

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang

BERLIN, 15. September 1939

Heft 19/20

Alle Rechte vorbehalten.

Grundlagen zu einer Theorie räumlicher Rahmentragwerke.

Von Professor Dr.-Ing. Ludwig Mann, Breslau.

Die aus Stäben zusammengesetzten räumlichen oder ebenen Tragwerke, deren geometrische Systeme im Gegensatz zum Fachwerk nicht durch Stablängen allein bestimmt sind, bilden die Sondergruppe der Rahmentragwerke, die dadurch gekennzeichnet sind, daß zur Erhaltung der Gestalt Knotensteifigkeiten notwendig sind.

Die einzelnen Stäbe sind beiderseits an Knoten fest oder gelenkig angeschlossen. Die Knoten können als nachgiebige Auflager angesehen werden, die Verdrehungen und Verschiebungen unterworfen sind. Es gehört zu den bekannten Aufgaben der Festigkeitslehre, den Spannungszustand eines belasteten Stabes bei bekannten Auflagerbewegungen zu bestimmen.

Methoden, die das primäre Ziel verfolgen, die Knotenbewegungen oder ein sonst geeignetes System von Verformungsgrößen, durch welche jene geometrisch bestimmt sind, zu bestimmen, haben für ebene Rahmentragwerke schon eingehende Behandlung und Anwendung gefunden¹⁾. Für räumliche Tragwerke fehlt jedoch eine systematische Darstellung noch vollständig. Sie ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

1. Kinematische Betrachtungen.

Die Knoten betrachten wir als Raumelement, dessen Verschiebungs- und Drehvektor in einem festen Koordinatensystem die rechtwinkligen Komponenten ξ, η, ζ bzw. x, y, z besitze. Der Endpunkt der Stabachse ist gezungen, die Verschiebung mitzumachen.

Die Hauptträgheitsachsen des angeschlossenen Querschnitts sowie die Stabachse sollen in der Anfangslage Richtungen a, b und c besitzen, die durch ihre Richtungskosinus nach folgendem Schema bestimmt seien:

	x	y	z
a	a_1	a_2	a_3
b	b_1	b_2	b_3
c	c_1	c_2	c_3

Sind im Sinne der üblichen Näherungstheorie die Drehungen des Endquerschnitts um diese Anfangslagen gleich α, β und γ , so betrachten wir Verbindungen zwischen Stab und Knoten, die ihren analytischen Ausdruck in dem Bestehen oder Nichtbestehen nachstehender Gleichungen finden:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ (2) \quad & \beta = b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ (3) \quad & \gamma = c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned}$$

Rechts stehen die Komponenten der Knotendrehung, nach den Richtungen von a, b und c genommen, und ihre Gleichsetzung mit α, β und γ setzt eine Erzwingung durch konstruktive Mittel voraus. Allgemein bedeutet die einzelne Gleichung drehfesten Anschluß, wobei längs der Achsen a und b Biegemomente und an c ein Verdrehungsmoment zwischen Stab und Knoten übertragen werden. Bei starrem Anschluß sind alle drei Gleichungen, bei Anordnung eines Kugelgelenks keine derselben notwendig erfüllt, d. h. die Tangente im Endpunkt des Stabes kann sich unabhängig von der Drehung des Knotens einstellen. Es kann auch im Sinn einer Annäherung liegen, einzelne der Gleichungen (1) bis (3) außer acht zu lassen, wenn die übertragenen Momente geringfügig sind.

¹⁾ Ostenfeld, Die Deformationsmethode. Berlin 1926, Julius Springer; Mann, Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927, Julius Springer; Hertwig, Das „Kraftgrößenverfahren“ und das „Formänderungsgrößenverfahren“ für die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde. Stahlbau 1933, S. 145; Kammüller, Statik der Rahmentragwerke. Berlin, Wilh. Ernst & Sohn.

Kann man z. B. vom Verdrehungswiderstand des Stabes absehen, was dem Anschluß mittels Spurlagers entsprechen würde, so scheidet Gl. (3) aus. Sind gleichzeitig der Biegungswiderstand um eine der Hauptachsen und der Verdrehungswiderstand vernachlässigbar, so kann man zweifache Drehfreiheit, etwa durch Anschluß mittels eines Kreuzgelenks, annehmen, wodurch eine der beiden ersten Gleichungen und die dritte ausscheiden.

Sind die Stäbe an einem freien Knoten insgesamt mit nur drei oder weniger drehfesten Achsen angeschlossen, so besteht, sofern äußere Momente am Knoten nicht angreifen, statisch kein Unterschied, wenn sämtliche Anschlüsse durch Kugelgelenke ersetzt werden, weil aus Gleichgewichtsgründen die Anschlußmomente am Knoten verschwinden.

Es sind Stabverbindungen denkbar, bei welchen mehrfach Stabenden zu gemeinsamer Drehung biegefest verbunden sind, während die einzelnen Gruppen gegeneinander drehbar sind. Wir schematisieren z. B. den Fall eines Bolzengelenks in der Ebene (Bild 1) durch Einführung eines zweifachen Knotens mit gemeinsamer Verschiebung, jedoch verschiedener Drehung mit den Komponenten x' bzw. x'' .

Im Gegensatz zu freien Knoten, welche sechsfache Bewegungsfreiheit besitzen, sind die Lagerknoten gegen Drehung gesperrt.

