

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
 Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
 Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
 Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
 samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang

BERLIN, 12. Mai 1939

Heft 10

Beitrag zur Verformungstheorie unter Verwendung von Einflußlinien.

Von Oberreichsbahnrat Dr.-Ing. Krabbe, München.

I. Grundlegende Betrachtungen über den Einfluß der Verformung.

Es ist bekannt, daß bei sehr schlanken Stahlkonstruktionen, schlanken Bogen- oder Hängebrücken, die durch die jeweilige Belastung hervorgerufenen Verformungen des Tragwerkes nicht vernachlässigt werden dürfen, wenn man die Beanspruchung genau ermitteln will. Es wird hiervon besonders bei Hängebrücken Gebrauch gemacht, da hier die Verformung die größten Beanspruchungen im allgemeinen günstig beeinflusst; bei Bogenbrücken tritt jedoch das Gegenteil ein.

Zur Erklärung des Vorganges bedienen wir uns des einfachsten Beispiels dieser Art, des in Bild 1 dargestellten Galgens, durch eine Last P beansprucht. Er entspricht der Hälfte eines nur durch eine Horizontalkraft H beanspruchten Zweigelenkrahmens. Seine Berechnung, d. h. die Ermittlung seiner Beanspruchung und Verformung, erfolgt nach der üblichen Theorie unter der Annahme, daß seine Momentenfläche die schraffierte Fläche sei; die lotrechte Verschiebung des Angriffspunktes von P ist dann:

$$\delta = P \left(h a^2 + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right) \frac{1}{EJ} \quad \text{oder}$$

$$(1) \quad \delta = \frac{P a^2}{3 EJ} (3h + a).$$

Die waagerechte Verschiebung des Angriffspunktes von P ist:

$$\epsilon = P a h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{EJ} \quad \text{oder}$$

$$(2) \quad \epsilon = \frac{P a h^2}{2 EJ}.$$

(Statisches Moment der Momentenfläche, bezogen auf die lotrechte bzw. waagerechte Achse durch den Angriffspunkt von P .) Bild 1 zeigt aber, daß bei nicht zu vernachlässigender Verformung die Momentenfläche des lotrechten Pfostens nur am oberen Ende die Ordinate Pa hat, am unteren Ende dagegen $P(a + \epsilon)$, und daß sie, der Verbiegung des Pfostens entsprechend, parabol förmig verläuft. Verdoppeln wir die Belastung, so ist das Moment am unteren Ende unter Vernachlässigung kleiner Einflüsse höherer Ordnung $2P(a + 2\epsilon)$; es ist also mehr als doppelt so groß als unter der Last P . Es besteht also, genau genommen, zwischen Belastung und Beanspruchung keine Verhältnismäßigkeit. Wir sehen auch, daß die nach Gl. (1) und (2) berechneten Werte δ und ϵ zu klein berechnet sind, denn der genauen Berechnung müßte die (vor Ausführung der ersten Rechnung jedoch unbekannt) punktiert angedeutete Momentenfläche des Pfostens zugrunde gelegt werden, was also nur schrittweise geschehen könnte. Das Ergebnis ist dann immer noch nicht genau, denn es würden sich nun statt der Werte δ und ϵ die Werte $\delta + \Delta\delta$ und $\epsilon + \Delta\epsilon$ ergeben, die wiederum das Einspannmoment und die Verschiebungen vergrößern würden; das endgültige Ergebnis ist dann also eine unendliche, allerdings stark konvergierende Reihe.

Wir wollen diese Verhältnisse an diesem einfachen Beispiel eingehender verfolgen. Nach Ausführung der ersten Rechnung, die das Moment Pa und Gl. (1) und (2) ergab, gestaltet sich nun die Momentenbelastung nach Bild 2. Nach den dort eingetragenen Maßen ergibt sich nun nach Ausführung einiger einfacher Integrationen:

$$(3) \quad \Delta\delta = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{h}{15} (20a\epsilon + 8\epsilon^2).$$

Dabei ist für die Momentenfläche \mathfrak{F}_1 nur die Vergrößerung des Hebelarmes um $\epsilon \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)$ eingesetzt, während die Fläche \mathfrak{F}_2 mit ihrem ganzen

Hebelarm $a + \epsilon \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)$ eingesetzt wurde. Die Veränderung der Fläche \mathfrak{F}_3 hat auf $\Delta\delta$ keinen Einfluß.

$$(4) \quad \Delta\epsilon = \frac{P}{EJ} \left[\frac{1}{60} (25h^2 + 8a^2 \cdot \frac{a}{h}) \epsilon - \frac{a}{24} (24h + 7a) \delta - \frac{2}{3} \cdot h \delta \epsilon \right].$$

Dabei ist die Fläche \mathfrak{F}_3 mit ihrem Hebelarm

$$\left[\delta - \frac{2a}{h} \cdot \epsilon \cdot \frac{x}{a} - \left(\delta - \frac{2a}{h} \cdot \epsilon \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{a^3} \right) \right]$$

und die Fläche \mathfrak{F}_2 mit ihrem Hebelarm $\frac{5}{8} \cdot h - \delta$ eingesetzt; bei Berechnung von ϵ war deren Hebelarm = 0. Die Verschiebung der Fläche \mathfrak{F}_1 hat auf $\Delta\epsilon$ keinen Einfluß.

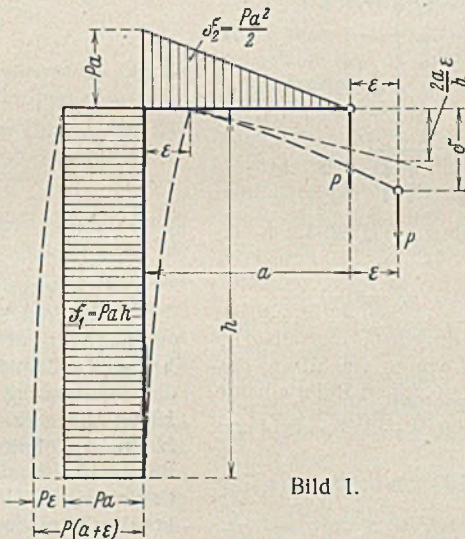


Bild 1.

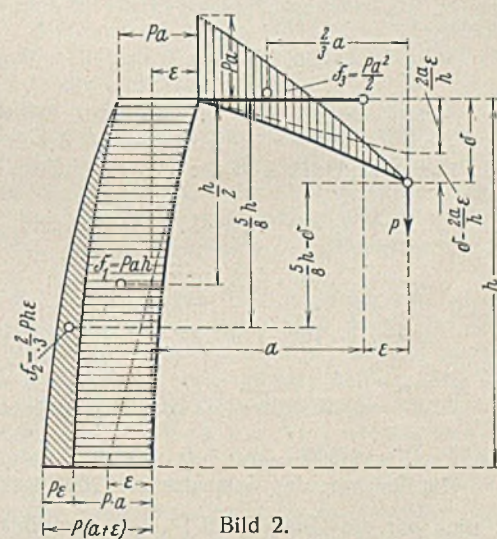


Bild 2.

Setzen wir nun aus Gl. (1) und (2) die Werte für δ und ϵ ein mit

$$\delta = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{a^2}{3} (3h + a)$$

$$\epsilon = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{a h^2}{2},$$

so erhalten wir:

$$(5) \quad \Delta\delta = \frac{2}{3} \cdot a^2 h^3 \left(\frac{P}{EJ} \right)^2 + \frac{2}{15} \cdot a^2 h^5 \left(\frac{P}{EJ} \right)^3$$

$$(6) \quad \Delta\epsilon = \left(\frac{5}{24} \cdot a h^4 - a^3 h^2 + \frac{5}{8} \cdot a^4 h - \frac{7}{72} \cdot a^5 \right) \left(\frac{P}{EJ} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 h^4 + \frac{1}{9} \cdot a^4 h^3 \right) \left(\frac{P}{EJ} \right)^3.$$

Setzen wir noch $a = \alpha h$, so ist:

$$(5a) \quad \Delta\delta = \frac{2}{3} \cdot \alpha^2 h^5 \left(\frac{P}{EJ} \right)^2 + \frac{2}{15} \cdot \alpha^2 h^7 \left(\frac{P}{EJ} \right)^3$$

$$(6a) \quad \Delta\epsilon = \left(\frac{5}{24} \cdot \alpha - \alpha^3 + \frac{5}{8} \cdot \alpha^4 - \frac{7}{72} \cdot \alpha^5 \right) h^5 \left(\frac{P}{EJ} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\alpha^3 + \frac{1}{3} \cdot \alpha^4 \right) h^7 \left(\frac{P}{EJ} \right)^3;$$

ferner: $\delta = \frac{\alpha^2}{3} (3 + \alpha) h^3 \cdot \frac{P}{EJ}; \quad \epsilon = \frac{\alpha}{2} \cdot h^2 \cdot \frac{P}{EJ}.$

Danach ergeben sich die Gesamtwerte der Verschiebungen in der Form:

$$(7) \quad \delta' = \delta + \Delta \delta = a_1 h^3 \cdot \frac{P}{EJ} + a_2 h^5 \left(\frac{P}{EJ}\right)^2 + a_3 h^7 \left(\frac{P}{EJ}\right)^3$$

$$(8) \quad \varepsilon' = \varepsilon + \Delta \varepsilon = b_1 h^3 \cdot \frac{P}{EJ} + b_2 h^5 \left(\frac{P}{EJ}\right)^2 + b_3 h^7 \left(\frac{P}{EJ}\right)^3$$

wobei a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 reine Zahlenwerte sind.

Für das Einspannmoment ergibt sich daraus

$$(8a) \quad M' = P(\varepsilon + \Delta \varepsilon) = P \left[\alpha h + b_1 h^3 \cdot \frac{P}{EJ} + b_2 h^5 \left(\frac{P}{EJ}\right)^2 + b_3 h^7 \left(\frac{P}{EJ}\right)^3 \right]$$

Gl. (5) bis (8a) gelten nun natürlich für jede beliebige Last P .

Wir sehen also, daß die Durchbiegungen nicht nur von $\frac{P}{EJ}$, sondern auch von den höheren Potenzen dieses Wertes abhängig sind, und dementsprechend auch die Momente nicht nur von P , sondern auch von $\frac{P}{EJ}$ und dessen höheren Potenzen abhängig sind. Würden wir weiter

entwickeln, so würden natürlich noch höhere Potenzen von $\frac{P}{EJ}$ erscheinen; es ist das aber nicht erforderlich. Die Gleichungen gelten auch dann, wenn die Last P nach oben gerichtet, also negativ ist. Dann ist in Gl. (7) und (8) das erste Glied negativ, das zweite positiv und das dritte negativ; in Gl. (8a) ist dann das erste und dritte Glied negativ, das zweite und vierte positiv. Wir wollen die Auswirkung dieser Abhängigkeiten an einem Zahlenbeispiel prüfen.

