DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang | BERLIN, 28. April 1939 | Heft 9

Alle Rechte vorbehalten.

Ein Annäherungsverfahren zur Berechnung des Vierendeelträgers, gültig für beliebige Querschnittsverhältnisse und Belastung der Gurte auch außerhalb der Knotenpunkte.

Von Dr.-Ing. **Otto Braun**, Augsburg.

In meiner Dissertation[1]) habe ich die verschiedenen Möglichkeiten der Berücksichtigung nachträglicher Querschnittsänderungen bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke erläutert. Abgesehen von dem genauen Verfahren wurde hierbei auch die Möglichkeit erwähnt, die Spannungen des geänderten Tragwerkes aus denen des ursprünglichen verhältnismäßig leicht durch Annäherung zu errechnen. Ich habe dabei (S. 62 der Dissertation) die Vermutung ausgesprochen, für Querschnittsänderungen der Vertikalen des Vierendeelträgers werde dieses Annäherungsverfahren so gut konvergieren, daß sich darauf ein endgültiges Berechnungsverfahren aufbauen lasse, das gegenüber den sonst gebräuchlichen Vorteile biete. Das gilt insbesondere, wenn es sich um den allgemeinen Fall des Trägers mit nicht parallelen Gurten, beliebigen Querschnitten und Kraftangriff, gegebenenfalls auch außerhalb der Knotenpunkte, handelt. Es soll die Berechnung des Vierendeelträgers hier als Beispiel für die praktische Anwendung der in meiner Dissertation gegebenen Ableitungen angeführt werden, wobei diese Ableitungen nur so weit entwickelt werden, als es für die Berechnung dieser Trägerart notwendig ist. Die für jede beliebige Trägerart gültigen Ableitungen sind in meiner Dissertation zu finden.

Zur Berechnung wird vorausgesetzt, daß an den Vertikalen keine äußeren Lasten angreifen, eine Bedingung, die fast immer erfüllt sein wird. Die Untersuchung eines derartigen Lastfalles wäre zwar möglich, wird aber etwas umständlich und unterbleibt wegen seiner Seltenheit. Es wird sich im Verlauf der Untersuchung zeigen, daß man weitere Vereinfachungen erhält, wenn die Vertikalen symmetrisch zu ihrer Mitte (der horizontalen Achse) ausgebildet sind, was ebenfalls meist der Fall ist, und wenn man es als zulässig betrachtet, den Einfluß der Längung der Vertikalen (infolge Normalkräfte) als unwesentlich zu vernachlässigen. Die beiden letztgenannten Bedingungen sollen aber zunächst nicht als erfüllt gelten.

a) Erläuterung des Rechnungsganges.

Der Gedankengang, der zu dem Annäherungsverfahren führt, möge zunächst kurz erläutert werden:

Es wird zuerst statt des endgültigen Tragwerkes ein Ersatz-Vierendeelträger berechnet, der sich von dem endgültigen nur dadurch unterscheidet, daß seine Vertikalen starr sind. Dieses Ersatzsystem ist wesentlich einfacher zu berechnen als das vollelastische; denn wählt man die statisch unbestimmten Größen X_k, Y_k, Z_k wie in Bild 1 angegeben, wobei das Tragwerk mit einem in jedem Feld durchschnittenen Gurt statisch bestimmtes Hauptsystem ist, so erstrecken sich die M_k-Flächen infolge $X_k = 1$ bzw. $Y_k = 1$ bzw. $Z_k = 1$ jeweils nur über die Gurte des k^{ten} Feldes und die beiden Vertikalen, überdecken sich also mit den M_{k-1}-Flächen und M_{k+1}-Flächen der Nachbarfelder nur an den Vertikalen (vgl. a. Bild 2). Da diese starr sind ($J = \infty$), so werden in den Elastizitätsgleichungen die Verschiebungen $\delta_{k,\,k-1}$ und $\delta_{k,\,k+1}$ zu Null, d. h. die Elastizitätsgleichungen für X_k, Y_k, Z_k sind unabhängig von den übrigen. Wählt man außerdem diese drei Unbekannten X, Y, Z in jedem Felde so, daß auch δ_{xy}, δ_{xz} und δ_{yz} verschwinden, d. h. läßt man sie im elastischen Schwerpunkte des Einzelrahmens mit starren Vertikalen angreifen, so erhält man lauter voneinander unabhängige Elastizitätsgleichungen. Nach dieser Wahl der statisch unbestimmten Größen fällt jede weitere Gleichungsauflösung weg, und die Spannungen des Ersatzsystems könnten vermittels X, Y, Z berechnet werden. Diese Spannungen des Ersatzsystems unterscheiden sich noch von denen des endgültigen vollelastischen Systems. Es ist aber möglich, im Ersatzsystem den endgültigen Spannungszustand herzustellen, z. B. indem man sämtliche starren Vertikalen durchschneidet und die durch den Schnitt getrennten Querschnitte gegeneinander verschiebt. Bei jeder Vertikalen sind drei derartige Verschiebungen möglich, nämlich eine Längsverschiebung, eine Querverschiebung und eine Winkeldrehung der durch den Schnitt getrennten Querschnitte. Wenn sie bekannt wären, so könnte man aus den Elastizitätsgleichungen des Ersatzsystems die Spannungen des endgültigen vollelastischen Systems errechnen.

Um diese Verschiebungen, die der Querschnittsänderung von den starren zu den elastischen Vertikalen gleichwertig sind, zu bestimmen, könnte man Elastizitätsgleichungen aufstellen, welche die Verschiebungen als Unbekannte enthalten. Da hierbei Verschiebungen als Unbekannte auftreten, so gehören diese Gleichungen der Deformationsmethode an. Dieser exakte Weg ist in meiner Dissertation beschrieben. Er ist hier unzweckmäßig, weil die Gleichungen zu umfangreich werden, denn jede Vertikale liefert drei unbekannte Verschiebungen.

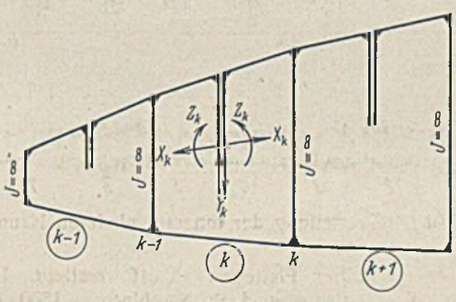


Bild 1.

Statt dieses umständlichen, genauen Verfahrens kommt man zu einem guten Annäherungsverfahren durch folgende Überlegung: Wegen des geringen Einflusses der Vertikalen werden die bekannten Spannungen des Ersatzsystems von den noch nicht bekannten endgültigen nicht sehr stark abweichen. Es läßt sich aber zeigen, daß die gesuchten Verschiebungen von den endgültigen Spannungen abhängig sind. Sie lassen sich als Funktionen der im Schnitt der Vertikalen auftretenden endgültigen Kräfte (Normalkräfte, Querkräfte und Biegungsmomente) ausdrücken. Da weiterhin die statisch unbestimmten Größen wieder von den Verschiebungen abhängen, so ist es möglich, die Änderung der statisch unbestimmten Größen selbst als Funktionen dieser endgültigen Schnittkräfte (der Vertikalen) auszudrücken. Formt man die erhaltenen Gleichungen noch etwas um, und setzt man für die Schnittkräfte zunächst diejenigen des Ersatzsystems ein, so erhält man Näherungswerte für die durch den Übergang von den starren zu den elastischen Vertikalen bedingten Änderungen der statisch unbestimmten Größen. Damit kann man wieder verbesserte Schnittkräfte errechnen und mit diesen dann wieder genauere statisch unbestimmte Größen usw., bis genügende Genauigkeit erreicht ist. Wie diese Annäherung im einzelnen zu erfolgen hat, um möglichst gute Konvergenz zu erreichen, ist später ausführlich angegeben.

Der Rechnungsgang wird kurz zusammengefaßt folgender: Man stellt die voneinander unabhängigen Elastizitätsgleichungen des Ersatzsystems mit starren Vertikalen auf und bestimmt die Kräfte für irgendeinen Querschnitt der Vertikalen, meist für die Mitte. Zur Berücksichtigung der Elastizität der Vertikalen, d. h. zur Berücksichtigung ihrer Querschnittsänderung drückt man die Änderung der statisch unbestimmten Größen als Funktion der endgültigen Schnittkräfte der Vertikalen aus

[1]) O. Braun, Nachträgliche Querschnitts- und Systemänderungen statisch unbestimmter Tragwerke, insbesondere Systeme mit veränderlicher Gliederung und abgespannte Konstruktionen. Ein Beitrag zur Deformationsmethode. Diss. Berlin 1936.

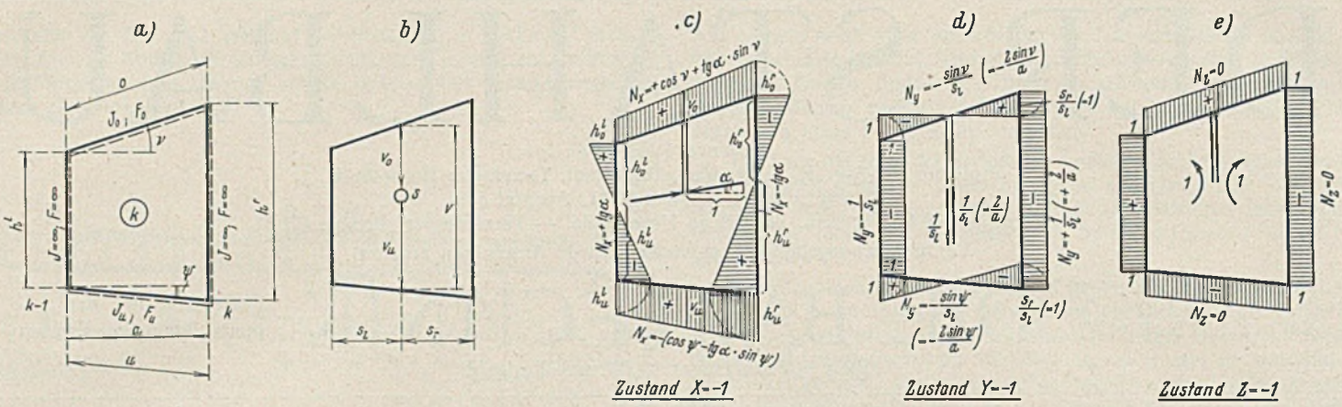


Bild 2a bis e.

und formt die Gleichungen etwas um. Die ersten Näherungswerte für die Änderung der Unbekannten erhält man, indem man als Schnittkräfte zunächst die des Ersatzsystems einsetzt. Die genauen Werte ergeben sich durch fortlaufende Verbesserung in der später angegebenen Reihenfolge.

b) Die Berechnung des Ersatzsystems.

Zur Aufstellung der voneinander unabhängigen Elastizitätsgleichungen des Ersatzsystems mit starren Vertikalen müssen die statisch unbestimmten Größen jeweils im elastischen Schwerpunkt des Einzelrahmens angreifen. Der Bestimmung des Schwerpunktes und der Art des Angriffes der Unbekannten diene Bild 2. Momente, die auf der gestrichelten Seite der Stäbe Zug erzeugen, seien positiv.

Für sämtliche Vertikalen ist $J = \infty$, also ergibt sich durchweg $h \cdot \frac{J_c}{J} = 0$. Die Lage des Schwerpunktes hängt nur von den Gurtstäben ab. In dem einfachen, meist vorliegenden Fall, daß diese jeweils auf die Feldweite konstanten Querschnitt haben und nicht gekrümmt sind, wird man folgende Hilfswerte einführen:

$$o' = o \cdot \frac{J_c}{J_o} \quad \text{und} \quad u' = u \cdot \frac{J_c}{J_u}$$

sowie

$$o'' = o \cdot \frac{J_c}{F_o} \quad \text{und} \quad u'' = u \cdot \frac{J_c}{F_u},$$

wobei o und u die Stablängen sind. Die Lage des elastischen Schwerpunktes erhält man aus den Bedingungen $\delta_{xz} = 0$ und $\delta_{yz} = 0$. Da die Gurte infolge $Z = -1$ nur Biegungs-, keine Normal- oder Schubspannungen haben, so ist die Schwerpunktslage nur abhängig von den Trägheitsmomenten der Gurte, nicht von ihren Querschnitten.

Aus $\delta_{yz} = \int M_y M_z \, ds \cdot \frac{J_c}{J} = 0$ folgt

$$s_l = s_r = \frac{a}{2}. \tag{1}$$

Aus $\delta_{xz} = 0$ folgt $u' v_u = o' v_o$ oder $\frac{v_u}{v_o} = \frac{o'}{u'}$.

Es ist $v_u + v_o = v$, also:

$$v_u = \frac{o'}{o' + u'} \cdot v. \tag{2}$$

Hierbei ist $v = \frac{1}{2}(h^l + h^r)$.

