aber können diejenigen Spannungen, die dem variierten Verformungszustand $\epsilon_x + \delta \epsilon_x, \dots, \gamma_z + \delta \gamma_z, p_n + \delta p_n$ nach dem geltenden Elastizitätsgesetz entsprechen, nicht mehr mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sein.

einzigen Einschränkung, daß sie bei der Feststellung des Minimums auf die mathematischen Operationen der Gl. 1. (5), (13) bzw. 2. (7) führen muß. Im vorliegenden Fall ist die Entscheidung nahegelegt: Wir definieren die potentielle Energie formal nach Gl. (6), indem wir für die Vergleichszustände setzen

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} A'_i &= \int dV (\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z) \\ A'_{ea} &= \sum_n P_n (p_n + \delta p_n). \end{aligned} \right.$$

Da wir Reversibilität des Verformungsvorganges vorausgesetzt haben, kann der Integrationsweg stets über den Gleichgewichtszustand $\epsilon_x, \dots, \gamma_z$ geführt werden. Da das Elastizitätsgesetz, das die σ, τ als Funktionen der ϵ, γ bestimmt, auch für die Vergleichszustände als gültig vorausgesetzt wurde, ist diese Definition mithin eindeutig und führt, in Gl. 1. (13) eingesetzt, in der Nähe des Gleichgewichtszustandes wieder zu Gl. 1. (5) zurück. Der Unterschied besteht darin, daß nach unserer Definition die σ_x, \dots, τ_z bei den Vergleichszuständen nicht mehr die dem Gleichgewichtszustand $\epsilon_x, \dots, \gamma_z$ entsprechenden Größen sind, sondern die nach dem Elastizitätsgesetz den Verschiebungen $\epsilon_x + \delta \epsilon_x, \dots, \gamma_z + \delta \gamma_z$ entsprechenden Größen. Dieser Unterschied aber ist von der zweiten Größenordnung klein, während Gl. 1. (5) nur eine Beziehung zwischen den von erster Ordnung klein werdenden Größen darstellt.

Wählt man die willkürlichen Verschiebungen so, daß die Angriffspunkte der äußeren Kräfte nicht verschoben werden, $\delta p_n = 0$ für alle n , so erhält man aus 1. (5) statt 2. (7) die Gleichung $\delta_v A_i = 0$, also statt eines Satzes vom Minimum der potentiellen Energie einen Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.

3. Das zweite Variationsprinzip.

Unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die im Gleichgewichtszustand tatsächlich eintretenden Verschiebungen ϵ, γ, p unendlich klein sind, kann man sie selbst als virtuelles Verschiebungssystem in Gl. 1. (5) einführen, da sie den übrigen für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ notwendigen Voraussetzungen (Kompatibilität und Erfüllung der Stützbedingungen) sicher genügen. Dann wird 1. (5) unter Berücksichtigung von 1. (10) und 2. (7)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) - \sum_n P_n p_n &= 0 \\ A_{ei} - A_{ea} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung¹⁷⁾ gilt nur im Falle des Gleichgewichts, da Gl. 1. (5), aus der sie gewonnen wurde, die Gleichgewichtsbedingung mathematisch formulierte. Andererseits gilt 1. (5) auch für ein beliebiges anderes, benachbartes System von äußeren Kräften $P_n + \delta P_n$ und das ihm entsprechende Gleichgewichtssystem von Spannungen $\sigma_x + \delta \sigma_x, \dots, \tau_z + \delta \tau_z$:

$$\int dV [(\sigma_x + \delta \sigma_x) \delta \epsilon_x + (\sigma_y + \delta \sigma_y) \delta \epsilon_y + (\sigma_z + \delta \sigma_z) \delta \epsilon_z + (\tau_x + \delta \tau_x) \delta \gamma_x + (\tau_y + \delta \tau_y) \delta \gamma_y + (\tau_z + \delta \tau_z) \delta \gamma_z] - \sum_n (P_n + \delta P_n) \delta p_n = 0.$$

Für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ können wir darin ein beliebiges kompatibles Verschiebungssystem einsetzen, also insbesondere das zu den Spannungen und Kräften $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ gehörige System $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$, sofern wir diese Größen als unendlich klein voraussetzen:

$$\int dV [(\sigma_x + \delta \sigma_x) \epsilon_x + (\sigma_y + \delta \sigma_y) \epsilon_y + (\sigma_z + \delta \sigma_z) \epsilon_z + (\tau_x + \delta \tau_x) \gamma_x + (\tau_y + \delta \tau_y) \gamma_y + (\tau_z + \delta \tau_z) \gamma_z] - \sum_n (P_n + \delta P_n) p_n = 0.$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die Gl. (1), so folgt

$$(2) \quad \int dV (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_x \delta \tau_x + \gamma_y \delta \tau_y + \gamma_z \delta \tau_z) - \sum_n p_n \delta P_n = 0.$$

Damit haben wir das zweite Variationsprinzip der Elastizitätstheorie gewonnen, bei dem nicht die Verschiebungen, sondern die Kräfte (Spannungen) variiert werden. Man könnte es daher als Prinzip der virtuellen Kräfte dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gegenüberstellen. In dieser Gleichung sind die $\delta \sigma, \delta \tau, \delta P$ unendlich kleine, stetig von den Ortskoordinaten abhängige, untereinander im Gleichgewicht befindliche, im übrigen aber völlig willkürlich wählbare Spannungen und Kräfte.

Das zweite Variationsprinzip ist in der Form der Gl. (2) bei beliebigem Elastizitätsgesetz gültig, und zwar auch dann, wenn das Körpermaterial nicht vollkommen elastisch ist. Dagegen ist es im allgemeinen bei endlich großen Deformationen nicht gültig, da wir die unendliche Kleinheit der $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ bei seiner Ableitung voraussetzen mußten.

¹⁷⁾ Dies ist das oben erwähnte, besondere System virtueller Verschiebungen, bei dem die virtuellen Arbeiten formal gleich den Endwertarbeiten werden, und das Engeßer und Domke a. a. O. (Fußnote 15) zu der mit der klassischen Definition Lagranges allgemein nicht zu vereinbarenden Verwendung des Begriffs der virtuellen Arbeit führte.

Wir sehen hier bereits einen entscheidenden Unterschied des zweiten Prinzips gegenüber dem ersten, der zeigt, daß beide trotz der formalen Ähnlichkeit der Gl. 3. (2) und 1. (5) wesentlich verschieden sind.

