

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage  
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-  
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang

BERLIN, 4. August 1939

Heft 16

Alle Rechte vorbehalten.

## Das Nullfeldverfahren zur allgemeinen Ermittlung der Einflußlinien von Balken und Rahmentragwerken.

Von Prof. Dr.-Ing. Rajko Kušević, Zagreb.

Das Nullfeldverfahren zur Ermittlung der Einflußlinien beruht auf dem bekannten, aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen entwickelten Satze:

Wenn man in irgendeinem Querschnitt eines  $n$ -fach statisch unbestimmten Tragwerks ein Nullfeld der Schnittkraft  $S$  einschaltet (für  $S=M$  ein Gelenk, für  $S=Q$  oder  $N$  eine Zwangsführung, s. Bild 1), das dadurch entstandene  $(n-1)$ -fach statisch unbestimmte Hauptssystem im Nullfeld mit der Doppelkraft  $S=-1$  belastet und die dazugehörige Biegelinie des Lastgurtes ermittelt, so stellt diese die Einflußlinie der Schnittkraft  $S$  dar. (Die Durchbiegungen sind dabei in der Richtung der wandernden Last  $P$  zu bestimmen und im Sinne dieser Last

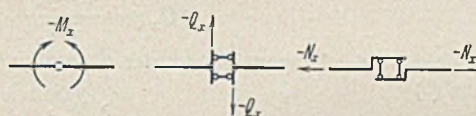


Bild 1.

positiv zu nehmen.) Der Ordinatenmaßstab der Einflußlinie ist durch die gegenseitige, im Sinne der Größen  $S=-1$  gemessene Verschiebung der beiden im Nullfeld zusammenstoßenden Querschnitte des Tragwerks gegeben.

Dieser Satz ist bisher praktisch nur bei den Modellverfahren allgemeiner verwendet worden<sup>1)</sup>; zur rechnerischen oder zeichnerischen Ermittlung der Einflußlinien hat man ihn, trotz seiner grundsätzlichen Einfachheit und Anschaulichkeit, lediglich in speziellen, leichteren Fällen herangezogen<sup>2)</sup>, und zwar wegen vermeintlicher Schwierigkeiten der Vorberechnung des Hauptsystems. Um diesen Schwierigkeiten auszuweichen, hat man in neuerer Zeit ein Verfahren der unmittelbaren Ermittlung von Einflußlinien entwickelt, bei dem die Einflußlinien als Biegelinien des unveränderten Tragwerks erhalten werden; dazu mußten als Angriffskräfte gewisse gedachte Lastgruppen (Singularitäten) eingeführt werden, die die erforderlichen Knicke bzw. Sprünge der Biegelinie hervorzurufen vermögen<sup>3)</sup>. Die Einführung dieser neuen Begriffe erschwert natürlich das Verständnis des interessanten Verfahrens, das auch nicht die Anschaulichkeit des Nullfeldverfahrens besitzt. Andererseits ist man von der Verformung selbst ausgegangen, indem man die Einflußlinie für eine statische Größe als Biegelinie des Tragwerklastgurtes aufgefaßt hat,

<sup>1)</sup> Schaechterle, Verfahren zur Ermittlung von statisch unbestimmten Größen und deren Einflußlinien an Modellen. Bautechn. 1933, Heft 27.

<sup>2)</sup> Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, III. Teil, S. 89 ff.; Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, II. Bd., 2. Abt., 2. Aufl., S. 48 ff.; Vinzens, Direkte Ermittlung der Momenteneinflußlinien des eingespannten Bogens. Armierter Beton 1919, Heft 11; Kušević, Neposredno iznalaženje uticajnih linija lučnog nosača bez zglavaka. Tehnički List 1934, Heft 23 u. 24; Kušević, Neposredno iznalaženje uticajnih linija lučnog nosača s jednim zglavkom. Tehnički List 1935, Heft 22.

<sup>3)</sup> Szegő u. Neményi, Über eine allgemeine Methode zur Darstellung der Einflußlinien von Balken und Rahmentragwerken. Stahlbau 1931, Heft 13; Kirsten, Allgemeine Methode zur Darstellung der Einflußlinien der Balken und Rahmentragwerke. Stahlbau 1932, Heft 18. (Pohl hat in einer Zuschrift daselbst nachgewiesen, daß sich der Rechnungsgang dieses Verfahrens vollkommen mit jenem des üblichen „Lastflächenverfahrens“ deckt.) — Muls, Les propriétés analytiques des lignes d'influence. Etude systématique de leurs dérivées. Le Génie civil, 1935, Bd. II, Heft 12. Unter demselben Titel hat Muls 1937 ein Buch herausgegeben (Liège-Paris, Editions La Technique des Travaux), worin er systematisch die analytischen Funktionen untersucht, durch welche die Einflußlinien dargestellt werden.

erzeugt durch die Formänderung „Eins“ an der Stelle und im Sinne dieser Größe<sup>4)</sup>. Dieses zweite neue Verfahren ist leichtverständlich und allgemein anwendbar, führt aber bei mehrfacher statischer Unbestimmtheit des Tragwerks zu einer umständlichen Ermittlung der Einflußlinien durch Überlagerung mehrerer Biegelinien (Bei  $n$ -facher statischer Unbestimmtheit sind in der Regel die Ordinaten von  $n+1$  Linien zu summieren.)

In der vorliegenden Abhandlung wird das Nullfeldverfahren zu einem praktisch allgemein verwendbaren Verfahren der unmittelbaren Ermittlung von Einflußlinien ausgebildet, und zwar durch Aufstellung einfacher Sätze, mittels deren man die Bestimmung der Biegemomente im Hauptsystem mit dem Nullfelde auf die Berechnung des gegebenen  $n$ -fach statisch unbestimmten Tragwerks bzw. seines statisch bestimmten Grundsystems zurückführt und damit den obenerwähnten Schwierigkeiten der Vorberechnung des Hauptsystems aus dem Wege geht. Bei der Ableitung dieser Sätze wird die Bedingung gestellt, daß sich der Maßstab einer Einflußlinie, der in der Einflußlinie selbst enthalten ist, als „Eins“ ergibt, so daß die berechneten Ordinaten der Einflußlinie die wahren Größen der betreffenden Schnittkraft angeben. Demnach werden die im Nullfeld angreifenden Doppelkräfte nicht mit der Größe  $-1$ , sondern mit einer vorläufig unbestimmten Größe angenommen.

Zur Erläuterung der allgemeinen Ableitung der Sätze soll ein einfaches Beispiel dienen: der beiderseits eingespannte Bogen in Bild 2a. Dabei sind die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

Tragwerk und Hauptsystem (Bild 2a bzw. 3a, 4a, 5a)	$x, y$ Schwerpunktkoordinaten des Querschnitts $C$ des Tragwerks, für den die Einflußlinien der Schnittkräfte gesucht werden, = Koordinaten des Nullfeldes des Hauptsystems; $\xi, \eta$ Koordinaten des Angriffspunktes $D$ der wandernden lotrechten Last $P=1$ ; $\varphi_x, \varphi_\xi$ Neigungswinkel der Trägerachse im Punkte $C$ bzw. $D$ ; $J_x, J_\xi$ Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in $C$ bzw. $D$ ; $M_x, Q_x, N_x$ Biegemoment, Querkraft und Längskraft im Querschnitt $C$ des gegebenen Tragwerks infolge der Einwirkung $P=1$ im beliebigen Punkte $D$ ; $M_\xi$ Biegemoment im beliebigen Querschnitt $D$ des gegebenen Tragwerks infolge der Einwirkung $P=1$ im Punkte $C$ ; $M_\xi^M, M_\xi^Q, M_\xi^N$ Biegemoment im beliebigen Querschnitt $D$ des Hauptsystems mit dem Nullfelde des Moments (Bild 3a), der Querkraft (Bild 4a) bzw. der Längskraft (Bild 5a), verursacht vom vorläufig unbekanntem Doppelmoment $-M_x$ bzw. von der Doppelkraft $-Q_x$ oder $-N_x$ im Nullfeld $C$ ; $\delta_\xi^M, \delta_\xi^Q, \delta_\xi^N$ lotrechte Durchbiegung des Hauptsystems im beliebigen Querschnitt $D$ infolge der Einwirkung der Doppelkräfte $-M_x, -Q_x, -N_x$ im Nullfelde $C$ , die sich nach dem Mohrschen Satze als Biegemoment zur zweiten Belastung $z_\xi^M = M_\xi^M/EJ_\xi \cdot \cos \varphi_\xi$ bzw. $z_\xi^Q = M_\xi^Q/EJ_\xi \cdot \cos \varphi_\xi$ bzw. $z_\xi^N = M_\xi^N/EJ_\xi \cdot \cos \varphi_\xi$ ergibt (Bild 3b u. 3c, 4b u. 4c, 5b u. 5c).
Tragwerk (Bild 2a bzw. 2c)	
Hauptsystem (Bild 3a, 4a u. 5a)	

<sup>4)</sup> Krabbe, Allgemeine, unmittelbare Darstellung von Einflußlinien durch Biegelinien nach dem Formänderungsverfahren. Stahlbau 1933, Heft 2.

Die Gleichung der in Bild 3c dargestellten Einflußlinie für das Biegemoment  $M_{x\xi}$  in C lautet:

$$(1) \quad M_{x\xi} = \frac{\delta_{\xi}^M}{\tau_c^M};$$

$\tau_c^M$  ist die gegenseitige Verdrehung der Angriffsgeraden des Doppelmoments  $-M_x$  und wird nach der vorigen Bemerkung als Maßstab der Einflußlinie gleich 1 gesetzt; somit erhält man

$$(2) \quad \delta_{\xi}^M = M_{x\xi}.$$

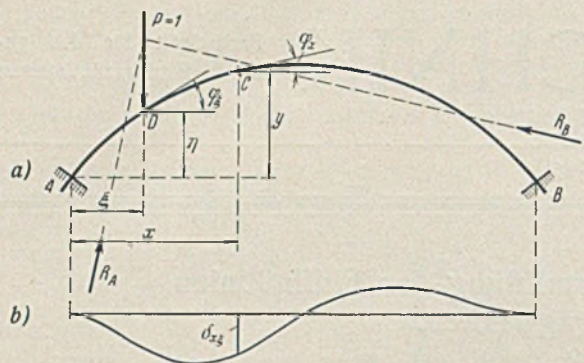


Bild 2a bis d.

