

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang

BERLIN, 26. Mai 1939

Heft 11

Alle Rechte vorbehalten.

Zur Frage einheitlicher Bezeichnungen in der Baustatik.

Von Prof. Dr.-Ing. Ernst Melan in Wien.

Wenn auch der Frage einheitlicher und folgerichtiger Bezeichnungen in der Baustatik bei einfachen Tragwerken keine ausschlaggebende Rolle zukommt, möge doch nicht übersehen werden, daß bei hochgradig statisch unbestimmten Systemen eine entsprechend gewählte Bezeichnungsweise nicht unwichtig ist. Nicht nur unpraktische Bezeichnungen, sondern auch die Verschiedenheit derselben bei verschiedenen Verfassern können eine Quelle von Mißverständnissen sein und unnütze Gedankenarbeit benötigen. Im übrigen sollen die folgenden Vorschläge nicht so sehr der Wahl bestimmter Zeichen für die verschiedenen Größen gelten, als vielmehr den Versuch einer grundsätzlichen, folgerichtigen Bezeichnungsweise beinhalten. Daß andere Fachgebiete in dieser Hinsicht viel weiter vorgeschritten sind, scheint zu erwähnen überflüssig zu sein.

Zunächst sei daran erinnert, daß die Berechnung der inneren Kräfte eines Tragwerks oder der Formänderungen letzten Endes auf die Lösung linearer Gleichungssysteme hinausläuft. Dabei ist es gleichgültig, ob eine solche Auflösung rechnerisch oder durch zeichnerische Verfahren (Cremonapläne, Williotpläne, Seilecke) erfolgt. Jedenfalls liegen entsprechend diesen linearen Gleichungen quadratische „Matrizen“ von der Form

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1n} & b_{11} \dots b_{1i} \dots b_{1n} & \\ \dots & \dots & \\ a_{k1} \dots a_{ki} \dots a_{kn} & b_{k1} \dots b_{ki} \dots b_{kn} & \\ \dots & \dots & \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nn} & b_{n1} \dots b_{ni} \dots b_{nn} & \end{array}$$

vor. Es ist nun ein grundsätzlicher Rechnungsvorgang, aus diesen Elementen die Elemente einer neuen Matrix, etwa

$$c_{pq} = a_{1p} b_{q1} + a_{2p} b_{q2} + a_{3p} b_{q3} + \dots = \sum a_{ip} b_{qi}$$

oder

$$d_{pq} = a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + a_{p3} b_{3q} + \dots = \sum a_{pi} b_{iq}$$

oder

$$e_{pq} = a_{1p} b_{1q} + a_{2p} b_{2q} + a_{3p} b_{3q} + \dots = \sum a_{ip} b_{iq}$$

usw. zu bilden. Man erkennt, daß die Summenbildung stets über jenen Zeiger erfolgt, der sowohl bei a als auch bei b vorkommt. Dieser „stumme Zeiger“ fehlt im Ergebnis, während die beiden anderen Zeiger in derselben Reihung wie bei c auftreten. Dadurch sind wir der Notwendigkeit enthoben, das Summenzeichen ausdrücklich zu schreiben; $c_{pq} = a_{ip} b_{iq}$ bedeutet auch ohne Summenzeichen, daß über alle i zu summieren ist. Diese Schreibart scheint sich in der Tat in der Matrizenrechnung im Hinblick auf die durch den Entfall des Summenzeichens vereinfachte Darstellung rasch einzubürgern. Es wäre vollständig unverständlich, wenn man den Zeiger i , über den die Summenbildung erfolgen soll, unterdrücken würde. In der Statik pflegt dies nun zumeist zu geschehen. Es ist üblich, die Gleichungen für die Beiwerte der Elastizitätsgleichungen statisch unbestimmter Systeme in der Form

$$\delta_{pq} = \sum S_p S_q \cdot \frac{s}{EF}$$

zu schreiben, wobei S_p die Stabkräfte infolge des Hilfsangriffs $X_p = 1$, S_q jene infolge $X_q = 1$ vorstellen. Man muß jetzt ausdrücklich hinzufügen, daß die Summenbildung über alle Stäbe, d. h. über den hier weggelassenen Zeiger i zu erfolgen hat, um diese Gleichung verständlich zu machen. Auch ohne diese Erklärung verständlich, müßte die vorstehende Gleichung lauten

$$\delta_{pq} = \sum S_{ip} S_{iq} \cdot \frac{s_i}{EF_i} = S_{ip} S_{iq} \cdot \frac{s_i}{EF_i}$$

oder

$$\delta_{pq} = \dots = S_{pi} S_{qi} \cdot \frac{s_i}{EF_i}$$

je nachdem man Näheres über die Reihenfolge und Bedeutung der Zeiger vereinbart hat.

Daraus ergibt sich die Folgerung, daß grundsätzlich auch innere Kräfte und nicht nur Verschiebungen, wie ja allgemein üblich, mit zwei Zeigern zu versehen sind. Bei den Verschiebungen hat sich ausnahmslos der Brauch eingebürgert, daß der erste Zeiger zur Kennzeichnung des Punktes, an welchem die Verschiebung auftritt, dient, während der zweite Zeiger auf die Ursache, die diese Verschiebung bewirkt hat, hinweist. Im Hinblick auf diese allgemein übliche Bezeichnungsweise wäre sonach zu empfehlen, bei inneren Kräften den ersten Zeiger zur Kennzeichnung der Stelle, den zweiten zur Kennzeichnung der Ursache zu verwenden. Es würde also bedeuten

M_{ip} das Moment an der Stelle i infolge äußerer Kräfte P ,

Q_{it} Querkräfte an der Stelle i infolge einer Temperaturänderung,

X_{aW} eine statisch unbestimmte Größe an der Stelle a (Angriffspunkt a) infolge Windbelastung W

usw., ebenso wie etwa δ_{ip} , δ_{it} , δ_{iW} die Verschiebungen eines Punktes i infolge der Ursachen äußere Kräfte P , Temperaturänderung t und Windbelastung W bedeuten. Von der häufig verwendeten Bezeichnungsweise M_{pp} , Q_{ii} wäre also Abstand zu nehmen.

Daß bei Verschiebungen stets nur die Komponente in einer bestimmten, dem Punkte i zugeordneten Richtung zu nehmen ist, ist bekannt. Erscheint es also notwendig, die Verschiebung desselben Punktes in zwei verschiedenen Richtungen zu bestimmen, so empfiehlt sich, dieselben etwa mit δ_{iP} und δ_{jP} zu bezeichnen, wobei zwar der Punkt i mit j , nicht aber die diesen Punkten zugeordneten Verschiebungsrichtungen zusammenfallen.

Es wäre weiter noch zu vereinbaren, daß die durch einen „Hilfsangriff“ $P = 1$ an der Stelle r hervorgerufenen Größen zur Kennzeichnung der Ursache lediglich den Buchstaben r an zweiter Stelle erhalten. Bei den Verschiebungen ist dies ja auch allgemein üblich. Es bedeutet demnach

δ_{aa} die Verschiebung des Punktes a infolge eines Hilfsangriffs 1 (bzw. bei statisch unbestimmten Tragwerken infolge $X_a = +1$) in diesem Punkte,

δ_{pq} die Verschiebung des Punktes p infolge des Hilfsangriffs 1 an der Stelle q

und ebenso

M_{ia} das Moment in i infolge des Hilfsangriffs 1 in a ,

S_{pq} die Stabkraft im Stabe p infolge eines Hilfsangriffs 1 an der Stelle q usw.

Zur Bezeichnung der einzelnen Punkte eines Tragwerks empfiehlt sich die Verwendung kleiner Buchstaben bzw. arabischer Ziffern, wobei die ersten Buchstaben des Alphabets für die Angriffspunkte der statisch unbestimmten Größen vorbehalten sein mögen, wie dies ja auch ausnahmslos üblich ist. Ein veränderlicher Punkt, welcher der Reihe nach mit verschiedenen Stellen des Tragwerks zusammenfällt, möge stets mit m oder n bezeichnet werden, so daß also mit m an erster Stelle als Zeiger z. B.

M_{mP} die Momentenlinie infolge der Belastung P ,

Q_{mW} die Querkraftlinie infolge Windbelastung W ,

δ_{mt} die Biegelinie infolge einer Temperaturänderung t ,

δ_{ma} die Biegelinie infolge des Hilfsangriffs 1 in a

vorstellen. Hingegen bedeutet mit m als zweiten Zeiger

M_{im} das Moment an der Stelle i infolge einer der Reihe nach an den Stellen $m = 1, m = 2, \dots$ wirkenden Kraft $P = 1$, d. h. die Ordinate der Einflußlinie für das Moment im Bezugspunkt i an der Stelle m ,

X_{am} ebenso die Ordinate der Einflußlinie für die statisch unbestimmte Größe X_a an der Stelle m ,

δ_{im} die Ordinate der Einflußlinie für eine Verschiebung des Bezugspunktes i an der Stelle m .

Um die Größen in einem statisch unbestimmtem System von jenen des Grundsystems zu unterscheiden, sind zwei Schreibweisen in Gebrauch. Manche Verfasser verwenden für die Größen im Grundsystem Frakturbuchstaben, so daß z. B. die Stabkräfte in einem statisch unbestimmtem Fachwerk S_{iP} durch die Gleichung

$$S_{iP} = \mathfrak{S}_{iP} + X_{rP} \mathfrak{S}_{ir}$$

dargestellt werden; dabei stellt allenfalls, wenn man sich zur Weglassung des Summenzeichens entschließt, das zweite Glied bereits eine Summe über alle Werte r vor, so daß die Gleichung für ein mehrfach statisch unbestimmtes Fachwerk ausführlicher geschrieben

$$S_{iP} = \mathfrak{S}_{iP} + X_{aP} \mathfrak{S}_{ia} + X_{bP} \mathfrak{S}_{ib} + X_{cP} \mathfrak{S}_{ic} + \dots$$

lautet. Es erscheint aber fast vorteilhafter, durch einen dritten Zeiger auf den Grad der statischen Unbestimmtheit hinzuweisen. Dabei ist es, ohne Unklarheiten hervorzurufen, statthaft, den einem statisch bestimmten Grundsystem entsprechenden Zeiger 0 stets wegzulassen. Verwendet man also z. B. bei einem ν -fach statisch unbestimmtem Tragwerk ein $\nu - \mu$ -fach statisch unbestimmtes Grundsystem, so wäre zu schreiben

$$M_{iP\nu} = M_{iP\nu-\mu} + X_{rP} M_{ir\nu-\mu}$$

und insbesondere bei Verwendung eines statisch bestimmten Grundtragwerks

$$M_{iP\nu} = M_{iP} + X_{rP} M_{ir}$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten dann im ersten Falle

$$\delta_{aP\nu-\mu} X_{rP} + \delta_{aP\nu-\mu} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, \nu - \mu),$$

weil sämtliche Verschiebungen an dem $\nu - \mu$ -fach statisch unbestimmtem Grundsystem zu nehmen sind, im zweiten Falle

$$\delta_{aP} X_{rP} + \delta_{aP} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, \nu).$$

In beiden Fällen ist entsprechend dem Zeiger P eine Belastungsgruppe P vorausgesetzt.

Ersetzt man in den zuletzt angeschriebenen Gleichungen den Zeiger P durch m , d. h., ist nunmehr eine in den Punkten $m = 1, m = 2$ usw. wirkende Kraft $P = 1$ die Ursache, so bedeuten die Größen X_{pm} und δ_{am} bereits die entsprechenden Ordinaten der Einflußlinien für die statisch unbestimmten Größen bzw. für die Verschiebung in a . Ersetzt man ebenso in der Gleichung

$$M_{iP\nu} = M_{iP} + X_{rP} M_{ir}$$

P durch m , so erhält man durch die Gleichung

$$M_{im\nu} = M_{im} + X_{pm} M_{ip}$$

die Vorschrift, wie aus den Einflußlinien M_{im} im statisch bestimmten Grundsystem und jenem der statisch unbestimmten Größen X_{pm} die Einflußlinie des Moments im Bezugspunkt i im statisch unbestimmtem System zu bilden ist.