In dem Sonderfall vollkommener Elastizität ist die in Gl. (2) in der Klammer stehende Größe ein vollständiges Differential. Wir führen in diesem Fall eine neue Größe B_i durch folgende Definition ein:

$$(3) \quad B_i = \int_0^{\sigma, \tau} dV \int (\epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z).$$

B_i hat die Dimension einer Arbeit und wird nach Engeßer als Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte bezeichnet¹⁸⁾. Entsprechend definieren wir die Ergänzungsarbeit der äußeren Kräfte durch

$$(4) \quad B_a = \sum_n \int_0^{P_n} p_n dP_n.$$

Durch partielle Integration gewinnt man aus 1. (6), 1. (10) und 3. (3) sowie aus 1. (8), 1. (7) und 3. (4) ganz allgemein, auch für endliche Deformationen

$$(5) \quad A_i = A_{ei} - B_i$$

$$(6) \quad A_a = A_{ea} - B_a.$$

Nach 1. (11) und 3. (1) ergibt sich daraus $B_i = B_a$. Jedoch gilt diese Gleichung nur dann, wenn 3. (1) gilt, d. h. sie gilt im allgemeinen nur für unendlich kleine Deformationen¹⁸⁾. Führt man (3) in (2) ein, so erhält man für den Fall vollkommener Elastizität und bei beliebigem Elastizitätsgesetz das zweite Variationsprinzip in der Gestalt

$$(7) \quad \delta_k (B_i - A_{ea}) = 0.$$

Dabei bedeutet der Index k , daß jede der Größen in der Klammer nach den in ihr auftretenden Kräften bzw. Spannungen zu variieren ist, also die Ergänzungsarbeit nach den σ, τ , die Endwertarbeit nach den äußeren Kräften P_n . Gl. (7) entspricht formal Gl. 1. (13). Dennoch ist die Bedeutung der beiden Gleichungen, wie aus ihrer Herleitung folgt, eine ganz verschiedene. 1. (13) war die Bedingung dafür, daß die Größe $(A_i - A_{ea})$ ein Minimum wurde. 3. (7) dagegen ist die Bedingung dafür, daß die Größe $(B_i - A_{ea})$ ein Maximum wird. Am einfachsten überzeugt man sich davon, wenn man 3. (2) unmittelbar durch die vollständige Variation der Größen A_{ei} und A_{ea} aus 1. (5) ableitet. Die vollständigen Variationen von A_{ei} und A_{ea} heben sich dann nach 3. (1) heraus, wenn man die Bedingung stellt, daß nur Gleichgewichtssysteme von Kräften betrachtet werden sollen. Denn dann ist $(A_{ei} - A_{ea})$ beständig gleich Null, und folglich verschwindet auch die Variation dieses Ausdrucks. Man erhält als Ergebnis, daß $(-B_i + A_{ea})$, nach den Kräften (Spannungen) variiert, ein Minimum werden muß, also $(B_i - A_{ea})$ ein Maximum.

Ferner ist der Ausdruck $(B_i - A_{ea})$ keineswegs gleich der potentiellen Energie des Gesamtsystems. Das zweite Variationsprinzip läßt sich also nicht wie das erste einem allgemeinen, von der Erfahrung bestätigten Naturgesetz unterordnen. Es ist eben nichts als eine mathematische Umformung des ersten Prinzips, die obendrein nur unter stark einschränkenden Bedingungen, nämlich unter der Voraussetzung unendlich kleiner Verformungen des Körpers gültig ist. Es ist vor allem ganz unsinnig, bei dem zweiten Prinzip, das in der Praxis viel häufiger angewendet wird als das erste, von einem „Minimum der potentiellen Energie“ zu sprechen, da einmal der zu variierte Ausdruck nicht die potentielle Energie ist, und zweitens nicht sein Minimum, sondern sein Maximum gesucht wird.

Man sieht also, daß und warum trotz der formalen Analogie zwischen Gl. 3. (2) u. 1. (5) bzw. zwischen 3. (7) u. 1. (13) durchaus keine Analogie zwischen dem Gültigkeitsbereich und der Deutung dieser Gleichungen besteht¹⁹⁾. Das drückt sich insbesondere darin aus, daß das zweite Prinzip keinen Übergang zu Gl. 2. (7) oder einer ihr analogen Gleichung von physikalischer Deutbarkeit gestattet. Das drückt sich weiter darin aus, daß man das zweite Prinzip nicht in einer dem Abschnitt 1 entsprechenden Weise unmittelbar aus physikalischen Grundgesetzen ableiten kann. Es ist eine Rechenregel ohne physikalische Deutbarkeit.

Daran ändert sich auch nichts durch die Tatsache, daß in dem in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, $B_i = A_i = \frac{1}{2} \cdot A_{ei}$ wird. Man macht dann zwar rechnerisch keinen Fehler, wenn man in 3. (7) die Formänderungsarbeit an die Stelle

¹⁸⁾ Engeßer, a. a. O. (Fußnote 13), S. 743, unterscheidet noch nicht zwischen der Ergänzungsarbeit der inneren und der der äußeren Kräfte, da er seine Betrachtungen auf unendlich kleine Verformungen beschränkt und in diesem Fall jene beiden Größen einander gleich werden. — Vgl. auch Domke, a. a. O. (Fußnote 5), S. 177.

¹⁹⁾ Kammüller, a. a. O. (Fußnote 13), S. 271, Entgegnung, Ziffer 4.

der Ergänzungsarbeit setzt und dadurch die Analogie zu Gl. 1. (13) vollständig macht. Aber man verfälscht den Sinn dieser Gleichung, wenn man den so gewonnenen Ausdruck als „potentielle Energie“ bezeichnet. Vor allem ist es einfach falsch, wenn man behauptet, daß man dann mit Gl. (7) das Minimum dieser „potentiellen Energie“ suche. Denn (7) bestimmt unter allen Umständen, ob nun das Hookesche Gesetz gilt oder nicht, das Maximum des in der Klammer stehenden Ausdrucks. Daß auch diese Verwechslung rechnerisch zu keinem Fehler führt, liegt lediglich daran, daß die notwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums mathematisch die gleiche ist wie die für das Eintreten eines Minimums, nämlich das Verschwinden der ersten Variation. Beide Fälle unterscheiden sich nur durch die für ihr Eintreten hinreichenden Bedingungen, nämlich das Vorzeichen der zweiten Variation. Und das pflegt der praktische Rechner wohl niemals zu prüfen, mit Recht, da diese Frage im allgemeinen praktisch keine entscheidende Bedeutung hat.