Zwischen der Durchbiegung  $\delta_{\xi}^M$  und dem entsprechenden Moment  $M_{x\xi}^M$  besteht, wenn man den Elastizitätsmodul  $E=1$  setzt [was hier nach Gl. (1) zulässig ist], die Beziehung

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \delta_{\xi}^M}{\partial \xi^2} = - \frac{M_{x\xi}^M}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}};$$

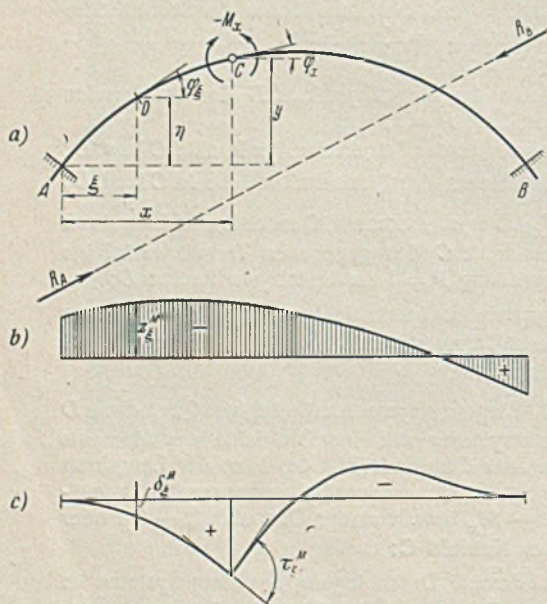


Bild 3a bis c.

daraus folgt, in Verbindung mit (2),

$$(4) \quad M_{x\xi}^M = - J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} \cdot \frac{\partial^2 M_{x\xi}}{\partial \xi^2}.$$

Dieser Ausdruck ist zur allgemeinen Bestimmung von  $M_{x\xi}^M$  noch nicht geeignet und soll daher mit Hilfe des Maxwell'schen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen umgeformt werden.

Wenn man das Moment  $M_{x\xi}$  nach Muster der Gl. (3) als Funktion der entsprechenden Durchbiegung  $\delta_{x\xi}$  (s. Bild 2b) ausdrückt:

$$M_{x\xi} = - J_x \cdot \cos \beta_x \cdot \frac{\partial^2 \delta_{x\xi}}{\partial x^2},$$

erhält man aus (4)

$$M_{x\xi}^M = J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} J_x \cdot \cos \varphi_x \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial^2 \delta_{x\xi}}{\partial x^2} \right)}{\partial \xi^2}$$

oder mit Hilfe des Maxwell'schen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ( $\delta_{x\xi} = \delta_{\xi x}$ ) und des Satzes von der Vertauschung der mittleren partiellen Ableitungen,

$$M_{x\xi}^M = J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} J_x \cdot \cos \varphi_x \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial^2 \delta_{\xi x}}{\partial \xi^2} \right)}{\partial x^2}.$$

Daraus erhält man endlich mit Benutzung der zwischen der Durchbiegung  $\delta_{\xi x}$  und dem entsprechenden Biegemoment  $M_{\xi x}$  (s. Bild 2c und 2d) bestehenden Beziehung

$$\frac{\partial^2 \delta_{\xi x}}{\partial \xi^2} = - \frac{M_{\xi x}}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}}$$

die endgültige Formel:

$$(1a) \quad M_{x\xi}^M = - J_x \cdot \cos \varphi_x \cdot \frac{\partial^2 M_{\xi x}}{\partial x^2}.$$

Die Gleichung der in Bild 4c dargestellten Einflußlinie für die Querkraft  $Q_{x\xi}$  im Querschnitt C (Biegelinie des Hauptsystems mit dem Querkraftnullfelde in C, Bild 4a) lautet:

$$(5) \quad Q_{x\xi} = \frac{\delta_{\xi}^Q}{\delta_c^Q}.$$

Wenn man die gegenseitige Verschiebung  $\delta_c^Q$  der Angriffspunkte der Doppelkraft  $-Q_c$  im Sinne dieser Kraft gleich 1 setzt und die Beziehung

$$Q_{x\xi} = \frac{\partial M_{x\xi}}{\partial s}$$

einführt ( $ds =$  Längenelement der Stabachse im Punkte C), erhält man aus (5)

$$(6) \quad \delta_{\xi}^Q = \frac{\partial M_{x\xi}}{\partial s}.$$

Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie (mit  $E=1$ )

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \delta_{\xi}^Q}{\partial \xi^2} = - \frac{M_{\xi}^Q}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}}$$

folgt in Verbindung mit (6)

$$M_{\xi}^Q = - J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial M_{x\xi}}{\partial s} \right)}{\partial \xi^2} = - J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} \cdot \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 M_{x\xi}}{\partial \xi^2} \right)}{\partial s}$$

und weiter nach Gl. (4) die Endformel

$$(IIa) \quad M_{\xi}^Q = \frac{\partial M_{x\xi}^M}{\partial s}.$$

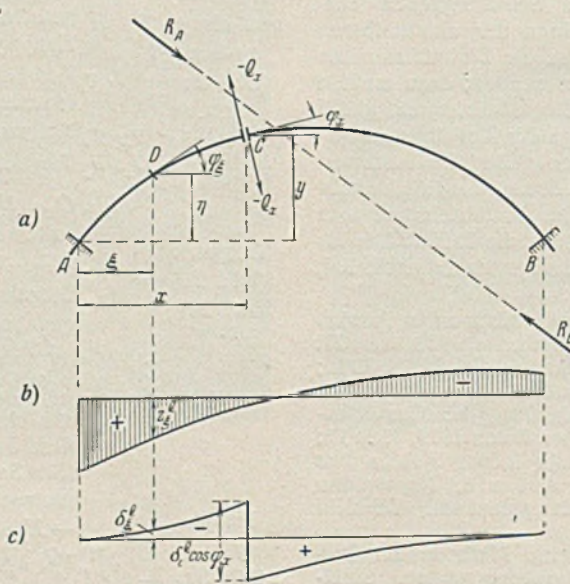


Bild 4a bis c.

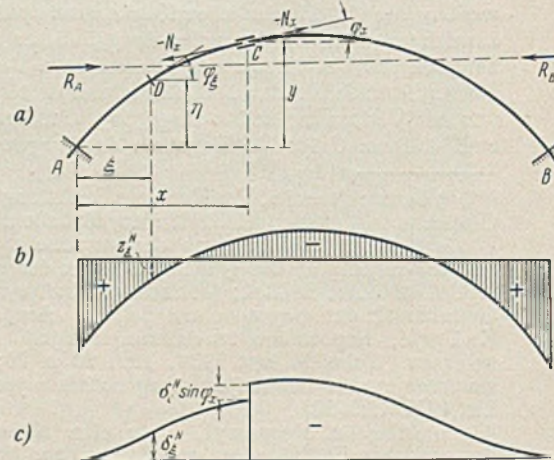


Bild 5a bis c.

Die in Bild 5c dargestellte Einflußlinie der Längskraft  $N_{x\xi}$  im Querschnitt C (Biegelinie des Hauptsystems mit dem Längskraftnullfelde in C, Bild 5a) ist durch die Gleichung

$$(8) \quad N_{x\xi} = \frac{\delta_{\xi}^N}{\delta_c^N}$$

definiert. Die gegenseitige Verschiebung  $\delta_c^N$  der Angriffspunkte der Doppelkraft  $-N_x$  im Sinne dieser Kraft sei 1; somit folgt

$$(9) \quad \delta_c^N = N_x \xi$$

und weiter, aus der Differentialgleichung der elastischen Linie (mit  $E=1$ ):

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \delta_c^N}{\partial \xi^2} = -\frac{M_{\xi}^N}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}}$$

$$(11) \quad M_{\xi}^N = -J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} \cdot \frac{\partial^2 N_x \xi}{\partial \xi^2}$$

Die Längskraft  $N_x \xi$  auf der rechten Seite dieser Gleichung kann als Funktion der Querkraft  $Q_x \xi$  und somit auch des Biegemoments  $M_x \xi$  ausgedrückt werden. Wenn man nämlich die Resultierende aller links von einem Querschnitt angreifenden Kräfte mit  $R$  bezeichnet und mit  $R', R''$  ihre Projektionen auf die waagerechte bzw. lotrechte Achse (Bild 6), hat man

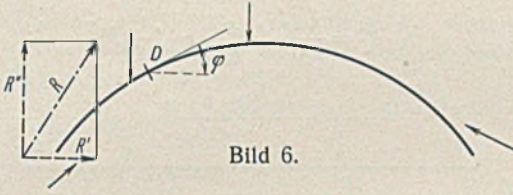


Bild 6.

$$Q = R'' \cdot \cos \varphi - R' \cdot \sin \varphi, \quad N = -R'' \cdot \sin \varphi - R' \cdot \cos \varphi$$

Daraus folgt die allgemeine Beziehung

$$(12) \quad N = \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \quad \text{oder} \quad (13) \quad N = \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial \varphi}$$

Demzufolge ist nach (11)

$$(14) \quad M_{\xi}^N = -J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial Q_x \xi}{\partial \varphi_x} \right)}{\partial \xi^2} = -J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi} \cdot \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 Q_x \xi}{\partial \xi^2} \right)}{\partial \varphi_x}$$

Nach Gl. (5) u. (7) ist aber (mit  $\delta_c^Q = 1$ )

$$\frac{\partial^2 Q_x \xi}{\partial \xi^2} = -\frac{M_{\xi}^Q}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}}$$

und somit folgt aus (14) die Endformel

$$(IIIa) \quad M_{\xi}^N = \frac{\partial M_{\xi}^Q}{\partial \varphi_x}$$

Nach den Grundformeln (Ia), (IIa) und (IIIa) können sonach die Biegemomente  $M_{\xi}^S$  im Hauptsystem infolge der im Nullfelde  $C$  angreifenden Doppelkraft  $-S$  auf einfache Weise aus den Biegemomenten  $M_{\xi}^x$  des gegebenen Tragwerks infolge der Belastung  $P=1$  im Punkte  $C$  bestimmt werden. (Für  $\xi=x$  ergeben die Formeln nachträglich die Größe der Doppelkraft  $-S$ , die durch die Forderung  $\delta_c^S = 1$  bedingt war.)