Es ist ersichtlich, daß die Folgerichtigkeit in der Bezeichnungsweise nur durch das Anschreiben eines zweiten Zeigers bei den inneren Kräften erkaufte werden kann. Man darf dabei aber nicht übersehen, daß es im Zuge der Untersuchung eines Tragwerks in der Mehrzahl der Fälle ohnehin notwendig ist, verschiedene Belastungsfälle in Betracht zu ziehen und daher die Verwendung von Zeigern, welche auf diese verschiedenen Belastungen hinweisen, nicht zu umgehen ist. Es möge also nur vereinbart werden, daß diese Zeiger stets an zweiter Stelle zu schreiben sind. Vergleicht man mit der hier vorgeschlagenen Schreibart die mitunter übliche, wonach z. B. ein Moment im statisch unbestimmtem System in der Form

$$M_i = M_o + X_a M_a + X_b M_b + \dots$$

dargestellt wird, so erkennt man leicht die Vorteile der hier vorgeschlagenen Bezeichnungsart. Denn in der zuletzt angeschriebenen Gleichung bedeutet der Zeiger i die Stelle, der Zeiger 0 soll auf das statisch bestimmte Grundsystem hinweisen, der Zeiger a bei X weist auf die Stelle, hingegen bei M_a auf die Ursache, so daß also bei jeder Größe dem Zeiger eine andere Bedeutung zukommt. Daß sich diese Folgerichtigkeit insbesondere beim Studium und Unterricht der Baustatik oft sehr hemmend auswirkt, sei nur nebenbei erwähnt.

Alle Rechte vorbehalten.

Ein Annäherungsverfahren zur Berechnung des Vierendeelträgers, gültig für beliebige Querschnittsverhältnisse und Belastung der Gurte auch außerhalb der Knotenpunkte.

Von Dr.-Ing. Otto Braun, Augsburg.

(Schluß aus Heft 9.)

d) Zahlenbeispiel.

Zu untersuchen sei ein Vierendeelträger mit parabolisch gekrümmtem Obergurt. Parallelträger wird man im Brückenbau wegen der zu groß werdenden Eckmomente möglichst vermeiden. Die Abmessungen sind in Bild 7 angegeben. Es seien Querträger außer an den Knotenpunkten auch in der Mitte der Untergurtstäbe aufgelagert. Bild 8 gibt die Steifigkeit der Stäbe an. Eingetragen sind die Werte $u' = u \cdot \frac{J_c}{J}$, o' und h' ,

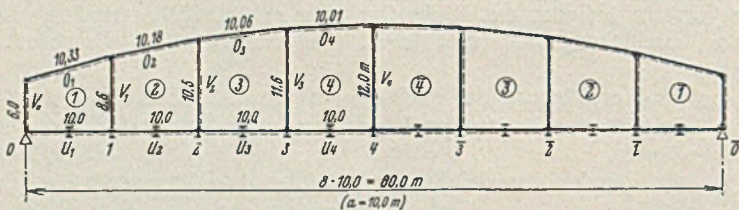


Bild 7.

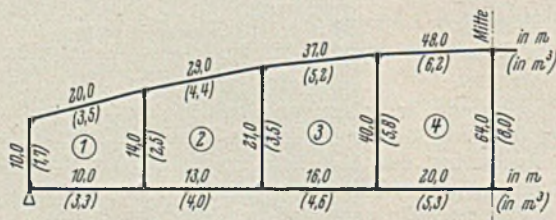


Bild 8.

und zwar in m. Die eingeklammerten Werte sind $u'' = u \cdot \frac{J_c}{F}$, o'' und h'' in m^3 . Der Untergurt ist knapp zwei- bis zweieinhalbmal so steif wie der Obergurt. Seine größere Steifigkeit wird durch die Zwischenauflagerung der Querträger bedingt. Außerdem wird man ihn unter der Fahrbahn ohnehin höher und damit steifer ausführen als den sichtbaren Obergurt. Die Steifigkeitsverhältnisse der Gurte sind in den einzelnen Feldern verschieden. Das gilt auch für die Vertikalen, deren Trägheitsmomente von

der Mitte nach den Seiten auf das mehr als Dreifache anwachsen. Es dürfte schwer sein, für einen solchen Träger ein anderes, einigermaßen einfaches Berechnungsverfahren anzugeben.

α) Aufstellung der Elastizitätsgleichungen.

Es werden zuerst die Elastizitätsgleichungen des Ersatzsystems mit starren Vertikalen aufgestellt (vgl. Abschnitt b).

Zunächst bestimmt man die Funktionen sämtlicher Neigungswinkel. Zum Beispiel ist im ersten Feld für den Obergurt:

$$\sin \nu = 0,252 \quad \cos \nu = 0,968 \quad \operatorname{tg} \nu = 0,260$$

$$\sin^2 \nu = 0,0635 \quad \sin \nu \cdot \cos \nu = 0,244.$$

Für den ganzen Untergurt ist $\sin \psi = \operatorname{tg} \psi = 0$, $\cos \psi = 1$.

Weiterhin wird durchweg $s_i = s_r = \frac{a}{2} = 5,0$ m. Im ersten Feld ist $\delta_{zz} = o' + u' = 20,0 + 10,0 = +30,0$ und der Abstand des elastischen Schwerpunktes

$$v_u = \frac{o'}{o' + u'} \cdot v = \frac{o'}{\delta_{zz}} \cdot \frac{h^l + h^r}{2} = \frac{20,0}{30,0} \cdot \frac{6,0 + 8,6}{2} = 4,87 \text{ m.}$$

Es wird $\delta_{yy} = \frac{o' + u'}{3} + \frac{4}{a^2} (o'' \cdot \sin^2 \nu + u'' \cdot \sin^2 \psi)$

$$\delta_{yy} = \frac{30,0}{3} + \frac{4}{10^2} (3,5 \cdot 0,0635 + 0) = +10,01.$$

Weiterhin wird im ersten Feld:

$$\delta_{xy} = \frac{a}{6} (o' \cdot \operatorname{tg} \nu - u' \cdot \operatorname{tg} \psi) + \frac{2}{a} (u'' \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - o'' \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu)$$

$$\delta_{xy} = \frac{10}{6} (20,0 \cdot 0,260 - 0) + \frac{2}{10} (0 - 3,5 \cdot 0,244) = 8,50$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \delta_{xy}}{a \delta_{yy}} = \frac{2 \cdot 8,50}{10 \cdot 10,01} = +0,170$$

$$h_u^r = v_u + \frac{a}{2} (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \alpha) = 4,87 + 5(0 + 0,170) = 5,72 \text{ m}$$

$$h_u^l = v_u - \frac{a}{2} (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \alpha) = 4,87 - 0,85 = 4,02 \text{ m}$$

$$h_o^r = h^r - h_u^r = 8,6 - 5,72 = 2,88 \text{ m}$$

$$h_o^l = h^l - h_u^l = 6,0 - 4,02 = 1,98 \text{ m}$$

$$\delta_{xx} = \frac{o'}{3} (h_o'^2 + h_o' h_o'' + h_o''^2) + \frac{u'}{3} (h_u'^2 + h_u' h_u'' + h_u''^2) + o'' (\cos \nu + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \nu)^2 + u'' (\cos \psi - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \psi)^2$$

$$\delta_{xx} = \frac{20}{3} (1,98^2 + 1,98 \cdot 2,88 + 2,88^2) + \frac{10}{3} (4,02^2 + 4,02 \cdot 5,72 + 5,72^2) + 3,5 (0,968 + 0,170 \cdot 0,252)^2 + 3,3 (1 - 0)^2$$

$$\delta_{xx} = 119,4 + 239,6 + 3,6 + 3,3 = 359,0 + 6,9 \approx 366.$$

359,0 ist der Anteil der Momente und 6,9 der Anteil der Normalkräfte. In gleicher Weise werden für die übrigen drei Felder die δ -Werte bestimmt, was praktisch selbstverständlich für alle Felder zusammen in Tabellenform geschieht. Damit sind die Elastizitätsgleichungen (8) des Ersatzsystems mit starren Vertikalen bekannt. Sie lauten:

Feld 1:	366 $X_1 = \delta_{ox}$	10,01 $Y_1 = \delta_{oy}$	30,0 $Z_1 = \delta_{oz}$
Feld 2:	830 $X_2 = \delta_{ox}$	14,01 $Y_2 = \delta_{oy}$	42,0 $Z_2 = \delta_{oz}$
Feld 3:	1375 $X_3 = \delta_{ox}$	17,67 $Y_3 = \delta_{oy}$	53,0 $Z_3 = \delta_{oz}$
Feld 4:	1978 $X_4 = \delta_{ox}$	22,67 $Y_4 = \delta_{oy}$	68,0 $Z_4 = \delta_{oz}$

Es sind nun als nächstes Gl. (15) zur Berücksichtigung der Elastizität der Vertikalen aufzustellen. Im ersten Feld wird:

$$\Delta \delta_{xx} = \left\{ \frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4} (h_u - h_o)^2 \right\}_l + \left\{ \frac{h^2 h'}{12} + \frac{h'}{4} (h_u - h_o)^2 \right\}_r$$

$$\Delta \delta_{xx} = \left\{ \frac{6^2 \cdot 10}{12} + \frac{10}{4} (4,02 - 1,98)^2 \right\}_l + \left\{ \frac{8,6^2 \cdot 14}{12} + \frac{14}{4} (5,72 - 2,88)^2 \right\}_r$$

$$\Delta \delta_{xx} = 40,4 + 114,5 = 154,9$$

$$X' \left[\frac{\delta_{xx}}{\Delta \delta_{xx}} + 1 \right] = \left[\frac{h^2 h'}{12 \Delta \delta_{xx}} (Q + Q') - \frac{h' (h_u - h_o)}{2 \Delta \delta_{xx}} (M + M') \right]_l + \left[-\frac{h^2 h'}{12 \Delta \delta_{xx}} (Q + Q') + \frac{h' (h_u - h_o)}{2 \Delta \delta_{xx}} (M + M') \right]_r + X'$$

$$X' \left[\frac{366}{154,9} + 1 \right] = \left[\frac{30,0}{154,9} (Q + Q') - \frac{10,2}{154,9} (M + M') \right]_l + \left[-\frac{86,287}{154,9} (Q + Q') + \frac{19,88}{154,9} (M + M') \right]_r + X'$$

$$+ 3,363 X' = [+ 0,194 (Q + Q') - 0,0658 (M + M')]_l + [- 0,557 (Q + Q') + 0,1283 (M + M')]_r + X'$$

Weiterhin ist $\Delta \delta_{yy} = \Delta \delta_{zz} = h'_l + h'_r = 10,0 + 14,0 = 24,0$

$$Y' \left[\frac{\delta_{yy}}{\Delta \delta_{yy}} + 1 \right] = - \left[\frac{h'}{\Delta \delta_{yy}} (M + M') \right]_l - \left[\frac{h'}{\Delta \delta_{yy}} (M + M') \right]_r + Y'$$

$$Y' \left[\frac{10,01}{24,0} + 1 \right] = - \frac{10,0}{24,0} (M + M')_l - \frac{14,0}{24,0} (M + M')_r + Y'$$

$$+ 1,417 Y' = - 0,417 (M + M')_l - 0,583 (M + M')_r + Y'$$

Die Gleichung für Z' ist ganz ähnlich:

$$Z' \left[\frac{30,0}{24,0} + 1 \right] = + 0,417 (M + M')_l - 0,583 (M + M')_r + Z'$$

