DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang | BERLIN, 9. Juni 1939 | Heft 12

Zur Berechnung des eingespannten versteiften Stabbogens[1]).

Von **Philipp Stein**, Darmstadt.

Während schon seit langem Arbeiten über den versteiften Zweigelenkbogen bekannt sind[2]), wird der eingespannte versteifte Bogenträger erst in neuerer Zeit in der Literatur behandelt[3]). In Anbetracht der Schwierigkeiten und des Umfangs der rein analytischen Berechnung werden die Untersuchungen über den versteiften eingespannten Bogen bis auf eine Ausnahme[4]) experimentell durchgeführt. Die Veröffentlichung von Schubert[4]) ermuntert nicht gerade dazu, den rechnerischen Weg einzuschlagen.

Es lassen sich indessen durchaus analytische Verfahren mit wirtschaftlich vertretbarem Rechenaufwand angeben. Für den versteiften eingespannten Stabbogen mit gelenkig an Fahrbahn und Bogen angeschlossenen Stützen werden eine genaue Durchführung der Rechnung und zwei Annäherungsverfahren mitgeteilt. Die Untersuchungen bleiben im Bereich der Theorie 1. Ordnung. Es wird somit die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt und der Einfluß der Systemverformung vernachlässigt.

Genauer Rechnungsgang.

Eine unmittelbare Ermittlung der $(n+2)$ statisch unbestimmten Größen des Systems in Bild 1 führt bei den verschiedenen Möglichkeiten

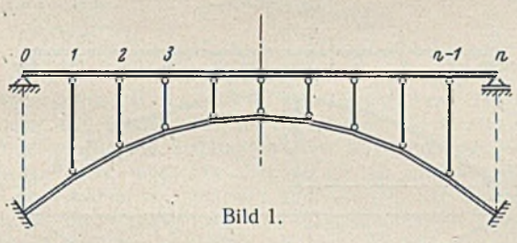

Bild 1.

der Wahl der Unbekannten immer auf ein zur Auflösung ungeeignetes Gleichungsschema [s. Schubert[4])]. Es ist vorteilhafter, die Untersuchung stufenweise durchzuführen, d. h. mit einem oder mehreren statisch unbestimmten Hauptsystemen zu arbeiten. Setzt man die Kämpfermomente des Bogens und die Horizontalkraft H am rechten Kämpfer gleich Null,

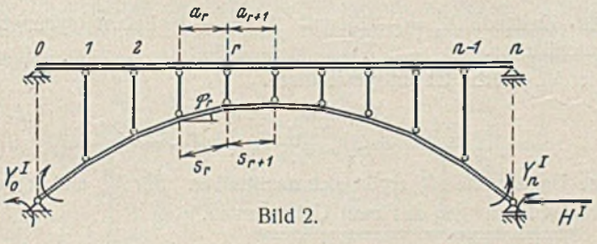

Bild 2.

so ergibt sich ein $(n-1)$-fach statisch unbestimmtes System (Bild 2), das als Hauptsystem für den Rechnungsgang angenommen wird. Bei der Wahl der restlichen drei Unbekannten des Systems wird die Symmetrie ausgenutzt.

$$X_a^I = \frac{Y_o^I + Y_n^I}{2} \qquad Y_o^I = X_a^I + X_b^I$$

$$X_b^I = \frac{Y_o^I - Y_n^I}{2} \qquad Y_n^I = X_a^I - X_b^I$$

$$X_c^I = H^I.$$

Zur Berechnung des statisch unbestimmten Hauptsystems werden als Unbekannte die Momente $Y_1 \div Y_{n-1}$ des Bogens eingeführt (Bild 3).

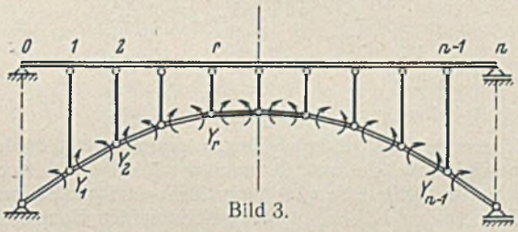

Bild 3.

Die Momentenflächen für den Zustand $Y_r = -1$ $[r = 1 \div (n-1)]$, B_r-Fläche im Balken und Y_r-Fläche im Bogen, erstrecken sich nur über die beiden dem Stützpunkt r benachbarten Felder (Bild 4). Demnach ergibt sich für das Hauptsystem ein dreigliedriges Gleichungssystem.

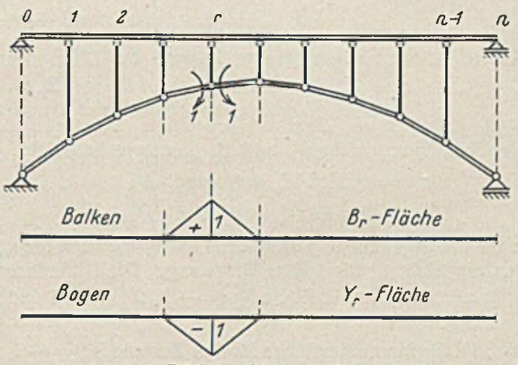

Bild 4. $Y_r = -1$.

$$\delta_{r,r-1} Y_{r-1} + \delta_{r,r} Y_r + \delta_{r,r+1} Y_{r+1} = Z_r \;..\; [r = 1 \div (n-1)]$$

$$E J_c \delta_{r,r-1} = \int M_{r-1} M_r \, ds' + \frac{J_c}{F_c} \int N_{r-1} N_r \, ds'' + \frac{E J_c}{G F_c} \int Q_{r-1} Q_r \, ds'''$$

$$E J_c \delta_{r,r} = \int M_r^2 \, ds' + \frac{J_c}{F_c} \int N_r^2 \, ds'' + \frac{E J_c}{G F_c} \int Q_r^2 \, ds'''$$

$$E J_c \delta_{r,r+1} = \int M_{r+1} M_r \, ds' + \frac{J_c}{F_c} \int N_{r+1} N_r \, ds'' + \frac{E J_c}{G F_c} \int Q_{r+1} Q_r \, ds'''.$$

Wird der Einfluß der Normal- und Querkräfte vernachlässigt und das Trägheitsmoment im Balken und Bogen feldweise konstant angenommen, so ergeben sich folgende Koeffizienten:

---

[1]) Vgl. Diss. d. Verf., Technische Hochschule Darmstadt.

[2]) Müller-Breslau, Zivilingenieur 1883. — Gottschalk, Diss. T. H. Berlin. — Wanke, Der Eisenbau 1921. — Spilker, Bauing. 1922. — Grüning, Die Statik des ebenen Tragwerkes, S. 593. — Girkmann, Stahlbau 1929.

[3]) Jäger, B. u. E. 1936. — Schaechterle, Bauing. 1938. — Klett und Rietli, B. u. E. 1938. — Jüngling, B. u. E. 1938. — Wilson, Bd. 5 der Abhandlungen der Intern. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau 1937/38.

[4]) Schubert, Schweiz. Bauztg. 1936, Zuschrift Stüssi.

$$\left.\begin{aligned} E J_c \delta_{r,r-1} &= \frac{1}{6}(a_r' + s_r') \\ E J_c \delta_{r,r} &= \frac{1}{3}(a_r' + s_r') + \frac{1}{3}(a_{r+1}' + s_{r+1}') \\ E J_c \delta_{r,r+1} &= \frac{1}{6}(a_{r+1}' + s_{r+1}') \end{aligned}\right\} \quad r = 1 \div (n-1)$$

$$a_r' = a_r \cdot \frac{J_c}{J_{r,\,\text{Balken}}} \qquad s_r' = s_r \cdot \frac{J_c}{J_{r,\,\text{Bogen}}}.$$

Zur Auflösung eines dreigliedrigen Schemas stehen genügend Verfahren zur Verfügung. Überwiegen, wie in unserem Schema, die Glieder in der Hauptdiagonale, so treten bei der Auflösung keine rechnungsmäßigen Schwierigkeiten auf. Es sei nur erwähnt, daß sich das Gaußsche Eliminationsverfahren gut zur Auflösung eines dreigliedrigen Schemas eignet. Es sind dabei nur neue Werte für die Glieder der Hauptdiagonalen zu berechnen.

Das Gleichungssystem läßt sich noch vereinfachen, wenn folgende Annahmen gemacht werden, die für die ausgeführten Systeme meist zutreffen:

Das Trägheitsmoment J des Balkens ist konstant. Für das Bogenträgheitsmoment J_r im Feld r gilt:

$$J_r = J_s \cdot \sec \varphi_r.$$

J_s = Scheitelträgheitsmoment des Bogens.

Weiterhin wird konstante Feldweite a angenommen und vorausgesetzt, daß die Knickpunkte des Stabbogens auf einer Parabel 2. Ordnung liegen. Die Koeffizienten der r-Elastizitätsgleichung ergeben sich zu:

$$E J_c \delta_{r,r-1} = \frac{1}{6}(1+\alpha)\,a \qquad E J_c \delta_{r,r} = \frac{4}{6}(1+\alpha)\,a$$

$$E J_c \delta_{r,r+1} = \frac{1}{6}(1+\alpha)\,a.$$

Die r-Elastizitätsgleichung lautet nun:

$$Y_{r-1} + 4\,Y_r + Y_{r+1} = k\,Z_r'$$

$$k = \frac{1}{1+\alpha} \qquad \alpha = \frac{J_c}{J_s} \qquad Z_r' = \frac{6}{a} \cdot Z_r$$

J_c = Balkenträgheitsmoment J.

Das Schema der Elastizitätsgleichungen kann aufgefaßt werden als eine inhomogene Differenzengleichung II. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Integration der Differenzengleichung liefert eine geschlossene Lösung für die Unbekannten $Y_1 \div Y_{n-1}$ des unbestimmten Hauptsystems.