Aus den Biegemomenten  $M_{\xi}^S$  ist dann die Streckenlast  $z_{\xi}^S$  zu berechnen, zu der sich die Einflußlinie der Schnittkraft  $S_x \xi$  als Momentenlinie ergibt:

$$(A) \quad z_{\xi}^S = \frac{M_{\xi}^S}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}}$$

Bei der praktischen Durchführung der Berechnung wird es in der Regel bequemer sein, statt mit dieser zweiten Belastung  $z_{\xi}^S$  mit einer  $J_c$ -fachen Belastung zu rechnen, in welchem Falle aber die durch (Ia), (IIa) und (IIIa) gegebenen Größen der Biegemomente  $M_{\xi}^S$  durch  $J_c$  geteilt werden müssen. In speziellen Fällen, wenn das Tragwerk im Bereiche des Querschnitts  $x$  ein konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment und eine gerade Achse besitzt ( $J_x = \text{konst.}$ ,  $\varphi_x = \text{konst.}$ ), liegt es nun nahe,  $J_c = J_x \cdot \cos \varphi_x$  und demnach

$$(B) \quad z_{\xi}^S = M_{\xi}^S \cdot \frac{J_x \cdot \cos \varphi_x}{J_{\xi} \cdot \cos \varphi_{\xi}}$$

anzunehmen; die dazugehörigen Grundformeln lauten dann:

$$(Ib) \quad M_{\xi}^M = -\frac{\partial^2 M_{\xi}^x}{\partial x^2}$$

$$(IIb) \quad M_{\xi}^Q = \frac{\partial M_{\xi}^M}{\partial s} \quad \text{oder} \quad M_{\xi}^Q = -\frac{\partial^3 M_{\xi}^x}{\partial x^2 \partial s}$$

$$(IIIb) \quad M_{\xi}^N = \frac{\partial M_{\xi}^Q}{\partial \varphi_x} \quad \text{oder} \quad M_{\xi}^N = -\frac{\partial^4 M_{\xi}^x}{\partial x^2 \partial s \partial \varphi_x}$$

Die Biegemomente  $M_{\xi}^S$  kann man auch unmittelbar aus dem statisch bestimmten Grundsystem ermitteln, was meistens sogar vorteilhafter sein wird. Dazu dienen die nachstehend abgeleiteten Formeln (Ic),

(IIc) und (IIIc), die sich aus (Ia), (IIa) und (IIIa) durch Benutzung der Beziehung

$$(15) \quad M_{\xi}^x = \mathfrak{M}_{\xi}^x + X_{ax} m_{\xi a} + X_{bx} m_{\xi b} + \dots + X_{nx} m_{\xi n}$$

ergeben. Dabei bezeichnet:

$\mathfrak{M}_{\xi}^x$  das Biegemoment im beliebigen Querschnitt  $D$  des statisch bestimmten Grundsystems infolge der Belastung  $P=1$  im Punkte  $C$ ;

$X_{ax}, X_{bx}, \dots, X_{nx}$  die statisch unbestimmten Größen für den Belastungsfall  $P=1$  in  $C$ ;

$m_{\xi a}, m_{\xi b}, \dots, m_{\xi n}$  das Biegemoment im Querschnitt  $D$  des Grundsystems infolge  $X_a=1, X_b=1, \dots, X_n=1$ . (Die entsprechende Querkraft wird später allgemein mit  $q_{\xi r}$ , die Längskraft mit  $n_{\xi r}$  bezeichnet.)

Durch zweimalige Ableitung der Gl. (15) erhält man, mit Rücksicht darauf, daß die Funktion  $\mathfrak{M}_{\xi}^x$  linear ist,

$$(16) \quad \frac{\partial^2 M_{\xi}^x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X_{ax}}{\partial x^2} \cdot m_{\xi a} + \frac{\partial^2 X_{bx}}{\partial x^2} \cdot m_{\xi b} + \dots + \frac{\partial^2 X_{nx}}{\partial x^2} \cdot m_{\xi n}$$

Eine beliebige Überzählige  $X_{rx}$  ist durch den Ausdruck

$$(17) \quad X_{rx} = -\sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} \delta_{xk}$$

gegeben; darin ist  $\beta_{rk}$  die Einflußzahl und  $\delta_{xk}$  die lotrechte Durchbiegung an der Stelle  $x$  (im Punkte  $C$ ) des Grundsystems infolge der Einwirkung  $X_r=1$ . Daraus folgt (mit  $E=1$ ):

$$\frac{\partial^2 X_{rx}}{\partial x^2} = -\sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} \cdot \frac{\partial^2 \delta_{xk}}{\partial x^2} = \sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} \cdot \frac{m_{xk}}{J_x \cdot \cos \varphi_x} = \frac{1}{J_x \cdot \cos \varphi_x} \sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} m_{xk}$$

Für den negativen Summenausdruck führen wir die Bezeichnung ein:

$$(18) \quad \mathfrak{M}_{x(rk)} = -\sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} m_{xk}$$

so daß Gl. (16) die Gestalt annimmt

$$(19) \quad \frac{\partial^2 M_{\xi}^x}{\partial x^2} = -\frac{1}{J_x \cdot \cos \varphi_x} (\mathfrak{M}_{x(a)} m_{\xi a} + \mathfrak{M}_{x(b)} m_{\xi b} + \dots + \mathfrak{M}_{x(n)} m_{\xi n})$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Grundformel (Ia) erhält man endlich die neue Grundformel:

$$(Ic) \quad M_{\xi}^M = \sum_{r=a}^{r=n} \mathfrak{M}_{x(r)} m_{\xi r}$$

Aus Gl. (IIa) folgt mit Benutzung von (Ic)

$$(IIc) \quad M_{\xi}^Q = \sum_{r=a}^{r=n} \frac{\partial \mathfrak{M}_{x(r)}}{\partial s} \cdot m_{\xi r}$$

oder mit der Beziehung, die sich aus (18) ergibt:

$$(20) \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_{x(rk)}}{\partial s} = -\sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} q_{xk} = \mathfrak{Q}_{x(rk)}$$

die Grundformel

$$(IIcc) \quad M_{\xi}^Q = \sum_{r=a}^{r=n} \mathfrak{Q}_{x(r)} m_{\xi r}$$

Zuletzt folgt aus Gl. (IIIa) mit Benutzung der Gl. (IIcc)

$$(IIIc) \quad M_{\xi}^N = \sum_{r=a}^{r=n} \frac{\partial \mathfrak{Q}_{x(r)}}{\partial \varphi_x} \cdot m_{\xi r}$$

und weiter mit Rücksicht auf die aus (20) und (12) folgende Beziehung

$$(21) \quad \frac{\partial \mathfrak{Q}_{x(rk)}}{\partial \varphi_x} = -\sum_{k=a}^{k=n} \beta_{rk} n_{xk} = \mathfrak{N}_{x(rk)}$$

die Grundformel

$$(IIIcc) \quad M_{\xi}^N = \sum_{r=a}^{r=n} \mathfrak{N}_{x(r)} m_{\xi r}$$

Die Momentendiagramme  $M_{\xi}^M$ ,  $M_{\xi}^Q$  und  $M_{\xi}^N$  ergeben sich nach Gl. (Ic), (IIcc) und (IIIcc) durch Überlagerung der einzelnen, mit den entsprechenden Multiplikatoren  $\mathfrak{M}_{x(rk)}$ ,  $\mathfrak{Q}_{x(rk)}$  und  $\mathfrak{N}_{x(rk)}$  reduzierten Momentendiagramme  $m_{\xi r}$  des Grundsystems infolge der Angriffe  $X_r=1$ . Diese Multiplikatoren sind nach Gl. (18), (20) und (21) das Biegemoment, die Querkraft und die Längskraft im Querschnitt  $C$  des Grundsystems, verursacht durch den Angriff der Belastungsgruppe  $X_a = -\beta_{ra}$ ,  $X_b = -\beta_{rb}, \dots, X_n = -\beta_{rn}$ . Somit kann man die Grundformeln (Ic), (IIcc) und (IIIcc) in eine einfache, allgemeine Regel für die Ermitt-

lung des Momentendiagramms  $M_{x\xi}^S$  zur Darstellung der Einflußlinie einer Schnittkraft  $S_{x\xi}$  zusammenfassen: Man bestimmt die Werte  $\mathfrak{C}_{x(rk)}$  dieser Schnittkraft im Grundsystem infolge der Gruppenbelastungen  $X_a = -\beta_{ra}, X_b = -\beta_{rb}, \dots, X_n = -\beta_{rn}$  ( $r=1$  bis  $n$ ) und bringt dieselben am Grundsystem als Überzählige  $X_r$  an; die dazugehörige Momentenlinie ist die gesuchte Linie  $M_{x\xi}^S$ .

Die zweite Belastungslinie  $z_{x\xi}^S$  zur Bestimmung der Einflußlinie von  $S_{x\xi}$  als Biegelinie ist aus der derart ermittelten Momentenlinie  $M_{x\xi}^S$  nach der Formel (A) oder nach der Formel (B) zu berechnen, je nachdem die Einflußzahlen  $\beta_{rk}$  aus den  $E$ -fachen oder  $EJ_x \cdot \cos \varphi_x$ -fachen Vorzahlen  $\delta_{rk}$  berechnet worden sind.