Wir wählen einen schlank ausgebildeten Galgen aus zwei I P 22, St 52, $h = 10$ m, $a = 5$ m. Belastung 4 t (Bild 3).

$$i_x = 9,37; \quad \lambda = 2 \cdot \frac{1000}{9,37} = 212; \quad \omega = 15,94.$$

Dann ist nach der üblichen Rechnung

$$M = 4 \cdot 500 = 2000 \text{ tcm}$$

$$\sigma = \frac{2\,000\,000}{2 \cdot 732} \pm \frac{4000 \cdot 15,94}{2 \cdot 91,2} = 1366 + 348$$

$$= 1714 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist nun

$$\frac{P}{EJ} = \frac{4}{2 \cdot 2100 \cdot 8050} = 1,18 \cdot 10^{-7}$$

$$\left(\frac{P}{EJ}\right)^2 = 1,39 \cdot 10^{-14}$$

$$\left(\frac{P}{EJ}\right)^3 = 1,64 \cdot 10^{-21}$$

Damit wird mit $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\delta = \frac{7}{24} \cdot 10^9 \cdot 1,18 \cdot 10^{-7} = 34,4 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \cdot 10^9 \cdot 1,18 \cdot 10^{-7} = 29,5 \text{ cm}$$

$$\Delta \delta = \frac{1}{6} \cdot 10^{15} \cdot 1,39 \cdot 10^{-14} + \frac{1}{30} \cdot 10^{21} \cdot 1,64 \cdot 10^{-21} = 2,32 + 0,05 = 2,37 \text{ cm}$$

$$\Delta \varepsilon = 0,016 \cdot 10^{15} \cdot 1,39 \cdot 10^{-14} - 0,049 \cdot 10^{21} \cdot 1,64 \cdot 10^{-21} = 0,22 - 0,08 = 0,14 \text{ cm}$$

$$M' = 4(500 + 29,5 + 0,14) = 2119 \text{ tcm.}$$

Die Zunahme des Momentes von 2000 auf 2123 tcm beträgt also 6%.

Hätten wir die Glieder mit $\left(\frac{P}{EJ}\right)^3$ vernachlässigt, so würde sich ergeben haben:

$$\Delta \delta = 2,32 \text{ cm}$$

$$\Delta \varepsilon = 0,22 \text{ cm}$$

$$M' = 4(500 + 29,5 + 0,22) = 2119 \text{ tcm.}$$

Wir sehen also, daß diese Glieder schon von ganz unwesentlichem Einfluß sind und daß die Entwicklung keinesfalls weitergetrieben zu werden braucht. Es hat also keinen Zweck, die Reihenentwicklung weiter zu verfolgen. Es zeigt sich aber, daß der unter Zugrundelegung des unverformten Systems ermittelte Wert δ um 6% und ε um 0,5% zu klein waren. Wir ermitteln also zunächst das Moment und die Durchbiegungen in der üblichen Weise, ermitteln dann die zusätzlichen Durchbiegungen auf Grund der Momentenbelastung des verbogenen Tragwerkes; diese Durchbiegungen betrachten wir also endgültig und legen sie der endgültigen Momentenermittlung zugrunde. Es ist grundsätzlich gleichgültig, ob ein statisch bestimmtes System wie in diesem Beispiel, oder ein statisch unbestimmtes System, vorliegt. Die Berücksichtigung der Verformung kann sich, je nach der Anordnung des Systems, in günstigem oder in ungünstigem Sinne auswirken. Bei Balkenbrücken hat sie keinen nennenswerten Einfluß, beim Bogen mit Zugband oder dem Langerschen Balken sowie bei der in sich selbst verankerten Hängebrücke, wie wir sehen werden, auch nicht; diese Systeme gehören also in diesem Sinne auch zu den Balkenbrücken.

Da Verhältnisgleichheit zwischen Belastung einerseits und Beanspruchung und Verformung andererseits nicht besteht, nimmt man allgemein an, daß zur Berücksichtigung der Verformung Einflußlinien un-

geeignet seien. Es soll jedoch im folgenden gezeigt werden, daß gerade die Einflußlinie ein sicheres und leicht zu übersehendes Merkmal dafür ist, in welcher Weise die Verformung sich auswirkt und ob sie sich überhaupt nennenswert auswirken kann. Auch für die Berechnung sind Einflußlinien sehr brauchbar; nur müssen wir deren Ermittlung das unter der in Frage kommenden Belastung verformte System zugrunde legen; das heißt für jede Kraftgröße, die wir ermitteln wollen, gibt es nicht eine, sondern für jeden Belastungsfall eine Einflußlinie, die allerdings eine Einflußlinie im üblichen Sinne nicht mehr ist. Sie gibt aber bei der zugrunde gelegten Gesamtbelastung den Einfluß jeder Einzellast dieser Gesamtbelastung richtig an.

II. Verwendbarkeit von Einflußlinien.

1. Allgemeine Gültigkeit der Einflußlinien.

Wir betrachten als einfachstes und übersichtlichstes, praktisch in Frage kommendes System einen ziemlich schlank gedachten Zweigelenbogen mit festen Kämpfergelenken (Bild 4a), dessen Einflußlinie für das Moment in m wir nach dem Formänderungsgrößenverfahren (nicht zu verwechseln mit der hier behandelten Verformungstheorie) ermitteln wollen¹⁾.

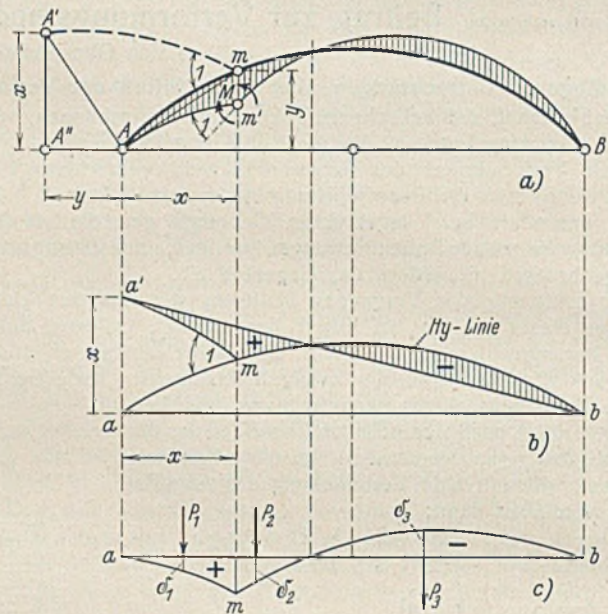


Bild 4a bis c.

Wir knicken den Bogen in m um den Drehwinkel „Eins“, wodurch der Auflagerpunkt A nach A' gelangt; den geknickten Bogen drehen wir (ohne Arbeitsaufwand) um B , bis A nach A'' gelangt. Um die gestörte Auflagerbedingung bei A wiederherzustellen, verschieben wir nun unter der Anwendung einer Kraft H an A'' nach A unter Aufwendung der Arbeit $H y$. Die dadurch entstandene Biegelinie des Bogens ist die y -fache H -Linie des Bogens, denn die H -Linie ist erklärt als die Biegelinie des Bogens, welche durch waagerechte Verschiebung von A um den Wert „Eins“ entsteht (Bild 4b). Da aber der Bogen in m den Knick „Eins“ hatte, behält diese Biegelinie natürlich denselben bei, wodurch a nach a' gelangt. Ziehen wir nun $a'-b$, so ist $a'-m-b$, oder darunter als $a-m-b$ gezeichnet (Bild 4c), die durch den Knick „Eins“ in m verursachte Biegelinie des Bogens, also die Einflußlinie für das Moment in m . Sie ist in Bild 4a nochmals in ihrer Lage zum Bogen selbst gezeichnet.

Der Beweis kann in folgender Weise geführt werden. Durch ein unbekanntes, in m aufgewandtes Moment (Bild 4a), dessen Größe hier ohne Belang ist, ist dort der Drehwinkel „Eins“ erzeugt worden. Das wirkliche, im Bogen durch die Lasten P_1, P_2, P_3 in m erzeugte Moment sei M_m . Es steht im statischen Gleichgewicht mit den Kräften P_1, P_2, P_3 und den Auflagerkräften in A und B , welche indessen wegen der festen Auflager keine Arbeit verrichten. Denken wir uns nun das Moment M_m in dem vorübergehend gelenkig gedachten Punkt m als äußere Kraft angreifend, wo durch die künstliche Verformung der Drehwinkel „Eins“ erzeugt wurde, so ist an dem Bogen die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte $\overline{M}_m \cdot 1$ geleistet worden, wobei durch die einfache und doppelte Überstreichung gekennzeichnet werden soll, daß Kraftgrößen und Verschiebungsgrößen nicht zusammengehören; im Bogen ist also die innere virtuelle Arbeit $\int_A^B \overline{\mathfrak{M}} d\vartheta$ entstanden, wobei $\overline{\mathfrak{M}}$ die durch das am Gelenk in m angreifende Moment M_m im Bogen erzeugten Momente $\overline{\mathfrak{M}}$ bedeutet;

¹⁾ Vgl. Krabbe, Allgemeine, unmittelbare Darstellung von Einflußlinien durch Biegelinien nach dem Verformungsverfahren. Stahlbau 1933, Heft 2.

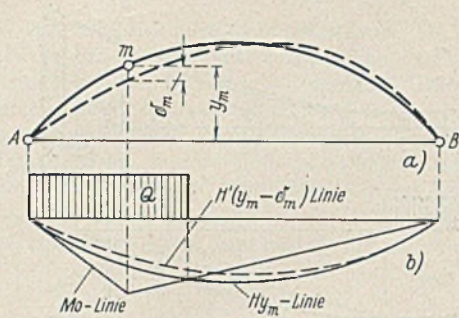


Bild 5a u. b.

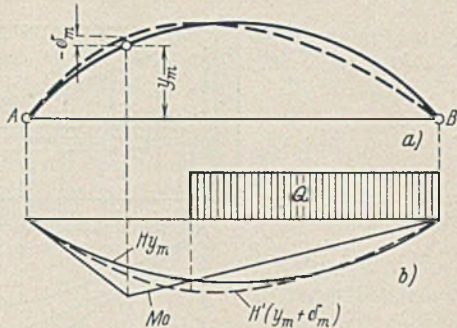


Bild 6a u. b.

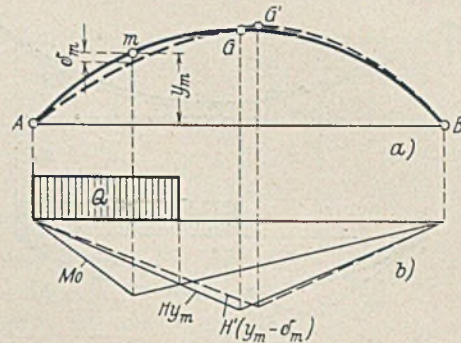


Bild 7a u. b.

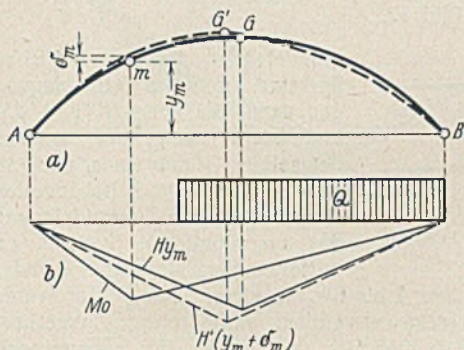


Bild 8a u. b.