Ich möchte aber auch an dieser Stelle (wie schon a. a. O.)²⁰⁾ betonen, daß es mir pädagogisch bedenklich und mit den Grundsätzen einer Wissenschaft auf die Dauer nicht vereinbar erscheint, Sätze, deren Voraussetzungen und deren Grenzen man genau kennt, in einer Form auszusprechen, die zwar in ihrem heute wichtigsten Geltungsbereich richtige Ergebnisse liefert, in einem anderen Teil ihres Geltungsbereiches aber zu falschen Ergebnissen führt und in jedem Fall den wirklichen Inhalt des betreffenden Satzes nicht wiedergibt.

Es bleibt noch zu untersuchen, welcher Art die Vergleichszustände sind, unter denen Gl. (7) den einzigen wirklich eintretenden Zustand aussondert. Auch in diesem Fall sind die Vergleichszustände aus den in Abschnitt 2 angeführten Gründen unter den Bedingungen des Systems physikalisch nicht möglich. Entsprechend Gl. 2. (8) definieren wir die Ergänzungsarbeit und die Endwertarbeit für die Vergleichszustände durch

$$(8) \quad \begin{cases} B_i' = \int_0^{\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau} dV \int (\epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + \epsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z) \\ A_{ea}' = \sum_n (P_n + \delta P_n) p_n \end{cases}$$

Damit setzen wir das Elastizitätsgesetz, das die ϵ, γ als Funktionen der σ, τ bestimmt, auch für die Vergleichszustände als gültig voraus. Ferner hatten wir bei der Ableitung des zweiten Variationsprinzips vorausgesetzt, daß auch die variierten Spannungen und äußeren Kräfte untereinander im Gleichgewicht seien. Wir müssen also notwendig für die Vergleichszustände die Bedingung der Kompatibilität, der Verträglichkeit mit den geometrischen Bedingungen des Systems, aufheben. D. h. wir müssen an einer oder mehreren Stellen, längs einer oder mehrerer Flächen den Körperzusammenhang gelöst oder die Stützbedingungen aufgehoben denken. Das Ergebnis ist also:

Bei der Anwendung des zweiten Variationsprinzips suchen wir unter allen Gleichgewichtssystemen von Kräften und Spannungen das einzige, dem nach dem geltenden Elastizitätsgesetz ein kompatibler, d. h. mit dem Körperzusammenhang und den Stützbedingungen verträglicher Verschiebungszustand entspricht.

Das zweite Variationsprinzip hat zwar einen engeren Geltungsbereich als das erste. In seinem Geltungsbereich aber ist es diesem im allgemeinen überlegen. Denn die beim zweiten Prinzip geforderte Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte ist bei verwickelten Systemen im allgemeinen leichter mathematisch zu formulieren als die beim ersten Prinzip geforderte Bedingung der Kompatibilität der Verschiebungen. Ein besonders wichtiges Anwendungsgebiet des zweiten Prinzips ist die Berechnung statisch unbestimmter Größen. Man kann sie entweder durch unmittelbare Anwendung des zweiten Prinzips in der Form der Gl. 3. (2) oder 3. (7) berechnen oder mit Hilfe des Satzes von Castigliano, der sich aufs einfachste aus dem zweiten Prinzip ableiten läßt.

Der Verformungszustand ist von den äußeren Kräften abhängig, zu denen wir, wie bemerkt, auch die Stützkräfte zählen. Man kann also die Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte B_i als Funktion der äußeren Kräfte darstellen: $B_i = B_i(P_n)$. Durch Variation dieser Funktion nach den Kräften erhält man

$$(9) \quad \delta_k B_i = \sum_n \frac{\partial B_i}{\partial P_n} \cdot \delta P_n.$$

Andererseits folgt aus 3. (2) mit 3. (3)

$$(10) \quad \delta_k B_i = \sum_n p_n \cdot \delta P_n.$$

Setzt man (10) in (9) ein, so folgt

$$(11) \quad \frac{\partial B_i}{\partial P_n} = p_n.$$

²⁰⁾ Schleusner, a. a. O. (Fußnote 12), S. 254. — Desgl. a. a. O. (Fußnote 13), S. 271.

Wir wählen nunmehr die Variationen der Kräfte so, daß die gegebenen äußeren Lasten nicht variiert werden. Für diese Größen wird also in (9) und (10) $\delta P_n = 0$. Dagegen denken wir uns an den Angriffspunkten oder -flächen statisch unbestimmter Kräfte den Körperzusammenhang gelöst und die statisch Unbestimmten (die wir in üblicher Weise durch X_n bezeichnen) an diesen Punkten oder Flächen als äußere Kräfte wirkend. Dann geht Gl. (11) über in

$$(12) \quad \frac{\partial B_i}{\partial X_n} = x_n,$$

wenn x_n den Verschiebungsweg der Kraft X_n in der Krafrichtung bedeutet. Dabei ist gemäß den Voraussetzungen des zweiten Prinzips die funktionale Abhängigkeit der Ergänzungsarbeit B_i von den statisch Unbestimmten X_n folgendermaßen zu verstehen: Ist der Körperzusammenhang in der oben beschriebenen Weise gelöst, so wählt man für die X_n ein willkürliches System von Kräften, das mit den gegebenen äußeren Kräften P_n im Gleichgewicht ist. Zu diesem erweiterten System von äußeren Kräften P_n , X_n bestimmt man das zugehörige Gleichgewichtssystem von Spannungen σ_x, \dots, τ_z . Sodann ist B_i gemäß dem geltenden Elastizitätsgesetz durch Gl. 3. (3) eindeutig als Funktion der X_n bestimmt und damit auch der Sinn der Gl. (12) eindeutig festgelegt. Die Bedingung für die Kompatibilität ist, daß alle an dem Körper angebrachten Schnitte sich schließen, daß also alle Verschiebungswege x_n verschwinden. Dann wird (12)

$$(13) \quad \frac{\partial B_i}{\partial X_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Das Gleichgewichtssystem (13) kann man wieder als Bedingung für das Eintreten eines Extremums deuten, und zwar kann man zeigen, daß es sich um ein Minimum handelt. Man kann also den Inhalt der Gl. (13), den Satz von Castigliano, so aussprechen:

Die statisch unbestimmten Größen nehmen tatsächlich diejenigen Werte an, die die Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte zu einem Minimum machen.

Dabei ist B_i in dem oben beschriebenen Sinn als Funktion der X_n aufzufassen. Der Satz von Castigliano gilt in dieser Form wie das Variationsprinzip, aus dem er abgeleitet wurde, nur für unendlich kleine Verformungen und nur unter der Voraussetzung vollkommener Elastizität des Körpermaterials, aber bei beliebigem Elastizitätsgesetz.