Bei Verwendung eines  $g$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems, in dem die Überzähligen  $X_a$  bis  $X_g$  nicht befreit sind, hat man statt (15) die Gleichung

$$M_{x\xi}^S = \mathfrak{M}_{x\xi}^{(g)} + X_{hx} m_{x\xi}^{(g)} + X_{ix} m_{x\xi}^{(g)} + \dots + X_{nx} m_{x\xi}^{(g)}$$

oder weiter, indem man auf das statisch bestimmte Grundsystem des  $g$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems zurückgeht,

$$(22) \begin{cases} M_{x\xi}^S = (\mathfrak{M}_{x\xi}^S + X_{ax} m_{x\xi}^a + X_{bx} m_{x\xi}^b + \dots + X_{gx} m_{x\xi}^g) \\ + (X_{hx} m_{x\xi}^{(g)} + X_{ix} m_{x\xi}^{(g)} + \dots + X_{nx} m_{x\xi}^{(g)}) \end{cases}$$

Nach zweimaliger Ableitung dieser Gleichung und mit Verwendung der oben an Gl. (16) durchgeführten Betrachtungen kommt man zum folgenden Ergebnis: Zur Bildung des Momentendiagramms  $M_{x\xi}^S$  einer Schnittkraft  $S_{x\xi}$  hat man die obige allgemeine Regel vorerst auf das statisch bestimmte Grundsystem des  $g$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems mit den Gruppenbelastungen

$$X_a = -\beta_{ra}, X_b = -\beta_{rb}, \dots, X_g = -\beta_{rg} \quad (r = a \text{ bis } g)$$

und danach auf das  $g$ -fach statisch unbestimmte Hauptsystem mit den Gruppenbelastungen

$$X_h = -\beta_{rh}^{(g)}, X_i = -\beta_{ri}^{(g)}, \dots, X_n = -\beta_{rn}^{(g)} \quad (r = h \text{ bis } n)$$

anzuwenden. Die Ergebnisse sind sodann zu überlagern.

Die Anwendung des Verfahrens soll an drei charakteristischen Beispielen gezeigt werden.

1. Durchlaufender Träger über fünf Öffnungen, nach Bild 7<sup>5</sup>). Zu ermitteln sind die Einflußlinien der inneren Kräfte im Querschnitt  $C$  (Abszisse  $x = 9$  m) des Feldes  $l_i = l_3$ .

$$\begin{aligned} l_1 &= 18 \text{ m}, & l_2 &= 24 \text{ m}, & l_3 &= 24 \text{ m}, & l_4 &= 18 \text{ m}, & l_5 &= 15 \text{ m}, \\ J_1/J_3 &= 5/4, & J_2/J_3 &= 1, & J_3/J_3 &= 1, & J_4/J_3 &= 5/4, & J_5/J_3 &= 4/3, \\ l_1' &= 22,5 \text{ m}, & l_2' &= 24 \text{ m}, & l_3' &= 24 \text{ m}, & l_4' &= 22,5 \text{ m}, & l_5' &= 20 \text{ m} \end{aligned}$$

(reduzierte Stablängen).

Rechnerische Lösungen.

a) Zur Ermittlung der Momentenlinien  $M_{x\xi}^M$  und  $M_{x\xi}^Q$  der Hauptsysteme (Bild 7a bzw. 7c) braucht man, wenn man die Festpunkte ausnutzt, nur die Stützenmomente  $M_{i-1}^M$  und  $M_i^M$  bzw.  $M_{i-1}^Q$  und  $M_i^Q$  des Feldes  $l_i$  mit dem Nullfeld zu berechnen. Dieselben ergeben sich nach Gl. (1b) bzw. (1b) aus den Ausdrücken für die entsprechenden Stützenmomente  $M_{i-1,x}$  und  $M_{i,x}$  im gegebenen Tragwerke infolge der Belastung  $P=1$  in  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} M_{i-1,x} &= -K x x' a_i (2 l_i - x - 3 a_i') \\ M_{i,x} &= -K x x' a_i' (2 l_i - x' - 3 a_i) \end{aligned} \right\} K = \frac{1}{(l_i - a_i - a_i') l_i^2}$$

Die zweite und dritte Ableitung dieser Gleichungen liefert, mit dem Vorzeichen „-“ versehen:

$$a) \begin{cases} M_{i-1}^M = 6 K a_i (a_i' - x), \\ M_i^M = 6 K a_i' (a_i - x). \end{cases} \quad b) \begin{cases} M_{i-1}^Q = 6 K a_i, \\ M_i^Q = -6 K a_i'. \end{cases}$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man daraus die in Bild 7b und 7d eingetragenen Größen der Momente über den Stützen 2 und 3 und mit Hilfe der Festpunktabstände die übrigen Stützenmomente. (Die reduzierten Momentenlinien sind gestrichelt gezeichnet.)

b) Auf Grund der allgemeinen Regel für die Ermittlung der Momentenlinien des Hauptsystems erhält man ohne weiteres die folgenden Ausdrücke für die Berechnung der Stützenordinaten der  $M_{x\xi}^M$ - und  $M_{x\xi}^Q$ -Linie:

$$\begin{aligned} M_r^M &= \mathfrak{M}_{x(rk)} = -\beta_{r,i-1} \cdot \frac{x'}{l_i} - \beta_{r,i} \cdot \frac{x}{l_i}, \\ M_r^Q &= \mathfrak{C}_{x(rk)} = \frac{\beta_{r,i-1} - \beta_{r,i}}{l_i} \end{aligned}$$

Nach diesen Formeln können aus der  $\beta_{rk}$ -Matrix durch eine einfache tabellarische Rechnung alle Stützenmomente zugleich bestimmt werden.

<sup>5</sup>) Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, II/2, 2. Aufl., S. 122.

Hierbei muß hervorgehoben werden, daß die  $\beta_{rk}$ -Matrix aus den ursprünglichen Vorzahlen  $\delta_{rk}$  der Elastizitätsgleichungen zu berechnen ist; in der üblichen Clapeyronschen Gleichung kommen bekanntlich die sechsfachen Werte von  $\delta_{rk}$  vor.

Für die Berechnung der Einflußlinie eines Stützenmoments  $M_r$  folgt aus der obigen Formel das bekannte Ergebnis:  $M_r^M = -\beta_{r,i}$ .

Die Einflußlinien  $M_{x\xi}^M$  und  $Q_{x\xi}^M$  sind nun als Biegelinien des aus zwei durchlaufenden Kragträgern  $A-(i-1)-C$  und  $B-i-C$  zusammengesetzten Trägers  $A-B$  zu ermitteln. Die Bezugsachse ist durch die Durchbiegungen der Stützpunkte festgelegt; da diese gleich Null sind, können die Ordinaten der Biegelinie in einem Feld  $l_r \mp l_i$  als Biegemomente des einfachen Balkens zur Belastung mit den Elementarlasten  $d\tau = z_{x\xi}^S d\xi$  berechnet werden nach der Formel

$$\delta_{x\xi}^S = \frac{l_r l_i'}{6} (M_{r-1}^S \omega_D' + M_r^S \omega_D); \quad [r \neq i].$$

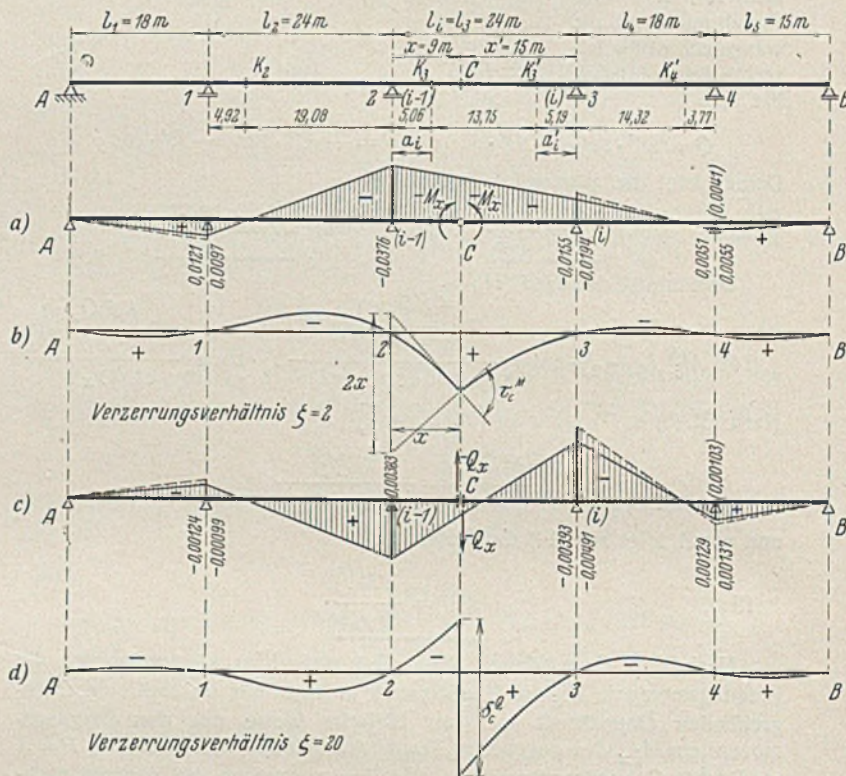


Bild 7a bis d.