Die Verschiebungsfreiheit werde den Lagerbedingungen entsprechend durch Auflagerstäbe beschränkt. Von den Stabanschlüssen gilt das für freie Knoten Gesagte einschließlich der Einführung zweifacher Knoten.

Es bezeichne n_1 die Zahl der freien Knoten, n_2 die der Lagerknoten, ferner sei f die Zahl aller Auflagerstäbe und g die Zahl aller relativen Drehachsen bei zweifachen Knoten. Dann beträgt die Zahl der Bestimmungsstücke, d. h. der Dreh- und Verschiebungskomponenten, welche eine neue Konfiguration der Knoten bei der Gestaltsänderung eines Rahmentragwerks festlegen:

$$(4) \quad \rho = 6 n_1 + 3 n_2 - f + g.$$

Wir nennen diese ρ -Größen, die geometrisch unabhängig voneinander sind, Grundverformungen. Nach ihrer Ermittlung lassen sich Verbiegung, Verwindung und Längenänderung irgendeines Stabes und damit seine Beanspruchung sofort in elementarer Weise angeben.

Es sind andere Systeme von Grundverformungen denkbar, die mit den vorgenannten in geometrischem Zusammenhang stehen, wobei wir uns bei kleinen Formänderungen auf lineare Abhängigkeit beschränken. Durch folgende Betrachtungen soll zunächst ein System aufgestellt werden, welches sich dem Rahmenwerk analytisch besser anpaßt.

Wir denken uns sämtliche steifen Stabanschlüsse an freien und Lagerknoten aufgehoben und durch Kugelgelenke ersetzt. Dadurch erzeugen wir eine kinematische Kette. Bei p -facher Bewegungsfreiheit läßt sich diese Kette durch Hinzufügen von p passend gewählten Stäben, die wir als u -Stäbe bezeichnen wollen, in ein Stabsystem verwandeln, welches die Abzählungsbedingung statischer Bestimmtheit erfüllen oder noch überzählige Stäbe enthalten kann, die wir dann als überzählige Stäbe des Rahmentragwerks bezeichnen wollen.

Unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen, die eine lineare Superposition gestatten, sehen wir zunächst von der Längenänderung der Stäbe ab; dann wird ein System möglicher Knotenverschiebungen des Rahmentragwerks stets durch eine Bewegung der zugeordneten Kette bestimmt sein, die wir dadurch erzeugen, daß wir in Richtung der oben beschriebenen u -Stäbe p willkürliche Verschiebungen vornehmen, die mit $u_1 \dots$ bis u_p bezeichnet werden sollen.

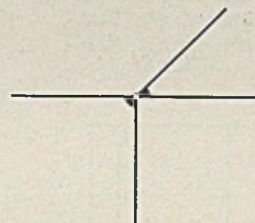


Bild 1.

Der Definition entsprechend, enthält die Kette auch die als Raumelemente vorgestellten Knoten, und zwar in frei drehbarem Zustand unter Beachtung der Beschränkung am Auflager. Eine Konfiguration ist dann durch die Verschiebungen $u_1 \dots$ bis u_p der Kette zusammen mit Drehungen x, y, z der Knoten gegeben.

Sollen noch die Längenänderungen der Stäbe berücksichtigt werden, so zieht dies für die Gestaltsänderung noch weitere s Bewegungsfreiheiten nach sich, wenn das Rahmenwerk nach Ausscheidung etwa überzähliger Stäbe noch s Stäbe besitzt.

Die p Verschiebungen u , die $3n_1 + g$ Knotendrehwinkel und die s Stablängenänderungen bilden zusammen ein System von Grundverformungen. Man überzeugt sich leicht, daß ihre Anzahl

$$(5) \quad \varrho = p + 3n_1 + g + s$$

wegen der Abzählungsbedingung für statisch bestimmte Systeme:

$$3(n_1 + n_2) = s + p + f$$

mit dem oben gefundenen Wert für ϱ übereinstimmt.

Für das ebene Rahmenwerk gilt entsprechend:

$$(5a) \quad \varrho = p + n_1 + g + s.$$

Für die Vereinfachung und Allgemeinheit der Darstellung ist es zweckmäßig, die ϱ Grundverformungen mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen. Wir wählen dafür:

$$w_1 \dots \text{bis } w_\varrho.$$

2. Formänderungen und Kräfte am Einzelstab. Potentielle Energie des Systems.

Die Endpunkte der Stäbe sollen stets durch Buchstaben i und k gekennzeichnet werden.

Die Tangenten an die Biegelinie in den Endpunkten i und k bilden mit der ursprünglichen Richtung der Stabachse Winkel, die wir in Vektordarstellung nach den Richtungen a und b der Hauptachsen in α_i und β_i , bzw. α_k und β_k zerlegen, wobei für die Folge darauf zu achten ist, daß an beiden Enden die Winkel nach derselben Richtung positiv gezählt werden sollen.

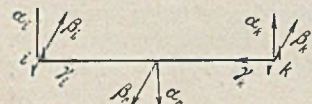


Bild 2.

Die dritte dem Stabende zugeordnete Achse soll dagegen stets nach dem anderen Stabende weisen.