Setzt man voraus, daß eine beliebige, lotrechte Belastung nur in den Stützpunkten des Balkens angreift, so verläuft die B_o-Fläche zwischen den Stützpunkten geradlinig. Das Belastungsglied erscheint dann in der allgemeinen Form

$$E J_c Z_r = \frac{a}{6}(B_{r-1,o} + 4\,B_{r,o} + B_{r+1,o}) \ldots r = 1 \div (n-1).$$

Es läßt sich sofort ein partikuläres Integral der Differenzengleichung

$$Y_{r-1} + 4\,Y_r + Y_{r+1} = k\,(B_{r-1,o} + 4\,B_{r,o} + B_{r+1,o})$$

angeben: $$Y_r = k\,B_{r,o}.$$

Die Randbedingungen für Y_r und $B_{r,o}$ entsprechen sich:

für $r = o$ wird $Y_o = 0$ und $B_{o,o} = 0$,

für $r = n$ wird $Y_n = 0$ und $B_{n,o} = 0$.

Somit ist die angegebene partikuläre Lösung zugleich die vollständige der Differenzengleichung für äußere Belastung. Die Differenzengleichung muß noch für die virtuellen Lastfälle $X_a^{\mathrm{I}} = -1$, $X_b^{\mathrm{I}} = -1$ und $X_c^{\mathrm{I}} = -1$ integriert werden.

In Bild 5 ist die Momentenfläche für den Zustand $X_a^{\mathrm{I}} = -1$ am Grundsystem angegeben. Der Einfluß der Momentenfläche des Balkens und Bogens wird zweckmäßig getrennt verfolgt. Infolge der $B_{a,o}$-Fläche ergibt sich sofort:

$$Y_r = -k \qquad [r = 1 \div (n-1)].$$

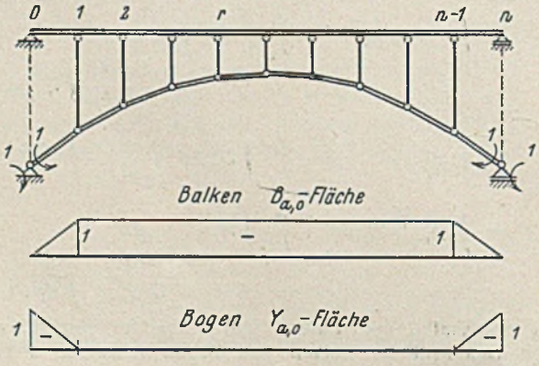

Bild 5. $X_{a_1}^{\mathrm{I}} = -1$.

Im Gleichungsschema für die $Y_{a,o}$-Fläche sind nur die Werte Z_1 und Z_{n-1} von Null verschieden. Das Schema kann aufgefaßt werden als eine homogene Differenzengleichung II. Ordnung mit den virtuellen Randbedingungen:

$$Y_o = -Z_1 \text{ und } Y_n = -Z_{n-1}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung lautet:

$$Y_r = C_1\,a_1^r + C_2\,a_2^r.$$

$a_{1,2}$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a^2 + 4\,a + 1 = 0.$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen erhält man

$$Y_r = \frac{\alpha\,k}{a_1^n - a_2^n}\left[a_1^r\left(a_2^n - 1\right) - a_2^r\left(a_1^n - 1\right)\right] \qquad r = 1 \div (n-1).$$

Die Unbekannten Y_r^{I} im Zustand $X_a^{\mathrm{I}} = -1$ ergeben sich damit zu

$$Y_{r,a}^{\mathrm{I}} = -k + \frac{\alpha\,k}{a_1^n - a_2^n}\left[a_1^r\left(a_2^n - 1\right) - a_2^r\left(a_1^n - 1\right)\right] \qquad r = 1 \div (n-1).$$

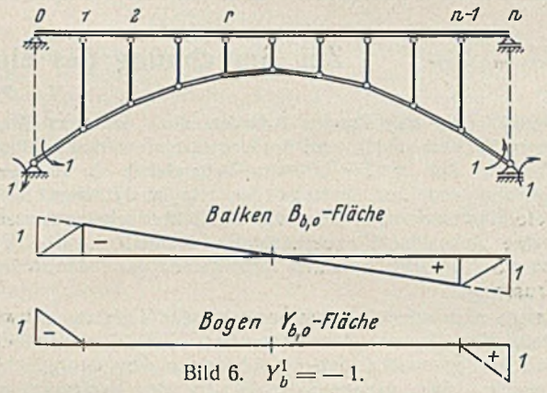

Bild 6. $Y_b^{\mathrm{I}} = -1$.

Auf gleiche Weise werden die Y_r^{I}-Werte für den Zustand $X_b^{\mathrm{I}} = -1$ (Bild 6) gefunden:

$$Y_{r,b}^{\mathrm{I}} = k\,B_{b,o} + \frac{\alpha\,k}{a_1^n - a_2^n}\left[a_1^r\left(a_2^n + 1\right) - a_2^r\left(a_1^n + 1\right)\right] \qquad r = 1 \div (n-1).$$

Die Momentenfläche im Zustand $X_c^{\mathrm{I}} = -1$ erstreckt sich im Grundsystem nur über den Balken (Bild 7). Die Lösung ergibt sich sofort zu

$$Y_{r,c}^{\mathrm{I}} = k\,y_r.$$

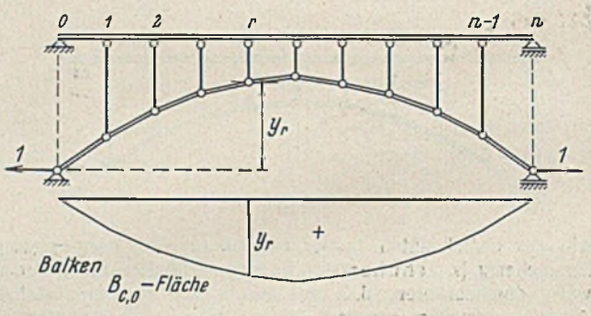

Bild 7. $Y_c^{\mathrm{I}} = -1$.

Die Zustände $X_a^{\mathrm{I}} = -1$ und $X_c^{\mathrm{I}} = -1$ liefern symmetrische Momentenflächen.

Die M_b^{I}-Fläche ist antisymmetrisch.

$$\delta_{a,b}^{\mathrm{I}} = \delta_{b,a}^{\mathrm{I}} = 0,$$
$$\delta_{b,c}^{\mathrm{I}} = \delta_{c,b}^{\mathrm{I}} = 0.$$

Die Unbekannte X_b^{I} ergibt sich unmittelbar. Für X_a^{I} und X_c^{I} erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

	X_a^{I}	X_b^{I}	
1.	δ_{aa}^{I}	δ_{ac}^{I}	$= Z_a^{\mathrm{I}}$
2.	δ_{ca}^{I}	δ_{cc}^{I}	$= Z_c^{\mathrm{I}}$

$$X_b^{\mathrm{I}}\,\delta_{bb}^{\mathrm{I}} = Z_b^{\mathrm{I}}.$$

Durch Anwendung des Reduktionssatzes vereinfacht sich die Ermittlung der $\delta_{i,k}^{\mathrm{I}}$-Werte

$$E J_c \delta_{ik}^{\mathrm{I}} = \int M_i^{\mathrm{I}} M_k\,ds' = \int M_i\,M_k^{\mathrm{I}}\,ds'.$$

Aus den Unbekannten ergeben sich schließlich durch Superposition die Momente im Balken und Bogen

$$Y_r = Y_{r,o}^{\mathrm{I}} - Y_{r,a}^{\mathrm{I}}\,X_a^{\mathrm{I}} - Y_{r,b}^{\mathrm{I}}\,X_b^{\mathrm{I}} - Y_{r,c}^{\mathrm{I}}\,X_c^{\mathrm{I}}.$$

Bei gleichförmiger Belastung (Lasten in den Stützpunkten) entstehen keine Momente. Zur Ermittlung von Einflußlinien werden zweckmäßig die Lastfälle $P = 1$ in $1 \div \frac{n}{2}$ untersucht. Zur Berechnung der Belastungsglieder ist es vorteilhaft, die Momentenfläche aus äußerer Belastung am unbestimmten Hauptsystem zu nehmen.

$$EJ_c\, Z_a^{\mathrm{I}} = \int M_a\, M_o^{\mathrm{I}}\, ds'$$

$$EJ_c\, Z_b^{\mathrm{I}} = \int M_b\, M_o^{\mathrm{I}}\, ds'$$

$$EJ_c\, Z_c^{\mathrm{I}} = \int M_c\, M_o^{\mathrm{I}}\, ds'.$$

Für eine Feldteilung $n = 10$ wurden die Lastfälle $P = 1$ in $1 \div 5$ untersucht und die Bogen- und Balkenmomente für die Verhältnisse $\alpha = 0{,}1;\ 0{,}2 \ldots 0{,}9;\ 1;\ 2;\ 3 \ldots 9;\ 10$ zahlenmäßig für eine beliebige Feldweite a berechnet[5]). In Bild 8 ist die Momentenfläche im Balken

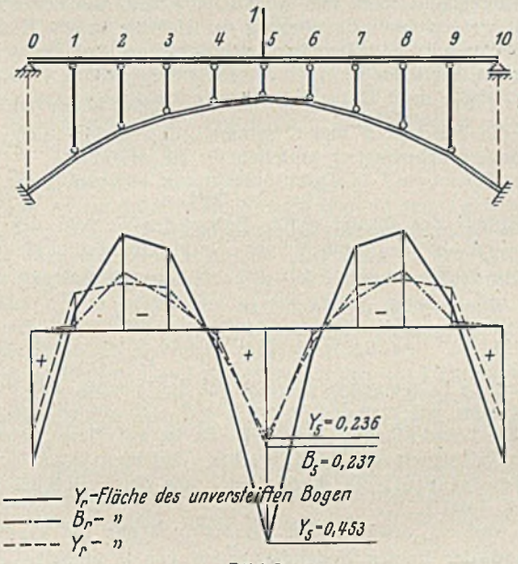

Bild 8.

und Bogen im Lastfall $P = 1$ in 5 für $\alpha = 1$ angegeben. Die Ergebnisse der Rechnung zeigen, daß sich im allgemeinen die Momente des unversteiften, eingespannten Stabbogens etwa im Verhältnis α auf Balken und Bogen verteilen. Dies gilt aber nur für den mittleren Bereich des Systems. Am Kämpfer bis ungefähr zum Viertelpunkt wird diese Verteilung durch die Verringerung des Einspannmoments gestört. Die Balkenmomente weichen erheblich in ihrem Verlauf von den Werten des durchlaufenden Balkens auf starren Stützen ab. Sie werden vorwiegend durch den Einfluß des Bogens bestimmt.