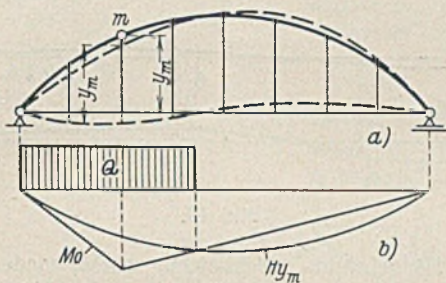


Bild 9a u. b.

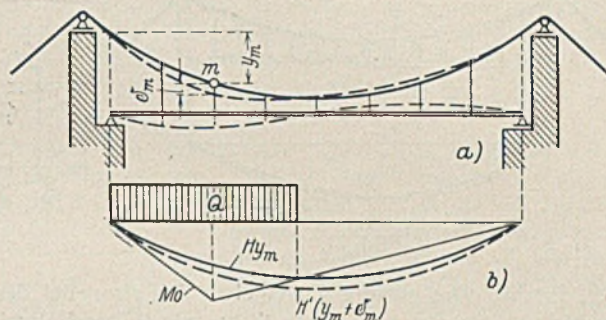


Bild 10a u. b.

$\bar{d}\varphi$ aber die der Verdrehung „Eins“ in m entsprechenden, kontinuierlichen Winkeländerungen innerhalb des Bogens. Die wirkliche Größe der Momente \bar{M} und der Winkeländerungen interessiert uns jedoch nicht. Die innere virtuelle Arbeit ist also

$$\mathcal{A}_i = \int_A^B \bar{M} \bar{d}\varphi = \bar{M}_m \cdot \bar{I}$$

Da nun M_m, P_1, P_2, P_3 (und die Auflagerkräfte A und B) ein im Gleichgewicht stehendes Kräftesystem, der Drehwinkel „Eins“ mit den Verschiebungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ein mögliches Verschiebungssystem darstellen, ist nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$(9) \quad \sum P \bar{\delta} = \mathcal{A}_i = \bar{M}_m \cdot \bar{I}$$

Gl. (9) sagt aber aus, daß die durch den Knick „Eins“ in m erzeugte Biegelinie des Bogens die Einflußlinie für das Moment M_m ist. Dieser Beweis gilt ganz allgemein, wobei natürlich die Anwendbarkeit des Prinzips der virtuellen Verschiebungen voraussetzt, daß der Knick „Eins“ in Wirklichkeit unendlich klein im Verhältnis zu den Abmessungen des Systems ist, und er ist auch hier kinematisch als solcher behandelt worden, denn in Gl. (9) geben die Verschiebungswerte $\bar{\delta}$ und \bar{I} die durch den Drehwinkel „Eins“ verursachten Verformungen des Systems an ohne Zusammenhang mit irgendwelchen Belastungen; dieser Verformung zu unterziehen ist natürlich dasjenige System, welches der Verformung durch die jeweils darauf wirkenden Kräfte entspricht. Sie gilt also, streng genommen, nur für die Systemform, die durch die äußere Belastung entstanden ist. Die Anwendung von Einflußlinien bleibt also auch bei der Berücksichtigung der Verformung einwandfrei.

2. Allgemeine Betrachtungen über den Einfluß der Verformung bei verschiedenen Brückensystemen mittels deren Einflußlinien.

Um den Einfluß der Systemverformung besser zu erkennen, denken wir uns nun (Bild 5) die für M_m gewonnene Einflußlinie in der üblichen Weise durch Überlagerung der M_{m0} -Linie und der Hy_m -Linie entstanden, und den Bogen auf der positiven Beitragstrecke für M_m belastet. Dadurch verformt er sich etwa in der in Bild 5a punktiert dargestellten Weise; da die Werte y links kleiner, rechts aber größer werden, werden auch die durch eine waagerechte Kraft $H=1$ erzeugten Momente links kleiner, rechts größer und die Hy_m -Linie wird wegen Verringerung des Wertes y_m im ganzen etwas kleinere Ordinaten, links aber wegen der allgemein verringerten Werte y wesentlich kleinere Ordinaten erhalten als die ursprüngliche Hy_m -Linie; sie ist in Bild 5b punktiert eingetragen. Die positiven größten Momente werden also größer als ohne Berücksichtigung der Verformung; für die negativen größten Momente ist Bild 5 ohne Belang, da der Belastungsfall dafür unzutreffend ist. Der hierfür zutreffende Belastungs- und Verformungsfall ist in Bild 6 dargestellt. Die Hy_m -Linie wird wegen des vergrößerten y_m im ganzen etwas größere Ordinaten, links erheblich größere und rechts wegen entgegengesetzter Wirkung der hier verkleinerten y -Werte und des ver-

größten Wertes y_m wenig veränderte Ordinaten erhalten. An dem größten negativen Moment M verändert sich also nur wenig; im allgemeinen wird es wenig größer werden wie das ohne Berücksichtigung der Verformung errechnete. Beim Zweigelenkbogen wirkt sich die Berücksichtigung der Verformung also durchweg ungünstig aus. Die Größe von H bei voller Belastung wird durch die Berücksichtigung der Verformung kaum merklich beeinflusst.

Beim statisch bestimmten Dreigelenkbogen gestatten die Einflußlinien besonders klaren Einblick in die Einflüsse der Verformung. Unter dem Einfluß der für die positive Beitragstrecke maßgebenden Belastung q (Bild 7a) verformt sich der Bogen, wie punktiert dargestellt, das Scheitelgelenk rückt etwas nach rechts; die Hy_m -Linie nimmt die in Bild 7b punktiert dargestellte gestrichelte Form an; ihre Ordinaten werden wegen der Verringerung von y_m durchschnittlich etwas kleiner und der positive Teil der Einflußfläche wird, ähnlich wie beim Zweigelenkbogen, vergrößert.

Bei Belastung der für den negativen Teil maßgebenden Strecke (Bild 8a) rückt das Scheitelgelenk etwas nach links; wegen der Vergrößerung der Werte y_m werden die Ordinaten der Hy_m -Linie, in Bild 6b punktiert dargestellt, im Durchschnitt etwas größer; der negative Teil der Einflußfläche verändert sich wenig und vergrößert sich im allgemeinen um einen kleinen Beitrag. Der Einfluß der Verformung macht sich also beim Dreigelenkbogen in ganz dem Zweigelenkbogen entsprechender Weise, durchweg ungünstig, bemerkbar. Wesentlich anders liegen die Verhältnisse beim Zweigelenkbogen oder Dreigelenkbogen mit Zugband (Bild 9). Unter dem Einfluß der Belastung der positiven Beitragstrecke für M_m verformen sich Bogen und Zugband in der punktiert dargestellten Weise. Weder y_m noch die übrigen Ordinaten y ändern, abgesehen von der geringfügigen Längenänderung der Zugstangen, ihre Größe, und die Hy_m -Linie ändert sich nicht merklich; für den Langerschen Balken liegen die Verhältnisse ebenso, woraus zu schließen ist: Beim Zweigelenkbogen mit Zugband hat die Verformung auf die Beanspruchungen des Bogens keinen nennenswerten Einfluß. Dasselbe gilt für den Langerschen Balken.

Schließlich sollen die Einflüsse der Verformung bei dem für die Praxis wichtigsten Fall der Hängebrücke untersucht werden (Bild 10). Unter dem Einfluß der Belastung der positiven Beitragstrecke für M_m verformen sich Balken und Kabel in der punktiert dargestellten Weise. y_m vergrößert sich; die Ordinaten der Hy_m -Linie werden im Durchschnitt größer; vergrößern sich weiterhin links und verkleinern sich rechts (Bild 10b). Die positive Beitragfläche wird in weit stärkerem Maße kleiner, als sie beim Bogen größer wurde, was sich aus ihrer allgemeinen Form ergibt. $\max M_m$ wird unter dem Einfluß der Verformung wesentlich kleiner.

Unter dem Einfluß der Belastung des negativen Teiles der Beitragstrecke von M_m nehmen Kabel und Balken die in Bild 11a punktiert dargestellte Form an. y_m und damit der durchschnittliche Wert der Ordinaten der Hy_m -Linie verkleinert sich. Im übrigen verkleinern sich die Ordinaten links und vergrößern sich rechts; also links wesentliche Verkleinerung, rechts keine wesentliche Änderung; aber die negative Beitragstrecke wird kleiner; im ganzen also geringe Verkleinerung der negativen

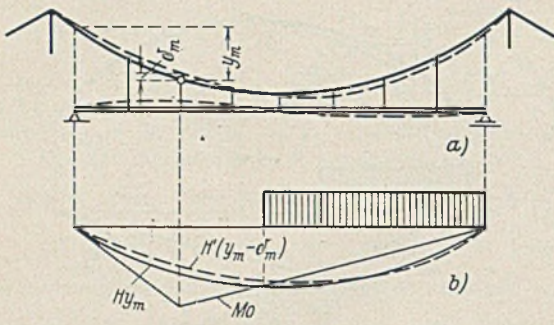


Bild 11 a u. b.

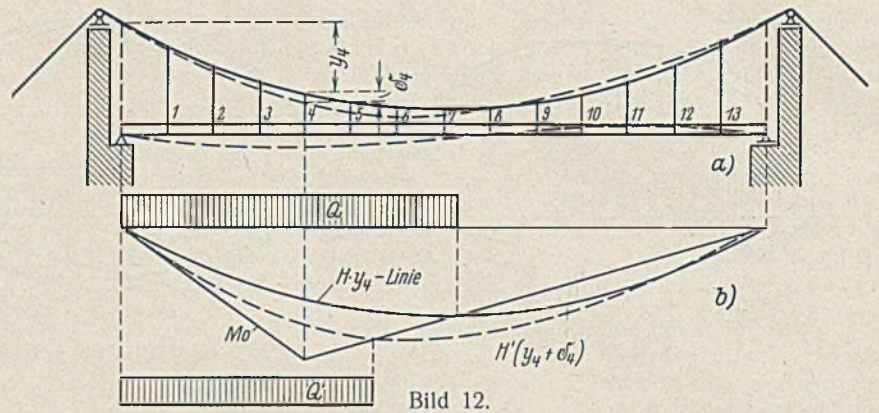


Bild 12.

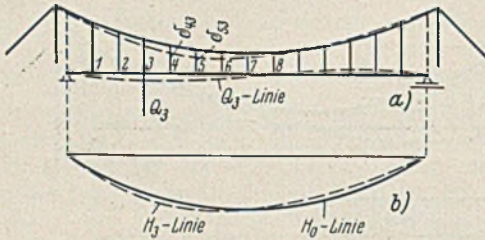


Bild 14.

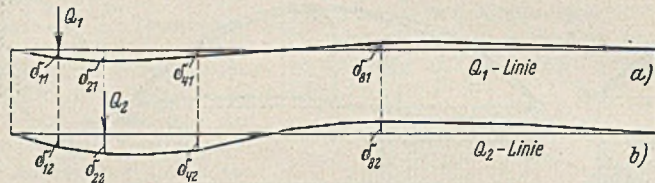


Bild 13.

M_m -Fläche. Das gesamte Endergebnis ist also: Bei der Hängebrücke verkleinert sich $\max M_m$ wesentlich; $\min M_m$ verkleinert sich (absolut genommen) auch etwas. Bei der Hängebrücke wirkt sich der Einfluß der Verformung im allgemeinen günstig aus.