Infolge der Knotenverschiebungen ändern die Stabsehnen ihre Richtung. Die Komponenten des „Stabdrehwinkels“

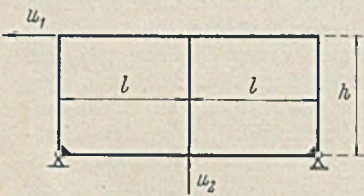


Bild 3.

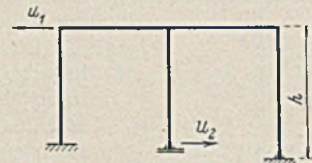


Bild 4.

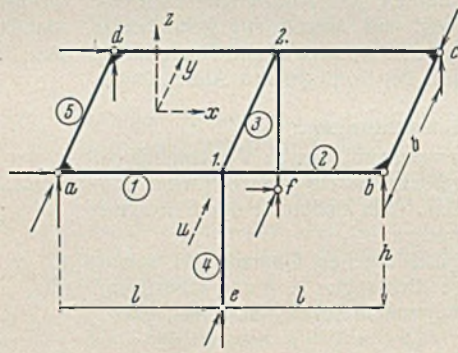


Bild 5.



Bild 6.

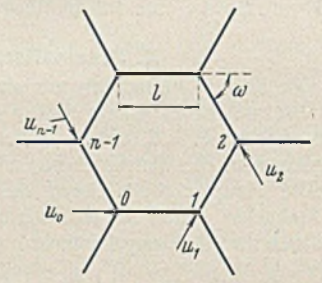


Bild 7.

nach Richtung der Hauptachsen seien mit α_r und β_r bezeichnet, sie sollen den Tangentendrehwinkeln entgegengesetzt positiv gezählt werden (Bild 2). Blickt man in Richtung des Pfeiles auf den Stab, so entspricht immer positiven Werten eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen, wobei als praktisch zulässig die Längenänderungen der Stäbe vernachlässigt werden sollen.

Das in Bild 3 dargestellte ebene Tragwerk besitzt vier freie Knoten. An beiden Lagern befinden sich zweifache Knoten mit je einer freien Drehachse. Die zugeordnete Kette hat zweifache Bewegungsfreiheit.

Es ist $n_1 = 4, g = 2, p = 2$, somit nach Gl. (5a) $\varrho = 8$.

Ferner wird für die drei Pfosten $\dots \alpha_r = \frac{u_1}{h}$

für die linken Gurtstäbe $\dots \alpha_r = \frac{u_2}{l}$

und für die rechten Gurtstäbe $\dots \alpha_r = -\frac{u_2}{l}$.

Der Doppelrahmen in Bild 4 besitzt drei freie Knoten und die Kette zwei Bewegungsfreiheiten; hiermit wird $\varrho = 5$.

Für Stiel 1 und 3 gilt $\dots \alpha_r = \frac{u_1}{h}$

für Stiel 2 $\dots \alpha_r = \frac{u_1 + u_2}{h}$

für die Riegel $\dots \alpha_r = 0$.

Zur allgemeinen Behandlung ebener Rahmentragwerke vgl. die in Fußnote 1 angegebene Quelle.

Das in Bild 5 dargestellte räumliche Tragwerk habe starr miteinander verbundene Stäbe. Bei a, b, c und d seien Bolzenkiplager angeordnet; wir führen schematisch zweifache Knoten ein mit freien Drehachsen in Richtung ad und bc . Bei e und f seien die Stiele am Lagerknoten

beliebig angeschlossen. Bei 14 Auflagerstäben, die durch Pfeile angedeutet sind, wird die Kette durch Hinzufügen eines u -Stabes in ein statisch bestimmtes System verwandelt.

Als Grundverformungen haben wir die Drehwinkel an den freien Knoten 1 und 2 ($n_1 = 2$), die $g = 4$ Drehwinkel der zweifachen Knoten an den Lagern und die Verschiebung u der Kette ($p = 1$). Daher wird bei Unterdrückung der Stablängenänderungen nach Gl. (5)

$$\varrho = 1 + 3 \cdot 2 + 4 = 11.$$

Die Achsen a und b mögen am Balken und am Stiel nach den Richtungen y und z bzw. x und y zeigen. Dann gilt für die Balken

links $\dots \alpha_r = 0 \quad \beta_r = -\frac{u}{l}$

rechts $\dots \alpha_r = 0 \quad \beta_r = +\frac{u}{l}$

und für die Stäbe $\alpha_r = \frac{u}{h} \quad \beta_r = 0$.

Das Rahmentragwerk nach Bild 6 besteht aus einem regulären n -Eck, das von Ringstäben gebildet wird, die unter sich und mit Stielen starr verbunden sind. Die Stiele seien an den Auflagerknoten nach Belieben starr oder drehbar angeschlossen. Die zugeordnete Kette läßt sich nach Bild 7 durch Hinzufügen von n u -Stäben zu einem statisch bestimmten System ergänzen.

Mit $n_1 = n, p = n, g = 0$ hat man $\varrho = 3n_1 + p + g = 4n$.

Die Längen am Ringstab und Stiel seien l und s , ferner sei $\omega = \frac{2\pi}{n}$ und γ die Neigung des Stieles gegen die Lotrechte. Am Ringstab liege die Hauptachse a in der Ringebene und zeige nach innen, b zeige nach oben.