Annäherungsverfahren.

Es erweist sich als zweckmäßig, für die Annäherungsverfahren ein anderes Hauptsystem der Berechnung zugrunde zu legen. Als dreifach statisch unbestimmtes Hauptsystem wird der eingespannte Bogen gewählt. Die Balkenmomente $B_1^{\mathrm{I}} \div B_n^{\mathrm{I}}$ (Bild 9) werden als statisch unbestimmte

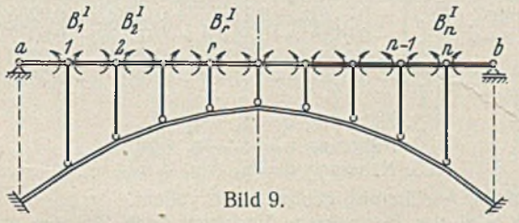

Bild 9.

Größen in die Rechnung eingeführt. Der versteifte Stabbogen wird demnach als Balken auf elastisch senkbaren Stützen aufgefaßt, deren Nachgiebigkeit nicht von der Elastizität der Stütze allein abhängt. Im Gleichungssystem für die unbekannten Balkenmomente verschwindet kein einziger δ_{ik}^{I}-Wert. Jedoch überwiegen die Koeffizienten in der Hauptdiagonale bei weitem. Näherungsweise Lösungen der Elastizitätsgleichungen werden im allgemeinen daher gut konvergieren. Zur Ermittlung der δ_{ik}^{I}-Werte

[5]) Die Zahlenwerte sind in der Dissertation des Verfassers angegeben.

Tafel 1. δ_{ik}^{I}-Tafel. $\mu = a$

	B_1^{I}	B_2^{I}	B_3^{I}	B_4^{I}	B_5^{I}	B_6^{I}	B_7^{I}	B_8^{I}	B_9^{I}	
1.	+ 0,931	+ 0,078	— 0,137	— 0,047	+ 0,015	+ 0,049	+ 0,055	+ 0,032	— 0,018	$= Z_1^{\mathrm{I}}$
2.	+ 0,078	+ 1,124	+ 0,168	— 0,125	— 0,088	— 0,053	— 0,022	+ 0,007	+ 0,032	$= Z_2^{\mathrm{I}}$
3.	— 0,137	+ 0,168	+ 1,154	+ 0,156	— 0,161	— 0,130	— 0,083	— 0,022	+ 0,055	$= Z_3^{\mathrm{I}}$
4.	— 0,047	— 0,125	+ 0,156	+ 1,129	+ 0,128	— 0,180	— 0,130	— 0,053	+ 0,049	$= Z_4^{\mathrm{I}}$
5.	+ 0,015	— 0,088	— 0,161	+ 0,128	+ 1,113	+ 0,128	— 0,161	— 0,088	+ 0,015	$= Z_5^{\mathrm{I}}$
6.	+ 0,049	— 0,053	— 0,130	— 0,180	+ 0,128	+ 1,129	+ 0,156	— 0,125	— 0,047	$= Z_6^{\mathrm{I}}$
7.	+ 0,055	— 0,022	— 0,083	— 0,130	— 0,161	+ 0,156	+ 1,154	+ 0,168	— 0,137	$= Z_7^{\mathrm{I}}$
8.	+ 0,032	+ 0,007	— 0,022	— 0,053	— 0,088	— 0,125	+ 0,168	+ 1,124	+ 0,078	$= Z_8^{\mathrm{I}}$
9.	— 0,018	+ 0,032	+ 0,055	+ 0,049	+ 0,015	— 0,047	— 0,137	+ 0,078	+ 0,931	$= Z_9^{\mathrm{I}}$

des Gleichungsschemas berechnet man zweckmäßig die Biegelinien im Hauptsystem für $P = 1$ in $1 \div \frac{n}{2}$. Diese Werte werden auch später wieder bei der Herleitung von Einflußlinien gebraucht. In Tafel 1 ist das Koeffizientenschema der Elastizitätsgleichungen zahlenmäßig für ein System mit $n + 1 = 10$ und $\alpha = 1$ angegeben.

Die Annäherungsverfahren verwenden den Matrizenkalkül[6]).

Erstes Annäherungsverfahren.

Die folgende Methode geht von dem „normierten" Gleichungssystem aus. Jede Zeile des Schemas wird durch den δ_{ik}^{I}-Wert der Hauptdiagonale dividiert, so daß alle Glieder der Hauptdiagonale den Wert Eins haben. Ein solches Schema heißt normiert. Das System der n-Elastizitätsgleichungen lautet in Matrizenschreibweise

$$A_{(n,n)}\, \mathfrak{y}_{(n,1)} = \mathfrak{z}_{(n,1)}.$$

$A_{(n,n)}$ = Koeffizientenmatrix der Elastizitätsgleichungen vom Typus (n, n) (normiert),

$\mathfrak{y}_{(n,1)}$ = „Vektor" aus den $X_1 \div X_n = (B_1^{\mathrm{I}} \div B_n^{\mathrm{I}})$-Werten = Matrix vom Typus $(n, 1)$,

$\mathfrak{z}_{(n,1)}$ = Vektor aus den Belastungsgliedern $Z_1^{\mathrm{I}} \div Z_n^{\mathrm{I}}$.

$$A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1}^{\mathrm{I}} & \delta_{1,2}^{\mathrm{I}} & \delta_{1,3}^{\mathrm{I}} & \cdots & \delta_{1,n}^{\mathrm{I}} \\ \delta_{2,1}^{\mathrm{I}} & \delta_{2,2}^{\mathrm{I}} & \delta_{2,3}^{\mathrm{I}} & \cdots & \delta_{2,n}^{\mathrm{I}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \delta_{n,1}^{\mathrm{I}} & \delta_{n,2}^{\mathrm{I}} & \delta_{n,3}^{\mathrm{I}} & \cdots & \delta_{n,n}^{\mathrm{I}} \end{bmatrix}_{n,n} \quad \mathfrak{y}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n,1} \quad \mathfrak{z}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} Z_1^{\mathrm{I}} \\ Z_2^{\mathrm{I}} \\ \vdots \\ Z_n^{\mathrm{I}} \end{bmatrix}_{n,1}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist

$$\mathfrak{y}_{(n,1)} = A_{(n,n)}^{-1}\, \mathfrak{z}_{(n,1)}.$$

Dabei ist A^{-1} die reziproke Matrix von A. Die Koeffizienten von A^{-1} bestehen aus den Elementen der reziproken Determinante von A. Diese Lösungsform bedeutet zunächst weiter nichts als die Darstellung der bekannten β_{ik}-Tafel in Matrizenschreibweise.

Die Matrix A wird nun zerlegt in

$$A_{(n,n)} = E_{(n,n)} - B_{(n,n)}:$$

$$E_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n,n} \quad B_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{1,2}^{\mathrm{I}} & -\delta_{1,3}^{\mathrm{I}} & \cdots & -\delta_{1,n}^{\mathrm{I}} \\ -\delta_{2,1}^{\mathrm{I}} & 0 & -\delta_{2,3}^{\mathrm{I}} & \cdots & -\delta_{2,n}^{\mathrm{I}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\delta_{n,1}^{\mathrm{I}} & -\delta_{n,2}^{\mathrm{I}} & -\delta_{n,3}^{\mathrm{I}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n,n}.$$

Die Lösung für $\mathfrak{y}$ lautet

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{E - B} \cdot \mathfrak{z} = A^{-1}\, \mathfrak{z}.$$

Den Faktor $\frac{1}{E - B}$ kann man als Summe einer geometrischen Reihe auffassen:

$$\frac{1}{E - B} = E + B + B^2 + B^3 + \cdots + B^n + \cdots$$

Die Lösung von $\mathfrak{y}$ ist damit in eine Matrizenreihe entwickelt:

$\mathfrak{y} = (E + B + B^2 + B^3 + \cdots)\, \mathfrak{z}$. Voraussetzung: $\lim\limits_{n \to \infty} B^n = 0$.

Die Potenzen von B werden nach der Multiplikationsregel für Matrizen berechnet. Nach ihr wird jede Zeile der ersten Matrix mit jeder Spalte

[6]) Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß Prof. Wegner, Heidelberg (früher Darmstadt), in einem Werk über die mathematischen Methoden zur Lösung linearer Probleme der Baustatik, insbesondere von Elastizitätsgleichungen, das demnächst im Verlag Springer erscheinen wird, u. a. das Rechnen mit Matrizen behandelt.

der zweiten Matrix multipliziert. Die Addition der Potenzen von B erfolgt so, daß man die entsprechenden Elemente addiert. Ehe man mit der praktischen Berechnung von A^{-1} durch Entwicklung in die B-Reihe beginnt, ist es wichtig zu wissen, ob die Entwicklung überhaupt konvergiert. Zur Untersuchung der Konvergenz wird die Reihe zu einer Neumannschen Reihe erweitert und festgestellt, ob die vorliegende Reihe im Konvergenzbereich der N-Reihe liegt. Die Neumannsche Reihe lautet:

$$(\lambda E - B)^{-1} = \frac{1}{\lambda\left(E - \frac{B}{\lambda}\right)} = \frac{E}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{B^2}{\lambda^3} + \cdots$$

λ = unabhängig Veränderliche. Für $\lambda = 1$ erhält man die B-Reihe. Die N-Reihe konvergiert nun für alle λ-Werte größer als der größte absolute Betrag der Wurzeln der Frequenzgleichung

$$|\lambda E - B = 0|.$$

Diese Gleichung besagt: Das Koeffizientenschema der Matrix $(\lambda E - B)_{n,n}$ wird als Schema einer Determinante $n$ten Grades aufgefaßt und gleich Null gesetzt. Die Frequenzgleichung liefert ein Polynom $n$ten Grades in λ. Ist der absolut größte Betrag der Wurzeln des Polynoms, $|\lambda_{max}|$, kleiner als Eins, so ist die Reihenentwicklung von A^{-1} konvergent.