Ist jedoch, abweichend von Bild 10, das Kabel im Versteifungsträger verankert, so wird dieser durch eine waagerechte Druckkraft H beansprucht; Versteifungsträger und Kabel biegen sich, abgesehen von der Längenänderung der Hängestangen, um dieselben Maße δ durch, und einer Vergrößerung der durch den Kabelzug verursachten negativen Momente um $H\delta$ entsprechen hinzukommende, gleiche positive Momente $H\delta$. Die H -Linie bzw. die $H y_m$ -Linie ändert sich also infolge der Verformung nicht. Daraus folgt: Bei in sich verankerten Hängebrücken hat die Verformung keinen Einfluß auf die Beanspruchung, abgesehen von dem geringen Einfluß der Längenänderung der Hängestangen, der übrigens $\max M_m$ vergrößert.

Auf mehrfach statisch unbestimmte Formen der Bogen- und Hängebrücken soll hier nicht näher eingegangen werden. Die Verhältnisse ändern sich dabei, da auch hier stets der Einfluß von H ausschlaggebend ist, nicht grundsätzlich.

Gewählt wurde bei der Betrachtung durchweg das Moment etwa im Viertelpunkt der Brücke, wo die Momente am größten zu werden pflegen; die Wahl eines anderen Punktes, etwa in der Mitte der Brücke, würde die hier gekennzeichneten Verhältnisse des Einflusses der Verformung nicht wesentlich ändern.

3. Die praktische Anwendbarkeit der Einflußlinien.

Die Betrachtung der allgemeinen Form der Einflußlinie gibt uns also ein übersichtliches Merkmal für den Einfluß der Verformung bei den verschiedenen Brückenformen für die Beanspruchung. Es bleibt nun die Frage zu beantworten, ob Einflußlinien auch bei Berücksichtigung des Einflusses der Verformung mit Vorteil verwendet werden können. Hauptsächlich pflegt man von dem Einfluß der Verformung auf die Beanspruchung bei größeren Hängebrücken Gebrauch zu machen, bei denen unter Berücksichtigung der Verformung die größten positiven Momente des Versteifungsträgers zum Teil erheblich kleiner werden, während sich der Einfluß auf die größten negativen Momente zwar im allgemeinen auch günstig, jedoch weniger auswirkt. Es soll also hier das Beispiel der Hängebrücke betrachtet werden. Es fragt sich allerdings, ob nicht bei großen, schlanken Zweigelenbogen oder eingespannten Bogen, bei welchen die Verformung die größten Momente in ungünstigem Sinne beeinflusst, auch die Berücksichtigung der Verformung geboten erscheint. Das einzuschlagende Verfahren ist jedoch grundsätzlich dasselbe wie bei Hängebrücken, so daß es hierfür später nur eines kurzen Hinweises bedarf.

Wir betrachten eine einfache Hängebrücke, etwa wie in Bild 10 dargestellt (Bild 12a). Nach der üblichen Berechnungsweise würde die Einflußlinie für das Moment M_4 des Balkens die in Bild 12b dargestellte, durch Überlagerung der $M_{4,0}$ -Linie und der $H y_4$ -Linie entstandene Form haben, während bei Berücksichtigung der durch die Belastung hervorgerufenen Verformung die Einflußlinie, entstanden durch Überlagerung der unverändert bleibenden $M_{4,0}$ -Linie mit der $H'(y_4 + \delta_4)$ -Linie, wesentlich anders sein würde, wie in Bild 12b punktiert dargestellt. Nun treten aber zwei Schwierigkeiten auf, nämlich:

1. Die Belastungsscheide hat sich wesentlich nach links verschoben, so daß nun nicht mehr die Belastung Q , sondern Q' maßgebend ist.
2. Auch wenn man die neue Belastungsscheide zuvor richtig abschätzen könnte, so wäre doch die unter der Belastung Q' unter Zu-

gründelung des ursprünglichen Systems ermittelte Durchbiegung und damit die neue $H'(y_4 + \delta_4)$ -Linie nicht richtig, und zwar aus demselben Grunde, aus dem an dem in Abschnitt I behandelten Galgen die unter Zugrundelegung des ursprünglichen Systems ermittelten Verschiebungen δ und δ nicht richtig waren, sondern um 4 bis 6% zu klein. Der Fehler würde sich aber bei der Hängebrücke wesentlich einflußreicher bemerkbar machen als bei dem Galgen, da hier nicht das Moment $H y_4$ entsprechend dem Moment $P a$ beim Galgen, sondern die Differenz $M_{4,0} - H y_4$ maßgebend ist; weil aber ferner das Moment $H y_4$ allein den Träger weit über σ_{zul} beanspruchen würde, während im Falle des Galgens dieser Wert natürlich eingehalten werden mußte. Hierauf beruht der wesentliche Einfluß der Verformung bei schlanken Bogen- und Hängebrücken, bedingt durch die charakteristische Form der Einflußlinie, besonders ihrer positiven Beitragstrecke. Wir müßten also nachträglich durch eine ähnliche Reihenentwicklung, wie sie an dem einfachen Beispiel des Galgens durchgeführt wurde, berichtigen. Hier weisen aber die Eigenschaften der Einflußlinie einen wesentlich einfacheren Weg, der noch dazu den Vorzug hat, das Ergebnis nicht auf dem Annäherungswege, sondern unmittelbar streng genau zu liefern und gleichzeitig auch die richtige Belastungsscheide.

Bei großen Brücken, wie sie hier in Frage kommen, wird man ohnehin zweckmäßig die Einzellasten durch eine gleichmäßig über die maßgebende Belastungstrecke verteilte Last Q ersetzen, was zunächst angenommen werden soll. In welcher Weise auch mit Einzellasten gerechnet werden kann, soll später gezeigt werden. Wir ermitteln nacheinander die Biegelinien, welche bei Belastung der einzelnen Punkte 1 bis 13 mit der ihnen zufallenden Teilbelastung von Q entstehen, die wir mit Q_1, Q_2, \dots, Q_{13} bezeichnen wollen (Bild 13). Die Ordinaten bezeichnen wir

- bei Belastung in Punkt 1: $\delta_{11}, \delta_{21}, \dots, \delta_{131}$
 " " " " 2: $\delta_{12}, \delta_{22}, \dots, \delta_{132}$
 " " " " 13: $\delta_{113}, \delta_{213}, \dots, \delta_{1313}$

(Für die Belastung in Punkt 3 in Bild 14a dargestellt.) Dabei ist natürlich stets $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ auf Grund des Maxwell'schen Satzes und bei Symmetrie des Systems auch $\delta_{11} = \delta_{1313}$; $\delta_{34} = \delta_{1113}$ usw. Ferner bestimmen wir die H -Linie des unverformten Systems, die H_0 -Linie. Sodann bestimmen wir nacheinander einzeln die H -Linien des durch je eine Einzellast Q_1, Q_2, \dots, Q_{13} verbogenen Systems (für Last Q_5 in Bild 14b dargestellt), die wir mit H_1 - bis H_{13} -Linie bezeichnen wollen. Dabei ist zu beachten, daß sich außer den y -Werten auch die Werte δ_{aa} ändern, welche wir zur Bestimmung der einzelnen H -Linien gebrauchen und die bekanntlich von den Quadraten der veränderten y -Werte abhängig sind. Wir haben also bei dem vorliegenden System, Symmetrie vorausgesetzt, sieben Biegelinien nach Bild 13 und sieben H -Linien nach Bild 14 zu ermitteln; das sind aber alle Biegelinien, die wir zur Behandlung des ganzen Systems benötigen. Bemerkt sei dabei, daß die Biegelinien und H -Linien nach Bild 13 u. 14 natürlich nicht streng richtig sind, da sie unter Zugrundelegung des unverformten Systems ermittelt wurden; wir werden aber sehen, daß wir sie ohne gleichzeitige einwandfreie Berichtigung auch nicht verwenden werden.

Wir wollen die Einflußlinie für den positiven Belastungsbereich des Moments M_4 (Bild 15a) ermitteln. Wir zeichnen nun zunächst durch Überdeckung der $M_{4,0}$ -Linie und der $H_0 y_4$ -Linie die Einflußlinie, gültig für das unverformte System. Es ist für ihre Gestalt und Abmessungen gänzlich gleichgültig, ob wir sie in dieser Weise oder nach dem unter Ziffer I dargelegten kinematischen Verfahren ermittelt haben; wir stellen sie hier aber in der angegebenen Weise dar, um der Gleichung entsprechend

$$M_4 = M_{4,0} - H_0 y_4$$

den von der Verformung unabhängigen Teil der Einflußlinie $M_{4,0}$ von dem durch die Verformung allein beeinflussten Teil $H_0 y_4$ getrennt zu erhalten. Sie ist nach den Erläuterungen zu Gl. (9) die völlig einwandfreie Einflußlinie unter der Voraussetzung, daß das ursprüngliche System

nicht verformt, also auch nicht belastet ist; sie ist also eine „Einflußlinie“, die streng genommen nicht geeignet ist, den Einfluß irgendeiner Belastung auf das Moment M_4 richtig anzugeben. (Dasselbe ist, ganz streng genommen, mit wenigen Ausnahmen bei den Einflußlinien aller Systeme, selbst denen des einfachen Balkens, der Fall. Belasten wir (Bild 16) einen einfachen Balken, hier der Einfachheit halber in der Mitte, mit P , so ist nach üblichen Annahmen die Einflußlinie für das Moment M_m das dargestellte Dreieck mit der Ordinate $1/4$ unter P . In Wirklichkeit hat sich aber unter der Verformung durch die Last P die unterste Zugfaser verlängert und

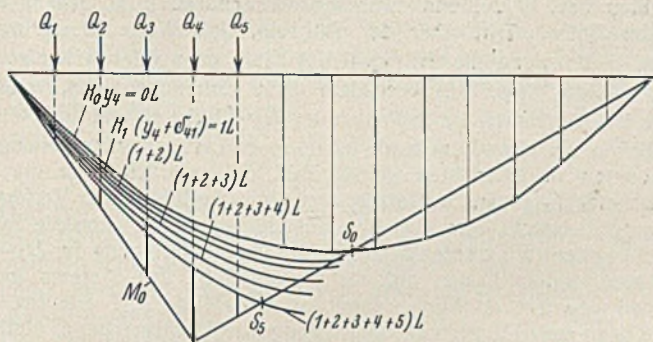


Bild 15a.