Eine lotrecht nach unten im Knoten m wirkende Last 1 wird durch einen Zug K im u -Stab bei m und einen Druck K bei $m - 1$ im Gleichgewicht gehalten, wobei

$$K = \frac{\text{tg } \gamma}{2 \cdot \sin \frac{\omega}{2}}$$

Das in Bild 6 angedeutete Kräftepaar am Ringstab $m - m + 1$ erfordert in den u -Stäben bei $m - 1$ und $m + 1$ den Druck K und bei m den Zug $2K$. Mit Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung erhält man die Beziehung zwischen α_r und den Verschiebungen u durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen:

$$l \alpha_r + K(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) = 0.$$

In entsprechender Weise finden wir für den Drehwinkel des Ringstabes $m - m + 1$ in der waagerechten Ebene:

$$l \beta_r + \frac{1}{\sin \omega} \cdot u_{m+1} - 2 \cdot \text{ctg } \omega u_m + \frac{1}{\sin \omega} \cdot u_{m-1} = 0.$$

Bei dem Stiel zeige von außen gesehen die Hauptachse a nach rechts und b nach innen. Eine radial in der Ringebene am Punkt m nach innen gerichtete Last 1 erzeugt in den u -Stäben bei m und $m - 1$

Kräfte: $\pm \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{\omega}{2}}$

und eine der Richtung von a entgegengesetzt wirkende Last 1

Kräfte: $-\frac{1}{\cos \frac{\omega}{2}}$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen liefert somit für den Stiel bei m :

$$s \cdot \cos \gamma \alpha_r - \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{\omega}{2}} (u_m - u_{m-1}) = 0$$

$$s \beta_r + \frac{1}{2 \cdot \cos \frac{\omega}{2}} (u_m + u_{m-1}) = 0.$$

Nach Betrachtung dieser Beispiele wenden wir uns wieder der allgemeinen Erörterung der Formänderungen zu.

Die relative Verdrehung der Endquerschnitte infolge der Drillung des Stabes werde mit τ bezeichnet, die positiven Richtungen in i und k sind einander zugekehrt.

Schließlich erleide der Stab noch die als Zunahme positiv gezählte Längenänderung Δs . Die acht Größen $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_r, \beta_i, \beta_k, \beta_r, \tau$ und Δs bezeichnen wir als die Stabverzerrungen. Bild 8 stellt die Projektion der Biegelinie parallel zur ersten Hauptachse a mit den Winkeln α_i, α_k und α_r dar.

Die auf Hauptachsen bezogenen Biegemomente am Stab seien M_x und M_y , das Drehmoment M_d und die Normalkraft N . Die an den Endquerschnitten bei i und k wirkenden Kräfte sollen zweckentsprechend als Summe zweier Bestandteile dargestellt werden:

$$(6) \quad \begin{cases} M_{ix} = M_{ix}^{(0)} + X_i & M_{kx} = M_{kx}^{(0)} + X_k \\ M_{iy} = M_{iy}^{(0)} + Y_i & M_{ky} = M_{ky}^{(0)} + Y_k \\ M_{id} = M_{id}^{(0)} + D & N_i = N_i^{(0)} + S \\ M_{kd} = M_{kd}^{(0)} + D & N_k = N_k^{(0)} + S. \end{cases}$$

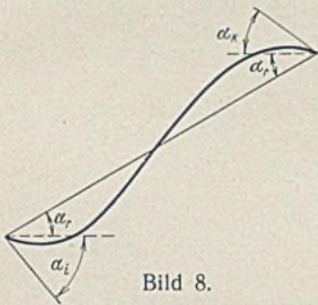


Bild 8.

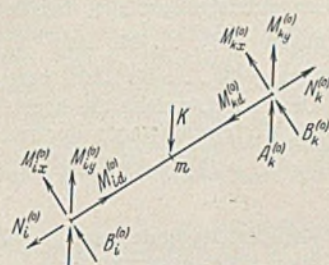


Bild 9.

Sämtliche Biegemomente sollen in dem für die Tangentendrehwinkel festgelegten Sinn positiv gezählt werden (Bild 2). Die Vorzeichen von D und S entsprechen denen von τ und Δs .

Die mit dem oberen Index (0) versehenen Größen sollen die Kräfte bedeuten, welche die gegebenen Stablasten bei unverschieblich und undrehbar im Raum festgelegten Knoten und dem Stabanschluß entsprechend erzeugen würden, und mit denen sie nach Hinzufügen entsprechender Querkräfte in i und k im Gleichgewicht sind (Bild 9). Dieses Kräfte-system entspricht mit anderen Worten der Annahme, daß sämtliche Grundverformungen w verschwinden. Beispielsweise erzeugt eine zur Stabachse und der Hauptachse a senkrecht stehende Last K bei beiderseitiger Einspannung (Bild 10):

$$(7) \quad M_{ix}^{(0)} = -K \cdot \frac{x \cdot x'^2}{l^2} \quad M_{kx}^{(0)} = +K \cdot \frac{x^2 \cdot x'}{l^2}$$

und bei einseitiger Einspannung in i (Bild 11):

$$(8) \quad M_{ix}^{(0)} = -\frac{Kl}{2} \left(\frac{x'}{l} - \frac{x'^3}{l^3} \right) \quad M_{kx}^{(0)} = 0.$$

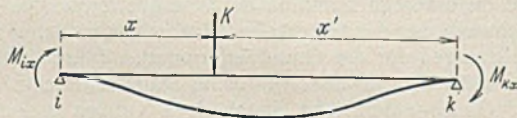


Bild 10.