$$+ 2,250 Z' = + 0,417 (M + M')_l - 0,583 (M + M')_r + Z'$$

In gleicher Weise ergeben sich die Gleichungen für die übrigen drei Felder. Für die rechte Trägerhälfte sind die Beiwerte von $(Q + Q')$ und $(M + M')$ zu vertauschen, da dort die linke Vertikale zur rechten wird und umgekehrt. Selbstverständlich wird man bei der praktischen Durchführung der Berechnung sämtliche Beiwerte tabellarisch ermitteln, wobei z. B. $\frac{h^2 h'}{12}$ für die rechte Vertikale des ersten Feldes derselbe Wert ist wie für die linke Vertikale des zweiten. Auch $\frac{1}{2} (h_u - h_o)$ kommt mehrfach sowie auch noch später vor. Das Feld 1 wurde nur herausgegriffen, um die Rechnung nicht zu umfangreich zu machen. Man erhält insgesamt folgende Gleichungen für die Änderung der Unbekannten:

$$+ 3,363 X_1' = [+ 0,194 (Q + Q') - 0,0658 (M + M')]_l + [- 0,557 (Q + Q') + 0,1283 (M + M')]_r + X_1'$$

$$+ 3,075 X_2' = [+ 0,216 (Q + Q') - 0,0574 (M + M')]_l + [- 0,482 (Q + Q') + 0,1045 (M + M')]_r + X_2'$$

$$+ 2,456 X_3' = [+ 0,204 (Q + Q') - 0,0465 (M + M')]_l + [- 0,475 (Q + Q') + 0,0974 (M + M')]_r + X_3'$$

$$+ 2,078 X_4' = [+ 0,244 (Q + Q') - 0,0521 (M + M')]_l + [- 0,418 (Q + Q') + 0,0861 (M + M')]_r + X_4'$$

$$+ 2,078 X_4' = [+ 0,418 (Q + Q') - 0,0861 (M + M')]_l + [- 0,244 (Q + Q') + 0,0521 (M + M')]_r + X_4'$$

usw.

Man sieht schon hier, daß die Beiwerte der Momente wesentlich kleiner sind, als die der Querkräfte. Dementsprechend ist auch ihr Einfluß gering.

$$+ 1,417 Y_1' = - 0,417 (M + M')_l - 0,583 (M + M')_r + Y_1'$$

$$+ 1,400 Y_2' = - 0,400 (M + M')_l - 0,600 (M + M')_r + Y_2'$$

$$+ 1,290 Y_3' = - 0,344 (M + M')_l - 0,656 (M + M')_r + Y_3'$$

$$+ 1,218 Y_4' = - 0,385 (M + M')_l - 0,615 (M + M')_r + Y_4'$$

$$+ 1,218 Y_4' = - 0,615 (M + M')_l - 0,385 (M + M')_r + Y_4'$$

usw.

$$+ 2,250 Z_1' = + 0,417 (M + M')_l - 0,583 (M + M')_r + Z_1'$$

$$+ 2,200 Z_2' = + 0,400 (M + M')_l - 0,600 (M + M')_r + Z_2'$$

$$+ 1,869 Z_3' = + 0,344 (M + M')_l - 0,656 (M + M')_r + Z_3'$$

$$+ 1,654 Z_4' = + 0,385 (M + M')_l - 0,615 (M + M')_r + Z_4'$$

$$+ 1,654 Z_4' = + 0,615 (M + M')_l - 0,385 (M + M')_r + Z_4'$$

usw.

$(Q + Q')$ und $(M + M')$ sind die Querkräfte und Momente in Vertikalenmitte. Sie werden mittels der am Schluß von Abschnitt b aufgestellten Gleichungen (9) ermittelt. Da keine Lasten an den Vertikalen angreifen sollen, so ist $Q_o = M_o = 0$. Zum Beispiel ergibt sich für die Vertikale 1 zwischen Feld 1 und 2:

$$Q_1 = X_1 - X_2 \quad \text{und}$$

$$M_1 = - \frac{1}{2} (h_u' - h_o') X_1 + \frac{1}{2} (h_u' - h_o') X_2 + Y_1 + Y_2 + Z_1 - Z_2$$

$$M_1 = - 1,42 X_1 + 1,64 X_2 + Y_1 + Y_2 + Z_1 - Z_2.$$

Die Werte $\frac{1}{2} (h_u - h_o)$ wurden, wie schon erwähnt, bei der Aufstellung der Gl. (15) für X' benötigt und können dort entnommen werden.

Für die Querkräfte und Momente sämtlicher Vertikalen lauten die Gleichungen:

$Q_0 = - X_1$	$M_0 = + 1,02 X_1 + Y_1 - Z_1$
$Q_1 = X_1 - X_2$	$M_1 = - 1,42 X_1 + 1,64 X_2 + (Y_1 + Y_2) + (Z_1 - Z_2)$
$Q_2 = X_2 - X_3$	$M_2 = - 1,99 X_2 + 2,09 X_3 + (Y_2 + Y_3) + (Z_2 - Z_3)$
$Q_3 = X_3 - X_4$	$M_3 = - 2,30 X_3 + 2,39 X_4 + (Y_3 + Y_4) + (Z_3 - Z_4)$
$Q_4 = X_4 - X_{\text{I}}$	$M_4 = - 2,47 X_4 + 2,47 X_{\text{I}} + (Y_4 + Y_{\text{I}}) + (Z_4 - Z_{\text{I}})$
$Q_{\text{I}} = X_{\text{I}} - X_{\text{II}}$	$M_{\text{I}} = - 2,39 X_{\text{I}} + 2,30 X_{\text{II}} + (Y_{\text{I}} + Y_{\text{II}}) + (Z_{\text{I}} - Z_{\text{II}})$

usw.

(Die Beiwerte von X_3 und X_4 entsprechen denen von X_{II} und X_{I} .) Damit sind alle zur Durchführung des Annäherungsverfahrens erforderlichen Gleichungen bekannt.

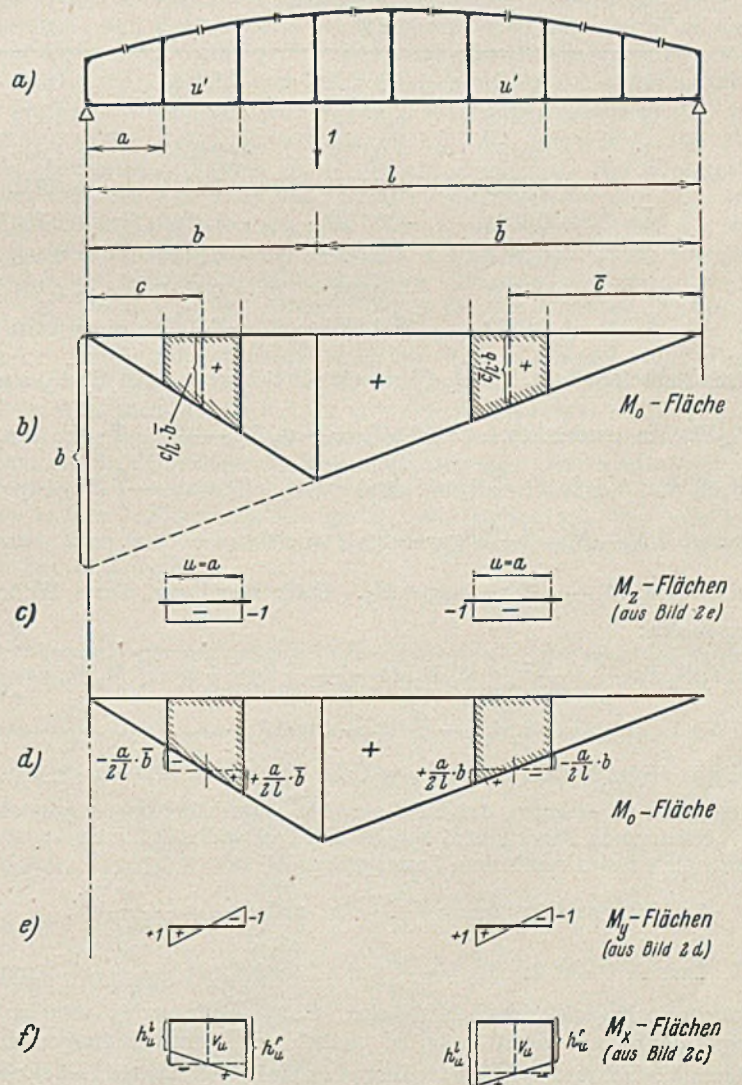


Bild 9a bis f.

β) Ermittlung der Unbekannten X, Y, Z des Ersatzsystems.

Will man Einflußlinien bestimmen, so läßt man eine Last 1 der Reihe nach an den einzelnen Querträgerauflagerpunkten angreifen, und zwar werden zuerst die vier Laststellungen an den Knotenpunkten und dann

die an den Zwischenpunkten untersucht. Für die Laststellungen an den Knotenpunkten ist die Ermittlung der X, Y, Z des Ersatzsystems besonders einfach. Da sämtliche Unbekannten unabhängig voneinander sind, und die δ_o -Werte und damit auch die statisch unbestimmten Größen nur von der M_o -Fläche des betreffenden Feldes abhängen, so genügt es, die Laststellung an Punkt 1 zu untersuchen. Für die Laststellung an jedem anderen Knotenpunkt sind die Unbekannten jeweils ein Vielfaches der für Last an Punkt 1 errechneten.

Der Ableitung der δ_o -Werte diene Bild 9. Am einfachsten sind die δ_{oz} -Werte zu bestimmen, da die Momentenfläche für $Z = -1$ (Bild 2e) aus Rechtecken besteht. Dann folgt die Berechnung der δ_{oy} -Werte. Die δ_{ox} -Werte lassen sich aus δ_{oz} und δ_{oy} zusammensetzen. Die Ableitung erfolge für einen beliebigen Knotenpunkt. Für Punkt 1 ist dann $b = a$. (Die M_o -Fläche erstreckt sich nur über den Untergurt. Im statisch bestimmten Hauptsystem mit durchschnittenem Obergurt treten bei horizontalem Untergurt keine Normalkräfte auf.)

Aus Bild 9b u. c. erhält man für die δ_{oz} -Werte rechts vom Lastangriffspunkt: $\delta_{oz} = \int M_o M_z ds \cdot \frac{J_c}{J} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot b$. Links vom Lastangriffspunkt ist $\delta_{oz} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot \bar{b}$. Zur Bestimmung der δ_{oy} -Werte wird das Trapez der M_o -Fläche entsprechend Bild 9d in ein Rechteck und in ein verschränktes Trapez zerlegt. Das Rechteck liefert keinen Beitrag zu δ_{oy} . Somit wird rechts vom Lastangriffspunkt $\delta_{oy} = +\frac{a}{6l} \cdot u' \cdot b$ und links davon $\delta_{oy} = -\frac{a}{6l} \cdot u' \cdot \bar{b}$. Die M_x -Flächen sind Trapeze, die man entsprechend Bild 9f aus einem Rechteck und einem verschränkten Trapez

ist. Wird Punkt 2 belastet, so wachsen die Unbekannten rechts vom Lastpunkt auf das Doppelte von denen für Last an Punkt 1. Links in den Feldern 1 und 2 sind sie das 6fache bzw. -6fache der beim ersten Lastfall in den Feldern 1 und 2 vorhandenen Unbekannten usw.

Bei gleichen Feldern ist $l = na$ oder $\frac{a}{l} = \frac{1}{n}$ und somit für Last an Punkt 1 in den Feldern rechts vom Angriffspunkt: $\delta_{oz} = -\frac{u'}{n} \cdot \bar{c}$ und $\delta_{oy} = +\frac{u'}{n} \cdot \frac{a}{6}$. Es bleibt $\delta_{ox} = -v_u \delta_{oz} - \frac{a}{2} \cdot \text{tg } \alpha \delta_{oy}$.