Die Ermittlung der n-Wurzeln der Frequenzgleichung ist im allgemeinen schwierig. Es interessiert jedoch nur $|\lambda_{max}|$. Für die größte Wurzel eines Polynoms stehen Abschätzungen zur Verfügung.

Abschätzung für $|\lambda_{max}|$ nach Prof. Wegner:

$$|\lambda^B_{max}| \leqq \max_{i=1 \div n} \Sigma\left[|\delta_{i,1}| + |\delta_{i,2}| + |\delta_{i,3}| + \cdots + |\delta_{i,n}|\right].$$

Die δ_{ik}-Werte der Abschätzungsformel beziehen sich auf die Matrix B.

Zahlenbeispiel.

Das Gleichungsschema für das versteifte Bogensystem mit $n = 9$ und $\alpha = 1$ ist in Tafel 1 wiedergegeben. Die Matrix wird zunächst normiert und daraufhin zerlegt in $A = E - B$.

Zur Konvergenzuntersuchung ermittelt man die größte Zeilensumme der Matrix B

$$\max \Sigma\left[|\delta_{i,1}| + \cdots + |\delta_{i,n}|\right] = 0{,}789.$$

Tafel 2. $\mu = a$.

	B^I_1	B^I_2	B^I_3	B^I_4	B^I_5
1. Näherung . . .	— 0,0151	— 0,1206	— 0,0867	+ 0,0352	+ 0,2421
2. „ . . .	— 0,0145	— 0,1149	— 0,0809	+ 0,0303	+ 0,2335
3. „ . . .	— 0,0144	— 0,1172	— 0,0823	+ 0,0312	+ 0,2371
Genauer Wert . .	— 0,0144	— 0,1169	— 0,0817	+ 0,0306	+ 0,2365

Aus der Abschätzungsformel ergibt sich damit, daß $|\lambda_{max}|$ kleiner als Eins ist. Die Reihenentwicklung von A^{-1} ist also konvergent. In Tafel 2 sind für den Lastfall $P = 1$ in 5 die Werte der Unbekannten $B^I_1 \div B^I_5$ angegeben, die man aus der ersten bis dritten Annäherung von A^{-1} erhält.

Erste Annäherung von A^{-1} und $\mathfrak{y}$:

$$A^{-1} = (E + B) + B^2 \qquad \mathfrak{y} = [(E + B) + B^2]\,\mathfrak{z}$$

Zweite Annäherung von A^{-1} und $\mathfrak{y}$:

$$A^{-1} = (E + B) + B^2 + B^3 \qquad \mathfrak{y} = [(E + B) + B^2 + B^3]\,\mathfrak{z}$$

Dritte Annäherung von A^{-1} und $\mathfrak{y}$:

$$A^{-1} = (E + B) + B^2 + B^3 + B^4 \qquad \mathfrak{y} = [(E + B) + B^2 + B^3 + B^4]\,\mathfrak{z}.$$

Es genügen schon die Werte der zweiten Annäherung.

Zweites Annäherungsverfahren.

Die näherungsweise Ermittlung der reziproken Matrix A^{-1} ist dann vorteilhaft, wenn eine Reihe von Lastfällen zu untersuchen ist. Zur Behandlung eines einzelnen Lastfalles eignet sich die folgende Methode besser. Die Unbekannten werden nach dem Hertwigschen Verfahren[7]) ermittelt. Durch Anwendung des Matrizenkalküls kann die Darstellung der Methode sehr vereinfacht und die Konvergenz der Annäherung untersucht werden[8]). Hertwig zerlegt das gegebene Schema A der Elastizitätsgleichungen in

$$A_{(n,n)}\,\mathfrak{y}_{(n,1)} = (B + C)_{(n,n)}\,\mathfrak{y}_{(n,1)} = \mathfrak{z}_{(n,1)}.$$

Die Matrix B wird so gewählt, daß die reziproke Matrix B^{-1} leicht zu berechnen ist. Wird zunächst einmal der Anteil von $C_{(n,n)}$ an der Matrix A vernachlässigt, so erhält man einen angenäherten Wert der Unbekannten:

$$\mathfrak{y}_0 = B^{-1}\,\mathfrak{z}.$$

Wird die Lösung $\mathfrak{y}_0$ in die Gleichung $A\,\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$ an Stelle von $\mathfrak{y}$ eingesetzt, so erhält man einen Vektor $\mathfrak{z}'$, der von dem gegebenen wirklichen Belastungsvektor $\mathfrak{z}$ um $\mathfrak{z}^{(1)}$ abweicht. Der Wert $\mathfrak{y}_0$ ist die genaue Lösung der Gleichung für den Lastvektor $\mathfrak{z}'$. Es ist also zur Lösung $\mathfrak{y}_0$ noch die Lösung für den Lastvektor $\mathfrak{z}^{(1)}$ hinzuzufügen. Diese Verbesserung $\mathfrak{y}_1$ wird aber nur angenähert bestimmt aus

$$\mathfrak{y}_1 = B^{-1}\,\mathfrak{z}^{(1)}.$$

Es bleibt wieder ein Belastungsrest $\mathfrak{z}^{(2)}$ beim Einsetzen der Verbesserung $\mathfrak{y}_1$ übrig, für den eine weitere Verbesserung $\mathfrak{y}_2$ bestimmt werden kann usw. Das Hertwigsche Verfahren geht also nach folgendem Schema vor sich:

Gegeben in $A\,\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$ ist A und $\mathfrak{z}$, gesucht $\mathfrak{y}$.

Zerlegung: $A = B + C$. B^{-1} wird berechnet.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{y}_0 &= B^{-1}\,\mathfrak{z} & \mathfrak{z}^{(1)} &= \mathfrak{z} - A\,\mathfrak{y}_0 \\
\mathfrak{y}_1 &= B^{-1}\,\mathfrak{z}^{(1)} & \mathfrak{z}^{(2)} &= \mathfrak{z}^{(1)} - A\,\mathfrak{y}_1 \\
\mathfrak{y}_2 &= B^{-1}\,\mathfrak{z}^{(2)} & \mathfrak{z}^{(3)} &= \mathfrak{z}^{(2)} - A\,\mathfrak{y}_2 \\
&\cdots & &\cdots
\end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 + \cdots.$$

Zur Konvergenzuntersuchung werden die Werte für die Verbesserungen von $\mathfrak{y}$ in die Gleichung für $\mathfrak{y}$ eingesetzt und man erhält die Matrizenreihe

$$\mathfrak{y} = B^{-1}(E + M + M^2 + M^3 + \cdots)\,\mathfrak{z}.$$

$$M_{(n,n)} = \left(E - A\,B^{-1}\right)_{(n,n)}.$$

Die Konvergenz kann nun wie beim ersten Annäherungsverfahren festgestellt werden durch Erweiterung der M-Reihe in eine Neumannsche Reihe. Demnach ist die Hertwigsche Entwicklung konvergent, wenn der absolut größte Wert der Wurzeln der Frequenzgleichung $|\lambda E - M| = 0$ kleiner als 1 ist. $|\lambda^M_{max}|$ wird zweckmäßig wieder abgeschätzt.

Sind die Matrizen B und C symmetrisch, so läßt sich noch eine zweite Konvergenzbedingung herleiten für die M-Reihe:

$$|\lambda^C_{max}| < |\lambda^B_{min}|.$$

In Worten: der absolut größte Betrag der Wurzeln der Frequenzgleichung $|\lambda E - C| = 0$ muß kleiner sein als der absolut kleinste Betrag der Wurzeln der Gleichung $|\lambda E - B| = 0$. Zur Abschätzung von $|\lambda^B_{min}|$ gibt Prof. Wegner folgende Formel an

$$|\lambda_{min}| \geqq \min\left[|\delta_{i,i}| - \left(|\delta_{i,1}| + |\delta_{i,2}| + \underset{\text{außer } \delta_{i,i}}{\cdots} + |\delta_{i,n}|\right)\right] \geqq 0.$$

Die zweite Konvergenzbedingung hat den Vorzug, daß man schnell feststellen kann, wie man den Ansatz $A = B + C$ wählen muß, damit die Hertwigsche Entwicklung konvergiert. Es ist auf diese Weise möglich, die Leistungsfähigkeit des Hertwigschen Verfahrens ganz auszunutzen.

Zahlenbeispiel: Es wird wieder das obige Beispiel behandelt. Matrix A s. Tafel 1.

1. B wird so gewählt, daß die Matrix B nur die δ_{ik}-Werte der Haupt- und der beiden Nebendiagonalen von A enthält. Zur Untersuchung der Konvergenz der Hertwigschen Entwicklung werden die Werte $|\lambda^C_{max}|$ und $|\lambda^B_{min}|$ nach den angegebenen Formeln abgeschätzt. Es ergibt sich

$$|\lambda^C_{max}| < 0{,}588$$

$$|\lambda^B_{min}| > 0{,}831.$$

Die Konvergenzbedingung ist erfüllt und die Berechnung der Werte $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$ . . . geht nach dem angegebenen Schema vor sich, nachdem zuvor die reziproke Matrix B^{-1} auf irgendeine Weise ermittelt wurde. (Auflösung eines dreigliedrigen Schemas.)

In Tafel 3 sind die $\mathfrak{y}$-Werte aus der ersten bis dritten Annäherung angegeben.

Tafel 3. $\mu = a$.