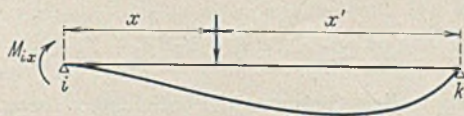


Bild 11.

Das zweite aus den Größen $X \dots$ bis S bestehende und noch zu überlagernde Kräfte-system (Bild 12) entspricht, kurz ausgedrückt, den Auflagerverschiebungen, d. h. den Bewegungen der Knoten, welchen die Stäbe den geometrischen Anschlußbedingungen entsprechend folgen. Diese Kräfte können somit als homogene lineare Funktionen der Grundverformungen aufgefaßt werden. Wir stellen sie zunächst in ihrer Abhängigkeit von den Stabverzerrungen dar.

Um zu einer allgemeinen Darstellung zu gelangen, greifen wir die Fälle drehfester Anschlüsse an den Achsen a und b , und zwar beiderseits in i und k oder einseitig in i heraus. Hierbei gelten für den Winkel zwischen Sehne und Tangente (Bild 8) entweder die Beziehungen

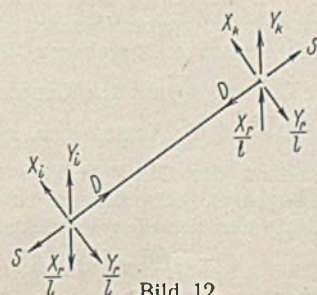


Bild 12.

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_r &= \frac{l'}{6} (2X_i - X_k) & \beta_i + \beta_r &= \frac{l''}{6} (2Y_i - Y_k) \\ \alpha_k + \alpha_r &= \frac{l'}{6} (-X_i + 2X_k) & \beta_k + \beta_r &= \frac{l''}{6} (-Y_i + 2Y_k) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_r &= \frac{l'}{3} \cdot X_i & \beta_i + \beta_r &= \frac{l''}{3} \cdot Y_i \\ X_k &= 0 & Y_k &= 0. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung wurde $l' = \frac{l}{EJ_a}$ und $l'' = \frac{l}{EJ_b}$ gesetzt.

Die Auflösung ergibt entweder

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{1}{l'} (4\alpha_i + 2\alpha_k + 6\alpha_r) & Y_i &= \frac{1}{l''} (4\beta_i + 2\beta_k + 6\beta_r) \\ X_k &= \frac{1}{l'} (2\alpha_i + 4\alpha_k + 6\alpha_r) & Y_k &= \frac{1}{l''} (2\beta_i + 4\beta_k + 6\beta_r) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{1}{l'} (3\alpha_i + 3\alpha_r) & Y_i &= \frac{1}{l''} (3\beta_i + 3\beta_r) \\ X_k &= 0 & Y_k &= 0. \end{aligned}$$

In allgemeiner Form schreiben wir:

$$(9) \quad \begin{cases} X_i = \frac{1}{l'} (z_{ii}\alpha_i + z_{ik}\alpha_k + z_{ir}\alpha_r) \\ X_k = \frac{1}{l'} (z_{ki}\alpha_i + z_{kk}\alpha_k + z_{kr}\alpha_r) \\ X_r = \frac{1}{l'} (z_{ri}\alpha_i + z_{rk}\alpha_k + z_{rr}\alpha_r) \\ Y_i = \frac{1}{l''} (z_{ii}\beta_i + z_{ik}\beta_k + z_{ir}\beta_r) \\ Y_k = \frac{1}{l''} (z_{ki}\beta_i + z_{kk}\beta_k + z_{kr}\beta_r) \\ Y_r = \frac{1}{l''} (z_{ri}\beta_i + z_{rk}\beta_k + z_{rr}\beta_r) \end{cases}$$

Für spätere Zwecke sind die Werte $X_r = X_i + X_k$ und $Y_r = Y_i + Y_k$ hinzugefügt worden.

Die Beiwerte z_{ii} usw. sind aus nachfolgender Tabelle zu entnehmen:

	z_{ii}	z_{ik}	z_{kk}	z_{ir}	z_{kr}	z_{rr}
(9a) drehfeste Achsen a bzw. b in i und k	4	2	4	6	6	12
drehfeste Achsen a bzw. b nur in i	3	0	0	3	0	3
drehfeste Achsen a bzw. b nur in k	0	0	3	0	3	3
drehfreie Achsen a bzw. b in i und k	0	0	0	0	0	0

Hiermit kann man in leicht erkennbarer Weise die 16 möglichen Fälle kombinieren.

Für die Bestimmung der Koeffizienten bei veränderlichem Trägheitsmoment verweisen wir auf die in Fußnote 1) an zweiter Stelle angegebene Quelle.

Es gilt ferner immer:

$$\begin{aligned} z_{ki} &= z_{ik} & z_{rk} &= z_{kr} = z_{kk} + z_{ki} \\ z_{ri} &= z_{ir} = z_{ii} + z_{ik} & z_{rr} &= z_{ir} + z_{kr}. \end{aligned}$$

Für D und S gelten noch die Beziehungen:

$$(10) \quad D = \frac{GJ_d}{l} \cdot \tau$$

$$(11) \quad S = \frac{EF}{l} \cdot \Delta s.$$

Die acht Größen $X_i \dots$ bis S bezeichnen wir als w -Kräfte; sie verschwinden ebenso wie die acht Stabverzerrungen gleichzeitig mit den Grundverformungen.