Damit ist die Lage des elastischen Schwerpunktes bekannt, und man kann bereits δ_{yy} und δ_{zz} bestimmen. Bei Vernachlässigung des Einflusses der Querkräfte ist:

$$\delta_{yy} = \int M_y^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_y^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{F}$$
$$= 1^2 \left(\frac{o'}{3} + \frac{u'}{3}\right) + o'' \cdot \frac{4 \cdot \sin^2 \nu}{a^2} + u'' \cdot \frac{4 \cdot \sin^2 \psi}{a^2}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{yy} &= \frac{o' + u'}{3} + \frac{4}{a^2}(o'' \cdot \sin^2 \nu + u'' \cdot \sin^2 \psi) \\ \delta_{zz} &= o' + u' \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Die Neigung α der Unbekannten X gegen die Horizontale ergibt sich aus der Bedingung $\delta_{xy} = \int M_x M_y \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_x N_y \, ds \cdot \frac{J_c}{F} = 0$. (Wenn es erforderlich erscheint, könnte auch der Einfluß der Querkräfte berücksichtigt werden.) Die Unbekannte sei so gewählt, daß im Zustand $X = 1$ ihre Horizontalkomponente 1 ist. Dann ist die Vertikalkomponente gleichzeitig $\operatorname{tg} \alpha$. Man kann also den Zustand $X = -1$ des Bildes 2 in die in Bild 3 dargestellten beiden Teilzustände zerlegen, von denen der zweite der $(-s_l \cdot \operatorname{tg} \alpha)$-fache Zustand $Y = -1$ ist, während der erste mit $\bar{X} = -1$ bezeichnet sei.

Dementsprechend läßt sich δ_{xy} zusammensetzen aus:

$$\delta_{xy} = \delta_{\bar{x}y} - s_l \cdot \operatorname{tg} \alpha \, \delta_{yy} = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta_{\bar{x}y}}{s_l \delta_{yy}} = \frac{2 \delta_{\bar{x}y}}{a \, \delta_{yy}}. \tag{4}$$

Der Wert δ_{yy} wurde bereits ermittelt [Formel (3)]. Weiterhin wird

$$\delta_{\bar{x}y} = \int M_{\bar{x}} M_y \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_{\bar{x}} N_y \, ds \cdot \frac{J_c}{F}$$
$$= d_o \cdot 1 \cdot \frac{o'}{3} - d_u \cdot 1 \cdot \frac{u'}{3} - o'' \cdot \frac{2}{a} \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu + u'' \cdot \frac{2}{a} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi$$

$$\delta_{\bar{x}y} = \frac{1}{3}(d_o o' - d_u u') + \frac{2}{a}(u'' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - o'' \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu),$$

hierbei ist $d_o = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \nu \qquad d_u = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi.$

$$\delta_{\bar{x}y} = \frac{a}{6}(o' \cdot \operatorname{tg} \nu - u' \cdot \operatorname{tg} \psi) + \frac{2}{a}(u'' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - o'' \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu). \tag{5}$$

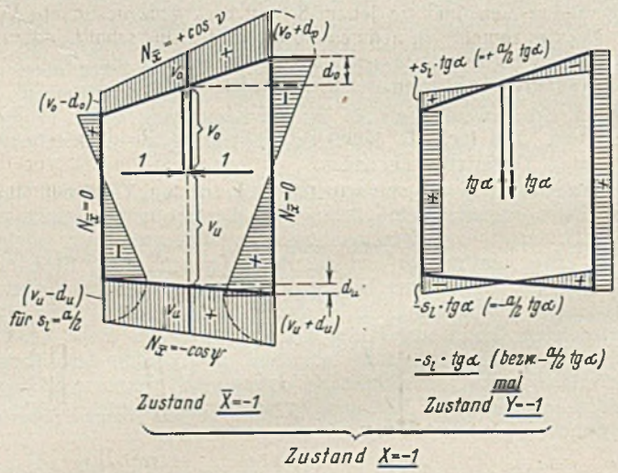


Bild 3.

Nachdem damit auch $\operatorname{tg} \alpha$ bekannt ist, läßt sich die M_x-Fläche von Bild 2 und δ_{xx} bestimmen. Man erhält zunächst:

$$\left\{ \begin{aligned} h_u^r &= v_u + \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi + \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = v_u + \frac{a}{2}(\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \alpha) \\ h_u^l &= v_u - \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi - \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = v_u - \frac{a}{2}(\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \alpha) \\ h_o^r &= h^r - h_u^r \\ h_o^l &= h^l - h_u^l. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Dann ist: $\delta_{xx} = \int M_x^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_x^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{F}$.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{xx} = \frac{o'}{3}\left(h_o^{l^2} + h_o^l h_o^r + h_o^{r^2}\right) + \frac{u'}{3}\left(h_u^{l^2} + h_u^l h_u^r + h_u^{r^2}\right) + \\ + o''(\cos \nu + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \nu)^2 + u''(\cos \psi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \psi)^2. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Die Elastizitätsgleichungen für die drei Unbekannten von irgendeinem Feld des Vierendeelträgers mit starren Vertikalen lauten:

$$X = \frac{\delta_{ox}}{\delta_{xx}} \qquad Y = \frac{\delta_{oy}}{\delta_{yy}} \qquad Z = \frac{\delta_{oz}}{\delta_{zz}}, \tag{8}$$

δ_{ox}, δ_{oy} und δ_{oz} sind die δ-Werte infolge der äußeren Belastung, z. B. ist $\delta_{ox} = \int M_o M_x \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_o N_x \, ds \cdot \frac{J_c}{F} + \ldots$, wobei M_o und

N_o Momente und Normalkräfte des Vierendeelträgers mit aufgeschnittenem Gurt, d. h. eines Balkens auf zwei Stützen sind.

Nachdem die statisch unbestimmten Größen bekannt sind, wäre es möglich, alle Kräfte des Ersatzsystems zu ermitteln. Für die weitere Untersuchung benötigen wir lediglich die Kräfte in den Schnitten der Vertikalen, an denen wir die Verschiebungen vornehmen. Wenn die Querschnitte der Vertikalen zu ihrer Mitte (und zwar zur horizontalen Achse) symmetrisch sind, was fast immer der Fall sein wird, so durchschneiden wir die Vertikalen in der Mitte und bestimmen an jeder Schnittstelle die Querkraft und das Biegungsmoment. Den Einfluß der Normalkräfte wird man immer vernachlässigen können. Für die Mitte der k^{ten} Vertikalen ergibt sich nach Bild 2:

$$(9)\quad \begin{cases} Q_k = Q_{ok} + X_k - X_{k+1} \\ M_k = M_{ok} - \frac{1}{2}\left(h_u^r - h_o^r\right)_k X_k + \frac{1}{2}\left(h_u^l - h_o^l\right)_{k+1} X_{k+1} + \\ \qquad\qquad + Y_k + Y_{k+1} + Z_k - Z_{k+1} \\ \text{gegebenenfalls} \\ N_k = N_{ok} + X_k \cdot \operatorname{tg}\alpha_k - X_{k+1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{k+1} - \frac{2}{a} \cdot Y_k + \frac{2}{a} \cdot Y_{k+1}. \end{cases}$$

Wenn die Vertikale nicht zu ihrer Mitte symmetrisch ist, so wird der Schnitt, wie weiter unten ausgeführt ist, an eine andere Stelle gelegt. Es ändert sich dann nur die Formel für M_k, die an Hand von Bild 2 leicht aufgestellt werden kann.

Sämtliche Formeln wurden abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die Gurte zwischen den Knotenpunkten gerade sind und auf die Feldweite konstanten Querschnitt haben. Falls sie gekrümmt sind oder man ausnahmsweise eine Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes innerhalb der einzelnen Felder berücksichtigen will, erhält man die elastischen Schwerpunkte und die $\operatorname{tg}\alpha$-, sowie die δ-Werte nach denselben Überlegungen. Auch der Einfluß der Schubspannungen läßt sich leicht berücksichtigen.

c) Die Berücksichtigung der Elastizität der Vertikalen.

Wie erwähnt, erhalten wir die Spannungen des endgültigen Systems aus denen des Ersatzsystems, indem wir seine sämtlichen starren Vertikalen durchschneiden und an jedem Schnitt drei ganz bestimmte Verschiebungen vornehmen. Wir nehmen an, diese der Querschnittsänderung gleichwertigen Verschiebungen seien uns bereits bekannt. Für den Schnitt irgendeiner starren Vertikalen seien sie bezeichnet mit δ_q, δ_m und δ_n (vgl. Bild 4).

Hierbei bedeutet δ_q die Querverschiebung in Richtung der am Schnitt vorhandenen Querkraft Q, δ_m die Winkeldrehung in Richtung des Momentes M und δ_n die Längsverschiebung in Richtung der Normalkraft N.

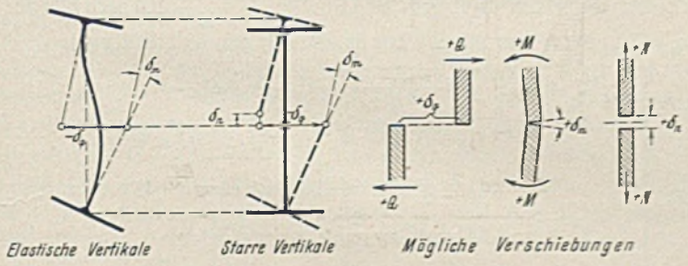


Bild 4.

Mehr als diese drei Verschiebungen sind an einem Schnitt nicht möglich. (Für die Kräfte Q, M, N werden hier, wie üblich, große Buchstaben verwendet, im Gegensatz zu meiner Dissertation, wo die Kräfte, um bei anderen Ableitungen eine klarere Schreibweise zu erhalten, mit den kleinen Buchstaben a bis r bezeichnet worden waren.)

Nun soll festgestellt werden, welchen Einfluß diese drei Verschiebungen im Ersatzsystem auf die benachbarten statisch unbestimmten Größen haben. Wir hatten z. B. für die statisch unbestimmte Größe X ermittelt $X = \frac{\delta_{ox}}{\delta_{xx}}$ oder $\delta_{xx} X = \delta_{ox}$, wobei δ_{ox} die Verschiebung des statisch bestimmten Hauptsystems in Richtung von $-X$ infolge der äußeren Belastung ist. Würde es sich um ein System handeln, bei dem Auflagersenkungen von Einfluß sind, so würde die Elastizitätsgleichung lauten: $\delta_{xx} X = \delta_{ox} + L_x$, wobei L_x den Einfluß der Auflagersenkungen darstellt. L_x ist hierbei die Verschiebung des Angriffspunktes von X in Richtung von $-X$, verursacht durch die Auflagersenkungen, und zwar im statisch bestimmten Hauptsystem. Am einfachsten ist die Verschiebung L_x nach der Arbeitsgleichung zu bestimmen. Sind die bekannten Lagersenkungen bezeichnet mit δ_q, δ_m und δ_n und haben die zugehörigen Auflagerkräfte infolge $X = -1$ die Größe Q_x, M_x und N_x, so ist nach der Arbeitsgleichung die Verschiebung des statisch bestimmten Hauptsystems in Richtung von $-X$: $1\, L_x = Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n$. In meiner Dissertation wurde L noch in etwas anschaulicherer Weise an Hand der Stützensenkungen eines durchlaufenden Trägers abgeleitet (vgl. S. 5 u. f.). Nach Bestimmung von L_x ergibt sich die Änderung der statisch unbestimmten Größe infolge der Stützensenkungen δ_q, δ_m und δ_n aus $\delta_{xx} X' = L_x = Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n$. (Die Änderung der Unbekannten ist mit X' bezeichnet.) Sind δ_q, δ_m und δ_n nicht Stützensenkungen, sondern die als bekannt vorausgesetzten Verschiebungen am Schnitt einer der Vertikalen und Q_x, M_x und N_x die an diesem Schnitt vorhandenen Kräfte infolge $X = -1$, so läßt sich X' in gleicher Weise ableiten.

Wie aus Bild 2 zu ersehen ist, treten infolge $X = -1$ nur in zwei Vertikalen Spannungen auf. Die Momente erstrecken sich nur über ein Rahmenfeld. Da in den weiter weg liegenden Vertikalen infolge $X = -1$ keine Kräfte auftreten, d. h. $Q_x = M_x = N_x = 0$ sind, so sind Verschiebungen in diesen Stäben ohne Einfluß auf X'. Die Änderung der Unbekannten ist nur abhängig von den Verschiebungen der beiden zum Rahmenfeld gehörigen Pfosten. Unterscheiden wir die zur linken bzw. rechten Vertikalen des Feldes gehörigen Werte durch die Beiziffern l bzw. r, so ergibt sich die Änderung X' der statisch unbestimmten Größe aus:

$$(10)\quad \begin{cases} \delta_{xx} X' = (Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n)_l + (Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n)_r. \\ \text{In gleicher Weise läßt sich ableiten:} \\ \delta_{yy} Y' = (Q_y \delta_q + M_y \delta_m + N_y \delta_n)_l + (Q_y \delta_q + M_y \delta_m + N_y \delta_n)_r \\ \delta_{zz} Z' = (Q_z \delta_q + M_z \delta_m + N_z \delta_n)_l + (Q_z \delta_q + M_z \delta_m + N_z \delta_n)_r. \end{cases}$$

Hierbei ist z. B. Q_y in der Klammer mit der Beiziffer l die Querkraft am Schnitt der linken Vertikalen infolge $Y = -1$.

Wenn sämtliche Verschiebungen δ_q, δ_m und δ_n bekannt wären, könnte man die dadurch bedingte Änderung der statisch unbestimmten Größen mit den vorstehenden Gleichungen errechnen. Es sind also jetzt diese der Querschnittsänderung von den starren zu den elastischen Vertikalen gleichwertigen Verschiebungen zu bestimmen.