Es mögen z. B. die Unbekannten im äußersten rechten Feld 1 für Last an Punkt 1 bestimmt werden. Es ist dort:

$$u' = 10,0 \quad \frac{u'}{n} = \frac{10}{8} = 1,250 \quad \bar{c} = 5 \text{ m} \quad a = 10 \text{ m}$$

$$\delta_{oz} = -1,25 \cdot 5 = -6,25 \quad \delta_{oy} = +1,25 \cdot \frac{10}{6} = +2,0833.$$

Entsprechend wie in Feld 1 ist $v_u = 4,87 \text{ m}$; $\frac{a}{2} \cdot \text{tg } \alpha = -0,85 \text{ m}$

$$\delta_{ox} = +4,87 \cdot 6,25 + 0,85 \cdot 2,0833 = +32,208.$$

$$\text{Es wird: } X_1 = +\frac{32,208}{366} = +0,0880 \quad Y_1 = +\frac{2,0833}{10,01} = +0,2081$$

$$Z_1 = -\frac{6,25}{30,0} = -0,2083.$$

Zur Durchrechnung des ganzen Trägers benutzt man naturgemäß Tabellen. Die Unbekannten im linken Feld 1 sind ± 7 mal so groß: $X_1 = +0,616$, $Z_1 = -1,458$, aber $Y_1 = -7 \cdot 0,2081 = -1,457$.

In der folgenden Tabelle 1 sind die Unbekannten X, Y, Z des Ersatzsystems für die Lastangriffspunkte 1, 2 und 3 zusammengestellt. Last an Punkt 4 wurde weggelassen.

Tabelle 1.

Feld	Last an Punkt 1			Last an Punkt 2			Last an Punkt 3		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	+ 0,616	- 1,457	- 1,458	+ 0,528	- 1,249	- 1,250	+ 0,440	- 1,040	- 1,041
2	+ 0,8365	+ 0,1933	- 2,5149	+ 1,174	- 1,160	- 3,482	+ 0,978	- 0,966	- 2,902
3	+ 0,6167	+ 0,1886	- 2,0755	+ 1,233	+ 0,377	- 4,151	+ 1,408	- 0,943	- 4,717
4	+ 0,4735	+ 0,1838	- 1,6544	+ 0,947	+ 0,368	- 3,309	+ 1,420	+ 0,551	- 4,963
1̄	+ 0,3688	+ 0,1838	- 1,2868	+ 0,738	+ 0,368	- 2,573	+ 1,106	+ 0,551	- 3,860
3̄	+ 0,2817	+ 0,1886	- 0,9434	+ 0,563	+ 0,377	- 1,887	+ 0,845	+ 0,566	- 2,830
2̄	+ 0,1956	+ 0,1933	- 0,5804	+ 0,391	+ 0,387	- 1,161	+ 0,587	+ 0,580	- 1,741
1̄	+ 0,0880	+ 0,2081	- 0,2083	+ 0,176	+ 0,416	- 0,417	+ 0,264	+ 0,624	- 0,625

zusammensetzen kann. Die M_x -Flächen lassen sich somit durch die M_z - und M_y -Flächen ausdrücken. Es ist $M_x = -v_u M_z - \frac{h_u^r - h_u^l}{2} \cdot M_y$. Nach Gl. (6) war $h_u^r = v_u + \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha)$ und $h_u^l = v_u - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha)$, also ist $h_u^r - h_u^l = 2 \cdot \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) = a (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha)$. Es wird $M_x = -v_u M_z - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) M_y$. Unter Benutzung dieses Wertes ergibt sich:

$$\int M_o M_x ds \cdot \frac{J_c}{J} = -v_u \int M_o M_z ds \cdot \frac{J_c}{J} - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) \int M_o M_y ds \cdot \frac{J_c}{J}$$

$$\delta_{ox} = -v_u \delta_{oz} - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) \delta_{oy}.$$

Beim vorliegenden Beispiel ist $\text{tg } \psi = 0$, also $\delta_{ox} = -v_u \delta_{oz} - \frac{a}{2} \cdot \text{tg } \alpha \delta_{oy}$. Hierbei ist zu beachten, daß für die rechte Trägerhälfte $\text{tg } \alpha$ negativ ist.

Für Last an Punkt 1 wird $b = a$. Für Last an Punkt 2 wird $b = 2a$ usw. Es ist also rechts vom Lastangriffspunkt für

$$\text{Last an Punkt 1: } \delta_{oz} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot a \quad \text{und} \quad \delta_{oy} = +\frac{a^2}{6l} \cdot u'$$

$$\text{Last an Punkt 2: } \delta_{oz} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot a \cdot 2 \quad \text{und} \quad \delta_{oy} = +\frac{a^2}{6l} \cdot u' \cdot 2 \text{ usw.}$$

Das heißt bei gleichen Feldern sind die δ_o -Werte rechts vom Lastangriffspunkt und damit auch die statisch unbestimmten Größen ein ganzes Vielfaches derjenigen für Last an Punkt 1. (Bei ungleichen Feldern wachsen sie im Verhältnis $\frac{b}{a}$.) Es genügt also, den einen Fall, daß Knotenpunkt 1 belastet ist, zu untersuchen und dafür die Unbekannten X, Y, Z nur in den Feldern 2 bis 1 (8) zu bestimmen. Aus Symmetriegründen sind dann schon bei diesem Lastfall die Unbekannten X_1 und Z_1 des Feldes 1 das +7fache derjenigen des Feldes 1 (8), während $Y_1 = -7 Y_1$

Es ist nach den bisherigen Ausführungen z. B. im Feld 4 für Last an Punkt 1: $Y = +0,1838$, für Last an Punkt 3: $Y = +3 \cdot 0,1838 = +0,551$. Ich mache noch weiter darauf aufmerksam, daß bei dem hier vorliegenden symmetrischen Träger für einen Lastfall die Y rechts vom belasteten Knotenpunkt symmetrisch zur Mitte sind und die Z sich für gleich zur Mitte liegende Felder proportional \bar{c} ergeben. Also ist z. B. für Last an Punkt 1:

$$Z_4 = -0,9434 \quad \text{und} \quad Z_3 = -0,9434 \cdot \frac{55}{25} = -2,0755.$$

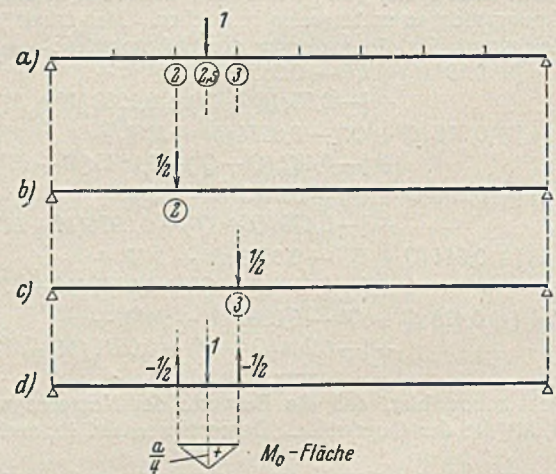


Bild 10a bis d.

Es bleiben noch die Laststellungen an den Zwischenknotenpunkten zu untersuchen. Wie schon am Schluß von Abschnitt c erwähnt, wird die im Feld angreifende Last 1 auf die beiden benachbarten Knotenpunkte verteilt. Im vorliegenden Fall würde also an jedem der beiden Knoten-

punkte die Last $\frac{1}{2}$ angreifen. Bei der Übertragung der Last 1 auf die Knotenpunkte treten im Untergurt des belasteten Feldes noch Biegemomente auf. Man hat den Lastfall gewissermaßen in drei einzelne Lastfälle aufgeteilt (vgl. Bild 10). Es ist Lastfall $a =$ Lastfall $(b + c + d)$.

Zu untersuchen bleibt nur Lastfall d , da die Fälle b und c bereits für die Lasten 1 bekannt sind. Die M_0 -Fläche erstreckt sich im Fall d über ein Feld. Beim Ersatzsystem treten also nur in einem Feld Unbekannte X, Y, Z auf. Nach Bild 11 ist

$$\delta_{oz} = -\frac{\alpha}{8} \cdot u'; \quad \delta_{oy} = 0$$

$$\text{und } \delta_{ox} = +v_u \cdot \frac{\alpha}{8} \cdot u' = -v_u \delta_{oz}$$

Die Last möge z. B. im dritten Feld angreifen. Dann ist:

$$\delta_{oz} = -\frac{10}{8} \cdot 16,0 = -20; \quad \delta_{oy} = 0$$

$$\text{und } \delta_{ox} = +7,72 \cdot 20 = +154,4$$

(im dritten Feld war $v_u = 7,72$ m). Man erhält $Z = -\frac{20}{53} = -0,377$;

$Y = 0$ und $X = +\frac{154,4}{1375} = +0,112$. In gleicher Weise ergeben sich die Unbekannten des Ersatzsystems für die Belastung der übrigen Zwischenknotenpunkte.

Für diesen Lastfall d wird man auch das endgültige System mit elastischen Vertikalen untersuchen, und erst zum Schluß wird man die Unbekannten $X + X', Y + Y'$ und $Z + Z'$ der einzelnen Lastfälle addieren. Zum Beispiel ist hier

$$(X + X')_{(2,5)} = \frac{1}{2} (X + X')_{(2)} + \frac{1}{2} (X + X')_{(3)} + (X + X')_{(d)}$$

Sehr einfach ist auch die Ermittlung von Temperaturspannungen im Ersatzsystem. Wenn die Temperatur des Untergurtes um $\pm t^\circ$ von derjenigen der über der Fahrbahn liegenden Konstruktionsteile abweicht, ist bei horizontalem Untergurt $\delta_{xt} = \mp t \alpha E J_c$; $\delta_{yt} = \delta_{zt} = 0$. Es sind also nur die Unbekannten X_t von 0 verschieden. Das Annäherungsverfahren liefert auch hier die endgültigen Unbekannten $X + X', Y'$ und Z' .

γ) Die Durchführung des Annäherungsverfahrens.

Nachdem die statisch unbestimmten Größen X, Y, Z des Ersatzsystems mit starren Vertikalen für alle Laststellungen bekannt sind, müssen die durch die Elastizität der Vertikalen bedingten Änderungen X', Y', Z' durch Annäherung bestimmt werden. Hierzu dienen die im Teil α aufgestellten Gleichungen. Das Annäherungsverfahren wird in Tabellenform durchgeführt.