Im Feld  $l_i$  kann man die Einflußlinien als Biegelinien der elastisch eingespannten Freiträger  $(i-1)-C$  und  $i-C$  erhalten, deren Stützenverdrehungen von den Nachbarfeldern aus leicht nach Mohr bestimmt werden können. Dabei müssen sich für die Endquerschnitte im Punkte  $C$  bei der  $\delta_{x\xi}^M$ -Linie von beiden Seiten aus die gleichen Durchbiegungen und der gegenseitige Drehwinkel  $\tau_c^M = 1$  ergeben, bei der  $\delta_{x\xi}^Q$ -Linie die gleichen Verdrehungen 0 der Endquerschnitte und die gegenseitige Verschiebung  $\delta_c^Q = 1$ . Einfacher ist es aber, im Gelenke  $C$  den daselbst auftretenden Drehwinkel  $\tau_c^M = 1$  bzw. Sprung  $\delta_c^Q = 1$  als Einzelkraft bzw. Einzelmoment anzubringen und hernach bei der Berechnung der Biegelinie als Momentenlinie auch das Feld  $l_i$  mit dem Nullfeld  $C$  als einfachen Balken zu behandeln. Danach ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} \text{Einflußlinie } M_{x\xi}^M & \begin{cases} \xi \leq x: & \delta_{x\xi}^M = \frac{x'}{l_i} \cdot \xi + \frac{l_i^2}{6} (M_{i-1}^M \omega_D' + M_i^M \omega_D), \\ \xi \geq x: & \delta_{x\xi}^M = \frac{x}{l_i} \cdot \xi + \frac{l_i^2}{6} (M_{i-1}^M \omega_D' + M_i^M \omega_D); \end{cases} \\ \text{Einflußlinie } Q_{x\xi}^M & \begin{cases} \xi \leq x: & \delta_{x\xi}^Q = -\frac{1}{l_i} \cdot \xi + \frac{l_i^2}{6} (M_{i-1}^Q \omega_D' + M_i^Q \omega_D), \\ \xi \geq x: & \delta_{x\xi}^Q = \frac{1}{l_i} \cdot \xi + \frac{l_i^2}{6} (M_{i-1}^Q \omega_D' + M_i^Q \omega_D). \end{cases} \end{aligned}$$

(Die Ausdrücke für  $\delta_{x\xi}^Q$  kann man ebenso durch Ableitung der Ausdrücke für  $\delta_{x\xi}^M$  erhalten.) Diese Berechnungsart kann man auch folgendermaßen deuten: Im Feld  $l_i$  verwendet man statt der geraden Schlußlinie des einfachen Balkens eine gebrochene Schlußlinie mit dem Knick gleich 1 unter  $C$  bzw. eine abgestufte Schlußlinie mit dem Sprung gleich 1 unter  $C$ . (Schluß folgt.)

## Ein neues Verfahren praktischer Rahmenberechnung.

Von Erich Wiedemann in Riga, Privatdozent der Lettländischen Universität.

Alle Rechte vorbehalten.

Bezeichnungen (durch | hervorgehoben sind die in den Formeln des neuen Verfahrens vorkommenden Größen). Knotenpunkte werden bezeichnet: am zu berechnenden Rahmen — durch fortlaufende Zahlen, in den Ausführungen ohne Bezugnahme auf einen bestimmten zu berechnenden Rahmen — auch durch Buchstaben (bevorzugt  $i$  und  $k$ ). Stäbe werden durch zwei Zahlen (bzw. Buchstaben) bezeichnet, die den Knotenpunkten an den Enden derselben entsprechen;

$l_{ik}$  Länge des Stabes ( $i, k$ ); Längenänderungen  $\Delta l$  durch Achsenkräfte sollen, wie üblich, in dieser Abhandlung nicht berücksichtigt werden;

$J_{ik}$  Trägheitsmoment des Stabquerschnitts ( $i, k$ ); dasselbe soll in dieser Abhandlung für jeden Stab als unveränderlich angenommen werden;

$E$  Elastizitätsmodul, derselbe soll durchweg als unveränderlich angenommen werden;

$l' = \frac{l}{6EJ}$  („reduzierte Stablänge“);

$|J' = \frac{2EJ}{l}$  („reduziertes Trägheitsmoment“);

$q$  Intensität einer gleichmäßig verteilten Belastung;

$|\nu_i$  Drehwinkel des Knotenpunktes ( $i$ );

$|\vartheta_{ik}$  Drehwinkel des Stabes ( $i, k$ ) infolge Knotenpunktverschlebung; ~

$|M_{ik}$  und  $M_{ki}$  Stützmomente an den Enden ( $i$ ) und ( $k$ ) des Stabes ( $i, k$ );

$|M_{ik}^0$  und  $M_{ki}^0$  Stützmomente für den an den Enden vollkommen eingespannt gedachten Stab ( $i, k$ ) bei gegebener Belastung desselben („Belastungsglieder“ beim „Formänderungsgrößen-Verfahren“);

$|M'_{ik}$  und  $M'_{ki}$  Stützmomente des Stabes ( $i, k$ ) in unbelastetem Zustande bei Drehung der Endtangente um die Knotendrehwinkel  $\nu_i$  und  $\nu_k$ ;

$\gamma_{ik}$  und  $\gamma_{ki}$  Drehwinkel der Endtangente des an den Enden gelenkig angeschlossen gedachten Stabes ( $i, k$ ) bei gegebener Belastung desselben („Belastungsglieder“ beim „Kraftgrößen-Verfahren“);

$|m_{ik}$  das Moment, welches, am abgeschnitten gedachten, in ( $i$ ) elastisch eingespannten Ende des Stabes ( $i, k$ ) angreifend, den Knotenpunkt ( $i$ ) um den Winkel  $\nu_i = 1$  dreht [„Einspannungsgrad“ des Stabes ( $i, k$ ) am Ende ( $i$ )];

$|_1m_i$  das Moment, welches, am gelenkig gelagert gedachten Ende ( $i$ ) des Stabes ( $i, 1$ ) angreifend [wobei das Ende (1) am Knotenpunkt (1) elastisch eingespannt ist], die Tangente am Ende ( $i$ ) um den Winkel = 1 dreht [kann auch als „partieller Einspannungsgrad“ eines beliebigen Stabes ( $i, k$ ) am Ende ( $i$ ) aufgefaßt werden, d. h. als Einspannungsgrad nach Fortnahme der anderen in ( $i$ ) zusammentreffenden Stäbe bis auf den Stab ( $i, 1$ )];

$\varepsilon_{ik}$  der Winkel, um den sich der Knotenpunkt ( $i$ ) dreht, wenn auf das abgeschnitten gedachte Ende ( $i$ ) des Stabes ( $i, k$ ) ein Moment = 1 einwirkt; es ist  $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{m_{ik}}$ ;

${}_1\varepsilon_i$  der Winkel, um den sich die Tangente am gelenkig gelagert gedachten Ende ( $i$ ) des Stabes ( $i, 1$ ) dreht [wobei das Ende (1) am Knotenpunkt (1) elastisch eingespannt ist], wenn auf dasselbe ein Moment = 1 einwirkt; es ist  ${}_1\varepsilon_i = \frac{1}{{}_1m_i}$ ;

$a$  „Festpunktabstand“;

$a_{ik}$  Abstand des Festpunktes  $F_{ik}$  vom Ende ( $i$ ) des Stabes ( $i, k$ );

$a'_{ik}$  „ „ „ „  $F_{ik}$  „ „ ( $k$ ) „ „ ( $i, k$ );

$a_{ki}$  „ „ „ „  $F_{ki}$  „ „ ( $k$ ) „ „ ( $i, k$ );

$a'_{ki}$  „ „ „ „  $F_{ki}$  „ „ ( $i$ ) „ „ ( $i, k$ );

$\alpha$  „Festpunktverhältnis“, es ist  $\alpha_{ik} = \frac{a'_{ik}}{a_{ik}}$ ,  $\alpha_{ki} = \frac{a'_{ki}}{a_{ki}}$ ;

$|\alpha_{ik}$  und  $\alpha_{ki}$  „Winkelverhältnisse“, dimensionslose Größen, wie weiter unten definiert;

${}_{1\mu_i}$  „Übergangszahlen“, wie weiter unten definiert;

$k$  Zahl der Knotenpunkte eines Rahmens;

$p$  Zahl der (elastisch oder vollkommen) eingespannten Stabenden;

$p_i$  Zahl der am Knotenpunkt ( $i$ ) eingespannten Stabenden (soll in dieser Abhandlung als  $> 2$  angenommen werden);

$d$  Zahl der Stäbe, die eine Drehung erfahren;

$b$  Zahl der Bewegungsfreiheiten der nach Aufhebung der Knotensteifigkeiten erzeugten „Stabkette“.

Vorzeichen. Momente  $M$  positiv im Drehsinn des Uhrzeigers, wenn auf den Stab bezogen; also entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers, wenn auf den Knoten bezogen;

Drehwinkel  $\nu, \vartheta, \gamma$  positiv entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers.

### Das Kraftgrößen-Verfahren (K-V) und das Formänderungsgrößen-Verfahren (F-V).

Bekanntlich stehen dem Statiker zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme zwei „duale“ Grundverfahren [9] zur Verfügung: das K-V und das F-V.

Beim K-V erhält man Elastizitätsgleichungen mit unbekanntem Kraftgrößen (Kräften, Momenten), indem man in den Formänderungsgleichungen die Formänderungsgrößen (Drehwinkel) durch die Kraftgrößen ausdrückt.

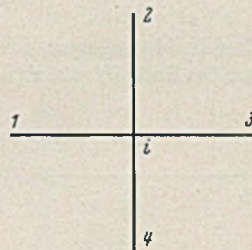


Bild 1.

Beim F-V erhält man Elastizitätsgleichungen mit unbekanntem Formänderungsgrößen, indem man in den Formänderungsgleichungen die Kraftgrößen durch die Formänderungsgrößen ausdrückt.

Bei Anwendung des K-V können zur Rahmenberechnung 4-Momenten-Gleichungen aufgestellt werden [1, 2]; sieht man zunächst von der Verschiebbarkeit der Knotenpunkte ab, so haben diese Gleichungen die Form:

$$2(M_{i1}l'_{i1} + M_{i2}l'_{i2}) - (M_{1i}l'_{i1} + M_{2i}l'_{i2}) = \gamma_{i1} + \gamma_{i2};$$

das ist eine Bestimmungsgleichung geometrischen Inhalts, aussagend, daß  $\nu_{i1} = \nu_{i2}$  ist.

Für einen Knotenpunkt ( $i$ ) können angeschrieben werden:

$(p_i - 1)$  Elastizitätsgleichungen und außerdem eine statische Gleichung, daß  $\sum M_i = 0$  ist; zusammen  $p_i$  Gleichungen.

Bei Anwendung des F-V können zur Rahmenberechnung  $(p_i + 1)$  Winkel-Gleichungen aufgestellt werden [3 bis 8]; sieht man zunächst wieder von der Verschiebbarkeit der Knotenpunkte ab, so haben diese Gleichungen z. B. für  $p_i = 4$  die Form:

$$2\nu_i(J'_{i1} + J'_{i2} + J'_{i3} + J'_{i4}) + (\nu_1J'_{i1} + \nu_2J'_{i2} + \nu_3J'_{i3} + \nu_4J'_{i4}) = M_{i1}^0 + M_{i2}^0 + M_{i3}^0 + M_{i4}^0;$$

das ist eine Bestimmungsgleichung statischen Inhalts, aussagend, daß  $\sum M_i = 0$  ist. Für jeden Knotenpunkt kann eine solche Elastizitätsgleichung angeschrieben werden.