Die Verschiebungen sind so zu wählen, daß die Spannungen im Ersatzsystem und im endgültigen System gleich sind. Beide Systeme unterscheiden sich nur in der Elastizität der Vertikalen. Die Gurte sind gleich. Unter dem Einfluß derselben Spannungen müssen somit die Gurte beider Systeme auch die gleichen Formänderungen aufweisen, vor allem müssen die Ober- und Untergurtknotenpunkte beider Systeme dieselben Verschiebungen und Winkeldrehungen ausführen. Wir können also auch sagen: Die Verschiebungen am Schnitt der starren Vertikalen sind so zu wählen, daß die Knotenpunkte des belasteten Ersatzsystems dieselbe Lage haben wie die des belasteten endgültigen Systems. Dann treten in den Gurten und zwangläufig auch in den Vertikalen des Ersatzsystems dieselben Spannungen auf wie im endgültigen.

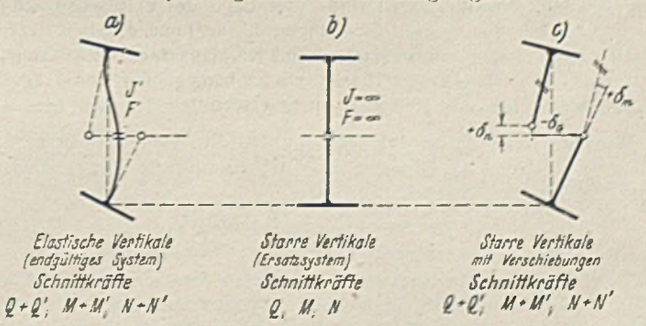


Bild 5a bis c.

Welche Verschiebungen am Schnitt der starren Vertikalen vorzunehmen sind, damit die Ober- und Untergurtknotenpunkte des Ersatzsystems dieselbe Lage haben wie die des endgültigen, kann man sich am besten an Hand von Bild 5 klarmachen. (Auch in Bild 4 sind diese Verschiebungen bereits angedeutet worden.)

Bild 5a zeigt die Lage einer Vertikalen des endgültigen vollelastischen Systems mit anschließendem Ober- und Untergurt unter dem Einfluß der äußeren Belastung. Bild 5b zeigt die Lage der starren Vertikalen des Ersatzsystems unter dem Einfluß derselben äußeren Belastung. Die beliebig gewählte Schnittstelle, an der die Verschiebungen vorgenommen werden sollen, ist bereits angedeutet. Bild 5c zeigt, welche Verschiebungen erforderlich sind, damit die Gurte dieselbe Lage haben wie in Bild 5a.

Am einfachsten ist die Längsverschiebung δ_n zu bestimmen. Die Normalkraft der Vertikalen des Ersatzsystems ist N. Sie wurde am Schluß von Abschnitt b errechnet [Gl. (9)]. Da die Vertikale starr ist, so hat sie sich unter dem Einfluß von N nicht gelängt. Die Normalkraft der Vertikalen des endgültigen Systems unterscheide sich von der des Ersatzsystems um N', sie ist also $N + N'$. Unter ihrem Einfluß längt sich die elastische Vertikale um $(N + N')\frac{h}{EF'}$. Hierbei ist h die Stablänge, F' der Querschnitt der endgültigen Vertikalen. Die starre Vertikale muß also am Schnitt um $\delta_n = (N + N')\frac{h}{EF'}$ auseinandergedrückt (verlängert) werden, um dieselbe Länge zu haben wie die elastische. Beim Auf-

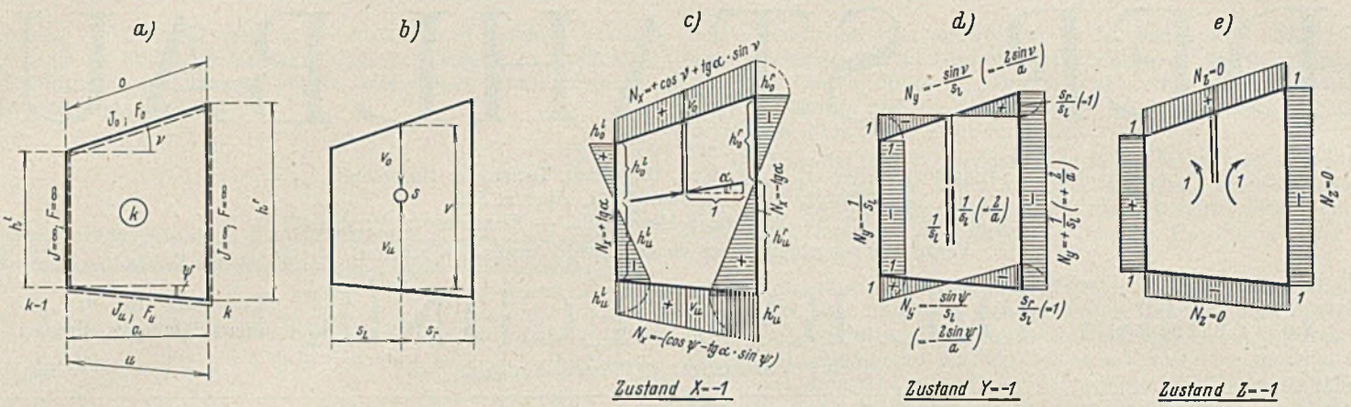


Bild 2a bis e.

und formt die Gleichungen etwas um. Die ersten Näherungswerte für die Änderung der Unbekannten erhält man, indem man als Schnittkräfte zunächst die des Ersatzsystems einsetzt. Die genauen Werte ergeben sich durch fortlaufende Verbesserung in der später angegebenen Reihenfolge.

b) Die Berechnung des Ersatzsystems.

Zur Aufstellung der voneinander unabhängigen Elastizitätsgleichungen des Ersatzsystems mit starren Vertikalen müssen die statisch unbestimmten Größen jeweils im elastischen Schwerpunkt des Einzelrahmens angreifen. Der Bestimmung des Schwerpunktes und der Art des Angriffes der Unbekannten diene Bild 2. Momente, die auf der gestrichelten Seite der Stäbe Zug erzeugen, seien positiv.

Für sämtliche Vertikalen ist $J = \infty$, also ergibt sich durchweg $h \cdot \frac{J_c}{J} = 0$. Die Lage des Schwerpunktes hängt nur von den Gurtstäben ab. In dem einfachen, meist vorliegenden Fall, daß diese jeweils auf die Feldweite konstanten Querschnitt haben und nicht gekrümmt sind, wird man folgende Hilfswerte einführen:

$$o' = o \cdot \frac{J_c}{J_o} \quad \text{und} \quad u' = u \cdot \frac{J_c}{J_u}$$

sowie

$$o'' = o \cdot \frac{J_c}{F_o} \quad \text{und} \quad u'' = u \cdot \frac{J_c}{F_u},$$

wobei o und u die Stablängen sind. Die Lage des elastischen Schwerpunktes erhält man aus den Bedingungen $\delta_{xz} = 0$ und $\delta_{yz} = 0$. Da die Gurte infolge $Z = -1$ nur Biegungs-, keine Normal- oder Schubspannungen haben, so ist die Schwerpunktslage nur abhängig von den Trägheitsmomenten der Gurte, nicht von ihren Querschnitten.

Aus $\delta_{yz} = \int M_y M_z \, ds \cdot \frac{J_c}{J} = 0$ folgt

$$s_l = s_r = \frac{a}{2}. \tag{1}$$

Aus $\delta_{xz} = 0$ folgt $u' v_u = o' v_o$ oder $\frac{v_u}{v_o} = \frac{o'}{u'}$.

Es ist $v_u + v_o = v$, also:

$$v_u = \frac{o'}{o' + u'} \cdot v. \tag{2}$$

Hierbei ist $v = \frac{1}{2}(h^l + h^r)$.

Damit ist die Lage des elastischen Schwerpunktes bekannt, und man kann bereits δ_{yy} und δ_{zz} bestimmen. Bei Vernachlässigung des Einflusses der Querkräfte ist:

$$\delta_{yy} = \int M_y^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_y^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{F}$$
$$= 1^2 \left(\frac{o'}{3} + \frac{u'}{3}\right) + o'' \cdot \frac{4 \cdot \sin^2 \nu}{a^2} + u'' \cdot \frac{4 \cdot \sin^2 \psi}{a^2}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{yy} &= \frac{o' + u'}{3} + \frac{4}{a^2}(o'' \cdot \sin^2 \nu + u'' \cdot \sin^2 \psi) \\ \delta_{zz} &= o' + u' \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Die Neigung α der Unbekannten X gegen die Horizontale ergibt sich aus der Bedingung $\delta_{xy} = \int M_x M_y \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_x N_y \, ds \cdot \frac{J_c}{F} = 0$. (Wenn es erforderlich erscheint, könnte auch der Einfluß der Querkräfte berücksichtigt werden.) Die Unbekannte sei so gewählt, daß im Zustand $X = 1$ ihre Horizontalkomponente 1 ist. Dann ist die Vertikalkomponente gleichzeitig $\operatorname{tg} \alpha$. Man kann also den Zustand $X = -1$ des Bildes 2 in die in Bild 3 dargestellten beiden Teilzustände zerlegen, von denen der zweite der $(-s_l \cdot \operatorname{tg} \alpha)$-fache Zustand $Y = -1$ ist, während der erste mit $\bar{X} = -1$ bezeichnet sei.

Dementsprechend läßt sich δ_{xy} zusammensetzen aus:

$$\delta_{xy} = \delta_{\bar{x}y} - s_l \cdot \operatorname{tg} \alpha \, \delta_{yy} = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta_{\bar{x}y}}{s_l \, \delta_{yy}} = \frac{2 \, \delta_{\bar{x}y}}{a \, \delta_{yy}}. \tag{4}$$

Der Wert δ_{yy} wurde bereits ermittelt [Formel (3)]. Weiterhin wird

$$\delta_{\bar{x}y} = \int M_{\bar{x}} M_y \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_{\bar{x}} N_y \, ds \cdot \frac{J_c}{F}$$
$$= d_o \cdot 1 \cdot \frac{o'}{3} - d_u \cdot 1 \cdot \frac{u'}{3} - o'' \cdot \frac{2}{a} \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu + u'' \cdot \frac{2}{a} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi$$

$$\delta_{\bar{x}y} = \frac{1}{3}(d_o \, o' - d_u \, u') + \frac{2}{a}(u'' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - o'' \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu),$$

hierbei ist $d_o = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \nu$ $\quad d_u = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi$.

$$\delta_{\bar{x}y} = \frac{a}{6}(o' \cdot \operatorname{tg} \nu - u' \cdot \operatorname{tg} \psi) + \frac{2}{a}(u'' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - o'' \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu). \tag{5}$$

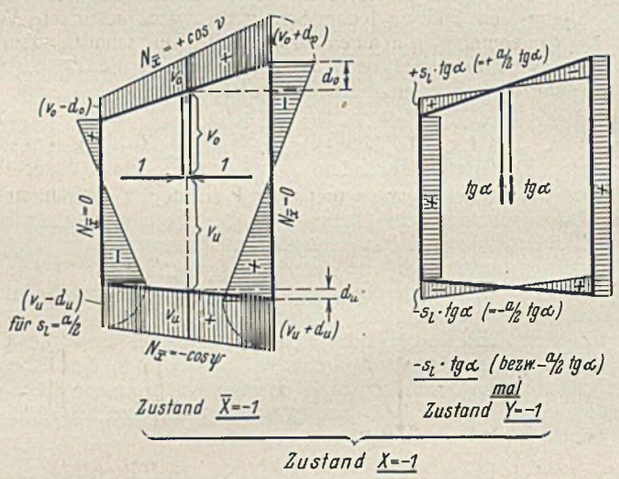


Bild 3.

Nachdem damit auch $\operatorname{tg} \alpha$ bekannt ist, läßt sich die M_x-Fläche von Bild 2 und δ_{xx} bestimmen. Man erhält zunächst:

$$\left\{ \begin{aligned} h_u^r &= v_u + \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi + \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = v_u + \frac{a}{2}(\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \alpha) \\ h_u^l &= v_u - \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \psi - \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = v_u - \frac{a}{2}(\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \alpha) \\ h_o^r &= h^r - h_u^r \\ h_o^l &= h^l - h_u^l. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Dann ist: $\delta_{xx} = \int M_x^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_x^2 \, ds \cdot \frac{J_c}{F}$.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{xx} = \frac{o'}{3}\left(h_o^{l2} + h_o^l h_o^r + h_o^{r2}\right) + \frac{u'}{3}\left(h_u^{l2} + h_u^l h_u^r + h_u^{r2}\right) + \\ + o''(\cos \nu + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \nu)^2 + u''(\cos \psi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \psi)^2. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Die Elastizitätsgleichungen für die drei Unbekannten von irgendeinem Feld des Vierendeelträgers mit starren Vertikalen lauten:

$$X = \frac{\delta_{ox}}{\delta_{xx}} \qquad Y = \frac{\delta_{oy}}{\delta_{yy}} \qquad Z = \frac{\delta_{oz}}{\delta_{zz}}, \tag{8}$$

δ_{ox}, δ_{oy} und δ_{oz} sind die δ-Werte infolge der äußeren Belastung, z. B. ist $\delta_{ox} = \int M_o M_x \, ds \cdot \frac{J_c}{J} + \int N_o N_x \, ds \cdot \frac{J_c}{F} + \ldots$, wobei M_o und

N_o Momente und Normalkräfte des Vierendeelträgers mit aufgeschnittenem Gurt, d. h. eines Balkens auf zwei Stützen sind.