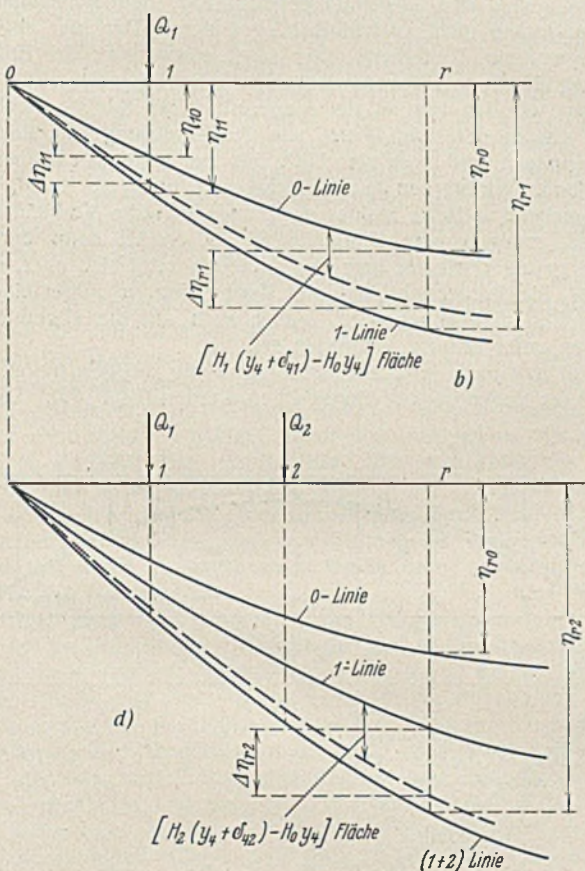


Bild 15b u. d.

damit die Stützweite um Δl vergrößert, und die Ordinate unter P ist $\frac{l + \Delta l}{4}$; das Moment also $P \cdot \frac{l + \Delta l}{4}$. Belasten wir mit $2P$, so ist die Verlängerung $2 \Delta l$ und das Moment $2P \cdot \frac{l + \Delta l}{4}$, also mehr als doppelt so groß. Derartige winzige Einflüsse lassen wir aber, als praktisch gänzlich belanglos, unberücksichtigt.) Nun belasten wir mit Q_1 . Wollen wir nun unter Zugrundelegung des unverformten Systems die durch Q_1 bedingte Verformung bestimmen, so erhalten wir als neue obere Begrenzung der Einflußfläche die $H_1(y_4 + \delta_{41})$ -Linie, die in Punkt 1 eine um $\Delta \eta_{11}$ größere Ordinate hätte wie die $H_0 y_4$ -Linie (dabei soll der erste Zeiger 1 von $\Delta \eta$ den Ort, der zweite Zeiger 1 die Ursache, nämlich die benutzte H_1 -Linie andeuten), Bild 15b. Die $H_1(y_4 + \delta_{41})$ -Linie ist dort punktiert dargestellt. Die zwischen ihr und $H_0 y_4$ eingeschlossene Fläche ist also die $[H_1(y_4 + \delta_{41}) - H_0 y_4]$ -Fläche. Die Zugrundelegung des unverformten Systems für diese Ermittlung ist aber nicht richtig; die richtige obere Begrenzung liegt also anders und möge durch die Ordinate η_{11} gegeben sein. Dann ist aber der Einfluß von Q_1 auf das Moment $H y$ im Verhältnis $\frac{\eta_{11}}{\eta_{10}}$ größer als im unverformten System; also muß auch die unter Zugrundelegung des unverformten Systems ermittelte zusätzliche Ordinate $\Delta \eta_{11}$ in demselben Verhältnis größer werden, wenn wir die

unbekannte, aber richtige Verformung zugrunde legen. Es muß also sein:

$$\frac{\eta_{11} - \eta_{10}}{\Delta \eta_{11}} = \frac{\eta_{11}}{\eta_{10}} \quad \text{oder} \quad \frac{(\eta_{11} - \eta_{10})}{\Delta \eta_{11}} = \frac{(\eta_{11} - \eta_{10}) + \eta_{10}}{\eta_{10}}$$

woraus sich ergibt:

$$(10) \quad \eta_{11} - \eta_{10} = \Delta \eta_{11} \cdot \frac{\eta_{10}}{\eta_{10} - \Delta \eta_{11}}$$

d. h. die Ordinate der $[H_1(y_4 + \delta_{41}) - H_0 y_4]$ -Fläche im Punkt 1, welche wir mit $\Delta \eta_{11}$ bezeichnen, ist mit dem Beiwert

$$(11) \quad \mu_{11} = \frac{\eta_{10}}{\eta_{10} - \Delta \eta_{11}}$$

zu vervielfältigen.

In ganz entsprechender Weise bilden wir die Werte $\mu_{21}, \mu_{31}, \dots, \mu_{71}$ (hier können wir aufhören, da ja die Einflußfläche für max M_4 keinesfalls über den Punkt 7, die Lastenscheide des ursprünglichen Systems, reichen wird). Allgemein werden dann die Ordinaten r der neuen, richtigen oberen Begrenzung der M_4 -Fläche dadurch erhalten, daß wir zu den Ordinaten der $H_0 y_4$ -Linie die Ordinaten der mit

$$(12) \quad \mu_{r1} = \frac{\eta_{r0}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{r1}}$$

vervielfachten Ordinaten $\Delta \eta_{r1}$ der $[H_1(y_{11} + \delta_{41}) - H_0 y_4]$ -Fläche zuzählen (Bild 15c). Die so erhaltene Linie, die wir zum Unterschied von der ursprünglichen, mit 0-Linie zu bezeichnenden $H_0 y_4$ -Linie die 1-Linie

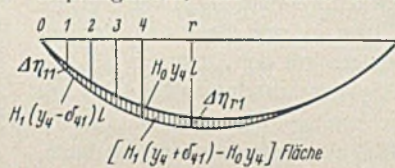


Bild 15c.

nennen wollen, die strenge richtige Einflußlinie für M_4 für das mit Q_1 belastete und dadurch verformte System. Sie ist aber, im Gegensatz zu der ursprünglichen Einflußlinie, die den Einfluß keiner Belastung anzugeben vermochte, imstande, den Einfluß der Belastung Q_1

in Punkt 1, aber nur diesen, richtig anzugeben; für andere Belastungen gilt sie nicht, und wenn wir sie dafür verwenden wollten, hätten wir fälschlich der Berechnung das durch Q_1 verformte System zugrunde gelegt.

Wir bringen nun zu der Last Q_1 die Last Q_2 auf (Bild 15d). Wenn wir den Einfluß der Last Q_2 unter Zugrundelegung des unverformten Systems, also der 0-Linie entsprechend, untersuchen würden, so würden wir, diesmal von der 1-Linie aus, zusätzlich die Ordinaten $\Delta \eta_{r2}$ der $[H_2(y_4 + \delta_{42}) - H_0 y_4]$ -Fläche auftragen müssen, um die neue obere Begrenzung der Einflußfläche für das durch $Q_1 + Q_2$ verformte System erhalten (in Bild 15d punktiert dargestellt). Wir müssen aber nicht das ursprüngliche System, sondern das durch die Belastung $Q_1 + Q_2$ verformte System zugrunde legen. Die sich dann ergebenden richtigen Ordinaten seien $\eta_{12}, \eta_{22}, \dots, \eta_{72}$, allgemein η_{r2} . Dann ergibt sich aber, daß sich der Einfluß der Belastung Q_2 auf das Moment $H y$ gegenüber dem

aus dem unverformten System ermittelten Einfluß im Verhältnis $\frac{\eta_{r2}}{\eta_{r0}}$ vergrößert hat; in demselben Verhältnis müssen auch die Ordinaten $\Delta \eta_{r2}$ vergrößert werden, und es ergibt sich:

$$\frac{\eta_{r2} - \eta_{r1}}{\Delta \eta_{r2}} = \frac{\eta_{r2}}{\eta_{r0}} \quad \text{oder} \quad \frac{(\eta_{r2} - \eta_{r1})}{\Delta \eta_{r2}} = \frac{(\eta_{r2} - \eta_{r1}) + \eta_{r1}}{\eta_{r0}}$$

$$(13) \quad \eta_{r2} - \eta_{r1} = \Delta \eta_{r2} \cdot \frac{\eta_{r1}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{r2}}$$

d. h. die von der 1-Linie aus aufzutragenden Ordinaten der $[H_2(y_4 + \delta_{42}) - H_0 y_4]$ -Fläche = $\Delta \eta_{r2}$

müssen mit

$$(14) \quad \mu_{r2} = \frac{\eta_{r1}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{r2}}$$

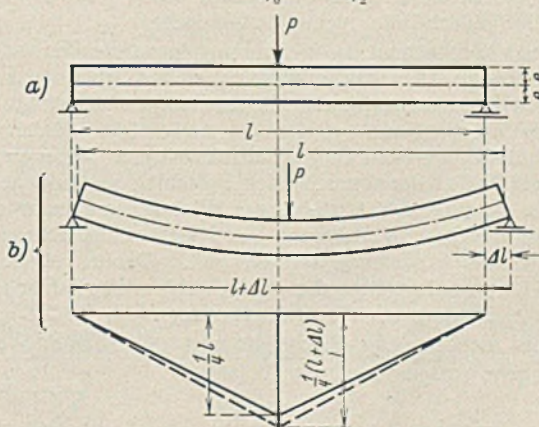


Bild 16a u. b.

2) Das ist die Summe der unendlichen, konvergenten geometrischen Reihe $\Delta \eta_{11} \left[1 + \frac{\Delta \eta_{11}}{\eta_{10}} + \left(\frac{\Delta \eta_{11}}{\eta_{10}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta \eta_{11}}{\eta_{10}} \right)^n \right]$, deren Herleitung im Abschnitt III in anderer Form wiedergegeben wird.

vervielfacht werden, um die richtige Begrenzung der Einflußfläche für M_1 unter Zugrundelegung des mit $Q_1 + Q_2$ belasteten und entsprechend verformten Systems zu erhalten. Wir nennen diese neue Begrenzung die (1+2)-Linie. Fahren wir so fort und bringen weiter hinzu die Lasten Q_3, Q_4 usw. bis Q_k , so ergibt sich allgemein

$$(15) \quad \eta_{rk} - \eta_{r(k-1)} = \Delta \eta_{rk} \cdot \frac{\eta_{r(k-1)}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{rk}}$$

$$(16) \quad \mu_{rk} = \frac{\eta_{r(k-1)}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{rk}}$$

und damit allgemein die Regel:

Um die H_y -Linie für das durch $Q_1, Q_2 \dots Q_k$ belastete und verformte System zu finden, trägt man von der H_y -Linie für das durch $Q_1, Q_2 \dots Q_{k-1}$ belastete und verformte System aus die Ordinaten $\Delta \eta_{rk}$ der $[H_k(y_4 + \delta_{4k}) - H_0 y_4]$ -Fläche auf, welche mit den Beiwerten

$$\mu_{rk} = \frac{\eta_{r(k-1)}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{rk}}$$

zu vervielfachen sind. Dabei bedeutet: $\eta_{r(k-1)}$ die r -Ordinate der H_y -Fläche in dem durch $Q_1, Q_2 \dots Q_{k-1}$ verformten System, η_{r0} die r -Ordinate der H_y -Fläche des ursprünglichen Systems, $\Delta \eta_{rk}$ die Ordinate der $[H_k(y_4 + \delta_{4k}) - H_0 y_4]$ -Fläche. Gl. 10 u. 11 sind darin natürlich mit einbegriffen, nur daß hier die Ausgangsfläche mit den Ordinaten $\eta_{r(k-1)}$ mit der H_y -Fläche des ursprünglichen Systems zusammenfällt, also mit $k=1$ $\eta_{r(k-1)} = \eta_{r0}$ wird.