4. Eine dritte Form des Variationsprinzips: Die Arbeitsgleichung.

Wir hatten darauf hingewiesen, daß das Prinzip der virtuellen Verrückungen in seiner ursprünglichen, in den Abschnitten 1 und 2 behandelten Gestalt — Variation nach den Verschiebungen — nicht nur bei beliebigem Elastizitätsgesetz, sondern auch bei endlich großen Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ gilt. In der praktischen Statik sind nun häufig — aber durchaus nicht immer — die folgenden Voraussetzungen wenigstens näherungsweise erfüllt:

1. Die Verschiebungsgrößen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ sind als verschwindend klein im Verhältnis zu den Körperabmessungen anzusehen.
2. Die Dehnungen und Gleitungen ϵ, γ sind den Spannungen σ, τ proportional (Hookesches Elastizitätsgesetz).

Sind diese beiden Voraussetzungen erfüllt, dann gilt nicht notwendig, aber in der Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle:

3. Auch die Verschiebungswege p_n der äußeren Kräfte P_n sind der Größe dieser Kräfte proportional.

Daß die dritte Voraussetzung nicht notwendig aus den beiden ersten folgt, kann man leicht durch Beispiele belegen. Sie gilt z. B. nicht für den an den Enden gelenkig fest gelagerten, geraden Stab mit Mittelgelenk, der im Mittelgelenk quer zur Stabachse belastet ist. Sie gilt auch nicht für den axial gedrückten geraden Stab nach Überschreiten der Knickgrenze²¹⁾.

Sind alle drei Voraussetzungen gleichzeitig erfüllt, dann (und im allgemeinen nur dann) darf man für die $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ in 1. (5) formal endliche Größen einsetzen, indem man sich einen gemeinsamen, unendlich kleinen Proportionalitätsfaktor aus den Gleichungen herausgehoben denkt.

²¹⁾ Vielleicht hat diese Tatsache Pöschl zu dem eigenartigen Schluß geführt, daß man für Knickprobleme einer besonderen Form des Variationsprinzips bedürfe (vgl. Fußnote 8). Für Knickprobleme gilt freilich nicht die besondere, viel gebrauchte Form der Variationsansätze, die wir abzuleiten im Begriff sind, wohl aber die allgemein gültige erste Form des Prinzips [1. (5) bzw. 1. (13) oder 2. (7)], aus der alle anderen Formen erst durch einschränkende Sonderannahmen abgeleitet sind. Beschränkt man sich auf unendlich kleine Durchbiegungen, so gilt für Knickprobleme auch noch das zweite Variationsprinzip [3. (2) bzw. 3. (7)].

Ersetzt man in diesem Sinne in 1. (5) die Bezeichnungen $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta p$ durch die Bezeichnungen ϵ, γ, p , so erhält man die Gleichung

$$(1) \quad \int dV (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) - \sum_n P_n p_n = 0.$$

Das ist formal dieselbe Gleichung wie 3. (1). Aber die Bedeutung der Größen ist in beiden Gleichungen wesentlich verschieden. Die σ, τ, P bedeuten in beiden Gleichungen die im Gleichgewichtszustand tatsächlich vorhandenen Spannungen und Kräfte. Die ϵ, γ, p aber bedeuten in 3. (1) die nach dem geltenden Elastizitätsgesetz den σ, τ, P entsprechenden, also die wirklich eintretenden Verschiebungsgrößen, in 4. (1) dagegen ein willkürliches, kompatibles System von Verschiebungen, das zu den wirklichen Spannungen und Kräften $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ in keiner Beziehung zu stehen braucht.

Ist die erste der drei obenerwähnten Bedingungen erfüllt, so ist auch das zweite Variationsprinzip anwendbar. Sind außerdem auch die beiden anderen Bedingungen erfüllt, so kann man in 3. (2) für die $\delta \sigma, \delta \tau, \delta P$ formal endliche Größen einsetzen, indem man sich einen gemeinsamen, unendlich kleinen Proportionalitätsfaktor aus der Gleichung herausgehoben denkt. Ersetzt man demgemäß in 3. (2) die Bezeichnungen $\delta \sigma, \delta \tau, \delta P$ durch die Bezeichnungen σ, τ, P , so nimmt diese Gleichung formal dieselbe Gestalt wie 4. (1) an. Aber die Bedeutung dieser Größen ist in diesem Falle wiederum eine ganz andere als vorher. Denn jetzt bedeuten die ϵ, γ, p die im Gleichgewichtszustand wirklich eintretenden Verschiebungsgrößen, die σ, τ, P dagegen ein beliebiges Gleichgewichtssystem von Spannungen und Kräften, das zu den wirklich eintretenden Verschiebungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ in keiner Beziehung zu stehen braucht.

Diese dritte Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen ist die in der praktischen Statik am häufigsten angewendete Form²²⁾. Müller-Breslau hat für sie die Bezeichnung „Arbeitsgleichung“ des untersuchten elastischen Systems eingeführt²³⁾. Diese dritte Form ist, wie seine Ableitung zeigt, kein selbständiges Variationsprinzip, sondern je nachdem, ob man die wirklichen Spannungen und Kräfte mit gedachten Verschiebungen verbindet, oder ob man die wirklichen Verschiebungen mit gedachten Spannungen und Kräften verbindet, eine modifizierte Form des ersten oder des zweiten Variationsprinzips mit stark eingeschränktem Geltungsbereich (unendlich kleine Verformungen, Hookesches Gesetz, Proportionalität zwischen Kraft und Verschiebung auch bei den äußeren Kräften). Man kann den Inhalt der Gl. (1) in seiner doppelten Bedeutung so aussprechen:

Wir suchen entweder unter allen kompatiblen Verschiebungssystemen das einzige, das nach dem Hookeschen Gesetz dem im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen System von Spannungen und Kräften entspricht; oder wir suchen unter allen Gleichgewichtssystemen von Kräften und Spannungen das einzige, das nach dem Hookeschen Gesetz dem im Gleichgewichtszustand wirklich eintretenden System von Verschiebungen entspricht.