Nachdem die statisch unbestimmten Größen bekannt sind, wäre es möglich, alle Kräfte des Ersatzsystems zu ermitteln. Für die weitere Untersuchung benötigen wir lediglich die Kräfte in den Schnitten der Vertikalen, an denen wir die Verschiebungen vornehmen. Wenn die Querschnitte der Vertikalen zu ihrer Mitte (und zwar zur horizontalen Achse) symmetrisch sind, was fast immer der Fall sein wird, so durchschneiden wir die Vertikalen in der Mitte und bestimmen an jeder Schnittstelle die Querkraft und das Biegungsmoment. Den Einfluß der Normalkräfte wird man immer vernachlässigen können. Für die Mitte der k^{ten} Vertikalen ergibt sich nach Bild 2:

$$(9)\quad \begin{cases} Q_k = Q_{ok} + X_k - X_{k+1} \\ M_k = M_{ok} - \frac{1}{2}\left(h_u^r - h_o^r\right)_k X_k + \frac{1}{2}\left(h_u^l - h_o^l\right)_{k+1} X_{k+1} + \\ \qquad\qquad + Y_k + Y_{k+1} + Z_k - Z_{k+1} \\ \text{gegebenenfalls} \\ N_k = N_{ok} + X_k \cdot \operatorname{tg}\alpha_k - X_{k+1} \cdot \operatorname{tg}\alpha_{k+1} - \frac{2}{a} \cdot Y_k + \frac{2}{a} \cdot Y_{k+1}. \end{cases}$$

Wenn die Vertikale nicht zu ihrer Mitte symmetrisch ist, so wird der Schnitt, wie weiter unten ausgeführt ist, an eine andere Stelle gelegt. Es ändert sich dann nur die Formel für M_k, die an Hand von Bild 2 leicht aufgestellt werden kann.

Sämtliche Formeln wurden abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die Gurte zwischen den Knotenpunkten gerade sind und auf die Feldweite konstanten Querschnitt haben. Falls sie gekrümmt sind oder man ausnahmsweise eine Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes innerhalb der einzelnen Felder berücksichtigen will, erhält man die elastischen Schwerpunkte und die $\operatorname{tg}\alpha$-, sowie die δ-Werte nach denselben Überlegungen. Auch der Einfluß der Schubspannungen läßt sich leicht berücksichtigen.

c) Die Berücksichtigung der Elastizität der Vertikalen.

Wie erwähnt, erhalten wir die Spannungen des endgültigen Systems aus denen des Ersatzsystems, indem wir seine sämtlichen starren Vertikalen durchschneiden und an jedem Schnitt drei ganz bestimmte Verschiebungen vornehmen. Wir nehmen an, diese der Querschnittsänderung gleichwertigen Verschiebungen seien uns bereits bekannt. Für den Schnitt irgendeiner starren Vertikalen seien sie bezeichnet mit δ_q, δ_m und δ_n (vgl. Bild 4).

Hierbei bedeutet δ_q die Querverschiebung in Richtung der am Schnitt vorhandenen Querkraft Q, δ_m die Winkeldrehung in Richtung des Momentes M und δ_n die Längsverschiebung in Richtung der Normalkraft N.

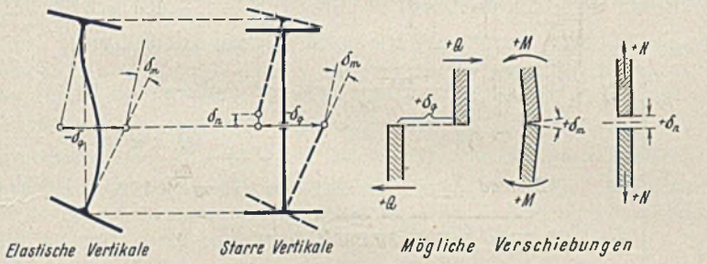


Bild 4.

Mehr als diese drei Verschiebungen sind an einem Schnitt nicht möglich. (Für die Kräfte Q, M, N werden hier, wie üblich, große Buchstaben verwendet, im Gegensatz zu meiner Dissertation, wo die Kräfte, um bei anderen Ableitungen eine klarere Schreibweise zu erhalten, mit den kleinen Buchstaben a bis r bezeichnet worden waren.)

Nun soll festgestellt werden, welchen Einfluß diese drei Verschiebungen im Ersatzsystem auf die benachbarten statisch unbestimmten Größen haben. Wir hatten z. B. für die statisch unbestimmte Größe X ermittelt $X = \frac{\delta_{ox}}{\delta_{xx}}$ oder $\delta_{xx} X = \delta_{ox}$, wobei δ_{ox} die Verschiebung des statisch bestimmten Hauptsystems in Richtung von $-X$ infolge der äußeren Belastung ist. Würde es sich um ein System handeln, bei dem Auflagersenkungen von Einfluß sind, so würde die Elastizitätsgleichung lauten: $\delta_{xx} X = \delta_{ox} + L_x$, wobei L_x den Einfluß der Auflagersenkungen darstellt. L_x ist hierbei die Verschiebung des Angriffspunktes von X in Richtung von $-X$, verursacht durch die Auflagersenkungen, und zwar im statisch bestimmten Hauptsystem. Am einfachsten ist die Verschiebung L_x nach der Arbeitsgleichung zu bestimmen. Sind die bekannten Lagersenkungen bezeichnet mit δ_q, δ_m und δ_n und haben die zugehörigen Auflagerkräfte infolge $X = -1$ die Größe Q_x, M_x und N_x, so ist nach der Arbeitsgleichung die Verschiebung des statisch bestimmten Hauptsystems in Richtung von $-X$: $1\, L_x = Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n$. In meiner Dissertation wurde L noch in etwas anschaulicherer Weise an Hand der Stützensenkungen eines durchlaufenden Trägers abgeleitet (vgl. S. 5 u. f.). Nach Bestimmung von L_x ergibt sich die Änderung der statisch unbestimmten Größe infolge der Stützensenkungen δ_q, δ_m und δ_n aus $\delta_{xx} X' = L_x = Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n$. (Die Änderung der Unbekannten ist mit X' bezeichnet.) Sind δ_q, δ_m und δ_n nicht Stützensenkungen, sondern die als bekannt vorausgesetzten Verschiebungen am Schnitt einer der Vertikalen und Q_x, M_x und N_x die an diesem Schnitt vorhandenen Kräfte infolge $X = -1$, so läßt sich X' in gleicher Weise ableiten.

Wie aus Bild 2 zu ersehen ist, treten infolge $X = -1$ nur in zwei Vertikalen Spannungen auf. Die Momente erstrecken sich nur über ein Rahmenfeld. Da in den weiter weg liegenden Vertikalen infolge $X = -1$ keine Kräfte auftreten, d. h. $Q_x = M_x = N_x = 0$ sind, so sind Verschiebungen in diesen Stäben ohne Einfluß auf X'. Die Änderung der Unbekannten ist nur abhängig von den Verschiebungen der beiden zum Rahmenfeld gehörigen Pfosten. Unterscheiden wir die zur linken bzw. rechten Vertikalen des Feldes gehörigen Werte durch die Beiziffern l bzw. r, so ergibt sich die Änderung X' der statisch unbestimmten Größe aus:

$$(10)\quad \begin{cases} \delta_{xx} X' = \left(Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n\right)_l + \left(Q_x \delta_q + M_x \delta_m + N_x \delta_n\right)_r. \\ \text{In gleicher Weise läßt sich ableiten:} \\ \delta_{yy} Y' = \left(Q_y \delta_q + M_y \delta_m + N_y \delta_n\right)_l + \left(Q_y \delta_q + M_y \delta_m + N_y \delta_n\right)_r \\ \delta_{zz} Z' = \left(Q_z \delta_q + M_z \delta_m + N_z \delta_n\right)_l + \left(Q_z \delta_q + M_z \delta_m + N_z \delta_n\right)_r. \end{cases}$$

Hierbei ist z. B. Q_y in der Klammer mit der Beiziffer l die Querkraft am Schnitt der linken Vertikalen infolge $Y = -1$.

Wenn sämtliche Verschiebungen δ_q, δ_m und δ_n bekannt wären, könnte man die dadurch bedingte Änderung der statisch unbestimmten Größen mit den vorstehenden Gleichungen errechnen. Es sind also jetzt diese der Querschnittsänderung von den starren zu den elastischen Vertikalen gleichwertigen Verschiebungen zu bestimmen.

Die Verschiebungen sind so zu wählen, daß die Spannungen im Ersatzsystem und im endgültigen System gleich sind. Beide Systeme unterscheiden sich nur in der Elastizität der Vertikalen. Die Gurte sind gleich. Unter dem Einfluß derselben Spannungen müssen somit die Gurte beider Systeme auch die gleichen Formänderungen aufweisen, vor allem müssen die Ober- und Untergurtknotenpunkte beider Systeme dieselben Verschiebungen und Winkeldrehungen ausführen. Wir können also auch sagen: Die Verschiebungen am Schnitt der starren Vertikalen sind so zu wählen, daß die Knotenpunkte des belasteten Ersatzsystems dieselbe Lage haben wie die des belasteten endgültigen Systems. Dann treten in den Gurten und zwangläufig auch in den Vertikalen des Ersatzsystems dieselben Spannungen auf wie im endgültigen.

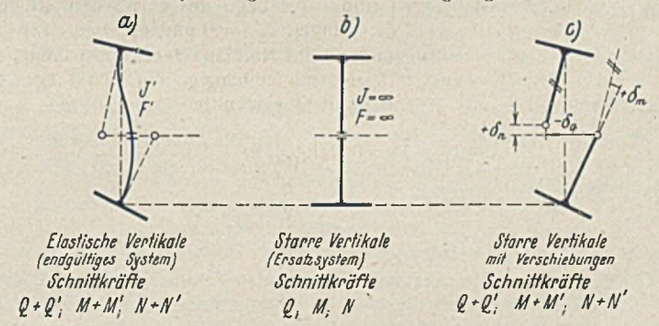


Bild 5a bis c.

Welche Verschiebungen am Schnitt der starren Vertikalen vorzunehmen sind, damit die Ober- und Untergurtknotenpunkte des Ersatzsystems dieselbe Lage haben wie die des endgültigen, kann man sich am besten an Hand von Bild 5 klarmachen. (Auch in Bild 4 sind diese Verschiebungen bereits angedeutet worden.)

Bild 5a zeigt die Lage einer Vertikalen des endgültigen vollelastischen Systems mit anschließendem Ober- und Untergurt unter dem Einfluß der äußeren Belastung. Bild 5b zeigt die Lage der starren Vertikalen des Ersatzsystems unter dem Einfluß derselben äußeren Belastung. Die beliebig gewählte Schnittstelle, an der die Verschiebungen vorgenommen werden sollen, ist bereits angedeutet. Bild 5c zeigt, welche Verschiebungen erforderlich sind, damit die Gurte dieselbe Lage haben wie in Bild 5a.

Am einfachsten ist die Längsverschiebung δ_n zu bestimmen. Die Normalkraft der Vertikalen des Ersatzsystems ist N. Sie wurde am Schluß von Abschnitt b errechnet [Gl. (9)]. Da die Vertikale starr ist, so hat sie sich unter dem Einfluß von N nicht gelängt. Die Normalkraft der Vertikalen des endgültigen Systems unterscheide sich von der des Ersatzsystems um N', sie ist also $N + N'$. Unter ihrem Einfluß längt sich die elastische Vertikale um $(N + N')\frac{h}{EF'}$. Hierbei ist h die Stablänge, F' der Querschnitt der endgültigen Vertikalen. Die starre Vertikale muß also am Schnitt um $\delta_n = (N + N')\frac{h}{EF'}$ auseinandergedrückt (verlängert) werden, um dieselbe Länge zu haben wie die elastische. Beim Auf-

stellen der Elastizitätsgleichungen des Ersatzsystems wurde mit den EJ_c-fachen δ-Werten gerechnet. Es ist also auch hier mit der EJ_c-fachen Verschiebung zu rechnen. Es wird $\delta_n = (N + N')\, h \cdot \frac{J_c}{F'}$. Wie bei den Gurtstäben, führen wir auch hier für $h \cdot \frac{J_c}{F'}$ die Bezeichnung h'' ein. Also ist $\delta_n = (N + N')\, h''$, wobei $h'' = h \cdot \frac{J_c}{F'}$ ist.