In dieser Weise ermitteln wir (Bild 15a) nun nacheinander die 0-Linie, die 1-Linie, die (1+2)-Linie bis zur (1+2+3+4+5)-Linie. Hier zeigt sich, daß die nächste Last Q_6 außerhalb des positiven Einflußbereiches liegen würde, das Verfahren also mit der Last Q_5 abzuschließen ist. Wir haben dann die richtige Einflußfläche für das Moment $\max M_1$ unter Zugrundelegung des durch die Lasten Q_1 bis Q_5 belasteten und verformten Systems. Sie gilt nur für diese Belastung, also die gesamte für $\max M_1$ in Frage kommende Belastung, und gibt dabei den Einfluß jeder einzelnen der Lasten Q_1 bis Q_5 auf das Moment M_1 richtig an.

Wir haben nun also nicht eine, sondern eine ganze Anzahl von Einflußflächen für $\max M_1$ erhalten, nämlich die durch die 0-Linie begrenzte Fläche und ferner die durch die 1-Linie, die (1+2)-Linie, die (1+2+3)-Linie, die (1+2+3+4)-Linie und schließlich die durch die (1+2+3+4+5)-Linie begrenzte Fläche.

Alle diese Flächen sind Einflußflächen für $\max M_1$ des vorliegenden Systems, sie entsprechen nur verschiedenen Verformungszuständen, nämlich nacheinander: der Verformung Null, der Verformung durch die Last Q_1 , der Verformung durch die Lasten $Q_1 + Q_2$ usw., die letzte der Verformung durch die Lasten $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$. Alle diese Einflußflächen könnten wir schließlich, wenn wir Ungenauigkeiten in Kauf nehmen wollten, in üblicher Weise als Einflußflächen benutzen; die schlechteste davon, nämlich für keine Belastung genau richtig, wäre die ursprüngliche Einflußfläche, die sich nach und nach verbessert. Streng richtig ist die 1-Linie nur für den Belastungszustand Q_1 ; die (1+2)-Linie für den Belastungszustand $Q_1 + Q_2$ und schließlich die (1+2+3+4+5)-Linie für den Belastungszustand $Q_1 + Q_2 \dots + Q_5$, wobei jeder Last ihr ganz bestimmter Ort und ihre ganz bestimmte Größe zugewiesen ist. Unter diesen Voraussetzungen gibt diese Einflußfläche jedoch den Einfluß jeder einzelnen der fünf Lasten auf das Moment M_1 richtig an. Nur der letztere Belastungszustand ist für uns von Belang, weil er die ungünstigste Belastung für das positive Moment M_1 darstellt, d. h. den streng richtigen Wert $\max M_1$ ergibt. Für diesen Wert ist also die durch die (1+2+3+4+5)-Linie begrenzte Einflußfläche die „echte Einflußfläche“.

Schließlich könnte man das Verfahren folgendermaßen ändern: Unter der Voraussetzung, daß es vorher möglich ist, auf Grund von Erfahrungen die richtige Belastungsscheide, also die für die $\max M_1$ richtige Belastung, einigermaßen abzuschätzen, würde man zunächst in üblicher Weise die durch die Nulllinie begrenzte Einflußfläche ermitteln. Dann ermittelt man die unter dem Einfluß der abgeschätzten Belastung entstandene Biegelinie des Systems, woraus sich zunächst der Wert δ_4 ergeben würde. Dann ermittelt man die dieser Verformung des Systems entsprechende H -Linie, die als H' -Linie bezeichnet werden soll. Daraus bildet man die $H'(y_4 + \delta_4)$ -Linie und weiter die $[H'(y_4 + \delta_4) - H_0 y_4]$ -Fläche mit den Ordinaten $\Delta \eta_r$. Sind nun die Ordinaten der $H_0 y_4$ -Fläche η_{r0} und die Ordinaten der richtigen H_y -Fläche die noch unbekanntenen Werte η_r , so ergibt sich, ganz entsprechend der Gl. (10):

$$(10a) \quad \eta_r - \eta_{r0} = \Delta \eta_r \cdot \frac{\eta_{r0}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_r}$$

Diese Werte sind zusätzlich von der Nulllinie aus aufzutragen, und es ergibt sich, unter Voraussetzung richtiger vorheriger Abschätzung der maßgebenden Belastung, die echte Einflußfläche für $\max M_1$.

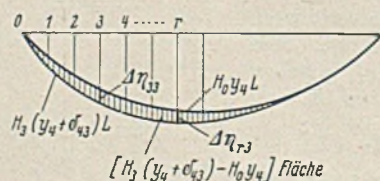


Bild 17 d.

Auch dieses Verfahren wäre streng richtig; nur würde man dabei für jede Einflußfläche besondere Biege- und H -Linien ermitteln müssen, und es bleibt dabei die unangenehme Beigabe des vorherigen Abschätzens der Belastungsscheide; erspart wird allerdings die bei einzelner Ermittlung der Einflußflächenbegrenzungen entstehende Arbeit der Zwischenrechnungen.

Zu beachten ist das Vorzeichen von $\Delta \eta_{rk}$. Wir haben es hier, wie es bei der Hängebrücke im allgemeinen der Fall sein wird, durchweg als positiv angenommen, und die Werte nach Gl. (16) werden damit stets größer als 1, die Ordinaten der H_y -Linie nehmen mit jeder neu aufgebrauchten Last Q zu, und zwar fortschreitend stark zu, also in divergierender Reihe. Tritt aber der Fall ein, daß Werte $\Delta \eta_{rk}$ negativ werden, d. h., wenn die $H_k(y_4 + \delta_{4k})$ -Linie ganz oder teilweise über der $H_0 y_4$ -Linie liegt, was besonders dann vorkommen wird, wenn δ_{4k} negativ ist, so nehmen die Ordinaten der H_y -Fläche ab und der Wert μ_{rk} wird kleiner als 1, und zwar mit jeder neuen Last schneller abnehmend. Wir könnten das Verfahren gemäß Bild 15a natürlich über die neue Lastenscheide S_5 hinaus fortsetzen, wenn wir den Einfluß der Verformung für das vollbelastete, also etwa mit dem Eigengewicht belastete System ermitteln wollen. Wir würden dann rückschreitende Verlegung der H_y -Linie beobachten, indem Lasten auf der rechten Seite des Systems im allgemeinen negative δ_4 -Werte, damit auch μ -Werte < 1 erhalten. Wir müßten dann andere Lasten Q , dem Eigengewicht entsprechend, einführen und dementsprechend die in Bild 13 u. 14 angedeuteten Biegelinien, den veränderten Lasten Q entsprechend, neu berechnen, wobei sich die H -Linien nicht verhältnismäßig ändern. Der hier angedeutete Gang des weiteren Verfahrens aber zeigt schon, daß der Einfluß der Verformung durch das Eigengewicht nicht erheblich sein wird.

Wollen wir den Einfluß der Verformung für $\min M_1$ ermitteln, so geschieht das in derselben Weise wie die Ermittlung von $\max M_1$, nur rechts beginnend und nach der Mitte bis zur neuen Belastungsscheide fortschreitend. Wir würden dann zunächst negative Werte für δ_4 erhalten, dementsprechend μ -Werte kleiner als 1 und langsame Verkleinerung der für $\min M_1$ maßgebenden Einflußfläche, jedoch ist dann der Einfluß wesentlich geringer wie für $\max M_1$; immerhin zeigt sich aber, daß auch auf $\min M_1$ die Berücksichtigung der Verformung im allgemeinen einen günstigen Einfluß ausüben wird, wobei auch auf die allgemeinen Betrachtungen unter Ziffer 2 verwiesen sei.

Es soll nun noch kurz auf die Behandlung weitgespannter, schlank ausgebildeter Bogenbrücken eingegangen werden (Bild 17a). Die Biege-

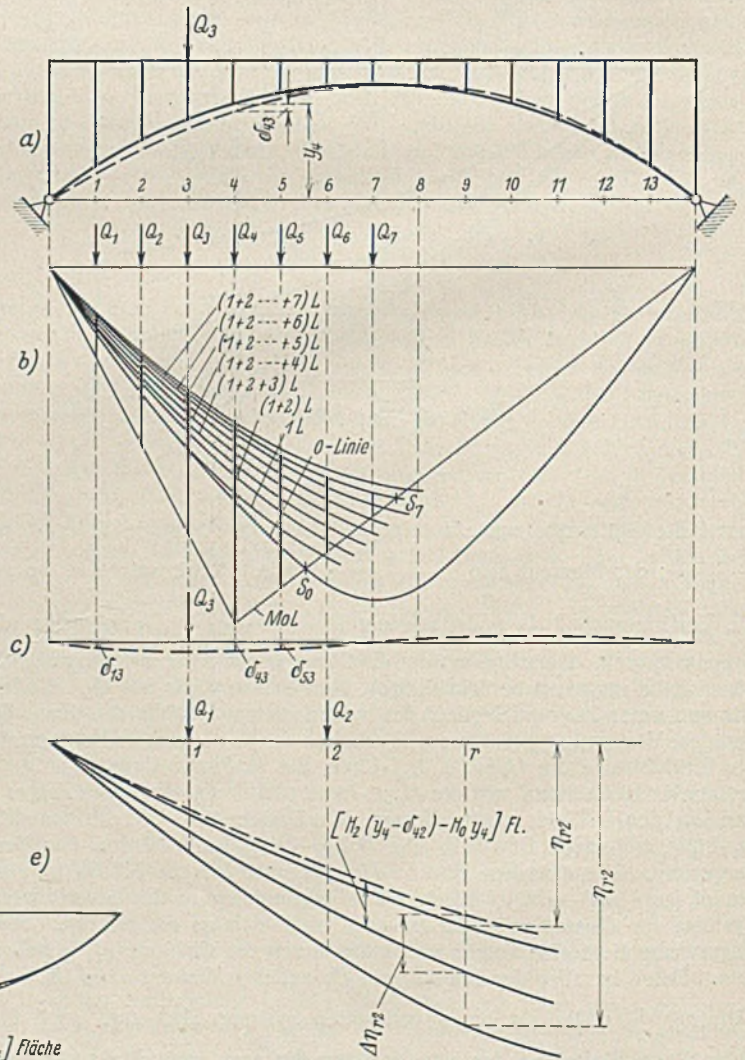


Bild 17 a bis c u. e.

Linien für Q_1, Q_2 usw. werden ähnlich denjenigen des Bildes 13 ausfallen (Bild 17c), die H_1, H_2 - usw. Linien (Bild 15d) dagegen in entgegengesetzter Weise ausschlagen, wie bei der Hängebrücke.

Wir bilden wieder die ursprünglichen Einflußlinien (Bild 17b) in gewohnter Weise.

Bei Belastung mit Q_1 müssen wir nun aber die $H_1(y_4 - \delta_{41})$ -Linie bilden, die also flacher ausfallen wird wie die $H_0 y_4$ -Linie, und die Ordinaten $\Delta \eta_{r1}$ der $[H_1(y_4 - \delta_{41}) - H_0 y_4]$ -Fläche werden im allgemeinen negativ ausfallen und ebenso diejenigen der später zu bildenden $[H_k(y_4 - \delta_{4k}) - H_0 y_4]$ -Flächen (Bild 17e). Wir wollen annehmen, daß die 0-Linie und die 1-Linie bereits gefunden seien und wir die (1 + 2)-Linie nach Aufbringen der Last Q_2 suchen. Dann tragen wir von der 1-Linie aus den in diesem Falle negativen Wert $\Delta \eta_{r2}$ also nach oben auf und erhalten nach Gl. (14) in den Ordinaten r :

$$\mu_{r2} = \frac{\eta_{r1}}{\eta_{r0} - \Delta \eta_{r2}}$$

wobei $\Delta \eta_{r0}$, wie schon erwähnt, negativ ist, also absolut genommen zu η_{r0} zu addieren ist. Die Werte sind also im allgemeinen kleiner als 1 und nehmen mit jeder neu hinzukommenden Last schneller ab. Die H_y -Linie rückt also stets nach oben, aber mit zunehmender Belastung in konvergierender Reihe.