Zunächst werden die vier Laststellungen an den Knotenpunkten der Reihe nach untersucht. Es möge hier die Laststellung an Punkt 2

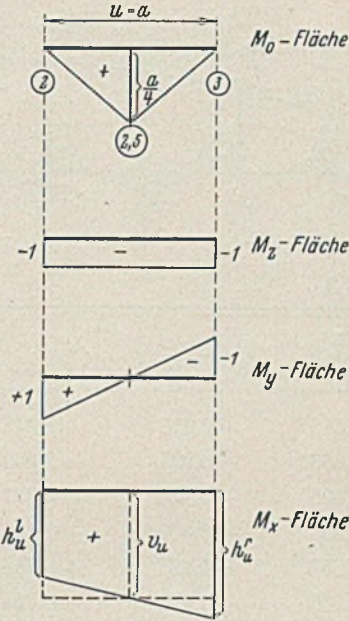


Bild 11.

herausgegriffen werden. Das Verfahren wird in der am Schluß von Abschnitt c angegebenen Reihenfolge durchgeführt. In Tabelle 2 sind die ersten Näherungswerte $X'_{(1)}$ und die zweiten Näherungswerte $X'_{(2)}$ unter ausschließlicher Benutzung der Querkräfte ermittelt. Die in Klammern beigefügte Ziffer gibt an, der wievielte Näherungswert es ist. Mit k_q wurden die Beiwerte der $(Q + Q')$ und mit c_x die Beiwerte der X' bezeichnet. $Q'_{(1)}$ ergab sich als die Differenz zweier $X'_{(1)}$. Die erhaltenen Näherungswerte $X + X'_{(2)}$ und die Y und Z liefern nach Tabelle 3 die ersten Näherungswerte für $M + M'$. Der Tabelle 3 liegen die letzten Gleichungen von Teil α zugrunde, wobei die Beiwerte der $X + X'$ mit α bzw. β bezeichnet wurden. Mit diesen Momenten $M + M'_{(1)}$ (in Vertikalenmitte) erhält man nach Tabelle 4 die Näherungswerte $Y'_{(1)}, Y'_{(2)}$ und $Z'_{(1)}$. Die Beiwerte der $M + M'$ sind hier mit k_m bezeichnet. Sie sind für Y' und Z' abwechselnd gleich und entgegengesetzt gleich. Wie schon erwähnt, erfolgt die Annäherung bei den Y' fortlaufend, nämlich so, daß z. B. zu der Berechnung von Y'_2 schon der Einfluß des gerade berechneten Wertes Y'_1 berücksichtigt wird. Es ist zu diesem Zweck neben der Spalte für $M + M'_{(1)}$ eine Spalte $M + M'_{(2)}$ vorgesehen, in der die unterstrichenen Werte den Einfluß von $Y'_{(1)}$ des vorhergehenden Feldes enthalten. Zum Beispiel ist im vierten Feld: $-0,251 = -0,537 + 0,286$ oder ebenfalls im vierten Feld (aber für $M + M'_{(4)}$): $-0,071 = +0,041 - 0,112$. Hier ist 0,112 die Zunahme von $Y'_{(2)}$ gegenüber $Y'_{(1)}$, die mit $\Delta Y'$ bezeichnet ist. Bei den, wie man sieht, verhältnismäßig kleinen Werten $Z'_{(1)}$ wurde auf diese fortlaufende Annäherung verzichtet, was den Vorteil hat, daß die ganze Spalte heruntergerechnet werden kann, während bei Y' von Zeile zu Zeile gerechnet werden muß.

Jetzt beginnt man wieder die X' weiter zu verbessern, wobei auch der Einfluß der Momente berücksichtigt wird. Tabelle 5 zeigt diese Rechnung. Man sieht hier, wie genau schon die Werte $X'_{(2)}$ waren und wie gering der Einfluß der Momente ist. (X' muß auch etwas genauer als Y' und Z' ermittelt werden, weil es größeren Einfluß auf die Eckmomente hat, denn es wird bei der Bestimmung dieser Momente noch mit h_0 bzw. h_u multipliziert.) Die dann anschließende Verbesserung von $Y'_{(2)}$ und $Z'_{(1)}$ wird nochmals entsprechend Tabelle 4 durchgeführt, wobei statt von $Y' = 0$ jetzt von $Y'_{(2)}$ ausgegangen wird und statt von $Z' = 0$ jetzt von $Z'_{(1)}$. Es sind also für $Y'_{(2)}, Z'_{(1)}$ sowie $\Delta Y'$ und $\Delta Z'$ die notwendigen Spalten in der Tabelle einzufügen. Auf Wiedergabe dieser Tabelle wird verzichtet. Lediglich die Ergebnisse $Y'_{(3)}, Y'_{(4)}$ und $Z'_{(2)}$ sind in Tabelle 6 angegeben. Die Werte $X'_{(3)}, Y'_{(4)}$ und $Z'_{(2)}$ sind ausreichend genau. Sie werden mit X, Y bzw. Z der Tabelle 1 addiert und liefern damit die endgültigen statisch unbestimmten Größen $X + X', Y + Y'$ und $Z + Z'$ des Vierendeelträgers für eine Einzellast an Punkt 2. Diese Werte sind ebenfalls in Tabelle 6 angegeben. Am besten ermittelt man mit diesen Größen noch die Momentenflächen und Normalkräfte des ganzen Trägers in der üblichen Weise. Man kann dann, wenn diese Momentenflächen für sämtliche Laststellungen bestimmt sind, sofort die Einflußlinien der Eckmomente und Normalkräfte auftragen, ohne erst die Einflußlinien der statisch unbestimmten Größen aufzuzeichnen, die für die Dimensionierung doch nicht gebraucht werden. Bild 12 gibt die endgültige Momentenfläche an für Last 1 an Punkt 2. Zum Vergleich wurde auch die Momentenfläche des Ersatzsystems mit starren Vertikalen in Bild 13 aufgetragen.

Tabelle 2.

Feld	k_q	Q^1	$k_q Q$	$c_x X' = \sum k_q Q$	c_x	$X'_{(1)}$	$Q'_{(1)}$	$Q + Q'_{(1)}$	$k_q (Q + Q')$	$c_x X'^2$	$X'_{(2)}$	X	$X + X'_{(2)}$
1	l r	+0,194	-0,103	+0,257	+3,363	+0,076	-0,076	-0,604	-0,117	+0,256	+0,076	+0,528	+0,604
		-0,557	+0,360						+0,297				
2	l r	+0,216	-0,139	-0,110	+3,075	-0,036	+0,112	-0,534	-0,115	-0,134	-0,044	+1,174	+1,130
		-0,482	+0,029						+0,017				
3	l r	+0,204	-0,012	-0,148	+2,456	-0,060	+0,024	-0,035	-0,007	-0,178	-0,072	+1,233	+1,161
		-0,475	-0,136						-0,111				
4	l r	+0,244	+0,070	-0,017	+2,078	-0,008	-0,052	+0,234	+0,057	-0,026	-0,013	+0,947	+0,934
		-0,418	-0,087						-0,075				
4	l r	+0,418	+0,087	+0,044	+2,078	+0,021	-0,029	+0,180	+0,075	+0,053	+0,026	+0,738	+0,764
		-0,244	-0,043						-0,043				
3	l r	+0,475	+0,083	+0,048	+2,456	+0,020	+0,001	+0,176	+0,083	+0,066	+0,027	+0,563	+0,590
		-0,204	-0,035						-0,037				
2	l r	+0,482	+0,083	+0,037	+3,075	+0,012	+0,008	+0,180	+0,087	+0,056	+0,018	+0,391	+0,409
		-0,216	-0,046						-0,043				
1	l r	+0,557	+0,120	+0,086	+3,363	+0,026	-0,014	+0,201	+0,112	+0,099	+0,029	+0,176	+0,205
		-0,194	-0,034						+0,026				

¹⁾ $X_k - X_{k+1}$.

²⁾ $X'_{(1)} + \sum k_q (Q + Q')$.

die an den Zwischenpunkten untersucht. Für die Laststellungen an den Knotenpunkten ist die Ermittlung der X, Y, Z des Ersatzsystems besonders einfach. Da sämtliche Unbekannten unabhängig voneinander sind, und die δ_o -Werte und damit auch die statisch unbestimmten Größen nur von der M_o -Fläche des betreffenden Feldes abhängen, so genügt es, die Laststellung an Punkt 1 zu untersuchen. Für die Laststellung an jedem anderen Knotenpunkt sind die Unbekannten jeweils ein Vielfaches der für Last an Punkt 1 errechneten.

Der Ableitung der δ_o -Werte diene Bild 9. Am einfachsten sind die δ_{oz} -Werte zu bestimmen, da die Momentenfläche für $Z = -1$ (Bild 2e) aus Rechtecken besteht. Dann folgt die Berechnung der δ_{oy} -Werte. Die δ_{ox} -Werte lassen sich aus δ_{oz} und δ_{oy} zusammensetzen. Die Ableitung erfolge für einen beliebigen Knotenpunkt. Für Punkt 1 ist dann $b = a$. (Die M_o -Fläche erstreckt sich nur über den Untergurt. Im statisch bestimmten Hauptsystem mit durchschnittenem Obergurt treten bei horizontalem Untergurt keine Normalkräfte auf.)

Aus Bild 9b u. c. erhält man für die δ_{oz} -Werte rechts vom Lastangriffspunkt: $\delta_{oz} = \int M_o M_z ds \cdot \frac{J_c}{J} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot b$. Links vom Lastangriffspunkt ist $\delta_{oz} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot b$. Zur Bestimmung der δ_{oy} -Werte wird das Trapez der M_o -Fläche entsprechend Bild 9d in ein Rechteck und in ein verschränktes Trapez zerlegt. Das Rechteck liefert keinen Beitrag zu δ_{oy} . Somit wird rechts vom Lastangriffspunkt $\delta_{oy} = +\frac{a}{6l} \cdot u' \cdot b$ und links davon $\delta_{oy} = -\frac{a}{6l} \cdot u' \cdot b$. Die M_x -Flächen sind Trapeze, die man entsprechend Bild 9f aus einem Rechteck und einem verschränkten Trapez

ist. Wird Punkt 2 belastet, so wachsen die Unbekannten rechts vom Lastpunkt auf das Doppelte von denen für Last an Punkt 1. Links in den Feldern 1 und 2 sind sie das 6fache bzw. —6fache der beim ersten Lastfall in den Feldern 1 und 2 vorhandenen Unbekannten usw.

Bei gleichen Feldern ist $l = na$ oder $\frac{a}{l} = \frac{1}{n}$ und somit für Last an Punkt 1 in den Feldern rechts vom Angriffspunkt: $\delta_{oz} = -\frac{u'}{n} \cdot c$ und $\delta_{oy} = +\frac{u'}{n} \cdot \frac{a}{6}$. Es bleibt $\delta_{ox} = -v_u \delta_{oz} - \frac{a}{2} \cdot \text{tg } \alpha \delta_{oy}$.

Es mögen z. B. die Unbekannten im äußersten rechten Feld 1 für Last an Punkt 1 bestimmt werden. Es ist dort:

$$u' = 10,0 \quad \frac{u'}{n} = \frac{10}{8} = 1,250 \quad c = 5 \text{ m} \quad a = 10 \text{ m}$$

$$\delta_{oz} = -1,25 \cdot 5 = -6,25 \quad \delta_{oy} = +1,25 \cdot \frac{10}{6} = +2,0833.$$

Entsprechend wie in Feld 1 ist $v_u = 4,87 \text{ m}$; $\frac{a}{2} \cdot \text{tg } \alpha = -0,85 \text{ m}$

$$\delta_{ox} = +4,87 \cdot 6,25 + 0,85 \cdot 2,0833 = +32,208.$$

$$\text{Es wird: } X_1 = +\frac{32,208}{366} = +0,0880 \quad Y_1 = +\frac{2,0833}{10,01} = +0,2081$$

$$Z_1 = -\frac{6,25}{30,0} = -0,2083.$$

Zur Durchrechnung des ganzen Trägers benutzt man naturgemäß Tabellen. Die Unbekannten im linken Feld 1 sind ± 7 mal so groß: $X_1 = +0,616$, $Z_1 = -1,458$, aber $Y_1 = -7 \cdot 0,2081 = -1,457$.

In der folgenden Tabelle 1 sind die Unbekannten X, Y, Z des Ersatzsystems für die Lastangriffspunkte 1, 2 und 3 zusammengestellt. Last an Punkt 4 wurde weggelassen.

Tabelle 1.