Die Querverschiebung δ_q und die Winkeldrehung δ_m sind beide sowohl von der Querkraft an der Schnittstelle als auch vom Moment abhängig, aber nicht von der Normalkraft, die beim geraden Stab nur auf die Längung einen Einfluß hat. Am Schnitt der Vertikalen des Ersatzsystems habe die Querkraft die Größe Q, das Moment die Größe M [Gl. (9)]. Da die Vertikale starr ist, so hat sie sich nicht verformt (vgl. Bild 5b). Beim Übergang zum endgültigen System mit elastischen Vertikalen ändert sich Q um Q' und M um M'. Die endgültige Querkraft und das endgültige Moment an der Schnittstelle sind dann $Q + Q'$ bzw. $M + M'$. Unter dem Einfluß dieser Kräfte hat sich die elastische Vertikale entsprechend Bild 5a verformt. Wir können sie uns in derselben Lage an den Enden (den Gurten) eingespannt und an der gleichen Stelle wie die starre Vertikale durchschnitten denken (vgl. Bild 6a). Am Schnitt greifen die inneren Kräfte $Q + Q'$ und $M + M'$ als äußere Kräfte an. Es entstehen zwei Kragarme, die die Biegelinie der elastischen Vertikalen haben und mit deren Hilfe sich δ_q und δ_m ableiten lassen.

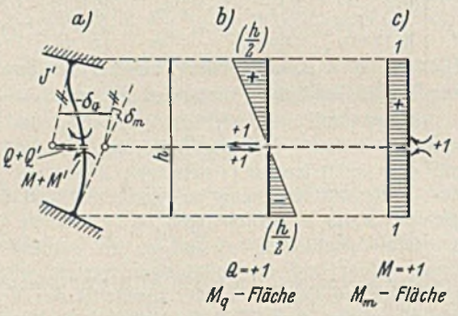


Bild 6a bis c.

Es möge zunächst $Q = +1$ angreifen. Dann erhält man die Momentenfläche von Bild 6b und die Querverschiebung $\delta'_{qq} = \int M_q^2\, ds \cdot \frac{J_c}{J'}$, wenn J' das Trägheitsmoment der Vertikalen ist und mit den EJ_c-fachen δ-Werten gerechnet wird. (Es könnte notfalls auch der Einfluß der Querkräfte leicht berücksichtigt werden.) Läßt man $M = +1$ angreifen, so erhält man die Momentenfläche von Bild 6c und die Winkeldrehung $\delta'_{mm} = \int M_m^2\, ds \cdot \frac{J_c}{J'}$. Gleichzeitig tritt hierbei eine Querverschiebung $\delta'_{qm} = \int M_q\, M_m\, ds \cdot \frac{J_c}{J'}$ auf, ebenso wie infolge der Querkraft $Q = +1$ eine Winkeldrehung $\delta'_{mq} = \delta'_{qm}$ auftrat. Ist die Querkraft nicht $+1$, sondern $Q + Q'$ und das Moment $M + M'$, so sind die Verschiebungen entsprechend größer, nämlich

$$\delta_q = (Q + Q')\, \delta'_{qq} + (M + M')\, \delta'_{qm}$$

und

$$\delta_m = (Q + Q')\, \delta'_{mq} + (M + M')\, \delta'_{mm}.$$

Die Gleichungen werden vereinfacht, wenn man den Schnitt so legt, daß $\delta'_{qm} = \delta'_{mq} = 0$ wird. Ist die Vertikale symmetrisch zur horizontalen Achse, so muß der Schnitt in ihrer Mitte liegen. Würde ausnahmsweise keine Symmetrie vorliegen, ein Fall, der wohl kaum vorkommt, so wäre die Lage der Schnittstelle aus der Bedingung $\delta'_{qm} = 0$ zu ermitteln, indem man zunächst den Schnitt an einen der Knotenpunkte legt, dafür δ'_{qm} und den gleichzeitig endgültigen Wert δ'_{mm} berechnet und daraus bestimmt, um wieviel die Schnittstelle verschoben werden muß, damit δ'_{qm} verschwindet. Nachdem $\delta'_{qm} = \delta'_{mq} = 0$ ist, ergibt sich für die Verschiebungen:

$$(11) \qquad \delta_q = (Q + Q')\, \delta'_{qq} \quad \text{und} \quad \delta_m = (M + M')\, \delta'_{mm}.$$

Außerdem war $\delta_n = (N + N')\, h''$.

Mit diesen Verschiebungen lassen sich die Änderungen der statisch unbestimmten Größen nach den oben abgeleiteten Gleichungen (10) ermitteln. Es war

$$(10) \qquad \delta_{xx} X' = (Q_x\, \delta_q + M_x\, \delta_m + N_x\, \delta_n)_l + (Q_x\, \delta_q + M_x\, \delta_m + N_x\, \delta_n)_r.$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für Y' und Z'.

Q_x, Q_y usw., d. h. die Kräfte infolge $X = -1$, $Y = -1$ und $Z = -1$ sind aus Bild 2 zu entnehmen. Für die linke Vertikale ist: $Q_x = +1$; M_x ist verschieden, je nach Lage des Schnittes. [Für Schnitt in Vertikalenmitte wäre

$$M_x = -\frac{1}{2}\left(h_u^l - h_o^l\right)] \quad N_x = +\operatorname{tg}\alpha$$

$$Q_y = 0 \qquad M_y = -1 \qquad N_y = -\frac{1}{s_l}$$

$$Q_z = 0 \qquad M_z = +1 \qquad N_z = 0.$$

Für die rechte Vertikale ist entsprechend:

$$Q_x = -1 \quad [\text{im Fall } M_x = +\frac{1}{2}\left(h_u^r - h_o^r\right)] \quad N_x = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$Q_y = 0 \qquad M_y = -\frac{s_r}{s_l} \qquad N_y = +\frac{1}{s_l}$$

$$Q_z = 0 \qquad M_z = -1 \qquad N_z = 0.$$

Mit diesen Werten lauten Gl. (10):

$$\delta_{xx} X' = (\delta_q + M_x\, \delta_m + \operatorname{tg}\alpha\, \delta_n)_l + (-\delta_q + M_x\, \delta_m - \operatorname{tg}\alpha\, \delta_n)_r$$

$$\delta_{yy} Y' = \left(-\delta_m - \frac{1}{s_l} \cdot \delta_n\right)_l + \left(-\frac{s_r}{s_l} \cdot \delta_m + \frac{1}{s_l} \cdot \delta_n\right)_r$$

$$\delta_{zz} Z' = \delta_{m_l} - \delta_{m_r}.$$

Setzt man für δ_q, δ_m, δ_n die oben ermittelten Werte (11) ein, so erhält man

$$(12) \quad \begin{cases} \delta_{xx} X' = [(Q + Q')\, \delta'_{qq} + M_x (M + M')\, \delta'_{mm} + \operatorname{tg}\alpha (N + N')\, h'']_l + \\ \qquad + [-(Q + Q')\, \delta'_{qq} + M_x (M + M')\, \delta'_{mm} - \operatorname{tg}\alpha (N + N')\, h'']_r \\ \delta_{yy} Y' = \left[-(M + M')\, \delta'_{mm} - \frac{1}{s_l} (N + N')\, h''\right]_l + \\ \qquad + \left[-\frac{s_r}{s_l} (M + M')\, \delta'_{mm} + \frac{1}{s_l} (N + N')\, h''\right]_r \\ \delta_{zz} Z' = [(M + M')\, \delta'_{mm}]_l - [(M + M')\, \delta'_{mm}]_r. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) gelten noch ganz allgemein. Es können also die Gurte auch zwischen den Knotenpunkten gekrümmt sein oder veränderliches Trägheitsmoment haben. Desgleichen können die Vertikalen veränderlichen Querschnitt haben. Ebenso wie in Abschnitt b soll aber die weitere Untersuchung für ein Tragwerk erfolgen, dessen Gurte zwischen den Knotenpunkten gerade sind und auf die Feldweite konstanten oder wenigstens zur Feldmitte symmetrischen Querschnitt haben, so daß also die elastischen Schwerpunkte des Ersatzsystems jeweils in Feldmitte liegen. Außerdem sollen die Vertikalen auf ihre Höhe gleichbleibendes Trägheitsmoment haben, damit der Schnitt der Vertikalen, für den $\delta'_{qm} = 0$ ist, in ihrer Mitte liegt. Soweit die gemachten Voraussetzungen ausnahmsweise nicht erfüllt sind, müßten die weiteren Ableitungen entsprechend geändert werden.

Wenn der elastische Schwerpunkt in Feldmitte liegt, wird $s_l = s_r = \frac{a}{2}$, $\frac{1}{s_l} = \frac{2}{a}$ und $\frac{s_r}{s_l} = 1$. Bei in der Mitte geschnittener Vertikale ist, wie oben schon angegeben,

$$\text{links } M_x = -\frac{1}{2}\left(h_u^l - h_o^l\right) \text{ und rechts } M_x = +\frac{1}{2}\left(h_u^r - h_o^r\right).$$

Weiterhin ergibt sich dann nach Bild 6b: $\delta'_{qq} = \frac{h^2 h'}{12}$ und nach Bild 6c: $\delta'_{mm} = h'$. Setzt man diese Werte in Gl. (12) ein, so erhält man:

$$(13) \quad \begin{cases} \delta_{xx} X' = \left[\frac{h^2 h'}{12} (Q + Q') - \frac{h'}{2} (h_u - h_o)(M + M') + \right. \\ \qquad \left. + h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N + N')\right]_l + \left[-\frac{h^2 h'}{12} (Q + Q') + \right. \\ \qquad \left. + \frac{h'}{2} (h_u - h_o)(M + M') - h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N + N')\right]_r \\ \delta_{yy} Y' = \left[-h'(M + M') - \frac{2}{a} \cdot h''(N + N')\right]_l + \\ \qquad + \left[-h'(M + M') + \frac{2}{a} \cdot h''(N + N')\right]_r \\ \delta_{zz} Z' = [h'(M + M')]_l - [h'(M + M')]_r. \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen für das Annäherungsverfahren zur Bestimmung von X', Y' und Z' benutzen will, wird man meist die Erfahrung machen, daß das Verfahren entgegen der Erwartung sehr schlecht oder überhaupt nicht konvergiert. Der Grund dafür ist der, daß die Kraftänderungen Q', M' und N' selbst wieder Funktionen der gesuchten X', Y' und Z' sind, wobei diese letzteren einen so großen Anteil haben, daß die Konvergenz zu schlecht ist. Zum Beispiel ist in der ersten Gleichung X' eine Funktion von sich selbst, weil es in Q' und M' enthalten ist. Zur Verbesserung der Konvergenz wird deshalb der auf der rechten Seite der ersten Gleichung enthaltene Anteil von X' eliminiert und mit $\delta_{xx} X'$ auf der linken Seite zusammengefaßt. Um X' auf der rechten Seite zu entfernen, müssen wir feststellen, wie groß der Anteil von X' in Q' und M' ist. Der in N' enthaltene Anteil wird nicht entfernt, weil er zu klein und unbedeutend ist. Die Gleichungen für Y' und Z' werden in entsprechender Weise umgeformt.

Aus Bild 2c ergibt sich infolge X' eine Querkraft in der linken Vertikalen $Q_l' = -X'$, in der rechten $Q_r' = +X'$. Die Momente infolge X' sind $M_l' = +\frac{1}{2}(h_u - h_o)_l X'$ und $M_r' = -\frac{1}{2}(h_u - h_o)_r X'$.

In Q_l' steckt also der Anteil $-X'$. Man muß, um aus $(Q + Q')_l$ den Anteil von X' zu entfernen, $-X'$ subtrahieren und erhält $\{(Q + Q')_l + X'\} - X'$. In dem eingeklammerten Teil ist der Wert X'

jetzt nicht mehr enthalten. Entsprechend schreibt man statt $(Q+Q')_r$ jetzt $\{(Q+Q')_r - X'\} + X'$. Weiterhin:

$$(M+M')_l = \left\{(M+M')_l - \frac{1}{2}(h_u - h_o)_l X'\right\} + \frac{1}{2}(h_u - h_o)_l X'$$

$$(M+M')_r = \left\{(M+M')_r + \frac{1}{2}(h_u - h_o)_r X'\right\} - \frac{1}{2}(h_u - h_o)_r X'.$$

Der eingeklammerte Teil ist hierbei jeweils unabhängig von X'.

Setzt man diese Werte in die erste der Gleichungen (13) ein, so ergibt sich:

$$\delta_{xx} X' =$$

$$= \left[\frac{h^2 h'}{12}\{(Q+Q')+X'\} - \frac{h'}{2}(h_u - h_o)\left\{(M+M') - \frac{1}{2}(h_u - h_o)X'\right\} + \right.$$
$$\left. + h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N+N') - \frac{h^2 h'}{12}\cdot X' - \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2 X'\right]_l +$$
$$+ \left[-\frac{h^2 h'}{12}\{(Q+Q') - X'\} + \frac{h'}{2}(h_u - h_o)\left\{(M+M') + \frac{1}{2}(h_u - h_o)X'\right\} - \right.$$
$$\left. - h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N+N') - \frac{h^2 h'}{12}\cdot X' - \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2 X'\right]_r$$

$$X'\left[\delta_{xx} + \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_l + \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_r\right] =$$
$$= \left[\frac{h^2 h'}{12}(Q+Q') - \frac{h'}{2}(h_u - h_o)(M+M') + h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N+N')\right]_l +$$
$$+ \left[-\frac{h^2 h'}{12}(Q+Q') + \frac{h'}{2}(h_u - h_o)(M+M') - h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N+N')\right]_r +$$
$$+ X'\left[\left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_l + \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_r\right].$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$(14\text{a})\quad \begin{cases} X'[\delta_{xx} + \varDelta\delta_{xx}] = \left[\frac{h^2 h'}{12}(Q+Q') - \frac{h'}{2}(h_u - h_o)(M+M') + \right. \\ \quad \left. + h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N+N')\right]_l + \left[-\frac{h^2 h'}{12}(Q+Q') + \right. \\ \quad \left. + \frac{h'}{2}(h_u - h_o)(M+M') - h'' \cdot \operatorname{tg}\alpha (N+N')\right]_r + X'\varDelta\delta_{xx}. \\ \text{Hierbei ist} \\ \varDelta\delta_{xx} = \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_l + \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_r. \end{cases}$$

$\varDelta\delta_{xx}$ ist nichts anderes als der Anteil der elastischen Vertikalen an δ_{xx}, wie sich leicht nachweisen läßt. Diese Gleichung enthält auf ihrer rechten Seite den Wert X' nicht mehr (bzw. nur noch einen unwesentlichen Anteil, der in $N+N'$ steckt).