Das Verfahren setzen wir nach Bild 17b so lange fort, bis wir eine (1 + 2 + 3 + ... k)-Linie erhalten, welche die Last k aber noch nicht in den positiven Bereich einschließt (im Bild hier die Last 8 angenommen). Dann ist mit der (1 + 2 + 3 + ... k - 1)-Linie, in unserem Fall mit der (1 + 2 + 3 + ... 7)-Linie das Verfahren abzuschließen. Wir sehen, daß hier mit jeder neuen Last, jedoch in konvergenter Reihe, die positive Einflußfläche größer wird, also umgekehrt wie bei der Hängebrücke. Immerhin zeigt der Gang des Verfahrens, daß hier erhebliche Erhöhung von $\max M$, durch die Verformung eintreten kann. Allerdings muß dabei berücksichtigt werden, daß bei Hängebrücken, auch abgesehen von der divergierenden Entwicklung der μ -Werte, der Einfluß größer ist wie bei der Bogenbrücke, da diese aus Flußstahl, das Kabel der Hängebrücke dagegen aus sehr hoch beanspruchtem Baustoff besteht, der sogar, soweit Verschleißkabel verwendet werden, einen erheblich kleineren Elastizitätsmodul hat wie der Baustahl der Bogenbrücke. Immerhin scheint bei weitgespannten Bogenbrücken in dieser Hinsicht Vorsicht geboten.

Handelt es sich um die positive Einflußfläche für einen in der Nähe der Mitte gelegenen Punkt, etwa 6 (Bild 18), dessen Momenteneinflußfläche im ursprünglichen System durch die ausgezogene Linie gegeben ist und dessen endgültige Einflußfläche etwa die Form der durch die punktierte H -Linie abgegrenzten Fläche annimmt, so beginnt man zweckmäßig mit der Last Q_0 und fügt abwechselnd nach beiden Seiten hin nacheinander die Lasten Q_6, Q_5, Q_8 usw. zu; für die beiden getrennt liegenden negativen Beitragstrecken müßte man getrennt von beiden Enden des Trägers ausgehen.

Will man auch die Verlängerung der Hängestangen berücksichtigen, so muß das bei Ermittlung der Biegelinien und H -Linien geschehen. Auf die hier beschriebenen Verfahren hat das weiter keinen Einfluß. Zu beachten ist aber, daß die Werte δ , die in dieser Abhandlung gebraucht werden, sich stets auf den Bogen oder das Kabel, also bei Berücksichtigung der Verformung der Hängestangen sich nicht auf die Fahrbahn beziehen.

Bei mehrfach statisch unbestimmten Systemen ändern sich die dargelegten Verhältnisse und das demnach anzuwendende Verfahren grundsätzlich nicht. Es sei dies noch kurz an dem Beispiel der dreifach statisch unbestimmten Hängebrücke (Bild 19a) erläutert. Die Einflußlinie für das Moment M_0 des Versteifungsträgers, eines Balkens auf vier Stützen, ändert sich durch die Verformung nicht; dadurch wird auch hier nur die Form der y -fachen H -Linie beeinflusst. Deren Veränderung unter der für die positiven Beitragstrecken maßgebenden Belastung ist in Bild 19 punktiert angedeutet. Die positiven Beitragstrecken sowohl zwischen BC als auch zwischen CD werden kleiner, unter Umständen erheblich. Der weniger wichtige Einfluß auf das größte negative Moment kann hier unerörtert bleiben.

Sieht man sich genötigt, anstatt mit einer gleichmäßig verteilten Ersatzlast mit Einzellasten zu rechnen, so kann man das Verfahren auch anwenden. Man wird dann immer den Lastenzug so aufstellen können, daß seine Stellung auch infolge Änderung der Einflußfläche und der Lastenscheide nicht geändert zu werden braucht. Dann verteilt man die

Einzellasten nach dem Hebelgesetz auf die einzelnen Querträgeranschlußpunkte. Wir haben dann für die einzelnen Lastpunkte nicht mit gleichbleibenden Lasten Q_1, Q_2 usw. zu rechnen, sondern mit Lasten P_1, P_2 usw. von verschiedener Größe. Das erschwert das Verfahren nur insofern, als nun die H -Linien nach Bild 14 für verschieden große Lasten ermittelt werden müssen, was zeitraubend ist, da Verhältnissgleichheit für verschieden große Lasten nicht besteht. Bei Berechnung der δ -Werte nach Bild 13 herrscht jedoch Verhältnissgleichheit (vgl. jedoch hierzu Abschnitt III).

III. Schlußbetrachtungen.

Das Wesentliche des in Abschnitt II dargelegten Verfahrens beruht darauf, daß die Einflußlinien uns die Möglichkeiten geben, die Einflußflächen für ein unter irgendeiner Belastung verformtes System ohne umständliche Reihentwicklung oder Annäherungsverfahren genau zu ermitteln unter gleichzeitiger Festlegung der richtigen Belastungsscheide. Hierauf soll zum Schluß noch etwas näher eingegangen werden, wobei sich auch noch erweiterte Anwendungsmöglichkeiten ergeben werden.

Wir müssen uns dabei vergegenwärtigen, daß die in unseren Ableitungen benutzten H_y -Linien Biegelinien sind, nämlich entstanden durch die Belastung des Systems, etwa des Zweigelenkbogens, mit $H=1$, wodurch die Momentenbelastung $1 y_r$ und die dadurch bedingte Biegelinie entsteht, deren Ordinaten aber durch $\delta_{aa} = \Sigma y_r^2 \Delta s$ zu dividieren sind. Der Berechnung dieser Biegelinien muß aber die durch die Biegelinie selbst gegebene Systemverformung zugrunde gelegt werden. Unsere Ordinaten $\eta_{r1} - \eta_{r0}$ (Gl. 10) oder allgemeiner $\eta_{r1} - \eta_{r0}$ sind nun die Ordinaten der $[H_1(y_4 + \delta_{41}) - H_0 y_4]$ -Linie. $H_0 y_4$ ist von keiner Belastung abhängig, $H_1(y_4 + \delta_{41})$ jedoch in doppelter Weise von der Belastung Q_1 ; nämlich zunächst sind die Ordinaten der H_1 -Linie unter zugrunde liegender Veränderung der Systemordinaten von y_r zu $y_r + \delta_r$ ermittelt, wobei δ_r von Q_1 linear abhängig ist. Offenbar ist also jede Ordinate r der H_1 -Linie eine Funktion von Q_1 von der Form

$$\eta_r = \frac{a_1 + a_2 Q_1}{(b_1 + b_2 Q_1)^2}$$

Der Wert $y_4 + \delta_{41}$ ist auch eine Funktion von Q_1 in der Form $c_1 + c_2 Q_1$. Damit ergeben sich die Ordinaten der $H_1(y_4 - \delta_{41})$ -Linie in der Form:

$$\eta_{r1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 Q_1 + \alpha_3 Q_1^2}{\beta_1 + \beta_2 Q_1 + \beta_3 Q_1^2}$$

Da nun die von Q_1 abhängigen Summanden verhältnismäßig sehr klein sind, kann man auch schreiben

$$\eta_{r1} = \frac{1}{\beta_1} (\alpha_1 + \alpha_2 Q_1 + \alpha_3 Q_1^2) \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} Q_1 - \frac{\beta_3}{\beta_1} Q_1^2 \right)$$

oder

$$\eta_{r1} = k_1 + k_2 Q_1 + k_3 Q_1^2 + k_4 Q_1^3 + k_5 Q_1^4$$

Damit wird

$$(17) \quad \Delta \eta_{r1} = (k_1 - \eta_{r0}) + k_2 Q_1 + k_3 Q_1^2 \dots + k_5 Q_1^4$$

oder, allgemein geschrieben,

$$(18) \quad \Delta \eta_{r1} = \Phi(Q_1)$$

$\Delta \eta_{r1}$ ist also eine Funktion 4^{ten} oder bei Weiterentwicklung der Reihe (17) n ^{ten} Grades von Q_1 , welche von den Veränderungen aller übrigen Ordinaten $\Delta \eta_{ri}$ beeinflusst ist.

Der Ermittlung von $\Delta \eta_{r1}$ nach Gl. (17) wurde aber die Verformung des ursprünglichen Systems durch Q_1 zugrunde gelegt, wobei die Ordinaten

$$(19) \quad \eta_{r0} + \Delta \eta_{r1} = \eta_{r0} \left(1 + \frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}} \right)$$

entstehen, und die Vergrößerung der Ordinaten η_{r0} in der Form

$$\eta_{r0} \cdot \frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}}$$

Genauer genommen hätten aber nicht die Ordinaten η_{r0} , sondern entsprechend der gewonnenen Biegelinie $\eta_{r0} \left(1 + \frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}} \right)$ zugrunde gelegt werden müssen, und es ergibt sich

$$(20) \quad \eta_{r1} - \eta_{r0} = \eta_{r0} \left(1 + \frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}} \right) \left(\frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}} \right) = \Delta \eta_{r1} \left(1 + \frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}} \right)$$

Dann entstehen aber die Ordinaten

$$(19a) \quad \eta_{r0} + \Delta \eta'_{r1} = \eta_{r0} + \Delta \eta_{r1} \left(1 + \frac{\Delta \eta_{r1}}{\eta_{r0}} \right);$$

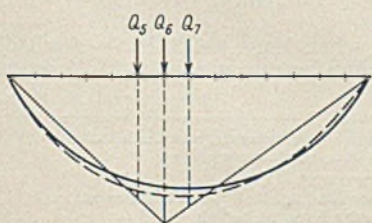


Bild 18.