Wir drücken jetzt noch die im Stab aufgespeicherte Formänderungsarbeit durch die Stabverzerrungen aus.

Zur Umformung von

$$A = \int M_x^2 \cdot \frac{dx}{2EJ_a} + \int M_y^2 \cdot \frac{dx}{2EJ_b} + \int M_d^2 \cdot \frac{dx}{2GJ_d} + \int N^2 \cdot \frac{dx}{2EF}$$

haben wir z. B.

$$M_x = M_x^{(0)} + X_i \cdot \frac{x'}{l} - X_k \cdot \frac{x}{l},$$

hieraus folgt:

$$\int M_x^2 \cdot \frac{dx}{2EJ_a} = \int M_x M_x^{(0)} \cdot \frac{dx}{2EJ_a} + \frac{1}{2} \cdot X_i \int M_x \cdot \frac{x'}{l} \cdot \frac{dx}{EJ_a} - \frac{1}{2} \cdot X_k \int M_x \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{dx}{EJ_a}.$$

Hierbei ist aber

$$\int M_x \cdot \frac{x'}{l} \cdot \frac{dx}{EJ_a} = \alpha_i + \alpha_r$$

und

$$\int M_x \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{dx}{EJ_b} = -(\alpha_k + \alpha_r),$$

ferner ist noch
$$\int M_x M_x^{(o)} \cdot \frac{dx}{2EJ_a} = \int M_x^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EJ_a} + \frac{1}{2} \cdot X_i \int M_x^{(o)} \cdot \frac{x'}{l} \cdot \frac{dx}{EJ_a} - \frac{1}{2} \cdot X_k \int M_x^{(o)} \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{dx}{EJ_a}.$$
 Der Wert der beiden letzten Glieder verschwindet stets, weil der Einspannung entsprechend entweder die Integrale oder X_i und X_k verschwinden.

Im ganzen hat man
$$\int M_x^2 \cdot \frac{dx}{2EJ_a} = \int M_x^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EJ_a} + \frac{1}{2} (X_i \alpha_i + X_k \alpha_k + X_r \alpha_r).$$

In analoger Weise erhält man
$$\int M_y^2 \cdot \frac{dx}{2EJ_b} = \int M_y^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EJ_b} + \frac{1}{2} (Y_i \beta_i + Y_k \beta_k + Y_r \beta_r).$$

Schließlich erhalten wir noch
$$\int M_d^2 \cdot \frac{dx}{2GJ_d} = \int (M_d^{(o)} + D)^2 \cdot \frac{dx}{2GJ_d} = \int M_d^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2GJ_d} + \frac{1}{2} \cdot D \tau$$

$$\int N^2 \cdot \frac{dx}{2EF} = \int (N^{(o)} + S)^2 \cdot \frac{dx}{2EF} = \int N^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EF} + \frac{1}{2} \cdot S \Delta s.$$

Somit folgt für A der Ausdruck:
$$(12) A = \int M_x^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EJ_a} + \int M_y^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EJ_b} + \int M_d^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2GJ_d} + \int N^{(o)2} \cdot \frac{dx}{2EF} + \phi,$$

wobei
$$(13) \phi = \frac{1}{2} (X_i \alpha_i + X_k \alpha_k + X_r \alpha_r + Y_i \beta_i + Y_k \beta_k + Y_r \beta_r + D \tau + S \Delta s).$$

Für das ganze Rahmentragwerk ergibt sich die aufgespeicherte Formänderungsarbeit durch Summierung der für die einzelnen Stäbe gefundenen Beiträge:

$$\mathfrak{A} = \Sigma A.$$

Es sei nun v die Komponente der Verschiebung des Angriffspunktes einer gegebenen Last K in Richtung derselben, dann ist die gesamte potentielle Energie des Systems:

$$\Pi = \mathfrak{A} - \Sigma K v.$$

Die Summe erstreckt sich über sämtliche Lasten. Zu ihrer Umformung betrachten wir einen einzelnen Stab, dessen wirkliche Formänderung in Bild 13 angedeutet ist. Dabei sei ein Punkt m nach m' verschoben. Die in m angreifende Last K erzeuge bei festgelegten Knoten die in Bild 9 dargestellten Reaktionen. Zur Aufstellung einer Arbeitsgleichung bezeichnen wir die Arbeit der Reaktionen an den wirklichen Wegen von Bild 13 mit $-U$ und erhalten:

$$K v - U = \int M_x^{(o)} M_x \cdot \frac{dx}{EJ_a} + \int M_y^{(o)} M_y \cdot \frac{dx}{EJ_b} + \int M_d^{(o)} M_d \cdot \frac{dx}{GJ_d} + \int N^{(o)} N \cdot \frac{dx}{EF}$$

oder nach Umformung der rechten Seite, wie bereits oben durchgeführt,
$$K v - U = \int M_x^{(o)2} \cdot \frac{dx}{EJ_a} + \int M_y^{(o)2} \cdot \frac{dx}{EJ_b} + \int M_d^{(o)2} \cdot \frac{dx}{GJ_d} + \int N^{(o)2} \cdot \frac{dx}{EF}.$$