Feld	Last an Punkt 1			Last an Punkt 2			Last an Punkt 3		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	+ 0,616	- 1,457	- 1,458	+ 0,528	- 1,249	- 1,250	+ 0,440	- 1,040	- 1,041
2	+ 0,8365	+ 0,1933	- 2,5149	+ 1,174	- 1,160	- 3,482	+ 0,978	- 0,966	- 2,902
3	+ 0,6167	+ 0,1886	- 2,0755	+ 1,233	+ 0,377	- 4,151	+ 1,408	- 0,943	- 4,717
4	+ 0,4735	+ 0,1838	- 1,6544	+ 0,947	+ 0,368	- 3,309	+ 1,420	+ 0,551	- 4,963
4̄	+ 0,3688	+ 0,1838	- 1,2868	+ 0,738	+ 0,368	- 2,573	+ 1,106	+ 0,551	- 3,860
3̄	+ 0,2817	+ 0,1886	- 0,9434	+ 0,563	+ 0,377	- 1,887	+ 0,845	+ 0,566	- 2,830
2̄	+ 0,1956	+ 0,1933	- 0,5804	+ 0,391	+ 0,387	- 1,161	+ 0,587	+ 0,580	- 1,741
1̄	+ 0,0880	+ 0,2081	- 0,2083	+ 0,176	+ 0,416	- 0,417	+ 0,264	+ 0,624	- 0,625

zusammensetzen kann. Die M_x -Flächen lassen sich somit durch die M_z - und M_y -Flächen ausdrücken. Es ist $M_x = -v_u M_z - \frac{h_u^r - h_u^l}{2} M_y$. Nach Gl. (6) war $h_u^r = v_u + \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha)$ und $h_u^l = v_u - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha)$, also ist $h_u^r - h_u^l = 2 \cdot \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) = a (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha)$. Es wird $M_x = -v_u M_z - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) M_y$. Unter Benutzung dieses Wertes ergibt sich:

$$\int M_o M_x ds \cdot \frac{J_c}{J} = -v_u \int M_o M_z ds \cdot \frac{J_c}{J} - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) \int M_o M_y ds \cdot \frac{J_c}{J}$$

$$\delta_{ox} = -v_u \delta_{oz} - \frac{a}{2} (\text{tg } \psi + \text{tg } \alpha) \delta_{oy}.$$

Beim vorliegenden Beispiel ist $\text{tg } \psi = 0$, also $\delta_{ox} = -v_u \delta_{oz} - \frac{a}{2} \cdot \text{tg } \alpha \delta_{oy}$. Hierbei ist zu beachten, daß für die rechte Trägerhälfte $\text{tg } \alpha$ negativ ist.

Für Last an Punkt 1 wird $b = a$. Für Last an Punkt 2 wird $b = 2a$ usw. Es ist also rechts vom Lastangriffspunkt für

$$\text{Last an Punkt 1: } \delta_{oz} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot a \quad \text{und} \quad \delta_{oy} = +\frac{a^2}{6l} \cdot u',$$

$$\text{Last an Punkt 2: } \delta_{oz} = -\frac{c}{l} \cdot u' \cdot a \cdot 2 \quad \text{und} \quad \delta_{oy} = +\frac{a^2}{6l} \cdot u' \cdot 2 \text{ usw.}$$

Das heißt bei gleichen Feldern sind die δ_o -Werte rechts vom Lastangriffspunkt und damit auch die statisch unbestimmten Größen ein ganzes Vielfaches derjenigen für Last an Punkt 1. (Bei ungleichen Feldern wachsen sie im Verhältnis $\frac{b}{a}$.) Es genügt also, den einen Fall, daß Knotenpunkt 1 belastet ist, zu untersuchen und dafür die Unbekannten X, Y, Z nur in den Feldern 2 bis 1 (8) zu bestimmen. Aus Symmetriegründen sind dann schon bei diesem Lastfall die Unbekannten X_1 und Z_1 des Feldes 1 das +7fache derjenigen des Feldes 1 (8), während $Y_1 = -7 Y_1$

Es ist nach den bisherigen Ausführungen z. B. im Feld 4 für Last an Punkt 1: $Y = +0,1838$, für Last an Punkt 3: $Y = +3 \cdot 0,1838 = +0,551$. Ich mache noch weiter darauf aufmerksam, daß bei dem hier vorliegenden symmetrischen Träger für einen Lastfall die Y rechts vom belasteten Knotenpunkt symmetrisch zur Mitte sind und die Z sich für gleich zur Mitte liegende Felder proportional c ergeben. Also ist z. B. für Last an Punkt 1:

$$Z_2 = -0,9434 \quad \text{und} \quad Z_3 = -0,9434 \cdot \frac{55}{25} = -2,0755.$$

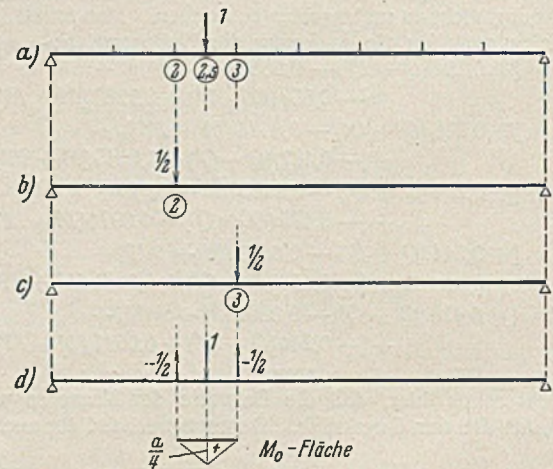


Bild 10a bis d.

Es bleiben noch die Laststellungen an den Zwischenknotenpunkten zu untersuchen. Wie schon am Schluß von Abschnitt c erwähnt, wird die im Feld angreifende Last 1 auf die beiden benachbarten Knotenpunkte verteilt. Im vorliegenden Fall würde also an jedem der beiden Knoten-

punkte die Last $\frac{1}{2}$ angreifen. Bei der Übertragung der Last 1 auf die Knotenpunkte treten im Untergurt des belasteten Feldes noch Biegemomente auf. Man hat den Lastfall gewissermaßen in drei einzelne Lastfälle aufgeteilt (vgl. Bild 10). Es ist Lastfall $a = \text{Lastfall } (b + c + d)$.

Zu untersuchen bleibt nur Lastfall d , da die Fälle b und c bereits für die Lasten 1 bekannt sind. Die M_o -Fläche erstreckt sich im Fall d über ein Feld. Beim Ersatzsystem treten also nur in einem Feld Unbekannte X, Y, Z auf. Nach Bild 11 ist

$$\delta_{oz} = -\frac{a}{8} \cdot u'; \quad \delta_{oy} = 0$$

$$\text{und } \delta_{ox} = +v_u \cdot \frac{a}{8} \cdot u' = -v_u \delta_{oz}$$

Die Last möge z. B. im dritten Feld angreifen. Dann ist:

$$\delta_{oz} = -\frac{10}{8} \cdot 16,0 = -20; \quad \delta_{oy} = 0$$

$$\text{und } \delta_{ox} = +7,72 \cdot 20 = +154,4$$

(im dritten Feld war $v_u = 7,72$ m). Man erhält $Z = -\frac{20}{53} = -0,377$;

$Y = 0$ und $X = +\frac{154,4}{1375} = +0,112$. In gleicher Weise ergeben sich die Unbekannten des Ersatzsystems für die Belastung der übrigen Zwischenknotenpunkte.

Für diesen Lastfall d wird man auch das endgültige System mit elastischen Vertikalen untersuchen, und erst zum Schluß wird man die Unbekannten $X + X', Y + Y'$ und $Z + Z'$ der einzelnen Lastfälle addieren. Zum Beispiel ist hier

$$(X + X')_{(2,5)} = \frac{1}{2} (X + X')_{(2)} + \frac{1}{2} (X + X')_{(3)} + (X + X')_{(d)}$$

Sehr einfach ist auch die Ermittlung von Temperaturspannungen im Ersatzsystem. Wenn die Temperatur des Konstruktes um $\pm t^\circ$ von derjenigen der über der Fahrbahn liegenden Konstruktionsteile abweicht, ist bei horizontalem Untergurt $\delta_{xt} = \mp \epsilon t a E J_c$; $\delta_{yt} = \delta_{zt} = 0$. Es sind also nur die Unbekannten X_i von 0 verschieden. Das Annäherungsverfahren liefert auch hier die endgültigen Unbekannten $X + X', Y'$ und Z' .

γ) Die Durchführung des Annäherungsverfahrens.

Nachdem die statisch unbestimmten Größen X, Y, Z des Ersatzsystems mit starren Vertikalen für alle Laststellungen bekannt sind, müssen die durch die Elastizität der Vertikalen bedingten Änderungen X', Y', Z' durch Annäherung bestimmt werden. Hierzu dienen die im Teil α aufgestellten Gleichungen. Das Annäherungsverfahren wird in Tabellenform durchgeführt.

Zunächst werden die vier Laststellungen an den Knotenpunkten der Reihe nach untersucht. Es möge hier die Laststellung an Punkt 2

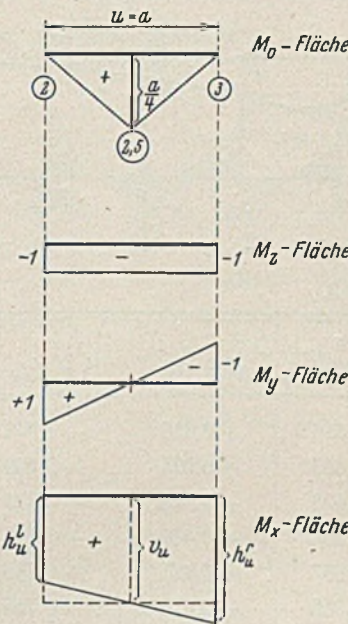


Bild 11.

herausgegriffen werden. Das Verfahren wird in der am Schluß von Abschnitt c angegebenen Reihenfolge durchgeführt. In Tabelle 2 sind die ersten Näherungswerte $X'_{(1)}$ und die zweiten Näherungswerte $X'_{(2)}$ unter ausschließlicher Benutzung der Querkräfte ermittelt. Die in Klammern beigefügte Ziffer gibt an, der wievielte Näherungswert es ist. Mit k_q wurden die Beiwerte der $(Q + Q')$ und mit c_x die Beiwerte der X' bezeichnet. $Q'_{(1)}$ ergab sich als die Differenz zweier $X'_{(1)}$. Die erhaltenen Näherungswerte $X + X'_{(2)}$ und die Y und Z liefern nach Tabelle 3 die ersten Näherungswerte für $M + M'$. Der Tabelle 3 liegen die letzten Gleichungen von Teil α zugrunde, wobei die Beiwerte der $X + X'$ mit α bzw. β bezeichnet wurden. Mit diesen Momenten $M + M'_{(1)}$ (in Vertikalenmitte) erhält man nach Tabelle 4 die Näherungswerte $Y'_{(1)}, Y'_{(2)}$ und $Z'_{(1)}$. Die Beiwerte der $M + M'$ sind hier mit k_m bezeichnet. Sie sind für Y' und Z' abwechselnd gleich und entgegengesetzt gleich. Wie schon erwähnt, erfolgt die Annäherung bei den Y' fortlaufend, nämlich so, daß z. B. zu der Berechnung von Y'_2 schon der Einfluß des gerade berechneten Wertes Y'_3 berücksichtigt wird. Es ist zu diesem Zweck neben der Spalte für $M + M'_{(1)}$ eine Spalte $M + M'_{(2)}$ vorgesehen, in der die unterstrichenen Werte den Einfluß von $Y'_{(1)}$ des vorhergehenden Feldes enthalten. Zum Beispiel ist im vierten Feld: $-0,251 = -0,537 + 0,286$ oder ebenfalls im vierten Feld (aber für $M + M'_{(4)}$): $-0,071 = +0,041 - 0,112$. Hier ist 0,112 die Zunahme von $Y'_{(2)}$ gegenüber $Y'_{(1)}$, die mit $\Delta Y'$ bezeichnet ist. Bei den, wie man sieht, verhältnismäßig kleinen Werten $Z'_{(1)}$ wurde auf diese fortlaufende Annäherung verzichtet, was den Vorteil hat, daß die ganze Spalte heruntergerechnet werden kann, während bei Y' von Zeile zu Zeile gerechnet werden muß.