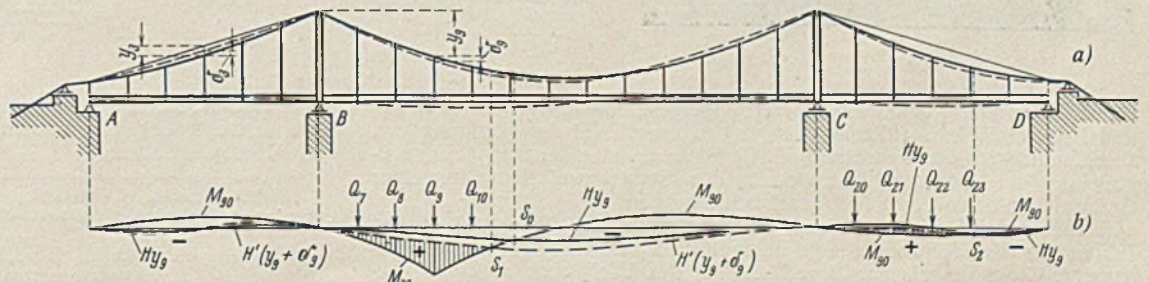


Bild 19a u. b.

wir erhalten also den nächst genaueren Wert für $\eta_{r_1} - \eta_{r_0}$

$$(\eta_{r_1} - \eta_{r_0})' = \left[\eta_{r_0} + \Delta \eta_{r_1} \left(1 + \frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} \right) \right] \frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}}$$

oder

$$(20a) \quad (\eta_{r_1} - \eta_{r_0})' = \Delta \eta_{r_1} \left[1 + \frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} + \left(\frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} \right)^2 \right]$$

Bei Fortsetzung der Entwicklung ergibt sich mit $n = \infty$ genau:

$$(21) \quad \eta_{r_1} - \eta_{r_0} = \Delta \eta_{r_1} \left[1 + \frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} + \left(\frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} \right)^n \right]$$

also eine stark konvergierende, unendliche geometrische Reihe mit der Summe

$$(22) \quad \eta_{r_1} - \eta_{r_0} = \Delta \eta_{r_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Delta \eta_{r_1}}{\eta_{r_0}}} = \Delta \eta_{r_1} \cdot \frac{\eta_{r_0}}{\eta_{r_0} - \Delta \eta_{r_1}}$$

was genau unserer Gl. (10) in der durch Gl. (12) gegebenen allgemeineren Form entspricht. Mit Bezug auf Gl. (18) schreiben wir Gl. (22)

$$(22a) \quad \eta_{r_1} - \eta_{r_0} = \Phi(Q_1) \frac{\eta_{r_0}}{\eta_{r_0} - \Phi(Q_1)}$$

und ersehen daraus, daß sich die richtigen Ordinaten der H_y -Linie für das durch Q_1 verformte System als Überlagerung zweier unendlicher Reihen, nämlich Gl. (17) u. (21), ergeben.

Belasten wir nun nacheinander mit $Q_1 \dots Q_{k-1}, Q_k$, so ist bei Belastung mit Q_k das System bereits mit $Q_1 \dots Q_{k-1}$ vorbelastet, und

die Ordinaten der Biegelinien sind $\eta_{r(k-1)}$ gegenüber η_{r_0} beim alleinigen Aufbringen der Last Q_k . Wir müssen also die Summen der Reihen Gl. (21) bzw. (22) mit $\frac{\eta_{r(k-1)}}{\eta_{r_0}}$ vervielfachen, um aus dem vorbelasteten System die richtigen Ordinaten η_{rk} zu erhalten, womit sich ergibt:

$$(23) \quad \eta_{rk} - \eta_{r(k-1)} = \Delta \eta_{rk} \cdot \frac{\eta_{r(k-1)}}{\eta_{r_0}} \cdot \frac{\eta_{r_0}}{\eta_{r_0} - \Delta \eta_{rk}} = \Delta \eta_{rk} \cdot \frac{\eta_{r(k-1)}}{\eta_{r_0} - \Delta \eta_{rk}}$$

Das entspricht genau unserer früheren allgemeinen Gl. (15); dabei ist $\Delta \eta_{rk} = \Phi(Q_k)$ nach Gl. (17).

Wir haben also nun genau dieselben Ergebnisse, die wir früher durch Aufstellen einfacher Proportionen in Form der Summen unendlicher Reihen erhielten, nunmehr durch Entwicklung dieser Reihen selbst gefunden und damit vielleicht einen klareren Einblick in die Zusammenhänge gewonnen.

Nun kann aber zum Schluß bemerkt werden, daß Gl. (22a) für jeden beliebigen Wert von Q_1 gilt. Haben wir also den Wert $\Delta \eta_{r_1}$ oder später einen beliebigen Wert $\Delta \eta_{rk}$ nach Gl. (22) bzw. (23) als $\Phi(Q_1)$ bzw. $\Phi(Q_k)$ gemäß Gl. (17) entwickelt, so sind wir bei Anwendung der Gl. (22) u. (23) nicht mehr an bestimmte Werte für Q_1, Q_2 usw. gebunden und können demgemäß auch mit Einzellasten rechnen, die wir auf die einzelnen Lastangriffspunkte des Hauptträgers verteilen.

Verschiedenes.

Die elektrische Widerstandsschweißung im Bauwesen. In dem obigen Vortrag führte Oberingenieur Rosenberg, VDI, auf der Sonder-tagung für Schweißtechnik in der TH. Hannover am 11. November 1938 folgendes aus:

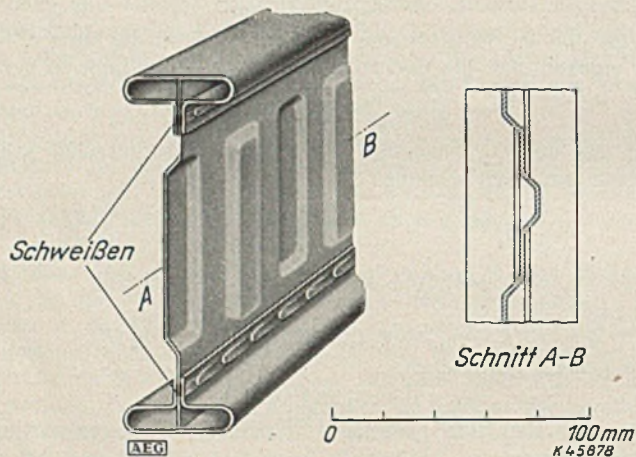


Bild 1.

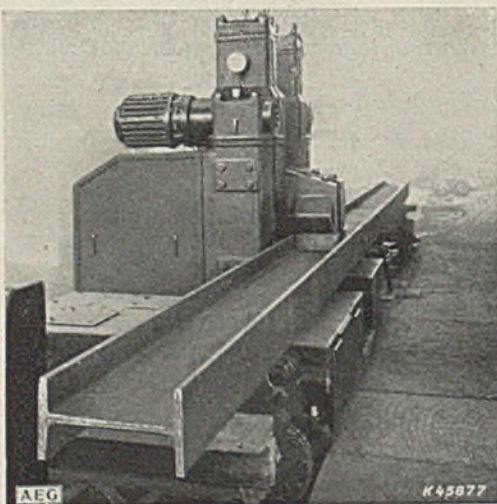
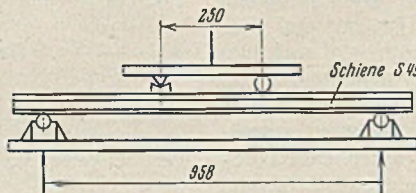


Bild 2.

Die elektrische Punkt- und Rollenahtschweißung findet im Bauwesen, z. B. für die Herstellung von Stahl-



Art der Proben	Dauerfestigkeit kg/mm ²	Festigkeit, bezogen auf die volle Schiene
Volle Schiene	21,25 ± 15,5	1
Auf selbsttätiger Maschine abbrenn- geschweißter Schienen- stoß	21,0 ± 14,2	0,91

Bild 3.

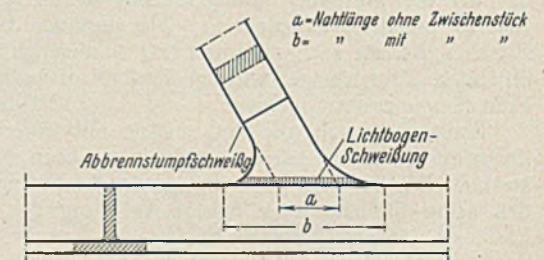


Bild 4.

türen, Türbändern, Stahlrosten, Heizkörpergliedern u. dgl., Anwendung und hat ihre Wirtschaftlichkeit längst bewiesen. Bei der Fertigung von Leichtbauträgern aus Bandstahl (Bild 1) können von einer Doppelschweißmaschine bei 3 × 1 mm Blechdicke in der Minute zwei Nähte mit einer Gesamtleistung von 3 m fest geschweißt werden.

Ebenso wird die elektrische Abbrennstumpfschweißung seit langen Jahren für das Schweißen von Betoneinlegeisen und Zugstangen gebraucht. Zum Beweis der Zuverlässigkeit des Verfahrens wies der Vortragende auf die weite Verbreitung stumpfgeschweißter Werkzeuge hin,

bei denen nur der schneidende Teil aus hochlegiertem Werkzeugstahl besteht. Für die Wirtschaftlichkeit wurden folgende Zahlen genannt: Die Schweißung eines Flachstahlquerschnitts von 80 × 30 = 2400 mm² erfordert je nach der Größe der verwendeten Maschine bei 1 bis 2 Minuten Schweißzeit nur 1,2 bis 1,5 kWh, wobei die größere Maschine in der kürzeren Zeit und mit dem kleineren Stromverbrauch arbeitet. Wichtig ist es, auf Güte zu schweißen; soweit höchste Maßgenauigkeit verlangt wird, setzt sie eine gleichmäßige Vorbereitung der zu verschweißenden Teile voraus und wird am besten auf selbsttätigen Maschinen erreicht.

Für die Walzstahlschweißung wurde auf die bereits Jahrzehnte alten Anwendungsgebiete der Eisenbahnschwellenschweißung, der Stahlfensterrahmenschweißung und auf die Fertigung von Radreifen, Formeisenringen und Bandagen verwiesen. Aber auch für die Anwendung der Stumpfschweißung im Stahlbau liegen bereits Beispiele vor (Bild 2). Bei der im Bild dargestellten Schweißung handelt es sich um einen Breitflanschträger IP 50 mit 25 500 mm² Schweißquerschnitt.

Die im Stahlbau gebrauchte Trägerschweißung hat mit der seit langen bewährten Rohrschweißung das gemeinsam, daß die Träger wie die Rohre keine Bearbeitungszugabe haben und Maschinen voraussetzen, die ohne Versatz schweißen. Die Trägerschweißung ist aber sogar einfacher als die Rohrschweißung, weil die beim Bau chemischer Geräte verwendeten Rohre meist noch legiert sind.

Für die Festigkeit von Trägerschweißungen kann vergleichsweise die Dauerfestigkeit von Eisenbahnschienenerschweißungen herangezogen werden (Bild 3), die von der Deutschen Reichsbahn und vielen Bahngesellschaften in Europa und Übersee ausgiebig angewendet werden, wo man doch höchste Sicherheit verlangt. Außer Streckenschienen werden sogar auch Weichenzungen abbrennstumpfgeschweißt.

Jedenfalls darf auch im Stahlbau die elektrische Abbrennstumpfschweißung dort nicht übersehen werden, wo ihre Anwendung einfach, zuverlässig und billig ist. Es handelt sich dabei um drei Arbeitsgebiete:

1. die Wiederverwendbarmachung von Restlängen;
2. die Herstellung von größeren Trägerlängen aus Lagerlängen;
3. die Fertigung von Formstücken (Bild 4), wie sie z. B. beim Anschweißen von

Köpfen an Stangen im Maschinenbau schon lange üblich ist. — Auch die noch zu wenig bekannte Abbrennstumpfschweißung ermöglicht Werkstoff- und Arbeitersparnisse.

INHALT: Beitrag zur Verformungstheorie unter Verwendung von Einflußlinien. — Verschiedenes: Die elektrische Widerstandsschweißung im Bauwesen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Kloppe, Darmstadt.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.