Hiermit erhalten wir zunächst für einen Stab nach Gl. (12)

$$A - K v = \phi - U.$$

Summieren wir über sämtliche Stäbe und setzen dabei $\Sigma U = L$, so ergibt sich für die potentielle Energie des Systems der endgültige Ausdruck:

$$(14) \quad \Pi = \Sigma \phi - L.$$

Die Größe L besitzt eine anschauliche Bedeutung:

Verteilt man die Stablasten auf die Knoten gemäß den Auflagerkräften, die bei festgelegten Knoten dem beiderseitigen Anschluß entsprechen, so stellt L die Arbeit dieser aus bekannten Momenten und Einzellasten bestehenden Knotenlasten dar, welche diese an den durch die Grundverformungen w bedingten Drehungen und Verschiebungen der Knoten leisten. Dies folgt ohne weiteres daraus, daß die eingeführten, den Stablasten statisch äquivalenten Knotenlasten durch Umkehrung der Reaktion erhalten werden.

Bei kleinen Verschiebungen stellen wir L als lineare homogene Funktion der Grundverformungen dar und setzen

$$(14a) \quad L = \sum_{m=1}^{\rho} L_m w_m.$$

L_m kann dabei als Arbeit der Knotenlasten bei dem Verschiebungszustand $w_m = 1$ aufgefaßt werden.

3. Eigenschaften der Energiefunktion ϕ .

Bestimmungsgleichungen für die Grundverformungen.

ϕ stellt die Arbeit dar, welche die auf ihren Endbetrag angewachsenen w -Kräfte an den gleichzeitig auf ihren Endbetrag angewachsenen Stab-

verzerrungen geleistet haben. Durch Benutzung von (9), (10) u. (11) erhalten wir ϕ als homogene quadratische Funktion der acht Stabverzerrungen:

$$(15) \quad \phi = \frac{z_{ii}}{2l'} \cdot \alpha_i^2 + \frac{z_{ik}}{l'} \cdot \alpha_i \alpha_k + \frac{z_{ir}}{l'} \cdot \alpha_i \alpha_r + \dots + \frac{z_{kk}}{2l'} \cdot \alpha_k^2 + \frac{z_{kr}}{l'} \cdot \alpha_k \alpha_r + \dots + \frac{z_{rr}}{l'} \cdot \alpha_r^2 + \dots + \frac{GJ_d}{2l} \cdot \tau^2 + \frac{EF}{2l} \cdot \Delta s^2.$$

Die Ableitungen nach den Veränderlichen $\alpha_i \dots$ bis Δs bezeichnen wir mit $\phi'(\alpha_i) \dots$ bis $\phi'(\Delta s)$.

Man findet z. B.

$$\phi'(\alpha_i) = \frac{1}{l'} (z_{ii} \alpha_i + z_{ik} \alpha_k + z_{ir} \alpha_r) = X_i.$$

Auf diese Weise gelangen wir zu den Beziehungen:

$$(16) \quad \begin{cases} X_i = \phi'(\alpha_i) & X_k = \phi'(\alpha_k) & X_r = \phi'(\alpha_r) \\ Y_i = \phi'(\beta_i) & Y_k = \phi'(\beta_k) & Y_r = \phi'(\beta_r) \\ D = \phi'(\tau) & S = \phi'(\Delta s). \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt zwei verschiedene durch obere Indizes (m) und (n) gekennzeichnete Zustände, bei denen w -Kräfte $X_i^{(m)} \dots$ bis $S^{(m)}$ Verzerrungen $\alpha_i^{(m)} \dots$ bis $\Delta s^{(m)}$ bzw. w -Kräfte $X_i^{(n)} \dots$ bis $S^{(n)}$ Verzerrungen $\alpha_i^{(n)} \dots$ bis $\Delta s^{(n)}$ erzeugen.

Die Arbeit, welche die konstant gedachten Kräfte der ersten Gruppe an den Verzerrungswegen der zweiten Gruppe leisten, beträgt:

$$(17) \quad \phi_{mn} = X_i^{(m)} \alpha_i^{(n)} + X_k^{(m)} \alpha_k^{(n)} + X_r^{(m)} \alpha_r^{(n)} + Y_i^{(m)} \beta_i^{(n)} + Y_k^{(m)} \beta_k^{(n)} + Y_r^{(m)} \beta_r^{(n)} + D^{(m)} \tau^{(n)} + S^{(m)} \Delta s^{(n)}.$$

Andererseits findet man für die Arbeit der zweiten Kräftegruppe an den Wegen der ersteren:

$$(18) \quad \phi_{nm} = X_i^{(n)} \alpha_i^{(m)} + X_k^{(n)} \alpha_k^{(m)} + X_r^{(n)} \alpha_r^{(m)} + Y_i^{(n)} \beta_i^{(m)} + Y_k^{(n)} \beta_k^{(m)} + Y_r^{(n)} \beta_r^{(m)} + D^{(n)} \tau^{(m)} + S^{(n)} \Delta s^{(m)}.$$

Die rechten Seiten der Gl. (17) u. (18) stimmen aber überein, wie sich durch Benutzung der Beziehungen (9), (10) u. (11) zwischen den w -Kräften und Stabverzerrungen leicht nachweisen läßt. Es gilt daher

$$(19) \quad \phi_{mn} = \phi_{nm}.$$

Diese Gleichheit entspricht dem Betti'schen Reziprozitätssatz, der allgemein besagt: Wirken zwei Systeme von Kräften, so ist die Arbeit, welche die Kräfte des ersten Systems an den Verschiebungen des zweiten leisten, gleich der Arbeit, welche die Kräfte des zweiten Systems an den Verschiebungen des ersten leisten.