Die Nützlichkeit dieser einfachen Zusammenfassung der beiden Variationsprinzipien in ein wenig modifizierter Form unter eine einzige Gleichung steht außer Frage. Aber man darf nicht vergessen, daß ihr Anwendungsbereich gegenüber dem Geltungsbereich der beiden Variationsprinzipien erheblich beschränkt ist, und daß die Zusammenfassung eine rein formale ist. In dieser Form ist das Prinzip einer einheitlichen, anschaulichen Deutung überhaupt nicht fähig. Es sagt inhaltlich ganz verschiedene Dinge aus, je nachdem man es im Sinne des ersten Prinzips (wirkliche Spannungen und Kräfte, gedachte Verschiebungen) oder im Sinne des zweiten Prinzips (wirkliche Verschiebungen, gedachte Spannungen und Kräfte) anwendet.

Praktisch verwertbar ist die Arbeitsgleichung nur dann, wenn es sich um die Bestimmung einer endlichen Anzahl unbekannter Größen (etwa der Verschiebungen einzelner Punkte oder der Größe einzelner statisch unbestimmter Auflagerkräfte und Einspannmomente) handelt. Sobald es sich um die Bestimmung unbekannter Funktionen (etwa von Biegelinien oder von Verformungen zwei- oder dreidimensionaler Gebilde) handelt, oder sobald eine der obengenannten Voraussetzungen nicht mehr zutrifft, wird die Arbeitsgleichung praktisch unwertbar. Man muß dann auf die Variationsansätze 3. (7) bzw. 1. (13) zurückgreifen.

5. Der Begriff der virtuellen Arbeit und seine Beziehung zu den Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie.

Es ist der Vorschlag gemacht worden, die beiden Variationsprinzipien, das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das Prinzip der virtuellen Kräfte, unter dem Oberbegriff eines „Prinzips der virtuellen Arbeiten“

²²⁾ Von dieser Form des Prinzips geht auch Kamüller aus. A. a. O. (Fußnote 11), S. 363, Gl. (1)

²³⁾ Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, S. 23, Gl. (6). Leipzig 1904.

zusammenzufassen²⁴⁾. Ich habe bereits a. a. O.²⁵⁾ bemerkt, daß mir dieser Vorschlag nicht glücklich erscheint und will das hier etwas ausführlicher begründen.

Offenbar ist dieser Vorschlag durch die dritte Form des Prinzips, die Arbeitsgleichung 4. (1), angeregt worden, in der die grundsätzliche Verschiedenheit der beiden Variationsprinzipien formal verwischt erscheint. Um jeden Irrtum zu vermeiden, werden wir also auch bei der Betrachtung der Prinzipien in der Gestalt der Arbeitsgleichung stets auf die explizite Form des ersten bzw. des zweiten Variationsprinzips zurückgreifen müssen, je nachdem, in welchem Sinne die Arbeitsgleichung jeweils angewendet wird.

Der erste Einwand gegen den erwähnten Vorschlag gründet sich auf die verschiedenen Geltungsbereiche der beiden Prinzipien und der Arbeitsgleichung. Das erste Prinzip gilt allgemein. Das zweite gilt nur für unendlich kleine Verformungen, d. h. nur für einen Teil des Geltungsbereichs des ersten Prinzips. Die beiden Prinzipien sind also nicht einander gleichgeordnet, sondern das zweite ist dem ersten untergeordnet, es ist nur eine an besondere Voraussetzungen geknüpfte Folgerung aus dem ersten Prinzip. Die Arbeitsgleichung endlich gilt nur für einen Teil des Geltungsbereichs des zweiten Prinzips, ist also beiden Prinzipien untergeordnet. Es ist daher unmöglich, auf dem Geltungsbereich der Arbeitsgleichung einen neuen, beide Prinzipien umfassenden theoretischen Oberbegriff aufzubauen, da dieser keines der beiden Prinzipien voll umschließen würde. Dem Bedürfnis der Praxis aber nach einer möglichst einfachen Zusammenfassung der beiden Prinzipien in einer Form, die für die große Mehrzahl der Fälle des täglichen Bedarfs ausreicht, dürfte Gl. 4. (1) mit dem ihr von Müller-Breslau verliehenen schlichten Namen „Arbeitsgleichung“ vollauf genügen.

Richtete sich der erste Einwand gegen die Grundlage des vorgeschlagenen neuen Oberbegriffs, so richtet sich der zweite gegen seine Bezeichnung. Unter virtueller Arbeit versteht man seit Lagrange diejenige Arbeit, die die im Gleichgewichtszustand tatsächlich vorhandenen Kräfte oder Spannungen eines Systems (in unserem Fall also die Größen $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$) bei einer gedachten kleinen Verrückung aus der Gleichgewichtslage leisten würden (bei dem vor-

liegenden Problem also [vgl. 1. (9) u. 1. (12)] die Größen $\int dV(\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_z \delta \gamma_z)$ und $\sum_n P_n \delta p_n$). Wir haben in dieser Darstellung eine ganze Reihe anderer Größen kennengelernt, die ebenfalls die Dimension einer Arbeit haben und ebenfalls gedachte Größen, also gedachte Arbeiten sind $(\int dV(\sigma_x \epsilon_x + \dots), \sum_n P_n p_n, \int dV(\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots), \sum_n p_n \delta P_n, \int dV \int (\epsilon_x d\sigma_x + \dots))$. Wollte man auch diese Größen als „virtuelle Arbeiten“ bezeichnen²⁶⁾, so könnte man nur eins erreichen: einen seit 150 Jahren eindeutig und klar umrissenen Begriff zu verwischen und dadurch Verwirrung anzurichten.

Die Gleichungen des ersten Prinzips, 1. (5) u. 1. (13), und ebenso die Arbeitsgleichung 4. (1), wenn man sie im Sinne des ersten Prinzips anwendet (wirkliche Spannungen und Kräfte, gedachte Verschiebungen), sind also Gleichungen zwischen virtuellen Arbeiten des untersuchten Systems. Nicht aber die Gleichungen des zweiten Prinzips, 3. (2) u. 3. (7), auch nicht die Arbeitsgleichung 4. (1), wenn man sie im Sinne des zweiten Prinzips anwendet (wirkliche Verschiebungen, gedachte Spannungen und Kräfte)!

Die in der Gleichung des zweiten Prinzips [vgl. 3. (2)] auftretenden Größen $\int dV(\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots)$ und $\sum_n p_n \delta P_n$ haben zwar die Dimension einer Arbeit und sind gedachte Größen. Aber sie sind nicht gedachte Arbeiten der im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen Spannungen und Kräfte.