Die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten ist: bei Anwendung des K-V  $p$  unbekanntem Momente; davon lassen sich  $k$  durch  $k$  statische Gleichungen eliminieren; die überzähligen  $p - k$  sind durch  $p - k$  Elastizitätsgleichungen zu berechnen; bei Anwendung des F-V (bei unverschiebbaren Knotenpunkten)  $k$  unbekanntem Knotendrehwinkel; dieselben sind durch  $k$  Elastizitätsgleichungen zu berechnen.

Bei Berücksichtigung der Verschiebbarkeit der Knotenpunkte kommen noch  $d$  zu bestimmende unbekanntem Stabdrehwinkel  $\vartheta$  hinzu, zu deren Bestimmung ergänzend aufgestellt werden müssen:  $b$  Elastizitätsgleichungen statischen Inhalts, die aussagen, daß  $b$  „Festhaltekräfte“ zu Null werden müssen, und  $(d - b)$  kinematische Gleichungen; an Stelle der letzteren tritt mit Vorteil das graphische Verfahren der Verschiebepläne [6].

Die Auflösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen mit vielen zu bestimmenden Unbekannten ist eine sehr unbequeme Arbeit; daher ist es bei komplizierteren Rahmenformen, insbesondere bei wechselnder Belastung, vorteilhafter, sich solcher Berechnungsverfahren zu bedienen, bei denen die Aufstellung und Auflösung eines umfangreichen Systems linearer algebraischer Gleichungen ganz fortfällt.

Ein solches Verfahren, das oft mit Vorteil angewendet wird, ist das „Festpunkt-Verfahren“. Wird für den durchlaufenden Träger vorteilhaft das graphische Festpunkt-Verfahren verwendet [10], so kommt für die Berechnung von Rahmen meist das analytische Festpunkt-Verfahren besser in Frage [11 bis 15].

Bei Anwendung des Festpunkt-Verfahrens werden die Stützmomente als unmittelbar zu bestimmende Unbekannte eingeführt; das Festpunkt-

Verfahren ist also ein Momenten-Verfahren (M-V), dessen man sich mit Vorteil bedient, wenn man an Stelle des K-V der 4-Momenten-Gleichungen ein Verfahren anwenden will, bei welchem die Aufstellung und Auflösung eines umfangreichen Systems algebraischer Gleichungen fortfällt.

Auf Grund obiger Ausführungen ist zu erwarten, daß es auch ein „duales“ „Winkel-Verfahren“ (W-V) geben muß, bei dem die Knotendrehwinkel als unmittelbar zu bestimmende Unbekannte eingeführt werden, dessen man sich mit Vorteil bedienen könnte, wenn man an Stelle des F-V der  $(p_i + 1)$ -Winkel-Gleichungen ein Verfahren anwenden wollte, bei welchem wiederum die Aufstellung und Auflösung eines umfangreichen Systems algebraischer Gleichungen fortfiel.

Da meines Wissens ein solches Verfahren bis jetzt nicht gezeigt worden ist, soll es Aufgabe dieser Abhandlung sein, nachzuweisen, daß sich tatsächlich ein solches aufstellen läßt.

**Aufstellung der Formeln des neuen Winkel-Verfahrens (W-V).**

Die Formeln sollen für den praktisch wichtigsten Fall aufgestellt werden, daß die Querschnitte der einzelnen Stäbe unveränderlich und die Stäbe gerade sind; die Formeln könnten aber auch in allgemeinerer Form aufgestellt werden, ähnlich wie das für das M-V schon durchgeführt ist [11, 12].

a) Es sei  $m_{ik}$  der Einspannungsgrad des Stabes  $(i, k)$  am Knoten  $(i)$ ; es sei die dimensionslose Größe  $\alpha_{ik}$  wie folgt definiert:

$$\alpha_{ik} = 2 + \frac{m_{ik}}{J'_{ik}} \tag{I}$$

b) Ein unbelasteter Stab  $(i, 1)$  sei am Ende  $(i)$  gelenkig gelagert, am Ende  $(1)$  elastisch eingespannt; das Moment  $m_i$  auf das Ende  $(1)$  wirkend, dreht die Tangente in  $(1)$  um den Winkel  $\nu_1$ ; am anderen Ende treten das Stützmoment  $M_{1i}$  und der Knotendrehwinkel  $\nu_i$  auf.

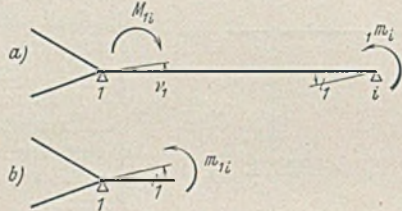


Bild 2 a u. b.

Es ist, da  $M_{1i} = +m_{1i}\nu_i$ :

$$\begin{cases} +2m_{1i}\nu_i + m_i = -3J'_{1i}\nu_i \\ +m_{1i}\nu_i + 2m_i = +3J'_{1i}\nu_i \end{cases}$$

Hieraus errechnet sich nach Ausschluß von  $\nu_i$  unter Berücksichtigung von (I):

$$m_i = \left(2 - \frac{1}{\alpha_{1i}}\right) J'_{1i} \tag{II}$$

c) Ist der Stab  $(i, k)$  in  $(i)$  durch Anschluß an mehrere Stäbe  $(i, 1)$  bis  $(i, c)$  elastisch eingespannt und sind die partiellen Einspannungsgrade  $m_i$  bis  $c m_i$ , so ist der Einspannungsgrad:

$$m_{ik} = m_i + \dots + c m_i \tag{III}$$

d) Es sei nur der Stab  $(i, k)$  belastet; derselbe ist an den Enden elastisch eingespannt; infolge der Belastung treten an den Enden die Stützmomente  $M_{ik}$  und  $M_{ki}$  und die „primären“ Knotendrehwinkel  $\nu_i$  und  $\nu_k$  auf.

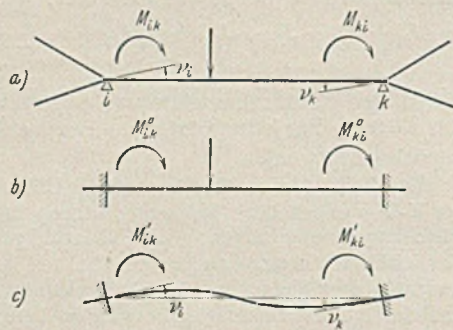


Bild 3 a bis d.

Der Kräfte- und Formänderungszustand des Stabes kann aus zwei Teilständen zusammengesetzt angesehen werden.

1. Teilstand: der belastete Stab ist an den Enden vollkommen eingespannt; infolge der Belastung treten die Stützmomente  $M_{ik}^0$  und  $M_{ki}^0$  auf (die „Belastungsglieder“ bei der Berechnung nach dem W-V);

2. Teilstand: der Stab ist unbelastet; die Endtangente werden um die Winkel  $\nu_i$  und  $\nu_k$  gedreht; hierbei treten die Stützmomente  $M'_{ik}$  und  $M'_{ki}$  auf. Es ist:

$$\begin{cases} M_{ik} = M_{ik}^0 + M'_{ik} \\ M_{ki} = M_{ki}^0 + M'_{ki} \\ M'_{ik} = -J'_{ik}(2\nu_i + \nu_k) \\ M'_{ki} = -J'_{ik}(2\nu_k + \nu_i) \end{cases} \tag{VII}^1$$

<sup>1)</sup> Die Numerierung der Gleichungen entspricht der weiter unten folgenden Zusammenstellung.

andererseits ist auch:

$$\begin{cases} M_{ik} = +m_{ik}\nu_i \\ M_{ki} = +m_{ki}\nu_k \end{cases}$$

Hieraus berechnen sich die primären Knotendrehwinkel unter Berücksichtigung von (I):

$$\begin{cases} \nu_i = + \frac{1}{J'_{ik}} \cdot \frac{M_{ik}^0 \alpha_{ki} - M_{ki}^0}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \\ \nu_k = + \frac{1}{J'_{ik}} \cdot \frac{M_{ki}^0 \alpha_{ik} - M_{ik}^0}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \end{cases} \tag{IV}$$

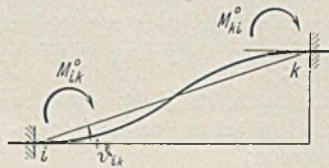


Bild 4.

e) Der Stab  $(i, k)$  sei unbelastet; es findet eine Knotenpunktverschiebung statt, derart, daß sich der Stab um den Winkel  $\vartheta_{ik}$  dreht. Die Belastungsglieder sind dann:

$$M_{ik}^0 = M_{ki}^0 = +3J'_{ik}\vartheta_{ik}$$

Dieses in (IV) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{cases} \nu_i = +3\vartheta_{ik} \cdot \frac{\alpha_{ki} - 1}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \\ \nu_k = +3\vartheta_{ik} \cdot \frac{\alpha_{ik} - 1}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \end{cases} \tag{V}$$

f) Der Stab  $(i, k)$  sei unbelastet; belastet sei der Rahmen „links“ von  $(i)$ , unbelastet „rechts“ von  $(k)$ ; infolge der Belastung links von  $(i)$  treten am Stabe  $(i, k)$  die Stützmomente  $M_{ik}$  und  $M_{ki}$  und die Knotendrehwinkel  $\nu_i$  und  $\nu_k$  auf.

Es ist, da  $M_{ki} = +m_{ki}\nu_k$ :

$$m_{ki}\nu_k = J'_{ik}(2\nu_k + \nu_i)$$

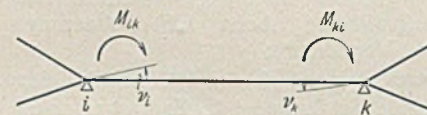


Bild 5.

Hieraus berechnet sich unter Berücksichtigung von (I):

$$\nu_k = -\frac{\nu_i}{\alpha_{ki}} \tag{VI}$$

aus dieser Formel ist die Bedeutung der dimensionslosen Größe  $\alpha$  als „Winkelverhältnis“ ersichtlich.