	B^I_1	B^I_2	B^I_3	B^I_4	B^I_5
1. Näherung . . .	— 0,0170	— 0,1117	— 0,0762	+ 0,0285	+ 0,2258
2. „ . . .	— 0,0138	— 0,1177	— 0,0831	+ 0,0317	+ 0,2388
3. „ . . .	— 0,0145	— 0,1166	— 0,0813	+ 0,0305	+ 0,2360
Genau	— 0,0144	— 0,1169	— 0,0817	+ 0,0306	+ 0,2365

1. Näherung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_1$
2. Näherung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2$
3. Näherung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{y}_3$.

Die dritte Annäherung genügt schon vollauf.

2. Es wird das Hertwigsche Verfahren noch für eine zweite Wahl von B durchgeführt.

B besteht jetzt nur aus den Koeffizienten der Hauptdiagonale. Auch für diesen Ansatz fällt die Konvergenzuntersuchung positiv aus.

$$|\lambda^C_{max}| < 0{,}911$$

$$|\lambda^B_{min}| > 0{,}931.$$

B^{-1} ist einfach zu bilden. Die reziproke Matrix von B besteht nur aus den reziproken Koeffizienten der Hauptdiagonale von B. Die Werte von $\mathfrak{y}$ in der 1. bis 3. Annäherung sind in Tafel 4 wiedergegeben

[7]) Hertwig, Festschrift Müller-Breslau.
[8]) Wittmeyer, Z. ang. Math. 1936, Diss. 1934, T. H. Darmstadt.

Tafel 4. $\mu = a$.

	B_1^1	B_2^1	B_3^1	B_4^1	B_5^1
1. Näherung . . .	— 0,0146	— 0,1013	— 0,0742	+ 0,0265	+ 0,2104
2. „ . . .	— 0,0151	— 0,1206	— 0,0867	+ 0,0352	+ 0,2421
3. „ . . .	— 0,0145	— 0,1150	— 0,0809	+ 0,0303	+ 0,2335
Genau	— 0,0144	— 0,1169	— 0,0817	+ 0,0306	+ 0,2365

Sie sind kaum ungünstiger als die Werte der ersten Rechnung.

Zusammenfassung.

Zur Berechnung des versteiften eingespannten Stabbogens mit gelenkig angeschlossenen Stützen werden rein analytische Verfahren angegeben, die sich mit wirtschaftlichem Rechenaufwand durchführen lassen. Die Methoden bleiben innerhalb der Theorie I. Ordnung und benutzen die Kraftmethode. Ein genauer Rechnungsgang geht von einem unbestimmten Hauptsystem aus, das unter gewissen Annahmen mit einer Differenzengleichung II. Ordnung untersucht werden kann. Zur angenäherten Berechnung des Systems sind zwei Verfahren im Matrizenkalkül angegeben.

Es bleibt noch die Frage offen, welchen Einfluß der oft ausgeführte biegungsfeste Anschluß der Stützen an Fahrbahn und Bogen auf das System ausübt. Geht man von dem versteiften Stabbogen mit gelenkig angeschlossenen Stützen als statisch unbestimmtem Hauptsystem aus, so wird sich auch dieser Einfluß analytisch mit erträglichem Rechenaufwand verfolgen lassen. Zu klären wäre u. a. auch noch die Frage, ob die Vernachlässigung der Normalkräfte bei der Untersuchung des eingespannten, versteiften Stabbogens berechtigt ist.

Biegeversuche mit zwei großen, geschweißten Vollwandträgern aus St 52.[1]

(Mitteilung aus dem Staatlichen Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem.)

Von Dipl.-Ing. Kurt Albers, Berlin-Dahlem.

Auf Anordnung des Herrn Geheimrats Professor Dr. Schaper wurde die geschweißte Eisenbahnbrücke aus St 52 in km 97,067 der Strecke München—Garmisch ausgebaut. Die Brücke befand sich mehrere Jahre im Betrieb. Schäden waren nicht festgestellt worden.

Einer der Hauptträger wurde zu Versuchen verwendet. Biegeversuche mit Trägern so großer Abmessungen sind bisher noch nicht ausgeführt worden, so daß die Ergebnisse dieser Versuche im Hinblick auf die zur Zeit vielfach erörterten Fragen über das Schweißen von Brücken aus St 52 mitteilenswert sind.

1. Vorgeschichte und Herstellung der Versuchsträger.

Die 24 m weit gestützten Hauptträger wurden von Gg. Noell & Co., Würzburg, hergestellt. Die Träger bestanden aus Gurtplatten ▭ 440 × 60 mm und einem Stegblech 1740 × 16 mm. Die etwa in den Drittelpunkten liegenden Stegblechstöße waren genietet. Die Gurtplattenstöße waren um ungefähr 2,50 m gegen die Stegblechstöße versetzt und unter 45° stumpf geschweißt. Die Halsnähte bestanden aus 7 mm dicken Kehlnähten; das Stegblech war nicht zugeschärft worden.

Die Gurtplattenstöße und Halsnähte wurden mit Elektroden Kjellberg St 52a, 4 und 5 mm Durchm. in der Werkstatt geschweißt. Die Aussteifungen waren mit Plättchen vor dem Schweißen der Kehlnähte eingepaßt worden.

Die Versuchseinrichtung gestattete eine größte Stützweite von 6800 mm. Aus einem Hauptträger wurden zwei Versuchsträger und ein Hilfsträger hergestellt. Ein Reststück wurde zerlegt, um die Schrumpfspannungen zu ermitteln.

Da die Träger im Zuggurt zu Bruch gehen sollten, mußten die Untergurtplatten im Bereich der größten Momente von 440 auf 200 mm Breite verschmälert werden. Dies war für eine ausreichende Knicksicherheit des Obergurts und Beulsicherheit des Stegblechs erforderlich. Das Stegblech war wegen der starken Vergrößerung des Verhältnisses von Querkraft zu Moment durch die geringere Stützweite besonders gefährdet.

[1]) Die Ergebnisse wurden auf der Tagung des Deutschen Ausschusses für Stahlbau am 10. 2. 1939 mitgeteilt.

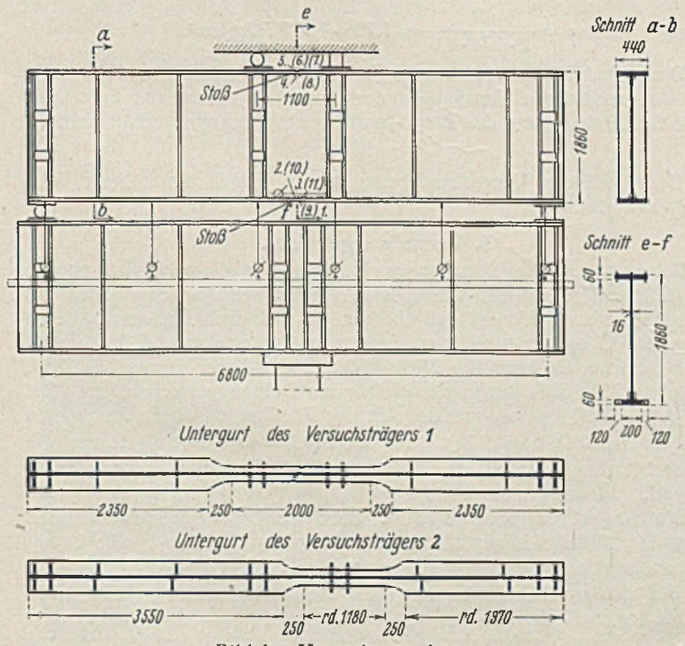

Bild 1. Versuchsanordnung.

Beim Versuchsträger 2 mußte die Kehlung außermittig angeordnet werden, da sich in der Nähe der Trägermitte Bohrungen von einem Windverbandanschluß befanden, die mit der Kehlung nicht zusammenfallen durften (Bild 1). In der Mitte des Versuchsträgers 1 befand sich ein Gurtplattenstoß.

Nach dem ersten Versuch wurden der Träger 2 und der Hilfsträger noch zusätzlich ausgesteift. Die Aussteifungen ▭ 180 × 13 verliefen in Richtung der Druckdiagonalen der einzelnen Felder.

Die Herrichtung der Versuchsträger führte die Firma Hein, Lehmann & Co., Berlin-Tempelhof, nach Anweisung des Staatlichen Materialprüfungsamtes Berlin-Dahlem aus.

2. Analyse, Härte.

Die Querschnittsanalyse der Gurtplatte ergab folgende Zusammensetzung:

C ≈ 0,15 % Si ≈ 1,0 % Mn ≈ 0,8 %
Cu ≈ 0,3 % P = 0,040 % S = 0,039 %.

In der Halsnaht wurden C = 0,10 % und N = 0,032 % gefunden.

Die Analyse des Stegblechs ergab:

C = 0,20 % Si ≈ 0,31 % Mn ≈ 0,81 % P = 0,041 %
S = 0,022 % Cu ≈ 0,50 % Cr ≈ 0,60 %.

Zahlentafel 1.

	Mittlere*)	Größte
	Vickershärte	
Grundwerkstoff Gurtplatte	200	—
Übergangszone Gurtplatte	260	302
Schweiße	230	267
Übergangszone Stegblech	350	376
Grundwerkstoff Stegblech	210	—

*) Mittel aus acht Werten.

An zwei Querschnitten wurde die Aufhärtung gemessen (Bild 2, Zahlentafel 1). Die Härtespitzen lagen in den Übergangszonen der Gurtplatte und des Stegblechs. Überraschend ist die wesentlich stärkere Aufhärtung des nur 16 mm dicken Stegblechs (376 Vickershärte) gegenüber der Aufhärtung der Gurtplatten (302 Vickershärte). Für eine Mehrlagenschweißung sind die Härten sehr hoch. Dies Ergebnis zeigt deutlich den bedeutenden Einfluß der Werkstoffeigenschaften. Der Werkstoff des Stegblechs muß eine wesentlich größere Neigung zum Aufhärten besitzen als der des Gurtes.