Man kann natürlich auch die Größen des zweiten Prinzips als virtuelle Arbeiten deuten, wenn man durchaus will. Da beim zweiten Prinzip die tatsächlich eintretenden Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ als unendlich klein vorausgesetzt werden mußten, kann man sie — wie wir es bei der Ableitung der Arbeitsgleichung taten — als besonderes virtuelles Verschiebungssystem ansehen. Bei dieser Annahme sind auch die Größen $\int dV(\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots), \sum_n p_n \delta P_n$ virtuelle Arbeiten im klassischen Sinne des Begriffs. Aber sie sind nicht virtuelle Arbeiten des im Gleich-

gewicht tatsächlich vorhandenen Kräftesystems $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$, sondern eines vollständig anderen Kräftesystems $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_z, \delta P_n$. Dieses Kräftesystem ist nicht nur von dem tatsächlich im Gleichgewicht vorhandenen verschieden, es ist ihm nicht einmal benachbart. Denn auch wenn wir die Verformungen $\epsilon_x, \dots, \gamma_z, p_n$ unendlich klein voraussetzen, können — wie bekannt — die zugehörigen Spannungen und Kräfte $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ durchaus endliche Beträge haben. (Man braucht nur beim einachsigen Spannungszustand an die dem Hookeschen Gesetz entsprechende Beziehung $\sigma = \epsilon \cdot E$ und an die erhebliche Größe von E bei den gebräuchlichen Maßeinheiten zu denken.) Dagegen müßten die Spannungen und Kräfte $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_z, \delta P_n$ als unendlich klein vorausgesetzt werden. Will man also schon die Größen des zweiten Prinzips als virtuelle Arbeiten deuten, dann sind sie jedenfalls nicht die virtuellen Arbeiten der im Gleichgewichtszustand des untersuchten Systems wirklich vorhandenen Kräfte, sondern eines von diesen völlig, selbst größenordnungsmäßig verschiedenen Kräftesystems. Auch wenn man den Übergang vom zweiten Prinzip zur Arbeitsgleichung 4. (1) vollzieht, ändert sich daran nichts. Eigentlich muß man sich ja bei Anwendung der Arbeitsgleichung im Sinne des zweiten Prinzips alle Spannungen und Kräfte mit einem unendlich kleinen, gemeinsamen Proportionalitätsfaktor multipliziert denken. Dann bleiben die bisherigen Überlegungen wörtlich erhalten. Denkt man sich aber den Proportionalitätsfaktor herausgehoben, so werden die — nunmehr formal endlich großen — erdachten Spannungen und Kräfte im allgemeinen ebenfalls dem tatsächlichen Kräftesystem keineswegs benachbart sein²⁷⁾.

Will man also das zweite Prinzip als „Prinzip der virtuellen Arbeiten“ im klassischen Sinne deuten, so müßte man es nicht auf die im Gleichgewicht tatsächlich vorhandenen Kräfte anwenden, sondern auf irgendein beliebiges, ihnen nicht einmal benachbartes Gleichgewichtssystem von Kräften, die bei dieser Deutung den Charakter der Variation der gegebenen tatsächlichen Kräfte verlieren.

Während man also beim ersten Prinzip Gleichungen zwischen den virtuellen Arbeiten des untersuchten Systems erhält, ergeben sich bei dem zweiten Prinzip Gleichungen zwischen den virtuellen Arbeiten virtueller Ersatzsysteme, die von dem wirklichen System grundsätzlich verschieden und lediglich so ausgewählt sind, daß die mathematischen Operationen die gesuchten Ergebnisse für das wirkliche System liefern.

Es scheint mir keinen Gewinn an theoretischer Klarheit zu bedeuten, auf solcher Grundlage — der einzigen, auf der man den Begriff der virtuellen Arbeit für die Größen des zweiten Prinzips aufrechterhalten könnte — einen neuen theoretischen Begriff aufzubauen.

Übrigens geriete man bei dieser Deutung der Gl. 3. (2) auch in Widerspruch mit der Deutung als Extremalbedingung. Daß bei Gl. 3. (2) und daher auch bei der Arbeitsgleichung 4. (1), wenn man sie im Sinne des zweiten Prinzips anwendet (wirkliche Verschiebungen, gedachte Spannungen und Kräfte), nicht mehr von einem Minimum der potentiellen Energie die Rede sein kann, weil erstens ein Maximum und zweitens nicht das der potentiellen Energie gesucht wird, wurde bereits erwähnt. Deutet man aber Gl. 3. (2) als Gleichung zwischen virtuellen Arbeiten, so hat sie weder mit einem Minimum noch mit einem Maximum, weder der potentiellen Energie noch irgendeiner anderen Größe mehr etwas zu tun. Denn die Deutung der Gl. 3. (2) als Extremalbedingung ist mathematisch durch 3. (7) ausgedrückt. In dieser Gleichung aber sind B_1 und $A_e a$ nicht die Ergänzungsarbeit bzw. Endwertarbeit des willkürlichen Kräftesystems $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_z, \delta P_n$, sondern des im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen Kräftesystems $\sigma_x, \dots, \tau_z, P_n$ bzw. der ihm unmittelbar benachbarten Kräftesysteme $\sigma_x + \delta \sigma_x, \dots, \tau_z + \delta \tau_z, P_n + \delta P_n$.

Es gibt also nur drei Möglichkeiten: Entweder man bezieht Gl. 3. (2) und entsprechend Gl. 4. (1) bei Anwendung im Sinne des zweiten Prinzips bei der einen Deutung auf das wirkliche, zu untersuchende System, bei der anderen auf virtuelle Ersatzsysteme, die mit dem wirklichen System nichts mehr zu tun haben. Daß dies zur Klärung der theoretischen Begriffe beitragen sollte, kann ich mir nicht vorstellen. — Oder man gibt die anschauliche und einprägsame Deutung als Extremalbedingung preis. Dazu müßte man wohl schwerer wiegende Gründe haben als die Einführung eines neuen theoretischen Begriffs, der auch dann noch — gemäß dem ersten Einwand — unhaltbar erscheint. — Oder endlich, man verzichtet auf die künstliche und gesuchte Deutung der Größen des zweiten Prinzips als virtuelle Arbeiten und damit auch auf die Zusammenfassung beider Prinzipien unter der Bezeichnung eines Prinzips der virtuellen Arbeiten. Das Ergebnis ist also:

²⁴⁾ Kammüller, a. a. O. (Fußnote 13), S. 271, Zuschrift, Absatz 5: „Statt vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen würde man viel richtiger vom Prinzip der virtuellen Arbeiten sprechen, das dann auch vom theoretischen Standpunkt aus sowohl die Variation nach den Formänderungen wie auch nach den Kräften umfaßt.“ — Vgl. auch a. a. O., S. 272, Entgegnung, letzter Satz.