**Zusammenstellung der Formeln des W-V und M-V.**

Unter „K-V und F-V“ zeigte sich eine weitgehende Übereinstimmung im Aufbau der Bestimmungsgleichungen bei den beiden dualen Grundverfahren. Eine entsprechende Übereinstimmung ist daher auch bei einer Gegenüberstellung korrespondierender Formeln des W-V und M-V zu erwarten. Untenstehend sollen die eben aufgestellten Formeln des W-V übersichtlich zusammengestellt werden, in der Reihenfolge, in welcher sie bei der Rahmenberechnung nach diesem Verfahren zur Anwendung kommen. Dieser Zusammenstellung sollen gegenübergestellt werden die korrespondierenden Formeln des M-V, und zwar in einer meines Wissens neuen Form; an Stelle der Festpunktabstände  $a$  sind die Festpunktverhältnisse  $\alpha$  getreten, wodurch der Aufbau der Formeln vereinfacht und ihre praktische Brauchbarkeit verbessert ist. Von einer Ableitung der Formeln des M-V soll Abstand genommen werden, da diese Ableitung schon von früheren Arbeiten her gut bekannt ist [11, 12].

**Winkel-Verfahren.**

Zur Berechnung von  $\alpha$  und  $m$ :

$$\alpha_{ik} = 2 + \frac{m_{ik}}{J'_{ik}} \tag{I}$$

bei gelenkigem Anschluß  $m_{ik} = 0, \alpha_{ik} = 2,$

bei vollkommener Einspannung  $m_{ik} = \infty, \alpha_{ik} = \infty.$

$$m_i = \left(2 - \frac{1}{\alpha_{1i}}\right) J'_{1i} \tag{II}$$

bei gelenkigem Anschluß  $(\alpha_{1i} = 2), m_i = 1,5 J'_{1i},$

bei vollkommener Einspannung  $(\alpha_{1i} = \infty), m_i = 2 J'_{1i}.$

$$m_{ik} = m_i + \dots + c m_i \tag{III}$$

Zur Berechnung der primären  $\nu$ :  
infolge Belastung

$$\begin{cases} \nu_i = + \frac{1}{J'_{ik}} \cdot \frac{M_{ik}^0 \alpha_{ki} - M_{ki}^0}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \\ \nu_k = + \frac{1}{J'_{ik}} \cdot \frac{M_{ki}^0 \alpha_{ik} - M_{ik}^0}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \end{cases} \tag{IV}$$

Infolge Knotenpunktverschiebung

$$\left. \begin{aligned} v_i &= + 3 \vartheta_{ik} \cdot \frac{\alpha_{ki} - 1}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \\ v_k &= + 3 \vartheta_{ik} \cdot \frac{\alpha_{ik} - 1}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Zur Berechnung der „sekundären“  $v$ :

$$v_k = - \frac{v_i}{\alpha_{ki}} \quad (VI)$$

Zur Berechnung der  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= M_{ik}^0 - J'_{ik} (2v_i + v_k) \\ M_{ki} &= M_{ki}^0 - J'_{ki} (2v_k + v_i) \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

Momenten-Verfahren.

Zur Berechnung von  $\alpha$  und  $\varepsilon$ :

$$\alpha_{ik} = 2 + \frac{\varepsilon_{ik}}{l'_{ik}} \quad (I)$$

bei gelenkigem Anschluß  $\varepsilon_{ik} = \infty, \alpha_{ik} = \infty,$

bei vollkommener Einspannung  $\varepsilon_{ik} = 0, \alpha_{ik} = 2.$

$$1^{\varepsilon_i} = \left( 2 - \frac{1}{\alpha_{1i}} \right) l'_{1i} \quad (II)$$

bei gelenkigem Anschluß  $(\alpha_{1i} = \infty), 1^{\varepsilon_i} = 2 l'_{1i},$

bei vollkommener Einspannung  $(\alpha_{1i} = 2), 1^{\varepsilon_i} = 1,5 l'_{1i}.$

$$\frac{1}{\varepsilon_{ik}} = \frac{1}{1^{\varepsilon_i}} + \dots + \frac{1}{c^{\varepsilon_i}} \quad (III)$$

Zur Berechnung der primären  $M$ :

infolge Belastung

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= + \frac{1}{l'_{ik}} \cdot \frac{\gamma_{ik} \alpha_{ki} + \gamma_{ki}}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \\ M_{ki} &= + \frac{1}{l'_{ki}} \cdot \frac{\gamma_{ki} \alpha_{ik} + \gamma_{ik}}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

infolge Knotenpunktverschiebung

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= + \frac{1}{l'_{ik}} \cdot \vartheta_{ik} \cdot \frac{\alpha_{ki} + 1}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \\ M_{ki} &= + \frac{1}{l'_{ki}} \cdot \vartheta_{ik} \cdot \frac{\alpha_{ik} + 1}{\alpha_{ik} \alpha_{ki} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Zur Berechnung der „sekundären“  $M$ :

$$M_{ki} = + \frac{M_{ik}}{\alpha_{ki}} \quad (VI)$$

$$M_{i1} = - 1^{\mu_i} M_{ik}, \quad 1^{\mu_i} = \frac{\varepsilon_{ik}}{1^{\varepsilon_i}} \quad (VIa)$$

Zur Berechnung der  $v$ :

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \gamma_{ik} - l'_{ik} (2M_{ik} - M_{ki}) \\ v_k &= \gamma_{ki} - l'_{ki} (2M_{ki} - M_{ik}) \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

Anmerkung: Bei Anwendung des M-V hat die Formel (VII) nur die Bedeutung einer Rechenkontrolle.

Die tatsächliche Übereinstimmung im Aufbau entsprechender Formeln des W-V und M-V ist eine überraschend große! Der  $\alpha$ -Größe des W-V als „Winkelverhältnis“ steht gegenüber das Festpunktverhältnis  $\alpha$  des M-V als „Momentenverhältnis“.

Anwendungsbeispiel für das W-V.

Da im Endergebnis nur die Momentenwerte, nicht aber die Winkelwerte interessieren, kommt es bei der Berechnung nur auf das Verhältnis der Stablängen bzw. der Trägheitsmomente, nicht aber auf die absoluten Werte derselben an; daher können die Stablängen und Trägheitsmomente in beliebigen Einheiten gemessen werden; desgl. kann der Elastizitätsmodul beliebig angenommen werden.

Der zu berechnende Rahmen, Knotenpunktnumerierung, Belastung ( $t/m$ ), Stablängen (in m):

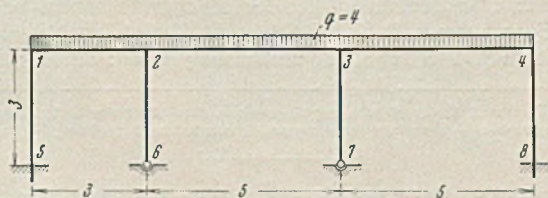


Bild 6.

Trägheitsmomente der Stabquerschnitte (in  $\text{dcm}^4$  — für einen Rahmen aus Stahlprofilen gedacht):

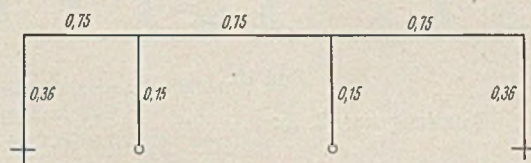


Bild 7.

Reduzierte Trägheitsmomente  $J' = \frac{2EJ}{l}$ ; es sei  $2E = 1$  gesetzt; dann ist  $J' = \frac{J}{l}$ :

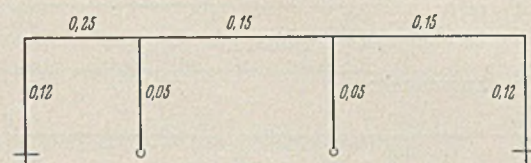


Bild 8.

Die Berechnung soll unter Annahme unverschieblicher Knotenpunkte durchgeführt werden.

a) Berechnung der  $m$  und  $\alpha$  [Formeln (I), (II), (III)].

Die Berechnung von links nach rechts ergibt nacheinander:

Die Berechnung von rechts nach links ergibt nacheinander:

$m_{51} = \infty$	$\alpha_{51} = \infty$	$m_{84} = \infty$	$\alpha_{84} = \infty$
$m_{12} = 0,24$	$\alpha_{12} = 2,96$	$m_{43} = 0,24$	$\alpha_{43} = 3,60$
$m_{82} = 0$	$\alpha_{82} = 2$	$m_{73} = 0$	$\alpha_{73} = 2$
$1m_2 = 0,415$		$4m_3 = 0,258$	
$6m_2 = 0,075$		$7m_3 = 0,075$	
$m_{23} = 0,490$	$\alpha_{23} = 5,27$	$m_{32} = 0,333$	$\alpha_{32} = 4,22$
$2m_3 = 0,271$		$3m_2 = 0,264$	
$7m_3 = 0,075$		$6m_2 = 0,075$	
$m_{34} = 0,346$	$\alpha_{34} = 4,31$	$m_{21} = 0,339$	$\alpha_{21} = 3,36$
$m_{48} = 0,265$	$\alpha_{48} = 4,21$	$m_{15} = 0,425$	$\alpha_{15} = 5,54$
$1m_2 = 0,415$		$4m_3 = 0,258$	
$3m_2 = 0,264$		$2m_3 = 0,271$	
$m_{26} = 0,679$	$\alpha_{26} = 15,6$	$m_{37} = 0,529$	$\alpha_{37} = 12,6$

Die in Klammern [ ] gesetzten Teile der Berechnung können fortfallen, wenn, wie hier, eine Verschiebung der Knotenpunkte nicht berücksichtigt werden soll.

Die  $m$ -Werte werden für die weitere Berechnung nicht benötigt, daher sollen nur die  $\alpha$ -Werte übersichtlich zusammengestellt werden.