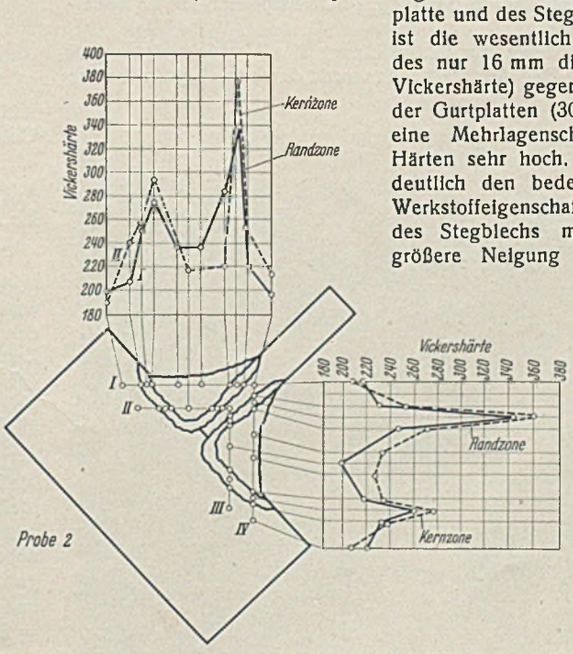

Bild 2. Härten in der Halsnahtzone.

3. Schrumpfspannungsmessungen.

Bei der Verschmälerung eines Teils der Gurtplatten war mit einer Verringerung der Schrumpfzugspannungen in der Halsnahtzone zu rechnen. Durch Setzdehnungsmessungen mit 100 mm Meßlänge vor und nach dem

Abarbeiten wurde die Verminderung der Längsschrumpfspannungen ermittelt. Wie aus Bild 3 zu ersehen ist, haben sich die Spannungen in der Halsnahtzone des Trägers 1 um etwa 800 bis 1050 kg/cm² und des Trägers 2 um etwa 500 bis 940 kg/cm² vermindert.

Beim Zerlegen eines Reststücks des Hauptträgers wurden über den ganzen Querschnitt verteilt die Längsschrumpfspannungen gemessen (Bild 3). In den Halsnahtzonen ergaben sich örtlich begrenzte Schrumpfspannungen in der Größenordnung der Streckgrenze. Da die herausgeschnittenen Streifen von 1 cm Dicke und 2 cm Breite bei den örtlich begrenzten Spannungsspitzen immerhin nur Mittelwerte der Schrumpf-

Zahlentafel 2.

	I_x cm⁴	W_o cm³	W_u cm³	max M*) kgcm	Rechnerische, mittlere*) Gurtspannungen σ_o kg/cm²	σ_u kg/cm²
Hilfsträger	4 980 000	53 600	$= W_o$	158 P	$-2{,}85 \cdot 10^{-3} P$	$+2{,}85 \cdot 10^{-3} P$
Versuchsträger in geschwächtem Querschnitt	3 555 000	48 500	31 600	142,5 P	$-2{,}82 \cdot 10^{-3} P$	$+4{,}39 \cdot 10^{-3} P$

*) P = Gesamtlast in kg.

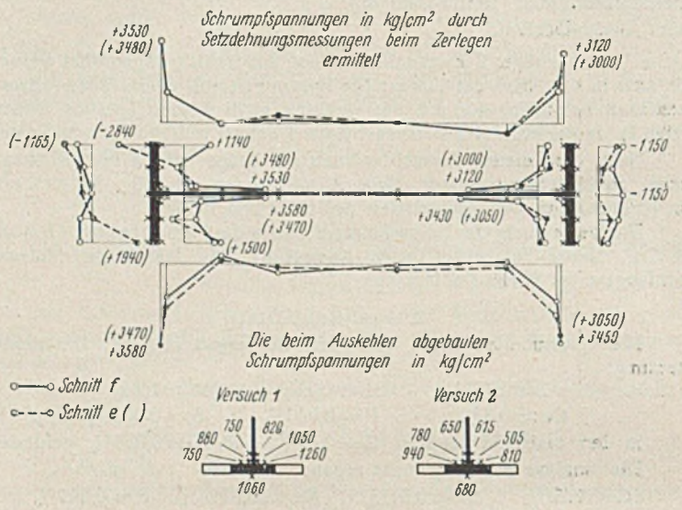

Bild 3. Schrumpfspannungen.

spannungen über diese Breiten ergeben haben, ist es nicht ausgeschlossen, daß die Spannungen in den gehärteten Zonen noch wesentlich höher lagen. Diese Vermutung wurde schon verschiedentlich ausgesprochen. Diese gemessenen Spannungen liefern einen sicheren Beweis, daß nach längerer Betriebsdauer noch erhebliche Schrumpfspannungen vorhanden sind.

Im ausgekehlten Teil des Untergurts war nach den Meßergebnissen in den Halsnahtzonen mit einer noch vorhandenen Längsschrumpfspannung von rd. 3500 — 1000 = 2500 kg/cm² zu rechnen.

Die Frage des Einflusses der Schrumpfspannungsverminderung auf das Ergebnis der Biegeversuche wird später erörtert werden.

4. Versuchsanordnung (Bild 1, 4 u. 5).

Die Träger wurden in der 3000 t-Maschine des Deutschen Stahlbau-Verbandes auf dem Gelände des Staatlichen Materialprüfungsamtes Berlin-Dahlem geprüft.

Der Hilfsträger diente zur Unterstützung des Versuchsträgers mit 6800 mm Stützweite. Der Versuchsträger wurde durch zwei symmetrische

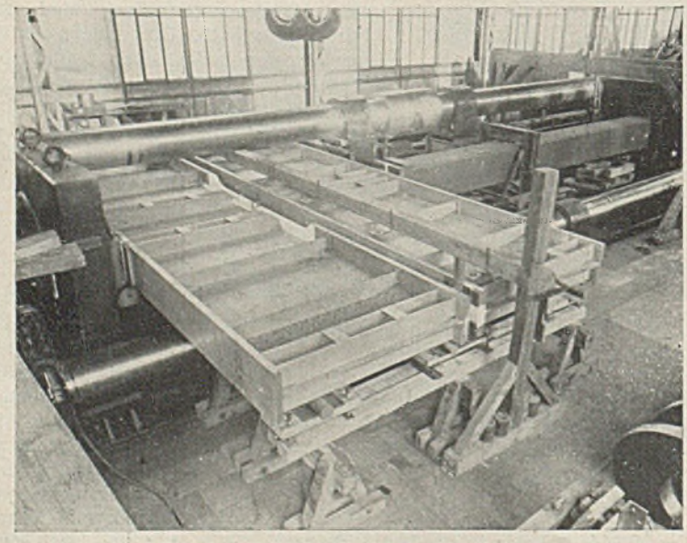

Bild 4. Versuchsanordnung, Versuch 1.

Einzellasten mit 1100 mm Abstand belastet. Zur Druckverteilung waren an den Lastangriffstellen Platten von 400 × 420 × 30 mm aufgeschweißt worden.

Die Durchbiegung wurde am Untergurt mit Leuner-Uhren, die an einem Balken befestigt waren, gemessen. An den Gurten wurden die

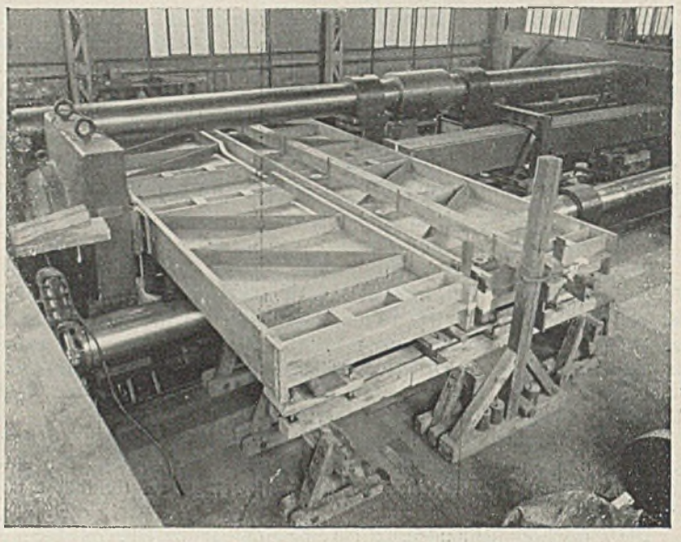

Bild 5. Versuchsanordnung, Versuch 2.

Dehnungen mit Huggenberger-Tensometern mit 20 mm Meßlänge bestimmt. Aus den elastischen Dehnungen wurden die Spannungen mit $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm² errechnet. Außerdem befand sich zwischen den mittleren Aussteifungen beiderseits des Stegblechs eine Zeißuhr zur Bestimmung der Dehnung über 870 mm Meßlänge.

Zahlentafel 2 enthält die Trägheits- und Widerstandsmomente und die rechnerischen, mittleren Gurtspannungen in der Trägermitte. Die Versuchsergebnisse sollen nicht nach den Randspannungen, sondern nach den Mittelspannungen in den Gurten beurteilt werden.

Die mittlere Schubspannung im Stegblech betrug

$$\tau = \frac{P}{2 \cdot 174 \cdot 1{,}6} = 1{,}796 \cdot 10^{-3} P \text{ kg/cm}^2.$$

Die kritische Beullast für das Stegblechfeld neben dem Mittelfeld wurde nach den vorläufigen Vorschriften der Deutschen Reichsbahn berechnet. Unter Berücksichtigung der Biege- und Schubspannungen erhält man

$$P_K = 960 \text{ t}.$$

Auf Grund früherer Versuchserfahrung wurde jedoch ein höherer Wert für P_K erwartet.

5. Versuchsergebnisse.

Versuch 1. Die Spannungsverteilung über die Gurtplattenbreite war gleichmäßig. Im elastischen Bereich stimmten die Spannungen mit den rechnerischen Werten gut überein, so daß auch bei den höheren Lasten die Übereinstimmung angenommen werden kann. Bild 6 zeigt den Verlauf der Dehnung im Mittelfeld und der Durchbiegung bis 986 t. Von etwa 700 t ab nahmen die bleibenden Dehnungen schnell zu. Bei 885 t ($\sigma_u = 3890$ kg/cm²) machte sich der Fließbeginn durch Abspringen der Zunderschicht bemerkbar. Bei 986 t ($\sigma_u = 4330$ kg/cm²) betrug die bleibende Dehnung 0,28 %, die Durchbiegung 20,6 mm gesamt und 6,6 mm bleibend.