Jetzt beginnt man wieder die X' weiter zu verbessern, wobei auch der Einfluß der Momente berücksichtigt wird. Tabelle 5 zeigt diese Rechnung. Man sieht hier, wie genau schon die Werte $X'_{(2)}$ waren und wie gering der Einfluß der Momente ist. (X' muß auch etwas genauer als Y' und Z' ermittelt werden, weil es größeren Einfluß auf die Eckmomente hat, denn es wird bei der Bestimmung dieser Momente noch mit h_o bzw. h_u multipliziert.) Die dann anschließende Verbesserung von $Y'_{(2)}$ und $Z'_{(1)}$ wird nochmals entsprechend Tabelle 4 durchgeführt, wobei statt von $Y' = 0$ jetzt von $Y'_{(2)}$ ausgegangen wird und statt von $Z' = 0$ jetzt von $Z'_{(1)}$. Es sind also für $Y'_{(2)}, Z'_{(1)}$ sowie $\Delta Y'$ und $\Delta Z'$ die notwendigen Spalten in der Tabelle einzufügen. Auf Wiedergabe dieser Tabelle wird verzichtet. Lediglich die Ergebnisse $Y'_{(3)}, Y'_{(4)}$ und $Z'_{(2)}$ sind in Tabelle 6 angegeben. Die Werte $X'_{(3)}, Y'_{(4)}$ und $Z'_{(2)}$ sind ausreichend genau. Sie werden mit X, Y bzw. Z der Tabelle 1 addiert und liefern damit die endgültigen statisch unbestimmten Größen $X + X', Y + Y'$ und $Z + Z'$ des Vierendeelträgers für eine Einzellast an Punkt 2. Diese Werte sind ebenfalls in Tabelle 6 angegeben. Am besten ermittelt man mit diesen Größen noch die Momentenflächen und Normalkräfte des ganzen Trägers in der üblichen Weise. Man kann dann, wenn diese Momentenflächen für sämtliche Laststellungen bestimmt sind, sofort die Einflußlinien der Eckmomente und Normalkräfte auftragen, ohne erst die Einflußlinien der statisch unbestimmten Größen aufzuzeichnen, die für die Dimensionierung doch nicht gebraucht werden. Bild 12 gibt die endgültige Momentenfläche an für Last 1 an Punkt 2. Zum Vergleich wurde auch die Momentenfläche des Ersatzsystems mit starren Vertikalen in Bild 13 aufgetragen.

Tabelle 2.

Feld	k_q	$Q^1)$	$k_q Q$	$c_x X' = \sum k_q Q$	c_x	$X'_{(1)}$	$Q'_{(1)}$	$Q + Q'_{(1)}$	$k_q (Q + Q')$	$c_x X'^2)$	$X'_{(2)}$	X	$X + X'_{(2)}$
1 { l r	+ 0,194 - 0,557	- 0,528	- 0,103 + 0,360	+ 0,257	+ 3,363	+ 0,076	- 0,076	- 0,604	- 0,117 + 0,297	+ 0,256	+ 0,076	+ 0,528	+ 0,604
2 { l r	+ 0,216 - 0,482	- 0,646	- 0,139 + 0,029	- 0,110	+ 3,075	- 0,036	+ 0,112	- 0,534	- 0,115 + 0,017	- 0,134	- 0,044	+ 1,174	+ 1,130
3 { l r	+ 0,204 - 0,475	- 0,059	- 0,012 - 0,136	- 0,148	+ 2,456	- 0,060	+ 0,024	- 0,035	- 0,007 - 0,111	- 0,178	- 0,072	+ 1,233	+ 1,161
4 { l r	+ 0,244 - 0,418	+ 0,286	+ 0,070 - 0,087	- 0,017	+ 2,078	- 0,008	- 0,052	+ 0,234	+ 0,057 - 0,075	- 0,026	- 0,013	+ 0,947	+ 0,934
4 { l r	+ 0,418 - 0,244	+ 0,209	+ 0,087 - 0,043	+ 0,044	+ 2,078	+ 0,021	- 0,029	+ 0,180	+ 0,075 - 0,043	+ 0,053	+ 0,026	+ 0,738	+ 0,764
3 { l r	+ 0,475 - 0,204	+ 0,175	+ 0,083 - 0,035	+ 0,048	+ 2,456	+ 0,020	+ 0,001	+ 0,176	+ 0,083 - 0,037	+ 0,066	+ 0,027	+ 0,563	+ 0,590
2 { l r	+ 0,482 - 0,216	+ 0,172	+ 0,083 - 0,046	+ 0,037	+ 3,075	+ 0,012	+ 0,008	+ 0,180	+ 0,087 - 0,043	+ 0,056	+ 0,018	+ 0,391	+ 0,409
1 { l r	+ 0,557 - 0,194	+ 0,215	+ 0,120 - 0,034	+ 0,086	+ 3,363	+ 0,026	- 0,014	+ 0,201	+ 0,112 - 0,039	+ 0,099	+ 0,029	+ 0,176	+ 0,205

1) $X_k - X_{k+1}$.

2) $X'_{(1)} + \sum k_q (Q + Q')$.

Tabelle 6. Für Einzellast am Knotenpunkt 2.

Feld	$Y'_{(3)}$	$Y'_{(4)} \approx Y'$	$Z'_{(2)} \approx Z'$	$X'_{(1)}$	$X + X'$	$Y + Y'$	$Z + Z'$
1	-0,405	-0,424	-0,010	+0,075	+0,603	-1,673	-1,260
2	-0,201	-0,190	+0,041	-0,049	+1,125	-1,350	-3,441
3	+0,162	+0,155	+0,050	-0,078	+1,155	+0,532	-4,101
4	+0,235	+0,234	-0,015	-0,014	+0,933	+0,602	-3,324
4	+0,167	+0,170	-0,001	+0,027	+0,765	+0,538	-2,574
3	+0,179	+0,176	-0,009	+0,031	+0,594	+0,553	-1,896
2	+0,145	+0,146	-0,013	+0,021	+0,412	+0,533	-1,174
1	+0,138	+0,138	+0,002	+0,031	+0,207	+0,554	-0,415

1) Nach Tabelle 5.

Es wurde schon am Schluß von Abschnitt c erwähnt, daß man bei der vollständigen Durchrechnung des Tragwerkes die für den einen Lastfall ermittelten Unbekannten X' , Y' , Z' dazu benutzen wird, bei der Belastung des folgenden Knotenpunktes gute Näherungswerte für X' , Y' , Z' zu schätzen, um damit die für das Annäherungsverfahren erforderliche Rechenarbeit abzukürzen. Wie gesagt, ist diese Schätzung im dritten Feld neben dem belasteten Knotenpunkt und in den weiter ab liegenden

Noch Tabelle 4.

$\Delta Y'_{(4)}$	$M + M'_{(5)}$	$\mp k_m (M + M')$	$c_z Z'_{(4)}$	c_z	$Z'_{(1)}$	$M + M'_{(6)}$
+0,047	+0,146	+0,061	+0,004	+2,250	+0,002	+0,144
	+0,098	-0,057	+0,045	+2,200	+0,020	+0,080
-0,135		+0,039	+0,086	+1,869	+0,046	-0,036
	-0,010	+0,006	-0,032	+1,654	-0,019	-0,070
-0,112		-0,003	+0,005	+1,654	+0,003	-0,054
	-0,135	+0,089	-0,023	+1,869	-0,012	-0,050
-0,064		-0,052	-0,016	+2,200	-0,007	-0,062
	-0,032	+0,020	+0,004	+2,250	+0,002	-0,054
-0,034		-0,020				
	-0,065	+0,025				
-0,026		-0,043				
	-0,057	+0,020				
-0,025		-0,034				
	-0,045	+0,018				
+0,011		-0,026				
	-0,073	+0,030				-0,071

5) $\Sigma k_m (M + M')$. 7) $M + M'_{(6)} + Z'_k - Z'_{k+1}$.

Feldern praktisch genau. Es sollen z. B. Näherungswerte X' , Y' , Z' für Belastung des Knotenpunktes 3 aus den oben für Last an Punkt 2 ermittelten geschätzt werden. Lediglich für die Unbekannten X' der drei Felder 2 bis 4 (besser 1 bis 4) wird man Näherungswerte nur aus den Querkraften bestimmen, die genauer sind. Die Schätzung nimmt man folgendermaßen vor: In den an die Knotenpunkte 2 und 3 nicht angrenzenden Feldern 1 und 4 bis 1 bestimmt man X' , Y' , Z' für Last an Punkt 3 aus denen für Last an Punkt 2, indem man sie im selben Verhältnis wie die statisch unbestimmten Größen X , Y , Z des Ersatzsystems (Tabelle 1) wachsen läßt. Die Unbekannten Y' und Z' des Feldes 2 schätzt man nach denjenigen des Feldes 2 ebenfalls proportional den Unbekannten des Ersatzsystems. (Man könnte auch in Feld 1 nach Feld 1 schätzen.) Am schwierigsten sind Y' und Z' in den an den belasteten Knotenpunkt angrenzenden Feldern 3 und 4 zu schätzen. Im vorhergehenden, schon untersuchten Lastfall waren diese angrenzenden Felder die Felder 2 und 3. Dem Feld 3 entsprach vorher Feld 2, und dem Feld 4 entsprach vorher Feld 3. Man nimmt deshalb schätzungsweise an, daß der gesuchte Wert Y'_3 sich ebenso zu Y_3 verhält, wie sich beim Lastfall vorher Y'_2 zu Y_2 verhielt. Ebenso schätzt man Y'_4 an Hand von Y_3 des vorhergehenden Lastfalles. Dasselbe gilt für Z'_3 und Z'_4 .

Die zahlenmäßige Durchführung der Schätzung von X' , Y' und Z' für die Last am dritten Knotenpunkt ergibt dann unter Benutzung der Tabellen 1 und 6 folgende Werte:

$$X'_1 = 0,075 \cdot \frac{0,440}{0,528} = +0,063; +0,073 (+0,076)$$

$$\begin{matrix} X'_2 = +0,030; & +0,032 \\ X'_3 = -0,033; & -0,048 \\ X'_4 = -0,065; & -0,071 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{nur mit den } (+0,033) \\ \text{Querkraften } (-0,053) \\ \text{ermittelt } (-0,078) \end{matrix}$$

$$X'_{1'} = +0,027 \cdot \frac{1,106}{0,738} = +0,040; +0,031 (+0,029)$$

$$X'_{2'} = +0,031 \cdot \frac{0,845}{0,563} = +0,046 (+0,045)$$

$$X'_{3'} = +0,021 \cdot \frac{0,587}{0,391} = +0,031 (+0,033)$$

$$X'_{4'} = +0,031 \cdot \frac{0,264}{0,176} = +0,047 (+0,048)$$

$$Y'_1 = -0,424 \cdot \frac{1,04}{1,249} = -0,354 (-0,347)$$

$$Y'_2 = -0,146 \cdot \frac{0,966}{0,387} = -0,365 (-0,339)$$

$$Y'_3 = -0,190 \cdot \frac{0,943}{1,160} = -0,155 (-0,146)$$

$$Y'_4 = +0,155 \cdot \frac{0,551}{0,377} = +0,226 (+0,176)$$

$$Y'_{1'} = +0,170 \cdot \frac{0,551}{0,368} = +0,255 (+0,241)$$

$$Y'_{2'} = +0,176 \cdot \frac{0,566}{0,377} = +0,264 (+0,260)$$

$$Y'_{3'} = +0,146 \cdot \frac{0,580}{0,387} = +0,219 (+0,219)$$

$$Y'_{4'} = +0,138 \cdot \frac{0,624}{0,416} = +0,207 (+0,210)$$

$$Z'_1 = -0,010 \cdot \frac{1,041}{1,250} = -0,008 (-0,001)$$

$$Z'_2 = -0,013 \cdot \frac{2,902}{1,161} = -0,032 (-0,038)$$

$$Z'_3 = +0,041 \cdot \frac{4,717}{3,482} = +0,055 (+0,068)$$

$$Z'_4 = +0,050 \cdot \frac{4,963}{4,151} = +0,060 (+0,048)$$

$$Z'_{1'} = -0,001 \cdot \frac{3,860}{2,573} = -0,001 (-0,002)$$

$$Z'_{2'} = -0,009 \cdot \frac{2,830}{1,887} = -0,014 (-0,014)$$

$$Z'_{3'} = -0,013 \cdot \frac{1,741}{1,161} = -0,019 (-0,020)$$

$$Z'_{4'} = +0,002 \cdot \frac{0,625}{0,417} = +0,003 (+0,001).$$

Die in Klammern beigefügten Zahlen sind die nach Durchführung des Annäherungsverfahrens erhaltenen Werte. Wie man sieht, weichen die geschätzten Werte von den endgültigen nicht viel ab. In den Feldern 3 bis 1 stimmen sie fast genau überein. Die bei X'_1 und X'_4 zugefügte zweite Zahl ist unter Benutzung des ersten Wertes als Näherungswert allein aus den Querkraften bestimmt worden. Ich weise noch darauf hin, daß in Feld 1 das Verhältnis der X bzw. Y bzw. Z nach den früheren Ausführungen (Teil β) 5/6 beträgt; z. B. ist $\frac{0,440}{0,528} = 5/6$. In den Feldern 4 bis 1 beträgt dieses Verhältnis durchweg 3/2; z. B. ist $\frac{1,106}{0,738} = 3/2$. Man kann sich also die Schätzung noch erleichtern.