In gleicher Weise wird die zweite der Gl. (13), die für Y' gilt, umgeformt. Aus Bild 2d ergibt sich infolge Y' in der linken Vertikalen ein Moment $M_l' = +Y'$ und in der rechten $M_r' = +Y'$. Um Y' aus $(M+M')$ zu entfernen, muß man es also subtrahieren. Es ist somit statt $(M+M')_l$ einzusetzen $\{(M+M')_l - Y'\} + Y'$, wobei der eingeklammerte Wert unabhängig von Y' ist. Entsprechend ist $(M+M')_r = \{(M+M')_r - Y'\} + Y'$. Der in N' enthaltene Anteil von Y' wird wegen seiner Bedeutungslosigkeit nicht entfernt. Nach Einsetzen in Gl. (13) erhält man:

$$\delta_{yy} Y' = \left[-h'\{(M+M') - Y'\} - \frac{2}{a}\cdot h''(N+N') - h'Y'\right]_l +$$
$$+ \left[-h'\{(M+M') - Y'\} + \frac{2}{a}\cdot h''(N+N') - h'Y'\right]_r.$$

$$(14\text{b})\quad \begin{cases} Y'[\delta_{yy} + \varDelta\delta_{yy}] = \left[-h'(M+M') - \frac{2}{a}\cdot h''(N+N')\right]_l + \\ \quad + \left[-h'(M+M') + \frac{2}{a}\cdot h''(N+N')\right]_r + Y'\varDelta\delta_{yy}. \\ \text{Hierbei ist } \varDelta\delta_{yy} = h_l' + h_r'. \end{cases}$$

$\varDelta\delta_{yy}$ ist auch hier der Beitrag, den die elastischen Vertikalen zu δ_{yy} liefern würden.

Es folgt die Umformung der letzten von den Gleichungen (13). Man erhält aus Bild 2e infolge Z' in der linken Vertikalen $M_l' = -Z'$, in der rechten $M_r' = +Z'$. Es ist dann statt $(M+M')_l$ einzusetzen:

$$\{(M+M')_l + Z'\} - Z' \text{ und } (M+M')_r = \{(M+M')_r - Z'\} + Z',$$

wobei der eingeklammerte Teil unabhängig von Z' ist. Eingesetzt in die letzte der Gleichungen (13) erhält man:

$$\delta_{zz} Z' = [h'\{(M+M') + Z'\} - h'Z']_l - [h'\{(M+M') - Z'\} + h'Z']_r.$$

$$(14\text{c})\quad \begin{cases} Z'[\delta_{zz} + \varDelta\delta_{zz}] = [h'(M+M')]_l - [h'(M+M')]_r + Z'\varDelta\delta_{zz}, \\ \text{wobei } \varDelta\delta_{zz} = h_l' + h_r' \text{ ist.} \end{cases}$$

$\varDelta\delta_{zz}$ ist auch hier der Beitrag, den die elastischen Vertikalen zu δ_{zz} liefern würden. Ein Vergleich mit $\varDelta\delta_{yy}$ zeigt, daß bei dieser Wahl der Unbekannten $\varDelta\delta_{zz} = \varDelta\delta_{yy}$ ist.

Wie schon mehrfach erwähnt, ist der Einfluß der Normalkräfte der Vertikalen so gering, daß er vernachlässigt werden kann. Die Normalkräfte boten aber bisher den Vorteil, bei der Ableitung der zusätzlichen Verschiebungen besonders anschaulich zu sein und wurden deshalb und auch der Vollständigkeit halber mitgeschleppt. Zur besseren Übersichtlichkeit sollen die für das Annäherungsverfahren zu verwendenden Gleichungen nochmals ohne Normalkräfte zusammengestellt werden, wobei mit Rücksicht auf die einfachere Durchführung des Annäherungsverfahrens die Gleichungen jeweils durch $\varDelta\delta$ dividiert werden:

$$(15)\quad \begin{cases} X'\left[\frac{\delta_{xx}}{\varDelta\delta_{xx}} + 1\right] = \left[\frac{h^2 h'}{12\varDelta\delta_{xx}}(Q+Q') - \frac{h'(h_u - h_o)}{2\varDelta\delta_{xx}}(M+M')\right]_l + \\ \quad + \left[-\frac{h^2 h'}{12\varDelta\delta_{xx}}(Q+Q') + \frac{h'(h_u - h_o)}{2\varDelta\delta_{xx}}(M+M')\right]_r + X'. \\ \text{Hierbei ist} \\ \varDelta\delta_{xx} = \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_l + \left\{\frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4}(h_u - h_o)^2\right\}_r. \\ Y'\left[\frac{\delta_{yy}}{\varDelta\delta_{yy}} + 1\right] = -\left[\frac{h'}{\varDelta\delta_{yy}}(M+M')\right]_l - \left[\frac{h'}{\varDelta\delta_{yy}}(M+M')\right]_r + Y'. \\ \text{Hierbei ist } \varDelta\delta_{yy} = h_l' + h_r'. \\ Z'\left[\frac{\delta_{zz}}{\varDelta\delta_{zz}} + 1\right] = +\left[\frac{h'}{\varDelta\delta_{zz}}(M+M')\right]_l - \left[\frac{h'}{\varDelta\delta_{zz}}(M+M')\right]_r + Z'. \\ \text{Hierbei ist } \varDelta\delta_{zz} = h_l' + h_r' = \varDelta\delta_{yy}. \\ \text{Die Beiwerte } \frac{h'}{\varDelta\delta_{yy}} \text{ sind also gleich } \frac{h'}{\varDelta\delta_{zz}}. \end{cases}$$

Ich wiederhole nochmals, unter welchen Voraussetzungen diese Gleichungen gelten: Die elastischen Schwerpunkte des Ersatzsystems liegen jeweils in Feldmitte (horizontal gemessen), d. h. die Gurte sind zwischen den Knotenpunkten gerade und haben auf die Feldweite konstanten oder mindestens zur Feldmitte symmetrischen Querschnitt. Die Vertikalen haben auf ihre Höhe konstanten Querschnitt, sind aber unter sich verschieden. Der Einfluß ihrer Normalkräfte ist vernachlässigt. Die Belastung greift nur an den Gurten, nicht an den Vertikalen an.

Zur Auflösung der Gleichungen, die letzten Endes nichts anderes sind als Elastizitätsgleichungen, suchen wir einen Weg, der möglichst gute Konvergenz erwarten läßt. Wir stellen dazu folgende Betrachtung an: Falls die Steifigkeit von Obergurt und Untergurt gleich ist, liegen die elastischen Schwerpunkte des Ersatzsystems in halber Höhe des Trägers. Nach Bild 2c würden dann die Nullpunkte der M_x-Flächen in halber Höhe der Vertikalen liegen. Es wäre $h_u = h_o$, und $(M+M')$ wäre unabhängig von X' und umgekehrt; d. h. die Gleichungen für X' wären unabhängig von denen für Y' und Z' und umgekehrt. [Da $(Q+Q')$ nur von X' abhängt, würden die bekannten dreigliedrigen Gleichungen für X' entstehen.] Der Gedanke ist naheliegend, daß auch dann, wenn die Gurte in der Steifigkeit stark verschieden sind, die Unbekannten X' von den übrigen Unbekannten Y' und Z' nur verhältnismäßig wenig beeinflußt werden, und daß X' in der Hauptsache von den X' der Nachbarfelder, d. h. von $(Q+Q')$ abhängt. Das nachfolgende Zahlenbeispiel bestätigt diese Vermutung. Obwohl bei dem gewählten Träger ungünstigerweise der Untergurt mehr als doppelt so steif angenommen ist wie der Obergurt, haben die $M+M'$ nur unwesentlichen Einfluß auf X', besonders solange die Lasten nur an den Knotenpunkten angreifen. Man bestimmt deshalb den ersten Näherungswert der X' nur aus $(Q+Q')$, indem man dafür die Querkraft Q des Ersatzsystems einsetzt und auf der rechten Seite $X' = 0$. Die erhaltenen Werte X' werden dann nochmals verbessert, und zwar ebenfalls ohne Berücksichtigung der Momente. Erst dann errechnet man aus den erhaltenen $X+X'$ sowie aus Y und Z des Ersatzsystems Näherungswerte $(M+M')$, die der Ermittlung der ersten Näherungswerte Y' und Z' dienen sollen.

Hierbei zeigt es sich, daß es das zweckmäßigste ist, zunächst einen möglichst genauen Näherungswert für Y' zu berechnen. Da infolge des Aussehens der M_y-Flächen (Bild 2d) zu erwarten ist, daß sich die Unbekannten Y' der benachbarten Felder gegenseitig besonders stark beeinflussen, so erfolgt die Annäherung fortschreitend. Es wird also z. B. zunächst Y_1' bestimmt. Infolge des erhaltenen Wertes Y_1' ändert sich das Moment der rechten Vertikalen des ersten Feldes um $\varDelta M_1' = Y_1'$. Diese Momentenänderung wird bei der Berechnung von Y_2' bereits berücksichtigt usw. In dieser Weise fährt man bis zum Schluß fort und wiederholt am besten zur möglichst genauen Bestimmung der Y' das Verfahren nochmals. Erst aus den dann erhaltenen Momenten $M+M'$ werden die ersten Näherungswerte Z' bestimmt. Man hat damit schon verhältnismäßig genaue Werte der Unbekannten.

Bei der weiteren Annäherung wird man zur Verbesserung von X' auch die Momente benutzen, wobei jetzt eine einmalige Verbesserung

genügt. Y' wird wieder, wie oben beschrieben, zweimal verbessert und schließlich Z' einmal. Die Annäherung noch weiter zu treiben, wird wohl nie nötig sein.

Im Brückenbau, und der kommt hier in erster Linie in Frage, sind Einflußlinien zu bestimmen. Man belastet hierzu die Knotenpunkte der Reihe nach mit der Last 1. Bei einem symmetrischen Träger mit acht Feldern wären nur vier Lastfälle zu untersuchen. Bei der gesamten Untersuchung vereinfacht sich das Annäherungsverfahren noch, weil die Unbekannten jeweils an Hand des vorhergehenden Lastfalles schon recht genau geschätzt werden können. Im dritten Feld neben dem belasteten Knotenpunkt und in den weiter ab liegenden Feldern ist diese Schätzung praktisch genau.

Greifen auch Querträger außerhalb der Knotenpunkte an, so zerlegt man die Last 1 in zwei an den benachbarten Knotenpunkten angreifende Lasten, für die man die Unbekannten schon berechnet hat. Es ist dann nur noch notwendig, für die sich über das belastete Feld erstreckende dreieckige Momentenfläche die Unbekannten zu bestimmen, wobei der Einfluß im dritten Feld neben dem belasteten praktisch nicht mehr zu merken ist. Bei diesem Lastfall erfolgt die Annäherung in etwas anderer Reihenfolge als oben beschrieben, weil sich die Unbekannten Y' und Z' hier verhältnismäßig stark gegenseitig beeinflussen.

Wie das Annäherungsverfahren im einzelnen praktisch durchzuführen ist, sieht man am besten an Hand des folgenden Zahlenbeispiels.

(Fortsetzung folgt.)

Die Reichsautobahnbrücke über die Tiefenbachschlucht bei Kassel.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. C. J. Hoppe, Rheinbrohl.

(Schluß aus Heft 8.)

V. Die Pendelstützen und Lager.

Die Auflagerkräfte, die infolge der verhältnismäßig hohen ständigen Last auch an den Enden stets positiv bleiben, haben die Größe von 113 t in den End- und 298 t in den Mittelstützpunkten.

Die Mittelstützpunkte werden durch Pendelstützen gebildet. Infolge der unregelmäßigen Bodenverhältnisse erhalten die acht Pendelstützen jede einen eigenen Betonunterbau; auch sind die Längen aller acht Stützen verschieden und liegen, gemessen zwischen den Berührungspunkten der oberen und unteren Kugelflächenlager, zwischen 10,805 und 15,308 m. Der Stützenquerschnitt besteht aus zwei ⊏ 40 mit Beiblechen ▭ 600 · 14 (Bild 10) und ist demnach geschlossen. In angemessenen Abständen sind lotrecht stehende Aussteifungsschotten aus I P 40 eingesetzt; diese Schotten sind angeschweißt, um die Störung der glatten Außenflächen durch einzelne Nietgruppen zu vermeiden. Zur Verhinderung von Rostansätzen an den unzugänglichen Innenflächen sind die Stützen ausbetoniert.