Die Höchstlast betrug 1139 t. Bei dieser Last beulte das Stegblech neben den Mittelfeldern plötzlich mit dumpfem Knall aus. Die Untergurtspannung betrug rechnerisch max $\sigma_u = 1139 \cdot 4{,}39 = 5000$ kg/cm² und die mittlere Schubspannung des Stegblechs max $\tau = 1139 \cdot 1{,}796 = 2040$ kg/cm².

Die Teilungen neben den Halsnähten ergaben bei der Nachmessung durchweg eine Dehnung von 1 bis 2 %, stellenweise bis 4,5 %.

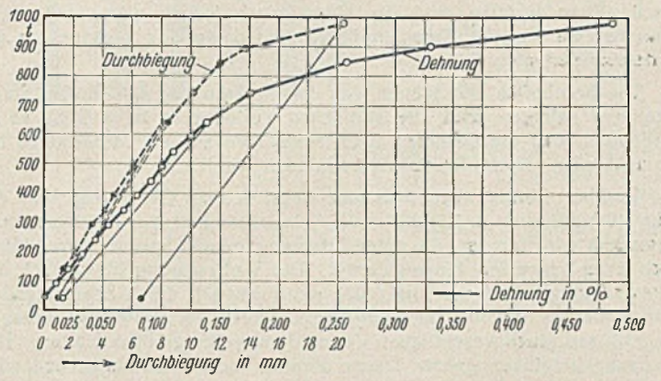

Bild 6. Versuch 1. Verlauf der Dehnung und Durchbiegung.

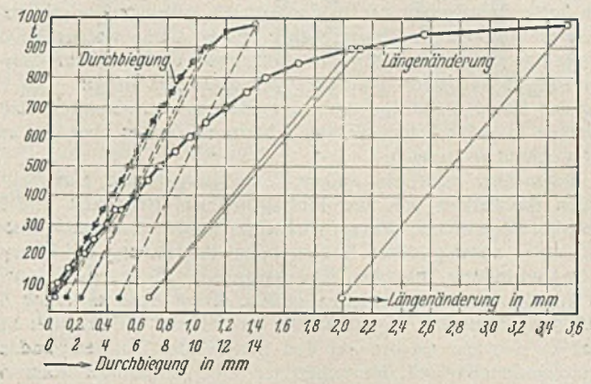

Bild 9. Versuch 2. Verlauf der Dehnung und Durchbiegung.

Bilder 7 u. 8 zeigen den verformten Versuchsträger 1 nach dem Versuch.

Versuch 2. Um das Ausbeulen des Stegblechs zu verhindern, wurden auf das Stegblech des Versuchsträgers 2 und des Hilfsträgers schrägverlaufende Aussteifungen aufgeschweißt. Durch die einseitige Anordnung der Aussteifungen trat in den Gurten eine ungleichmäßige Spannungsverteilung ein. Die mittleren Spannungen stimmten jedoch im elastischen Bereich befriedigend mit den rechnerischen Spannungen überein.

Bild 9 zeigt den Verlauf der Dehnung im Mittelfeld und der Durchbiegung. Bei der Beurteilung der Dehnung ist zu beachten, daß der Untergurtquerschnitt im Mittelfeld veränderlich war. Der Dehnungsverlauf ist ähnlich wie bei Versuch 1. Bei 885 t begann die Zunderschicht ab-

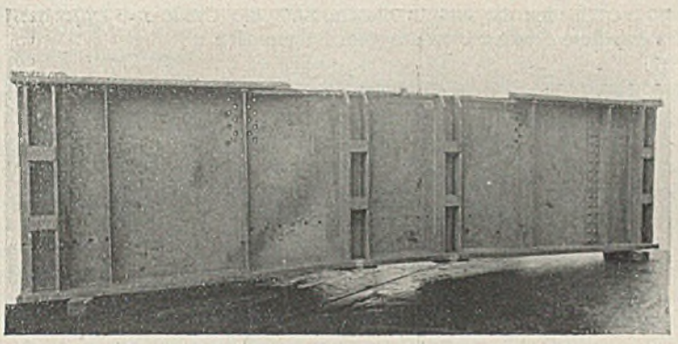

Bild 7. Versuchsträger 1 nach dem Versuch.

zuspringen, nachdem bei 685 t schon an der höher beanspruchten Seite mit den Tensometern einseitig Fließen festgestellt wurde. Die Durchbiegung war infolge der zusätzlichen Aussteifungen wesentlich geringer. Bei 986 t betrug sie 14 mm gesamt und 4,8 mm bleibend.

Bei 1182 t fiel die Last stark ab, augenscheinlich weil die Fließgrenze im Stegblech mit $\tau = 2140$ kg/cm² erreicht war. Die Last ließ sich bis 1230 t ($\sigma_{II} = 5400$ kg/cm² und $\tau = 2210$ kg/cm²) steigern. Unter dieser Last verformte sich der Träger ohne Laststeigerung derart stark, daß der Versuch abgebrochen werden mußte.

Die Nachmessung der Teilungen neben den Halsnähten des Untergurtes ergab etwa 2 bis 3% Dehnung.

Bild 10 zeigt den verformten Versuchsträger. Auch der Hilfsträger war stark verformt (Bild 11). Die Höchstbeanspruchung in den Gurten des Hilfsträgers betrug $\sigma = 1230 \cdot 2{,}85 = 3500$ kg/cm².

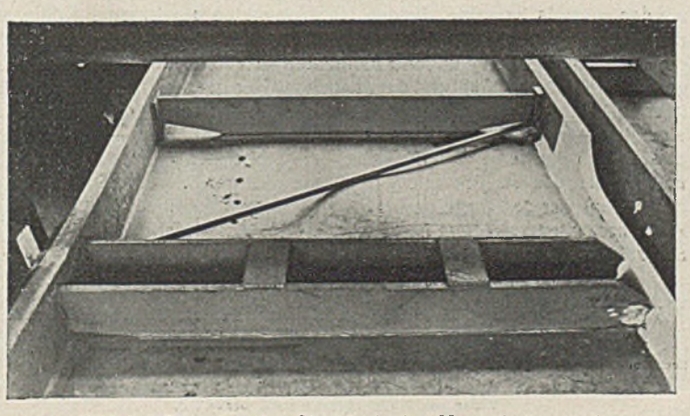

Bild 8. Ausgebeultes Stegblech des Versuchsträgers 1.

An der am stärksten verformten Stelle wurden durch die Untergurthalsnähte des Trägers 1 Quer- und Längsschnitte gelegt. Es wurden keine Anrisse gefunden.

6. Zusammenfassung.

Die Tragfähigkeit der Träger war durch Versagen der Stegbleche bedingt. Die Beullast lag beim Träger 1 19% höher als die nach den Vorschriften gerechnete kritische Last.

Durch die zusätzliche Aussteifung des Trägers 2 wurde das Ausbeulen des Stegblechs verhindert. Jedoch war die Tragfähigkeit dieses Trägers durch Erreichen der Schubfließgrenze des Stegblechs bedingt.

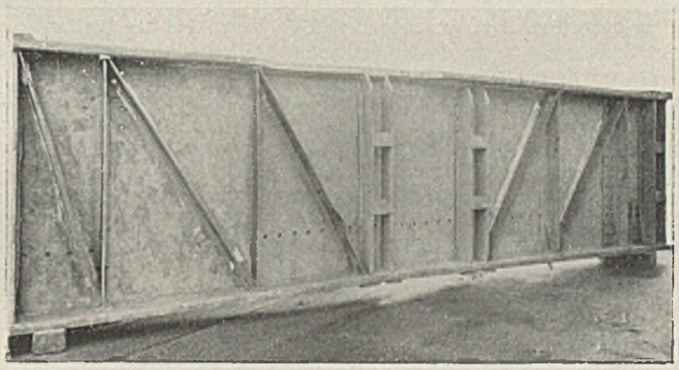

Bild 10. Versuchsträger 2 nach dem Versuch.

Die Gurtplatten haben Beanspruchungen von 5000 bzw. 5400 kg/cm² ohne Bruch ertragen. Die Nachmessung der Teilungen ergab beim Träger 1 1 bis 2%, stellenweise bis 4,5%, beim Träger 2 2 bis 3% Dehnung. Anrisse waren nicht festzustellen.

In der Übergangszone waren erhebliche Härtungen bis 376 Vickershärte festgestellt worden. Trotzdem war die Bewährung der Versuchsträger gut.

Es ist nicht anzunehmen, daß die Verringerung der Längsschrumpfspannungen durch die Verschmälerung der Gurte die Ergebnisse günstig beeinflußt hat, da im Grundwerkstoff die Streckgrenze überschritten wurde und die Übergangszone die Dehnungen ohne Risse ertragen hat[2]). Die beiden anderen Komponenten des räumlichen Spannungszustandes dürften sich nur unwesentlich geändert haben.

[2]) Bierett, Elektroschweißung 1938, Heft 7, S. 121.

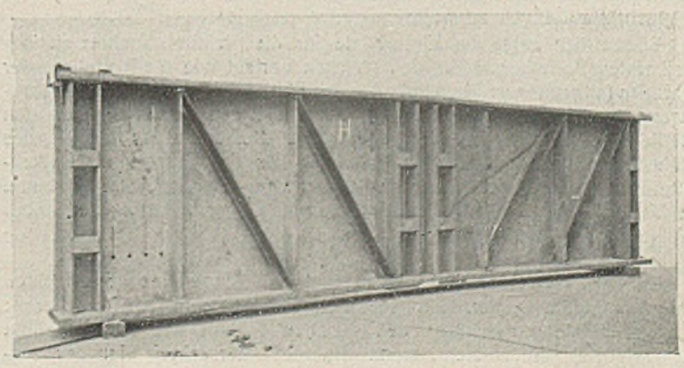

Bild 11. Hilfsträger nach dem 2. Versuch.