$\alpha$ -Werte (Werte, die zur weiteren Berechnung nicht mehr benötigt werden, sind in Klammern gestellt):

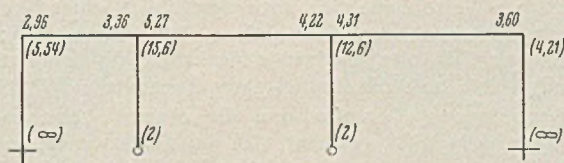


Bild 9.

b) Berechnung der Belastungsglieder  $M^0$ .

Für gleichmäßig verteilte Belastung ist  $M^0$  links  $= - \frac{q l^2}{12}$ ,  
rechts  $= + \frac{q l^2}{12}$ :

$$\begin{aligned} -M_{12}^0 &= + M_{31}^0 = + 3 \\ -M_{23}^0 &= + M_{32}^0 = + 8,33 \\ -M_{34}^0 &= + M_{43}^0 = + 8,33. \end{aligned}$$

c) Berechnung der primären  $v$  [Formeln (IV)].

$$\begin{aligned} \text{Belastung auf (1, 2): } v_1 &= - 5,85 \\ v_2 &= + 5,32; \\ \text{Belastung auf (2, 3): } v_2 &= - 13,70 \\ v_3 &= + 16,45; \\ \text{Belastung auf (3, 4): } v_3 &= - 17,60 \\ v_4 &= + 20,35. \end{aligned}$$

d) Berechnung der sekundären  $\nu$  [Formel (VI)].

Belastung auf (1, 2):

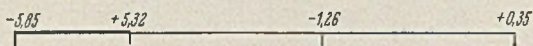


Bild 10.

Belastung auf (2, 3):

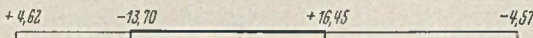


Bild 11.

Belastung auf (3, 4):

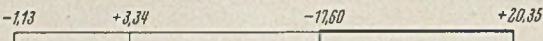


Bild 12.

Zusammen:

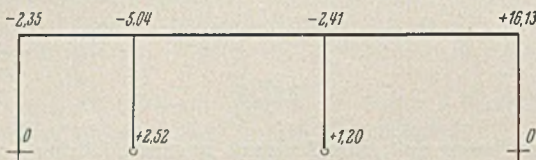


Bild 13.

(Von der Genauigkeit der berechneten  $\nu$ -Werte kann man sich durch Einsetzen in die  $(p_i + 1)$ -Winkel-Gleichungen überzeugen.)

e) Berechnung der Stützmomente [Formeln (VII)].

$M'$ -Werte:

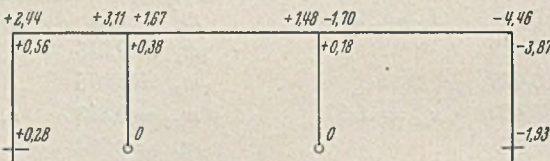


Bild 14.

$M$ -Werte:

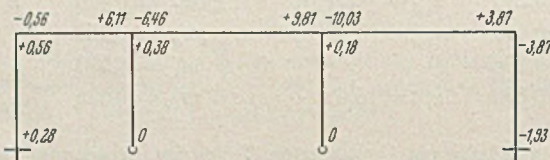


Bild 15.

Kontrollen.

Es ist für den Knotenpunkt (1):  $-0,56 + 0,56 = 0$ ,  
 (2):  $+6,11 - 6,46 + 0,38 = +0,03$  (statt 0),  
 (3):  $+9,81 - 10,03 + 0,18 = -0,04$  (statt 0),  
 (4):  $+3,87 - 3,87 = 0$ .

In ähnlicher Weise ließe sich auch der Einfluß einer Knotenpunktverschiebung berücksichtigen (Anwendung der Formeln (V); Gleichgewichtsbedingung, daß die horizontale Festhaltekraft des Riegels zu Null werden muß), somit auch der Einfluß einer horizontalen Windkraft.

Die Berechnung der  $m$  und  $\alpha$  für einen „geschlossenen“ Rahmen nach dem W-V gestaltet sich in ähnlicher Weise wie die Berechnung der  $\varepsilon$  und  $\alpha$  für einen solchen Rahmen nach dem M-V.

Bei Anwendung des M-V werden die  $\varepsilon$ -Werte vorläufig geschätzt [15]; desgl. werden bei Anwendung des W-V die  $m$ -Werte vorläufig geschätzt: für einen gelenkigen Anschluß ist  ${}_1m_i = 1,5 J'_{1i}$ , für vollkommene Einspannung ist  ${}_1m_i = 2 J'_{1i}$ , für elastische Einspannung kann angenommen werden  ${}_1m_i = (1,6 \text{ bis } 1,8) J'_{1i}$ , je nachdem, ob augenscheinlich ein kleinerer [Anschluß des Stabes ( $i, 1$ ) mit großem  $J'_{1i}$  in (1) an einen Stab mit kleinem  $J'$ ] oder größerer Einspannungsgrad [Anschluß des Stabes ( $i, 1$ ) mit kleinem  $J'_{1i}$  in (1) an Stäbe mit großem  $J'$ ] vorliegt; darauf werden die  $\alpha$ -Werte ausgerechnet, dann die  $m$ -Werte verbessert usw.; die Konvergenz ist eine ausgezeichnete.

Näherungsverfahren.

Praktisch genügt meist ein Näherungsverfahren, wie es ähnlich auch beim M-V angewendet wird [13]. Es werden:

1. die  $\alpha$ -Werte geschätzt und nicht mehr verbessert: für einen gelenkigen Anschluß ist  $\alpha = 2$ , für vollkommene Einspannung ist  $\alpha = \infty$ ; fast vollkommene Einspannung kann als vollkommene gerechnet werden, für elastische Einspannung kann angenommen werden  $\alpha = 3$  bis 5;

2. die Berechnung der sekundären  $\nu$  nur bis zu den Knotenpunkten durchgeführt, welche den primären Punkten unmittelbar benachbart sind.

Brauchbarkeit des W-V.

Das W-V hat vor dem M-V den Vorzug, daß die wiederholte, für die Belastung jedes einzelnen Stabes einzeln durchzuführende Momentenverteilung an den einzelnen Knotenpunkten [nach Formel (VIa)] fortfällt, wodurch auch die Fehleranhäufung verringert wird.

Während bei Anwendung des M-V nach Ausrechnung der  $\varepsilon$ - und  $\alpha$ -Werte sowohl die  $\alpha$ -Werte als auch die  $\varepsilon$ -Werte [wegen Formel (VIa)] weiter benötigt werden, werden bei Anwendung des W-V nach Ausrechnung der  $m$ - und  $\alpha$ -Werte nur noch die  $\alpha$ -Werte benötigt, nicht aber die  $m$ -Werte, was der Übersichtlichkeit der Berechnung zugute kommt. Beim W-V wird die Berechnung der Stützmomente nur am Schluß der Rechnung vollzogen; die darauffolgende Kontrolle  $\sum M_i = 0$  gestattet, die Fehlergröße der durchgeführten Berechnung sicher zu erfassen.

Schrifttum,

auf welches in dieser Abhandlung Bezug genommen ist.

In Anbetracht der großen praktischen Bedeutung, die der Rahmenberechnung zukommt, ist das Schrifttum über diesen Gegenstand ein überaus großes; die hier gegebene Zusammenstellung erhebt bei weitem keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Kraftgrößen-Verfahren (K-V).

- [1] F. Bleich, Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Berlin 1918, Jul. Springer.
- [2] G. Ehlers, Die Clapeyronsche Gleichung als Grundlage der Rahmenberechnung. Berlin 1924, D. Bauztg.

Formänderungsgrößen-Verfahren (F-V).

- [3] A. Bendixsen, Methode der  $\alpha$ -Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen. Berlin 1914, Jul. Springer.  
(„ $\alpha$ “ hier gleichbedeutend mit dem Knotendrehwinkel  $\nu$ .)
- [4] W. Gehler, Rahmenberechnung mittels der Drehwinkel, in der Festschrift „Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstag“. Berlin 1916, Wilh. Ernst & Sohn. — desgl. in Der Rahmen, 2. Auflage. Berlin 1919, Wilh. Ernst & Sohn.
- [5] A. Ostefeld, Die Deformationsmethode. Berlin 1926, Jul. Springer.
- [6] L. Mann, Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1926, Jul. Springer.
- [7] G. Unold, Die praktische Berechnung der Stahlskelettrahmen. Berlin 1933, Wilh. Ernst & Sohn.
- [8] Krabbe, Allgemeines Verfahren zur Berechnung biegezugfest verbundener Stabsysteme. Stahlbau 7 (1934), H. 5 u. 6. (Sperrkreuzverfahren.)

Kraftgrößen-Verfahren und Formänderungsgrößen-Verfahren.

- [9] A. Hertwig, Das Kraftgrößenverfahren und das Formänderungsgrößenverfahren für die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde. Stahlbau 6 (1933), H. 19.

Festpunkt- oder Momenten-Verfahren (M-V).

- [10] W. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik. 3. Teil. Zürich 1900, Raustein.
- [11] A. Straßner, Beiträge zur Theorie kontinuierlicher Eisenbetonkonstruktionen. Berlin 1912, Wilh. Ernst & Sohn, und mehrere jüngere Arbeiten desselben Verfassers.
- [12] E. Suter, Die Methode der Festpunkte. Berlin 1923, Jul. Springer.
- [13] B. Löser in Bemessungsverfahren. 1. Auflage. Berlin 1925, Wilh. Ernst & Sohn.
- [14] B. Löser in neuer Form. 5. Auflage. Berlin 1936, Wilh. Ernst & Sohn.
- [15] K. Martens, Vereinfachtes Festpunktverfahren. B. u. E. 37 (1938), H. 21.

Berichtigung

zum Aufsatz: „Die Aulatalbrücke der Reichsautobahnen bei Hersfeld“ von Reg.-Baumeister a. D. H. W. Schlegel, Kassel, in Heft 14/15. Die Unterschrift zu Bild 15 auf S. 117 muß richtig lauten: Setzungsmessungen.

INHALT: Das Nullfeldverfahren zur allgemeinen Ermittlung der Einflußlinien von Balken und Rahmentragwerken. — Ein neues Verfahren praktischer Rahmenberechnung. — Berichtigung.