Bei der Durchführung des Annäherungsverfahrens hätte man sich auf die ersten fünf Felder beschränken können. Die Reihenfolge, in der die Annäherung vollzogen wurde, war folgende: Es wurden für X'_2 bis X'_4 die ersten Näherungswerte nur aus den Querkraften bestimmt, dann für X'_1 bis X'_4 die zweiten Näherungswerte ebenfalls nur aus den Querkraften. Hierauf wurden mit den geschätzten oder eben ermittelten X' , Y' , Z' bzw. $X + X'$, $Y + Y'$, $Z + Z'$ die Momente in Vertikalenmitte bestimmt (frühere Tabelle 3) und damit die Verbesserung entsprechend den früheren Tabellen 4 u. 5 durchgeführt. Die früher an Tabelle 5 anschließende, nochmalige Verbesserung der Y' und Z' nach Tabelle 4 fällt weg, weil wir von verhältnismäßig genauen geschätzten Werten ausgegangen sind.

Nach Untersuchung der vier Lastfälle für die Knotenpunktbelastungen folgt die Untersuchung der vier Lastfälle für die Feldbelastungen. Wie im vorigen Teil β angegeben, hat man sich hierbei auf die Untersuchung der Teilbelastung d (Bild 10) zu beschränken. Es möge das Annäherungsverfahren für den schon erwähnten Lastfall (Last 1 im 3. Feld) besprochen werden.

Für Lastfall d treten die Unbekannten X, Y, Z des Ersatzsystems nur im 3. Feld auf, alle übrigen sind Null. Die ersten, wieder nur aus den Querkräften ermittelten Näherungswerte der X' sind somit nur in den drei Feldern 2 bis 4 von Null verschieden, die zweiten Näherungswerte $X'_{(2)}$ erstrecken sich auf die Felder 1 bis 4, klingen aber nach den Seiten sehr stark ab. Genau wie bisher werden mit diesen zweiten Näherungswerten und den beiden Unbekannten Y_3 und Z_3 die Momente in den Vertikalen ermittelt (frühere Tabelle 3). Die Reihenfolge aber, in der die Y' - und Z' -Werte bestimmt und verbessert werden, ist eine andere wie vorher. Da die Z' hier wesentlich größer sind und ebenso große Bedeutung haben wie die Y' , werden sie auch ebenso behandelt wie diese. Es werden also die Y' und Z' abwechselnd verbessert. Die Z' -Werte beeinflussen sich hier auch gegenseitig sehr stark, so daß für sie die Verbesserung wie für die Y' fortlaufend erfolgen muß (wie Y' in Tabelle 4). Da die Unbekannten vom Feld 3 nach den Seiten abklingen, so rechnet man jeweils von Feld 3 nach links und rechts, d. h. in der Tabelle nach oben und unten. Man bestimmt also zuerst den ersten Näherungswert von Y' in Feld 3. Dann berechnet man Y' in Feld 2 und 4, wobei man den Einfluß von Y_3' auf die Momente der Vertikalen, genau wie früher in Tabelle 4, berücksichtigt. Hierauf wird dasselbe für Z' durchgeführt. Daraufhin verbessert man wieder Y' in den Feldern 3, 2 und 4 sowie 1 und 4 und führt dasselbe für Z' durch. Der Einfluß klingt von Feld 3 so stark nach den Seiten ab, daß man mehr als fünf Felder nicht zu untersuchen braucht. Das Verfahren wird ähnlich wie früher weitergeführt. Es werden also jetzt die X' verbessert, die damit ausreichend genau sind, dann weiter die Y' , die Z' und nochmals die Y' , womit genügende Genauigkeit erreicht ist. Zur besseren Übersichtlichkeit sollen in Tabelle 7 die auf den einzelnen Stufen erhaltenen Näherungswerte in der Reihenfolge angeschrieben werden, in der sie berechnet wurden. An der Größe der Änderungen kann man die erreichte Rechengenauigkeit abschätzen.

durch die Auflagerung der Querträger im Feld nicht wesentlich, und das große Moment in Feldmitte ist unbedenklich, weil die Gurte dort doch nicht ausgenutzt sind. Es empfiehlt sich demnach, die Querträger auch zwischen den Knotenpunkten aufzulagern, wenn dadurch die Fahrbahnkonstruktion leichter wird und der Untergurt entsprechend steif ausgebildet ist.

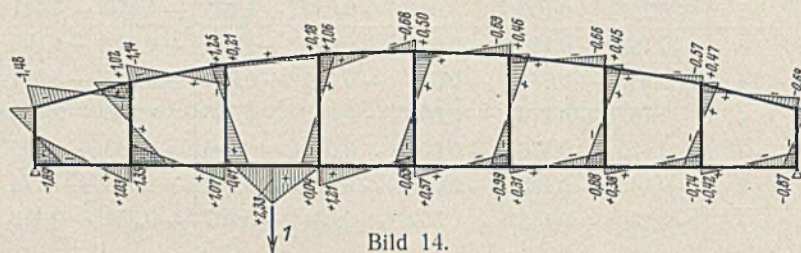


Bild 14.

d) Schlußbetrachtung.

An die Rechnungsergebnisse läßt sich noch eine kurze Betrachtung anschließen. In Bild 12 u. 13 wurden die Momentenflächen des endgültigen Systems mit elastischen Vertikalen und die des Ersatzsystems mit starren Vertikalen für Belastung des Knotenpunktes 2 nebeneinander gestellt. Man sieht sofort, daß die Momente des Obergurtes im endgültigen System wesentlich größer geworden sind als im System mit starren Vertikalen. Im Mittel sind sie um mehr als 40%, an einzelnen Stellen aber fast auf das Doppelte gestiegen. Die Steifigkeit der Vertikalen ist also hier, wo die Gurte stark verschieden sind, von wesentlichem Einfluß auf die Momentenverteilung. Man kann sich das auch folgendermaßen leicht erklären:

Belastet man einen Parallelträger, der Gurte von stark verschiedener Steifigkeit, aber starre Vertikalen hat, durch Lasten, die nur in den Knotenpunkten angreifen, so werden Ober- und Untergurt fast die gleiche Biegelinie aufweisen, da an den Knotenpunkten wegen der Starrheit der Vertikalen keine wesentlichen Drehwinkel auftreten. Die Querkräfte und Momente verteilen sich also auf Ober- und Untergurt ungefähr proportional

Tabelle 7.

Feld	$X'_{(1)}$	$X'_{(2)}$	$Y'_{(1)}$	$Z'_{(1)}$	$Y'_{(2)}$	$Z'_{(2)}$	$X'_{(3)} \approx X'$	$Y'_{(3)}$	$Z'_{(3)} \approx Z'$	$Y'_{(4)} \approx Y'$
1		+ 0,003			+ 0,025	+ 0,016	+ 0,001	+ 0,018	+ 0,015	+ 0,025
2	+ 0,018	+ 0,014	- 0,285	- 0,104	- 0,185	- 0,101	+ 0,021	- 0,184	- 0,088	- 0,188
3	- 0,031	- 0,031	+ 0,133	+ 0,159	+ 0,095	+ 0,150	- 0,039	+ 0,077	+ 0,134	+ 0,070
4	+ 0,013	+ 0,012	+ 0,139	- 0,067	+ 0,114	- 0,070	+ 0,014	+ 0,127	- 0,071	+ 0,135
$\frac{4}{3}$		+ 0,002			- 0,010	+ 0,007	+ 0,003	- 0,011	+ 0,010	- 0,014
$\frac{3}{3}$							0		0	0

Abgesehen von Feld 3 sind die Unbekannten X', Y', Z' gleichzeitig auch die statisch unbestimmten Größen $X + X', Y + Y', Z + Z'$ des Lastfalles d .

In Feld 3 ist $X + X' = + 0,112 - 0,039 = + 0,073$
 $Y + Y' = 0 + 0,070 = + 0,070$
 $Z + Z' = - 0,377 + 0,134 = - 0,243.$

Die statisch unbestimmten Größen für Lastfall d sind noch mit denjenigen der Lastfälle b und c zu addieren (nach Bild 10); z. B. setzt sich in Feld 3 die statisch unbestimmte Größe $X + X'$ aus folgenden Teilbeiträgen zusammen: Für Lastfall d ist $X + X' = + 0,073$. Für Last 1 an Punkt 2 war nach Tabelle 6: $X + X' = + 1,155$. Für Last 1 an Punkt 3 war $X + X' = + 1,408 - 0,053 = + 1,355$. Insgesamt wird also in Feld 3 $X + X' = + 0,073 + \frac{1}{2}(1,155 + 1,355) = + 1,328$. In gleicher Weise folgen die übrigen statisch unbestimmten Größen, mit denen dann die Momentenfläche ermittelt wird. Sie ist in Bild 14 aufgetragen.

Wie man sieht, ist die Momentenverteilung günstig. Die Eckmomente, die für die Dimensionierung der Gurte maßgebend sind, vergrößern sich

ihren Trägheitsmomenten. Sobald die Vertikalen elastisch werden, treten an den Knotenpunkten Drehwinkel der Biegelinien auf. Diese Winkel sind aber infolge der verschiedenen Gurtmomente verschieden. Sie sind am schwächeren Gurt, von dem kleinere Momente auf die Vertikalen ausgeübt werden, kleiner als am stärkeren. Der stärkere Gurt, dessen Biegelinie dadurch weniger starke Gegenkrümmungen aufweist, entlastet sich auf Kosten des schwächeren, und zwar, wie das vorliegende Beispiel zeigt, recht beträchtlich. Die Vorstellung, daß man die Querkräfte und Momente ungefähr nach der Steifigkeit der Gurte verteilen könne, führt also zu falschen Ergebnissen. Es könnte bei einer derart unrichtig berechneten Vierendeelträger-Brücke die Gefahr des Bruches, gegebenenfalls des Dauerbruches für den schwächeren Gurt (am Beginn der biegungsfesten Ecke) bestehen, und dieser schwächere Gurt wird obendrein auch noch meist der Druckgurt sein. Besonders groß ist die Gefahr des Dauerbruches beim Parabelträger, weil dieser seine Biegemomente fast ausschließlich durch die Verkehrslast bekommt. Es ist deshalb bei Vierendeelträgern mit Gurten von stark verschiedener Steifigkeit wichtig, daß bei der Berechnung auch die Steifigkeit der Vertikalen in ihrer richtigen Größe berücksichtigt wird.