Die gute Bewährung der beiden großen geschweißten Biegeträger aus St 52 ist keineswegs überraschend. Es ist schon wiederholt darauf hingewiesen worden, daß zahlreiche große geschweißte Brücken aus St 52 sich im Betrieb seit Jahren ausgezeichnet bewährt haben. Die Untersuchung der Schadenfälle Zoo und Rüdersdorf lassen vermuten, daß hier die Ursachen in gefährlichen Werkstoffehlern zu suchen sind, die sich in Zukunft vermeiden lassen[3]).

Es liegen aber zahlreiche andere Versuchsergebnisse, zum Teil auch an großen Bauwerken vor, die hinsichtlich der Festigkeit und Formänderungsfähigkeit dicker, längsgeschweißter Profile unbefriedigend sind.

Daß unter sonst gleichen Bedingungen die Härtung der Übergangszonen in Verbindung mit den Schrumpfspannungen einen ungünstigen Einfluß ausübt, kann als erwiesen gelten. Bierett wies schon darauf hin, daß den stofflichen Eigenschaften hierbei ein bedeutender Einfluß zukommt[2]). Kuntze machte auf den Einfluß der Trennempfindlichkeit des Grundwerkstoffs und der gehärteten Übergangszonen aufmerksam. Er wies jedoch nach, daß die Trennempfindlichkeit des St 52 nicht mit der Härtung zunehmen muß[4]). Bei der stofflichen Inhomogenität in geschweißten Profilen sind die Verhältnisse jedoch etwas anders zu bewerten als bei der Trennempfindlichkeitsprobe aus gleichmäßig gehärtetem Werkstoff.

Die Ergebnisse der letzten Zeit lassen erhoffen, daß es den Stahlerzeugern gelingen wird, die stofflichen Verhältnisse beim St 52 so zu verbessern, daß die Gefahren beim Schweißen auf ein Mindestmaß beschränkt oder gar mit Sicherheit vermieden werden.

Darüber hinaus aber wird der konstruktiven Gestaltung und der Schweißausführung weiterhin volle Aufmerksamkeit zu schenken sein. Besonders wird hier auf die guten Erfahrungen beim Spannungsfreiglühen nach dem Schweißen hingewiesen[5]). Die Verbesserung hinsichtlich des Formänderungsvermögens und auch der Festigkeit durch Spannungsfreiglühen beruht sowohl auf dem Verschwinden der Schweißspannungen als auch auf einer wesentlichen Verminderung der größten Härten. Das Spannungsfreiglühen ganzer Träger bereitet jedoch technische und wirtschaftliche Schwierigkeiten. Es wurden jedoch schon verschiedentlich Vorschläge unterbreitet, die die Sicherung der gefährdeten Teile durch Spannungsglühen ermöglichen.

[3]) Schaechterle, Bautechn. 1939, Heft 4, S 46. — [4]) Kuntze, Vortrag auf der Tagung des Deutschen Ausschusses für Stahlbau am 23. 11. 1938.

[5]) Bierett u. Stein, St. u. E. 1938, Heft 16, S. 427.

Zur Ermittlung der Einflußlinien statisch bestimmter Fachwerkträger.

Von Dipl.-Ing. F. Jokisch, Brünn.

Die sogenannte „kinematische" Methode zur Bestimmung der Einflußlinien von Stabkräften statisch bestimmter Fachwerkträger ist schon lange bekannt; daß sie praktisch nur selten zur Anwendung gelangt, liegt wohl vor allem daran, daß das gewöhnliche, auf den Gleichgewichtsbetrachtungen aufgebaute Ermittlungsverfahren in der Regel derartig einfach und übersichtlich ist, daß keinerlei Bedürfnis nach einem anderen Verfahren besteht. Nur in jenen Fällen, in denen bei der Bestimmung der Einflußlinien gewisse Sonderüberlegungen erforderlich werden, macht sich bei den weniger geübten Statikern der Wunsch nach einem zweiten, der Kontrolle dienenden Lösungsweg geltend. Von den in Frage kommenden Verfahren scheint nun eins von den Studierenden (wie die Erfahrung im Rahmen des Übungsbetriebes aus der Baumechanik an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn zeigt) bevorzugt zu werden — ein Verfahren, das auf der Verschmelzung der kinematischen Methode mit der Methode der elastischen Gewichte beruht und im folgenden — ohne ihm damit auch nur den geringsten Anspruch auf Bedeutung oder Originalität zubilligen zu wollen — kurz geschildert sei.

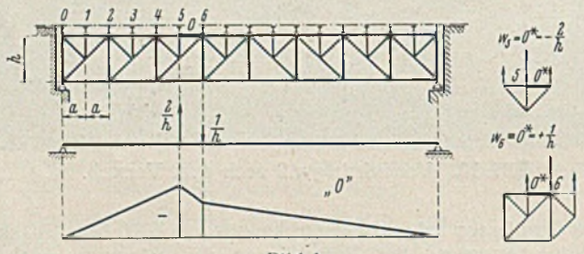

Bild 1.

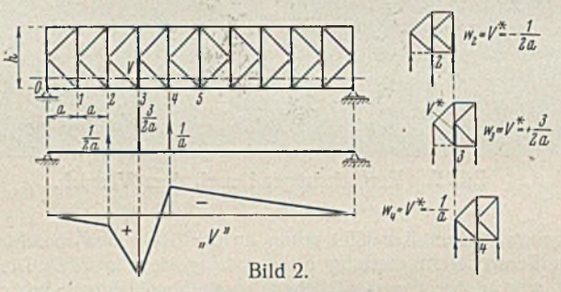

Bild 2.

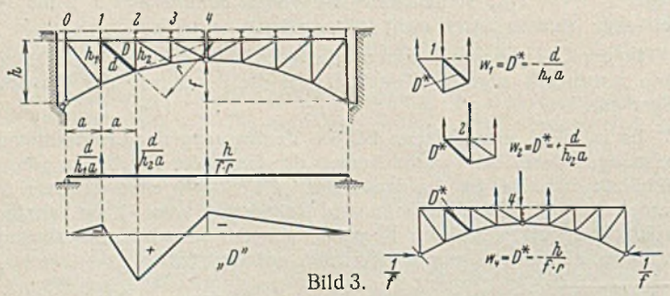

Bild 3.

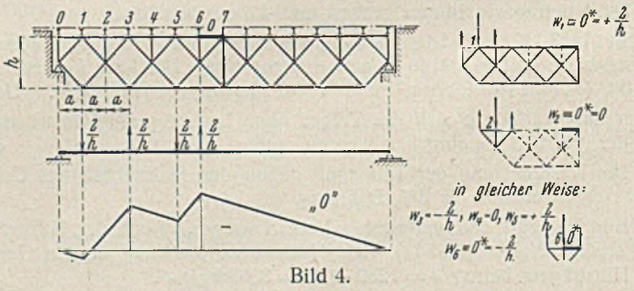

Bild 4.

Bekanntlich zeigt die Einflußlinie für die Stabkraft S eines statisch bestimmten Fachwerkträgers den gleichen Verlauf wie die Biegelinie der Fahrbahn (allgemeiner: Biegelinie des der Einflußlinie zugeordneten Längsträgerstranges), die entsteht, wenn wir die Länge des Stabes um den infinitesimalen Betrag Δs vergrößern und dieses Δs als Einheit des Ordinatenmaßstabes verwenden. Da der Längsträgerstrang als Balkenkette mit den Gelenken über den Querträgern vorausgesetzt wird und die Verlängerung $\Delta s = 1$ auch als elastische Längenänderung des Stabes zufolge der Stabkraft

$$S = EF/s \tag{1}$$

(E = Modul, F = Querschnittsfläche und s = Länge des untersuchten Stabes) aufgefaßt werden kann, läßt sich dieser Satz auch so formulieren: Die Einflußlinie für S zeigt den gleichen Verlauf wie die Biegelinie des Lastgurtes, die entsteht, wenn wir den untersuchten Stab der Zugbelastung $S = EF/s$ unterwerfen.

Zur Bestimmung der Gurtbiegelinie steht uns das Verfahren der elastischen Gewichte zur Verfügung. Wir haben den Träger der Reihe nach in allen Lastgurtknoten n dem bekannten „kombinierten" Hilfsangriff der Kräfte $1/a$, $2/a$, $1/a$ (a = Feldweite) zu unterwerfen, die hierbei entstehenden Stabkräfte S^* zu bestimmen und die elastischen Gewichte $w_n = \Sigma S^* Ss/EF$ auszurechnen; da S bloß im untersuchten Stab von Null verschieden ist und in diesem Stab die Größe $S = EF/s$ besitzt, besteht diese Summe bloß aus dem Summanden

$$w_n = S^*, \tag{2}$$

und da wir bei den meisten der „kombinierten" Hilfsangriffe für den untersuchten Stab $S^* = 0$ erhalten, sind nur wenige elastische Gewichte (im allgemeinen nur so viele, als Eckpunkte in der gesuchten Einflußlinie vorhanden sind) von Null verschieden. Die elastischen Gewichte w_n werden nun als lotrechte, in den Knotenpunkten n wirksame Kräfte auf den Träger gestellt und die hierbei auftretenden Biegemomente ermittelt; die auf diese Weise gefundene Momentenverteilungslinie stimmt mit der gesuchten Gurtbiegelinie und damit auch mit der gesuchten Einflußlinie „S" überein. Bloß in einem einzigen Sonderfall — wenn S die Stabkraft in einer Endvertikalen ist und die Fahrbahn oben liegt — müßten wir dieses Rechenschema durchbrechen; an Stelle der Momentenverteilung müßte hier das Seileck mit der Polweite 1 gezeichnet und das Randbedingungspaar der Gurtbiegelinie (das hier vom Randbedingungspaar der Biegemomentenverteilung abweicht) durch das richtige Einlegen der Schlußlinie erfüllt werden.

In Bild 1 bis 4 wird die Anwendung des geschilderten Ermittlungsverfahrens vorgeführt.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.