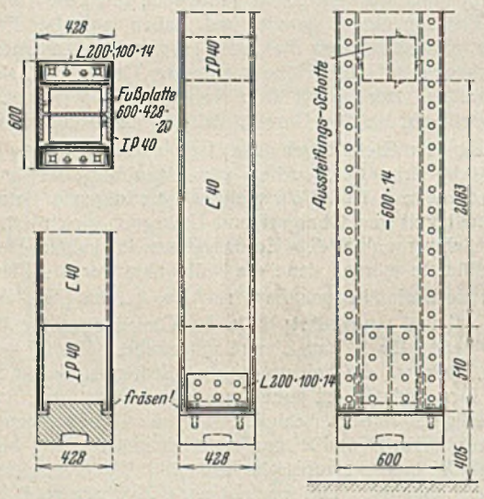


Bild 10. Fußpunkt der Pendelstützen.

Dieser Arbeitsvorgang wurde bereits in der Werkstatt ausgeführt. Die Stahlgußlagerteile greifen an Kopf und Fuß mit quadratischen Ansätzen in die Stützen hinein und sind mit diesen verschraubt. Die oberen und unteren Lagerhälften berühren sich in Kugelflächen mit Halbmessern von 450 bzw. 400 mm. Festhaltebolzen in den Fußlagern verhindern eine Verdrehung der Stützen.

An den Brückenenden sind übliche Lager verwendet, an der festen Seite als Linienkipplager, an der beweglichen Seite als Einrollenlager ausgebildet. Bei letzteren wurden die Grundplatten keilförmig gestaltet, da bei der immerhin nicht geringen Hauptträgerhöhe der Einfluß der Wärmeschwankungen auf die Fahrbahnhöhenlage und damit das einwandfreie Auflegen der Fahrbahnübergänge nicht übersehen werden durfte. Sämtliche am Hauptträgeruntergurt angeschlossenen Lageroberteile sind der

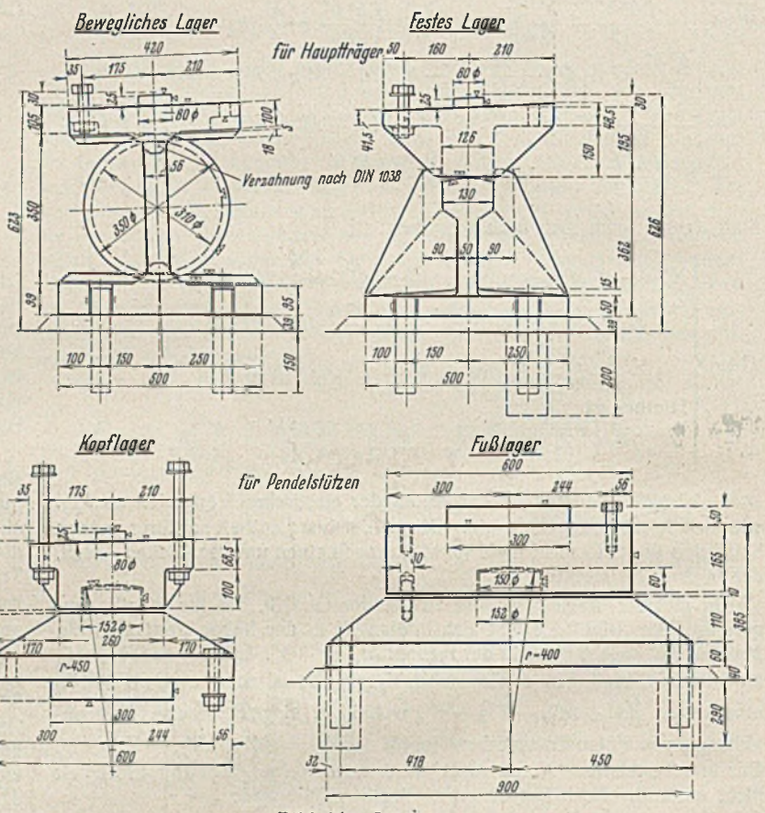


Bild 11. Lager.

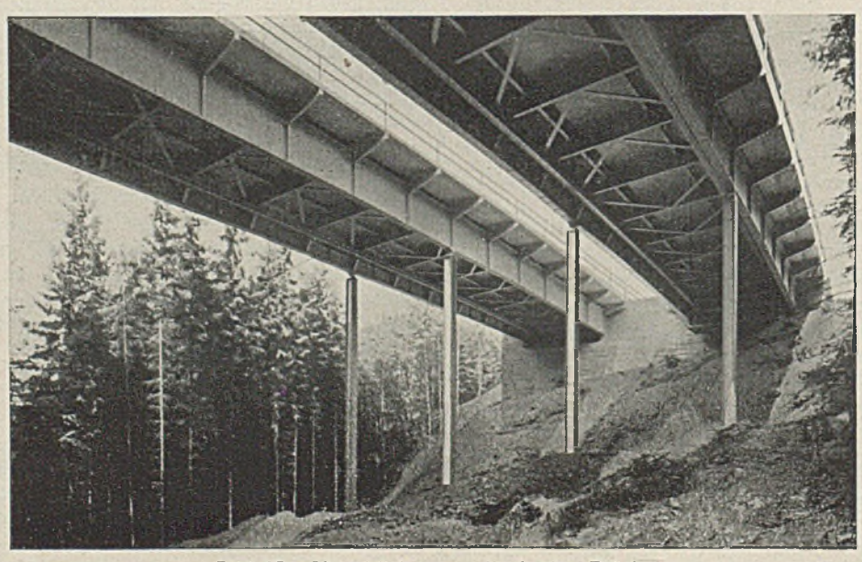


Bild 13. Unterblick unter die fertige Brücke.

Hauptträgerlängsneigung 1 : 60 entsprechend keilförmig ausgebildet, so daß die Kraftübertragung genau in der theoretischen Wirkungslinie erfolgt (Bild 11).

VI. Der Einbauvorgang.

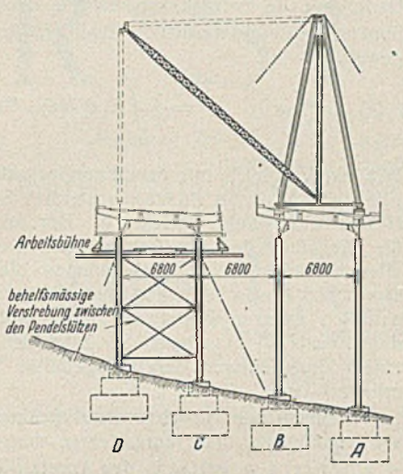
Der Einbauvorgang war im wesentlichen durch die Anfuhrmöglichkeit der in der Werkstatt zu fertigen Einheiten zusammengebauten Teile bedingt. Die Brückenstelle liegt etwa 8 km von der nächsten geeigneten Bahnstation Kassel-Bettenhausen entfernt; von dort konnten die Teile durch Lastwagen mit Drehschemeln auf Fahrstraßen bis etwa 200 m an die Baustelle herangefahren werden.

Diese Beförderungsart begrenzte gleichzeitig die Länge und das Gewicht der Einzelstücke mit etwa 13 m bzw. 21 t. Von der Straße wurde auf Feldbahngleis mit Hilfe eines kleineren Schwenkmastes umgeladen und hiermit zur Schlucht gefahren.

Zunächst wurde der talwärts gelegene Überbau errichtet. Die Schlucht wurde mit stählernen Böcken, auf die eine geschlossene Bühne aufgelegt wurde, eingerüstet. Beginnend mit dem südlichen, beweglichen Ende wurden die Hauptträgerteile Stück für Stück eingelegt und sogleich in jedem Abschnitt Quer- und Längsträger mit den Buckelblechen eingebaut. Der zunächst hinter dem südlichen Widerlager stehende Schwenkmast wurde zum Einbau der weiteren Stücke auf dem Obergurt der Hauptträger aufgesetzt und abschnittweise vorgerückt. Gleichfalls mit Hilfe des Mastes wurden auch die Pendelstützen gestellt; diese erhielten während der Einbauarbeiten eine behelfmäßige Verstrebung. Um die Durchbiegung bei dem einseitigen Vorbau auszugleichen, waren Pumpen zum Anheben auf den Gerüstböcken untergesetzt.

Nach Errichtung dieses ersten Überbaues wurden mit Hilfe des Schwenkmastes die Böcke in die Achslinie des zweiten, bergwärts stehenden Überbaues umgestellt. Der Einbauvorgang wiederholte sich dann in sinngemäß gleicher Weise; nur blieb der Schwenkmast auf dem bereits aufgestellten Überbau stehen und legte von hier aus die einzelnen Teile auf (Bild 12). Ebenso wurden mit seiner Hilfe zum Schluß die Gerüstböcke zum Abtransport heraufgezogen.

Die Bilder 13 u. 14 geben die fertiggestellte Brücke und ihre gute Wirkung in der Landschaft wieder.



Zu Bild 12.

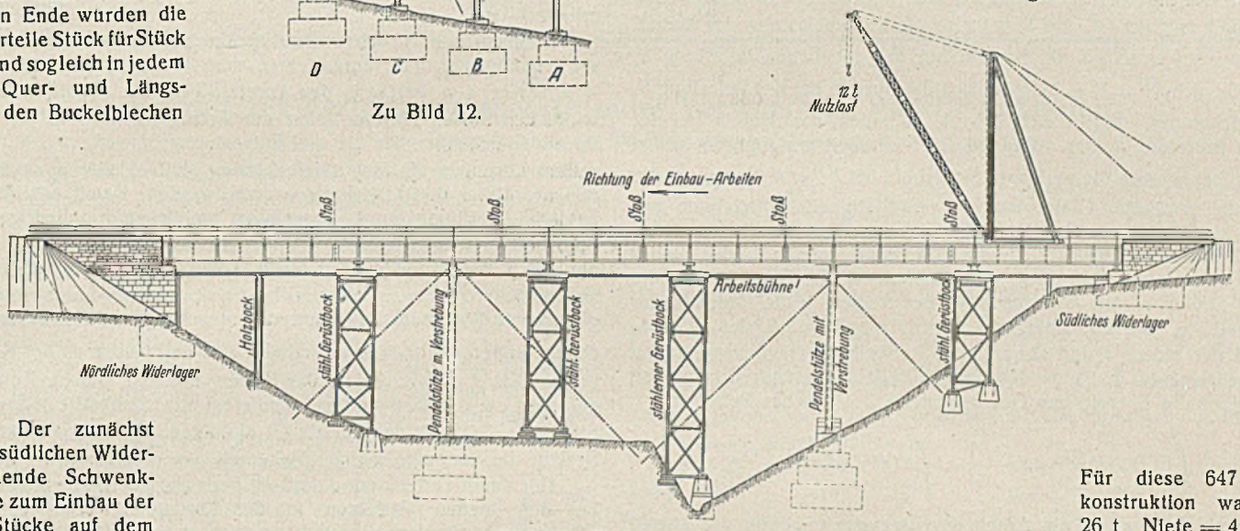


Bild 12. Einbauvorgang.

Bild 14. Ansicht der fertiggestellten Brücke.

VII. Baustoffverbrauch und Arbeitsaufwand.

Das gesamte eingebaute Stahlgewicht der beiden Überbauten beträgt 647 t. Dieses Gewicht gliedert sich wie folgt:

für Hauptträger		213 t =	32,9 %
für Querträger mit Kragarmen		84 t =	13,0 %
für mittlere und Randlängsträger		96 t =	14,8 %
für Buckelbleche und Streckmetall		127 t =	19,6 %
für Waagerechtverband		15 t =	2,3 %
für Geländer		16 t =	2,5 %
für Besichtigungswagenträger		29 t =	4,5 %
für Fahrbahnübergänge		14 t =	2,2 %
für Pendelstützen und Verankerung		35 t =	5,4 %
	St 37	629 t =	97,2 %
für Lager	Stg 52,81 S + St C 35,61	18 t =	2,8 %
	Gesamtgewicht	647 t =	100,0 %.

Für diese 647 t Fertigkonstruktion waren etwa 26 t Niete = 4,0 % des Fertiggewichts erforderlich.

Der Aufwand des technischen Büros war durch die Ungleichheit der vier Hauptträger und die sonstigen Verschiedenheiten der Überbauten verhältnismäßig groß. Auch bei den Werkstattarbeiten, die in den Stahlbauwerkstätten Neuwied der Firma Hilgers vorgenommen wurden, machten sich die gleichen Ursachen sehr bemerkbar. Insgesamt waren etwa 61 000 Niete von 20 bis 26 mm ⌀ in der Werkstatt, das sind 94 Stück/t und 38 000 Niete auf der Baustelle, das sind 59 Stück/t zu schlagen. In dieser letzteren Zahl sind die etwa 21 000 Niete eingeschlossen, die zum Befestigen der Buckelbleche auf dem Fahrbahngerippe notwendig waren. An Montagegerät und Gerüsten wurden 275 t auf der Baustelle benötigt.

Die Stahlkonstruktion konnte von der OBR Kassel am 6. April 1938 abgenommen werden.

Alle Rechte vorbehalten.

Die Stabilität des mehrfeldrigen, elastisch gestützten Stabes.[1]

Von Dr.-Ing. A. Schleusner, Berlin.