²⁵⁾ Schleusner, a. a. O. (Fußnote 13), S. 271, Erwiderung, letzter Absatz.

²⁶⁾ Kammüller, a. a. O. (Fußnote 13), S. 272, letzter Satz.

²⁷⁾ Hat man ein einfach statisch unbestimmtes System, so pflegt man als virtuelles Kräftesystem das System $P_1 = 0, P_2 = 0, \dots, X = -1$ und das mit diesen äußeren Kräften im Gleichgewicht stehende System von Spannungen zu wählen. Es ist offensichtlich, daß dieses System dem tatsächlich im Gleichgewicht vorhandenen Kräftesystem $P_1 = P_1, P_2 = P_2, \dots, X = X$ keineswegs benachbart ist.

Es gibt nur ein Prinzip, das alle Erscheinungen umfaßt: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen, im Falle vollkommener Elastizität deutbar als Bedingung für das Minimum der potentiellen Energie. Aus ihm läßt sich unter stark einschränkenden Voraussetzungen ein zweites Prinzip ableiten: Das Prinzip der virtuellen Kräfte, im Falle vollkommener Elastizität deutbar als Bedingung für das Maximum des Ausdrucks $(B_i - A_{e,a})$. Beide Prinzipien lassen sich unter nochmaliger erheblicher Einschränkung des Geltungsbereichs formal in eine einzige Gleichung zusammenfassen, die Arbeitsgleichung, die einer einheitlichen Deutung

nicht fähig ist, sondern je nach ihrer Anwendung im Sinne des ersten oder des zweiten Prinzips verschieden zu deuten ist. Für die praktische Anwendung ist die Arbeitsgleichung heute noch die wichtigste Gleichung von allen. Wer aber der theoretischen Klärung der Variationsprinzipien dienen will, kann sich als Grundlage kein ungeeignetes Objekt als die Arbeitsgleichung aussuchen. Er muß stets auf die Grundform der beiden Prinzipien und letzten Endes immer auf das grundlegende erste Prinzip, das Prinzip der virtuellen Verrückungen, zurückgreifen.

Zuschriften an die Schriftleitung

zum Aufsatz: Über Forschungsarbeiten zur Entwicklung von Schweißelektroden, insbesondere für den Stahlbau, von Dr.-Ing. Zeyen, Stahlbau 1938, S. 41 u. 59.

I.

In dem obengenannten Aufsatz berichtet Herr Dr.-Ing. Zeyen über Entwicklungsarbeiten der Firma Krupp und kommt hierbei auf die Baustellenarbeiten an der Strelasundbrücke im Zuge des Rügendamms (zehn Öffnungen von je 54 m Stützweite) zu sprechen, von der fünf Öffnungen durch die Firma Krupp, die anderen fünf durch die Brückenbauanstalt Dörnen erstellt worden sind. Die beiden Firmen haben die Baustellenarbeiten in grundsätzlich verschiedener Weise geleistet. Im vorliegenden Falle ist wesentlich, daß die Firma Krupp im Werk Hauptträgerstücke bis zu einer Länge von etwa 40 m fertig geschweißt hat. Aus diesen hat sie auf der Baustelle in Wälzringen zunächst zwei Stücke von je etwa 135 m Länge unter Vermeidung von Steh- und Überkopfnähten zusammengeschweißt. Die beiden Hälften hat sie dann senkrecht voreinander gestellt und den letzten Stoß (kenntlich an aufgebolzten Stegblechlaschen) in dieser Lage geschweißt, wobei naturgemäß nicht alle Nähte in waagerechter Lage von oben her geschweißt werden konnten. Dörnen hat die Hauptträger, wie bei der Brücke über den Ziegelgraben, in Längen bis zu rd. 62 m von Derne nach Stralsund geschafft, auf die Pfeiler gestellt und die Universalstöße in dieser Lage, also mit Steh- und Überkopfnähten geschweißt.

Zeyen vergleicht nun in einer Zusammenstellung, die er einer Veröffentlichung von Brückner in Bautechn. 1937, S. 336, entnommen hat, die Anzahl der Baustellennähte, die bei beiden Arbeitsvorgängen erneuert worden sind. Der Prozentsatz dieser Nähte beträgt bei Krupp 10% und 3,1%, bei Dörnen 50% und 25%. Diesen großen Unterschied führt Zeyen darauf zurück, daß Krupp die Nähte in Wälzringen alle von oben geschweißt hat, während Dörnen den größten Teil seiner Nähte als Steh- bzw. Überkopfnähte hat schweißen müssen. Dies steht im Widerspruch zu der Veröffentlichung Brückner, die Zeyen anführt. Brückner schreibt ausdrücklich, daß die Ursache die Verwendung von dünnen Elektroden ist, wie die damaligen Vorschriften sie verlangten. Denn nach Verwendung dickerer Elektroden, fährt Brückner fort, seien die Nähte durchaus einwandfrei gewesen. Diese schädliche Wirkung zu dünner Elektroden in den großen Querschnitten der Strelasundbrücke ist, wie Brückner schreibt, zu spät erkannt worden, weil es Dörnen nicht möglich war, früher eine seiner Röntgenanlagen für den Strelasund frei zu bekommen.

Zeyen bezeichnet sodann die ausgewechselten Nähte ohne Einschränkung als nicht einwandfrei. Tatsächlich ist aber nur ein kleiner Bruchteil der erneuerten Nähte nicht einwandfrei gewesen. Es wurden nämlich zur Ausbesserung der Fehlstellen, um Schrumpfspannungen aus äußeren Einspannungen möglichst zu vermeiden, einwandfreie Nähte mitgelöst. Wenn z. B. in einem Universalstoß eine fehlerhafte Stelle war, so wurde ohne Rücksicht auf den Umfang des Fehlers der ganze Stoß gelöst. In einem Falle wurde sogar der gegenüberliegende Universalstoß in der anderen Hauptträgerreihe vollständig mitgelöst, weil die beiden Hauptträger durch die Fahrbahn und die Verbände bereits miteinander verbunden waren. Die von Zeyen nach Brückner mit 50 bzw. 25 eingesetzten Prozentsätze für nicht einwandfreie Nähte enthalten aber diese einwandfreien Nähte. Ich habe bereits Gelegenheit gehabt, Herrn Zeyen auf diese irreführenden Darstellungen unmittelbar nach seinem Vortrag über den anstehenden Gegenstand vor dem Deutschen Ausschuss für Stahlbau in München am 10. Dezember 1937 aufmerksam zu machen.