Die Berechnung der Knickbelastung eines geraden, punktweis elastisch gestützten Stabes ist an sich seit langem bekannt. Man stellt drei Gruppen von Gleichungen auf: erstens für jedes Feld die Bedingung für das Gleichgewicht der Momente; zweitens für jeden Knoten die Bedingung für die Stetigkeit der Tangente an die elastische Linie und drittens für jeden elastisch gestützten Punkt die Bedingung für das Gleichgewicht der Vertikalkräfte. Dabei kann man ohne Schwierigkeit feldweise Verschiedenheit von Trägheitsmoment und Stabkraft berücksichtigen.

Um die Begriffe zu fixieren, wollen wir annehmen, daß der Stab n Felder habe und daß die Endpunkte jedes Feldes gestützt seien, daß also alle Öffnungen einfeldrig seien. Ferner wollen wir die Enden des Stabes als gelenkig fest gestützt annehmen. Selbstverständlich macht es keine Mühe, jede andere Art von Stützbedingungen ebenso wie mehrfeldrige Öffnungen zu berücksichtigen.

[1]) Auszug aus dem auf der Wissenschaftlichen Tagung des Deutschen Stahlbau-Verbandes am 6. Oktober 1938 gehaltenen Vortrage.

Benutzt man die besonders einfache dritte Gruppe der obenerwähnten Gleichungen zur Elimination der Querkräfte, so führt das Verfahren unter den getroffenen Voraussetzungen zu $2n-1$ Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten, nämlich $n-1$ Knotenpunktmomenten und n Neigungen der Feldsehnen. Diese Gleichungen sind stets dadurch zu befriedigen, daß man sämtliche Unbekannte gleich Null setzt. Diesem Lösungssystem entspricht die gerade, unverformte Gestalt des Stabes. Andere als die Lösungen Null kann das Gleichungssystem nur haben, wenn die Determinante seiner Beiwerte verschwindet. Führt man sämtliche Stabkräfte S_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) mit einem gemeinsamen, zunächst unbekannten Proportionalitätsfaktor λ multipliziert in die Rechnung ein, so ergibt das Verschwinden der erwähnten Determinante eine Gleichung zur Bestimmung von λ. Der kleinste, nicht verschwindende, positive Wert von λ, den man aus dieser Gleichung findet (er möge mit $\lambda^{(1)}$ bezeichnet werden), bestimmt das kleinste Vielfache der Stabkräfte, bei dem eine andere Gleichgewichtsgestalt des Stabes als die unverformte, geradlinige Gestalt möglich ist. $\lambda^{(1)} S_\nu$ ist also die Knickbelastung des Stabes. Ergibt sich $\lambda^{(1)} > 1$, so ist das System bei der gegebenen Belastung S_ν stabil. Ergibt sich $\lambda^{(1)} = 1$, so befindet sich das System bei der Belastung S_ν an der Knickgrenze. Ergibt sich $\lambda^{(1)} < 1$, so knickt das System bei der gegebenen Belastung S_ν aus. Wird k-fache Sicherheit verlangt, so besitzt das System bei $\lambda^{(1)} \geqq k$ die verlangte Sicherheit, bei $\lambda^{(1)} < k$ dagegen nicht.

Statt die erwähnten Gleichgewichts- und Stetigkeitsbedingungen aufzustellen, kann man die Bestimmungsgleichung für λ auch dadurch erhalten, daß man den Ausdruck für die potentielle Energie Π des Stabes aufstellt und verlangt, daß diese ein Minimum wird. Bezeichnet L die Länge des Stabes, x die Abszisse längs des Stabes, y die Ordinate der Biegungslinie, η_ν die Durchbiegung am Stützpunkt ν, A_ν den Stützenwiderstand der Stütze ν und nimmt man Stabkraft S, Trägheitsmoment J und Elastizitätsmodul E längs des Stabes beliebig veränderlich an, so ist die potentielle Energie des Gesamtsystems bei λ-facher Belastung

$$(1) \quad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\,J(x)\,y''^2\,dx - \frac{1}{2}\cdot\lambda\int_0^L S(x)\,y'^2\,dx + \frac{1}{2}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\,\eta_\nu^2.$$

Das erste Integral ist die Arbeit der Biegungsmomente, das zweite die Arbeit der λ-fachen Stabkräfte, die Summe ist die Arbeit der Stützenwiderstände. Die Arbeit der Querkräfte ist, wie üblich, vernachlässigt. Die notwendige Bedingung dafür, daß die potentielle Energie ein Minimum ist, wird durch das Verschwinden der ersten Variation ausgedrückt:

$$\delta\,\Pi = 0,$$

führt also auf ein Problem der Variationsrechnung. Wir erhalten, wie gesagt, dieselbe Gleichung für λ wie die obenerwähnte Determinantengleichung. Diese Determinante ist unter den getroffenen Voraussetzungen $(2n-1)$-reihig, bei sechs Feldern z. B. elfreihig. Ihre kleinste positive Wurzel $\lambda^{(1)}$ kann man nur durch Probieren finden. Man muß also bei größerer Felderzahl eine Determinante hoher Ordnung mehrfach auswerten. Diese Rechenarbeit ist schon bei einer elfreihigen Determinante, also bei sechs Feldern, praktisch nicht mehr zu bewältigen, wenn der Stab nicht symmetrisch ist.

Dagegen wird auch in solchen Fällen die Rechenarbeit durch ein neues, von F. u. H. Bleich begründetes und von mir weiterentwickeltes Verfahren praktisch durchführbar gemacht. In den Fällen, die man auch mit dem alten Verfahren bewältigen kann, wird bei dem neuen Verfahren die Rechenarbeit ganz geringfügig.

Wir wiederholen zunächst noch einmal die Fragestellung des bisherigen Verfahrens. Sie lautet: Um das Wievielfache müssen die Stabkräfte vergrößert werden, um den Stab bei gegebenen Stützenwiderständen an die Knickgrenze zu führen?

Das neue Verfahren kehrt diese Problemstellung um und fragt: Um das Wievielfache müssen die Stützenwiderstände geschwächt werden, um den Stab bei gegebenen Stabkräften an die Knickgrenze zu führen?

Wir versehen also jetzt sämtliche Stützenwiderstände A_ν mit einem gemeinsamen, zunächst unbekannten Divisor β. Der Ausdruck für die potentielle Energie lautet dann:

$$(2) \quad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\,J(x)\,y''^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L S(x)\,y'^2\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\,\eta_\nu^2,$$

und es wird nach dem kleinsten, nicht verschwindenden, positiven Wert von β gefragt, der Π zu einem Minimum macht, also die erste Variation von Π zum Verschwinden bringt:

$$\delta\,\Pi = 0.$$

Diese Aufgabe wird nach dem Ritzschen Verfahren gelöst. Man denkt sich die Biegelinie y in eine unendliche Reihe nach den Eigenfunktionen $\varphi^{(i)}(x)$ eines geeignet gewählten Hilfsproblems entwickelt:

$$(3) \quad y = a_1\,\varphi^{(1)}(x) + a_2\,\varphi^{(2)}(x) + a_3\,\varphi^{(3)}(x) + \ldots \text{ in inf.}$$

Darin sind die Entwicklungsbeiwerte a_i zunächst unbekannt. Als Funktionenfolge $\varphi^{(i)}(x)$ werden die Eigenfunktionen des folgenden Hilfsproblems gewählt:

$$(4) \quad \delta\,\Pi^* = 0; \quad \Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^L E(x)\,J(x)\,\varphi''^2(x)\,dx - \frac{1}{2}\cdot\lambda\int_0^L S(x)\,\varphi'^2(x)\,dx.$$

Wie ein Vergleich mit dem Energieansatz (1) zeigt, ist dieses Hilfsproblem der von uns untersuchte Stab nach Entfernung sämtlicher elastischer Stützen. Der Ansatz (3) bedeutet also, daß wir die Biegelinie des elastisch gestützten Stabes durch die Überlagerung aller möglichen Biegelinien gewinnen, die derselbe Stab nach Entfernung sämtlicher elastischer Stützen annehmen kann. Praktisch muß man sich natürlich näherungsweise mit einer endlichen Anzahl von Gliedern in dem Ansatz (3) begnügen. Es zeigt sich, daß man im allgemeinen mit einem dreigliedrigen Ansatz Ergebnisse von hinreichender Genauigkeit erhält.

Nehmen wir zunächst die Eigenfunktionen $\varphi^{(i)}$ des Hilfsproblems als bekannt an und führen einen dreigliedrigen Ansatz $y = a_p\,\varphi^{(p)}(x) + a_q\,\varphi^{(q)}(x) + a_r\,\varphi^{(r)}(x)$ in den Ansatz (2) für die potentielle Energie des wirklichen Stabes ein, so liefert die Bedingung $\delta\,\Pi = 0$ drei homogene lineare Gleichungen für die drei Entwicklungsbeiwerte a_p, a_q, a_r. Damit andere Lösungen als die triviale Lösung Null existieren, muß die Determinante dieser drei Gleichungen verschwinden. Damit erhalten wir eine kubische Gleichung für β. Unter allen möglichen dreigliedrigen Ansätzen für y ist nun derjenige zu suchen, der die kleinste positive Wurzel β, die mit $\bar{\beta}$ bezeichnet werden möge, liefert. $\bar{\beta}$ gibt dann unmittelbar die Stützensicherheit an. Ergibt sich $\bar{\beta} > 1$, so ist das System bei der gegebenen Belastung $S(x)$ und den gegebenen Stützenwiderständen A_ν stabil; ergibt sich $\bar{\beta} = 1$, so befindet sich das System an der Knickgrenze; ergibt sich $\bar{\beta} < 1$, so knickt das System aus. Ist k-fache Knicksicherheit gefordert, so muß man von vornherein die Stabkräfte $k\,S(x)$ statt der Stabkräfte $S(x)$ in den Ansatz (2) einführen. Bei $\bar{\beta} \geqq 1$ hat dann das System die verlangte k-fache Sicherheit, bei $\bar{\beta} < 1$ nicht.

Die damit verbundene Arbeit ist geringfügig. Die Hauptarbeit besteht bei dem neuen Verfahren in der Lösung des Hilfsproblems. Die Gleichungen für den Hilfsstab gewinnt man in der üblichen, eingangs skizzierten Weise. Zur Bestimmung der Eigenwerte $\lambda^{(i)}$ des Hilfsproblems erhält man dabei eine n-reihige Determinante an Stelle der $(2n-1)$-reihigen, auf die das Hauptproblem bei der gleichen Behandlung führen würde. Von dieser n-reihigen Determinante ist allerdings nicht nur die kleinste positive Wurzel $\lambda^{(1)}$, sondern mehrere Wurzeln $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ zu bestimmen. Von großer Bedeutung für die praktische Rechnung ist, daß man zeigen kann, daß bei dreigliedrigen Ansätzen nicht mehr als die ersten $\lambda^{(p+2)}$-Eigenwerte des Hilfsproblems bestimmt zu werden brauchen, wenn $\lambda^{(p)}$ der größte Eigenwert ist, der kleiner als die vorgeschriebene Knicksicherheit k ist: $\lambda^{(p)} < k \leqq \lambda^{(p+1)}$.

Sind E, J und S längs des ganzen Stabes konstant, so macht das Hilfsproblem gar keine Arbeit, da man seine Eigenwerte und Eigenfunktionen ohne jede Rechnung sofort anschreiben kann. In diesem Fall führt also das neue Verfahren mühelos zum Ziel. Das ist um so bedeutsamer, als man auch in anderen Fällen häufig durch die Annahme konstanter mittlerer Werte für E, J und S brauchbare Näherungslösungen wird gewinnen können.

Eine Änderung der Sicherheit k läßt sich bei der Rechnung in einfachster Weise berücksichtigen. Man kann daher mit wenig Rechenarbeit auch die Frage beantworten, für welchen Wert von k sich $\bar{\beta} = 1$ ergibt, d. h. bei welchem Vielfachen der Stabkräfte der Stab bei den Stützenwiderständen $\frac{1}{l}\cdot A_\nu = A_\nu$, also bei den gegebenen Stützenwiderständen, ausknickt. Damit wäre man dann am Ende der Rechnung von der Bleichschen zu der ursprünglichen Fragestellung zurückgekehrt.

Endlich ist zu beachten, daß bei einer beliebig geänderten Verteilung der Stützenwiderstände das Hilfsproblem, das im allgemeinen die Hauptarbeit erfordert, das gleiche bleibt. Mit wenig Rechenarbeit kann man also, wenn das Hilfsproblem einmal gelöst ist, den Einfluß der Stützung auf die Sicherheit des Systems untersuchen und dadurch unter Umständen auch zu weittragenden konstruktiven Folgerungen gelangen.

Das neue Verfahren macht also nicht nur die Rechenarbeit praktisch durchführbar in solchen Fällen, wo die bisher bekannten Verfahren praktisch unbrauchbar werden, sondern es gestattet auch neue Einblicke in die Probleme des elastisch gestützten Stabes.

INHALT: Ein Annäherungsverfahren zur Berechnung des Vierendeelträgers, gültig für beliebige Querschnittsverhältnisse und Belastung der Gurte auch außerhalb der Knotenpunkte. — Die Reichsautobahnbrücke über die Tiefenbachschlucht bei Kassel. (Schluß.) — Die Stabilität des mehrfeldrigen, elastisch gestützten Stabes.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.