Im Gegensatz zu der von Zeyen gebrachten Ansicht schreibt auch Reichsbahnrat J. Graf, der frühere Vorstand des Reichsbahn-Neubauamtes Rügendamm, im Ztrbl. d. Bauv. 1938, Heft 17, vom 27. April 1938:

„Die Röntgenaufnahmen der Nähte zeigten im allgemeinen gute Ergebnisse. Nur in einzelnen Fällen, wo anfangs mit zu dünner Elektrode geschweißt wurde, wurden Schlackenstellen festgestellt, die sich jedoch durch Auskreuzen und nochmaliges Verschweißen der Nähte restlos beseitigen ließen, wie die Nachröntung zeigte. Bei den übrigen Stößen, die mit stärkeren Elektroden geschweißt wurden, traten diese Mängel nicht mehr auf.“

Zeyen schreibt in seiner Veröffentlichung, daß die Schweißung in Wälzringen umständlich und teuer ist. Dies trifft zu, wenn man wie Krupp bei der Strelasundbrücke arbeitet. Man muß dann die Hauptträger zweimal in Wälzringe nehmen. Die Träger sind in der Werkstatt in Wälzringen zu schweißen, und auf der Baustelle sind die Wälzringe nochmals und nur für das Schweißen der Universalstöße nötig. In solchen Fällen empfiehlt es sich, für eine wirtschaftliche Herstellung die gesamten Schweißarbeiten auf die Baustelle zu verlegen.

Man ist dann in der Lage — schweißtechnisch ein sehr großer Vorteil! — Universalstöße zu vermeiden. Ich habe dieses Verfahren in mehreren Fällen erprobt und mich von seiner Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit überzeugen können und beziehe mich auf meine Ausführungen vor dem Internationalen Brückenkongreß Oktober 1936 in Berlin. Schließlich hat Krupp bei seinem Arbeitsverfahren, wie bereits oben erwähnt, den Gruppenstoß zwischen den beiden Hälften seines Anteils ja doch stehend schweißen müssen.

Für den Arbeitsvorgang Dörnen spricht heute weiter, daß jetzt — nach mehr als zwei Jahren — mit weiter entwickelten Mantelelektroden Steh- und Überkopfnähte mühelos und zuverlässig geschweißt werden können.

Dr.-Ing. A. Dörnen, Dortmund-Derne.

II.

Herr Dr.-Ing. Zeyen entnimmt aus meinem Aufsatz „Die Brücke über den Strelasund“ in Bautechn. 1937, Heft 26, zwei Tabellen, die den Umfang der von den beiden beteiligten Stahlbaufirmen an den Schweißnähten der Eisenbahnbrücke vorgenommenen Ausbesserungsarbeiten angeben. Er kommt auf Grund dieser Tabellen zu dem Schluß, daß der kleinere Umfang der Ausbesserungsarbeiten bei dem Anteil Krupp darauf zurückzuführen sei, daß die Firma unter Vermeidung von Überkopfschweißungen in Ringen geschweißt habe.

Diese Schlußfolgerung dürfte nicht gezogen werden, da ich in meinem Aufsatz ausdrücklich darauf hinwies, daß zunächst in der zweiten Lage mit zu dünnen Elektroden geschweißt worden sei, daß deshalb im Röntgenbild zuweilen zwei parallele, durchlaufende Schlackenstellen gefunden worden seien, daß wegen zu spätem Eintreffens der Röntgenanlage auf der Baustelle diese Mängel erst nach Herstellung des vierten Hauptträgerstoßes entdeckt worden seien und daß nach Verwendung von 4 mm dicken Elektroden in der zweiten Lage abgesehen von wenigen geringen und unbedeutenden Schlackeneinschlüssen keine Fehler mehr aufgetreten seien. Ich wies besonders darauf hin, daß sich der Umfang der Ausbesserungen nur aus dem Umstand der Verwendung einer zu dünnen Elektrode erklärt. Da die Firma Dörnen nur acht Hauptträgerstöße auf der Baustelle zu schweißen hatte, ist es klar, daß sie durch Änderung der Elektrodendicke nach Herstellung des vierten Stoßes den Anteil der Ausbesserungsarbeiten an dem Umfang der Gesamtschweißarbeiten nicht mehr wesentlich verbessern konnte.

Ergänzend zu meinen früheren Ausführungen möchte ich noch mitteilen, daß die beiden Tabellen die Länge der geöffneten Nähte und nicht die Länge der festgestellten Fehler angeben. Die Montageart der Firma Dörnen, bei der sofort die Verbände eingebaut wurden, erforderte es, daß bei einer späteren Ausbesserung eines ganzen Stoßes der entsprechende Stoß im gegenüberliegenden Hauptträger, auch wenn er nur geringe Fehler hatte, ebenfalls neu geschweißt werden mußte, damit die Brücke möglichst ihre gerade Lage beibehält und Spannungen im ganzen Überbau infolge der Verkürzung in nur einem Stoß vermieden wurden.

Brückner, Berlin.

Erwiderung.

Von dem Inhalt der beiden vorstehenden Zuschriften habe ich Kenntnis genommen. Ich möchte noch auf die Bemerkung in dem von mir angeführten Aufsatz von Brückner (Bautechn. 15 (1937), S. 337) über die nicht waagrecht geschweißten Baustellennähte hinweisen: „Die Überkopfschweißung wies im Röntgenbild das dafür typische, leicht porige Bild auf“. Eine solche Feststellung wird bei den waagrecht geschweißten Baustellennähten nicht gemacht. Poren in Schweißnähten sind bisher noch von keiner Seite als erstrebenswert angesehen worden, und es ergeben sich hieraus ohne weiteres entsprechende Folgerungen in bezug auf die Beurteilung der Güte von Waagrecht- und Überkopfschweißungen. Aus meinem Aufsatz geht hervor, daß meine Ausführungen über Schweißungen in nicht waagerechter Lage sich auf den Stand in der Elektroden-Entwicklung zur Zeit des Baues der Strelasundbrücke beziehen. Ich habe betont, daß in neuerer Zeit auch Mantelelektroden mit guter Überkopfschweißbarkeit entwickelt worden sind, und Dörnen bestätigt in seiner Zuschrift ja auch, daß solche Elektroden jetzt (nach mehr als 2 Jahren) zur Verfügung stehen. Dr.-Ing. Zeyen, Essen.

INHALT: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie. — Zuschriften an die Schriftleitung.

Verantwortlich für den Inhalt: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.

Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.