Verschwindet eine der w -Kräfte, z. B. X_k , infolge drehbaren Anschlusses identisch, was dadurch zum Ausdruck gelangt, daß nach Aufstellung (9a) $z_{ki} = z_{kk} = z_{kr} = 0$ zu setzen ist, so folgt nach Gl. (16) aus $\phi'(\alpha_k) = 0$, daß ϕ von der betreffenden Stabverzerrung α_k unabhängig ist. Allgemein hängt ϕ nur von Stabverzerrungen ab, die rein geometrisch durch die Grundverformungen bedingt sind und sich in erster Annäherung als homogene lineare Funktionen derselben darstellen lassen. Somit ist ϕ als homogene quadratische Funktion der Grundverformungen darstellbar.

Zum Nachweis der fundamentalen Eigenschaft, welche zu den Bestimmungsgleichungen für die Grundverformungen führt, betrachten wir den Zuwachs, welchen die über sämtliche Stäbe erstreckte $\Sigma \phi$ erhält, falls die der Gleichgewichtslage angehörigen Größen w um beliebige kleine Werte δw geändert werden. Wir haben zunächst

$$\delta \phi = \phi'(\alpha_i) \delta \alpha_i + \dots + \phi'(\Delta s) \delta \Delta s$$

oder nach Gl. (16)

$$\delta \phi = X_i \delta \alpha_i + X_k \delta \alpha_k + X_r \delta \alpha_r + Y_i \delta \beta_i + Y_k \delta \beta_k + Y_r \delta \beta_r + D \delta \tau + S \delta \Delta s.$$

Zur Umformung sollen Gleichgewichtsbeziehungen benutzt werden, die sich aus folgenden Betrachtungen ergeben:

Verwandeln wir das belastete Rahmentragwerk durch Aufheben aller drehfesten Stabanschlüsse in die zugeordnete Kette, so bleibt das Gleichgewicht erhalten, wenn wir M_{xi}, M_{yi}, M_{di} sowie M_{xk}, M_{yk}, M_{dk} an den Stäben und die entgegengesetzten Momente an den Knoten als äußere Kräfte hinzufügen.

Wir betrachten zunächst das Gleichgewicht eines Knotens. Neben den von den angeschlossenen Stäben übertragenen Momenten möge auch noch ein äußeres gegebenes Moment M_i angreifen. Dem Knoten werde die Drehung $\delta \vec{v}$ mit den Komponenten $\delta x, \delta y, \delta z$ erteilt. Die Projektionen von $\delta \vec{v}$ auf die Achsen a, b, c seien $\delta \alpha_i, \delta \beta_i, \delta \gamma_i$; man erhält sie durch Variation der Gl. (1) bis (3). Bei Auflagerknoten ist $\delta \vec{v}$ den Lagerbedingungen entsprechend zu wählen. Dann folgt allgemein aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$-\Sigma (M_{xi} \delta \alpha_i + M_{yi} \delta \beta_i + M_{di} \delta \gamma_i) + M_i \delta \vartheta_i = 0,$$

wobei $\delta \vartheta_i$ die Projektion von $\delta \vec{v}$ auf die Richtung von M_i bedeutet.

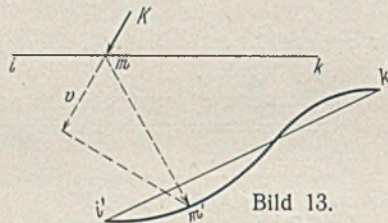


Bild 13.

Zur Umformung drücken wir die Momente nach Gl. (6) aus und erhalten nach Umstellung der Summanden unter gleichzeitiger Anwendung von $\delta \gamma_i + \delta \gamma_k = \delta \tau$:

$$(21) \quad \sum_r (X_i \delta \alpha_i + X_k \delta \alpha_k + Y_i \delta \beta_i + Y_k \delta \beta_k + D \tau) = \delta L_1.$$

Dabei ist

$$\delta L_1 = \sum_i [M_i \delta \varphi_i - \sum (M_{x_i}^{(o)} \delta \alpha_i + M_{y_i}^{(o)} \delta \beta_i + M_{z_i}^{(o)} \delta \gamma_i)].$$

Es bedeutet hierbei Σ die Summenbildung von Größen an einem einzelnen Knoten, \sum_i die Summierung von Werten, die für die einzelnen Knoten, und \sum_r von Werten, die für die einzelnen Stäbe aufgestellt sind, über alle Knoten bzw. Stäbe.

Zwecks Formulierung einer weiteren Gleichgewichtsbeziehung denken wir uns an der Kette den zugfesten Anschluß zwischen Stab und Knoten unterbrochen, indem wir etwa bei k einen Langlochanschluß annehmen. Dann sind zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts noch die beiden Kräfte N_k an Stab und Knoten einzuführen (Bild 14). Dem so entstandenen Gebilde erteilen wir eine virtuelle Verschiebung aus der Gleichgewichtslage, indem wir die p Grundverformungen u in $u + \delta u$ übergehen lassen und ferner die Entfernungen der durch Stäbe verbundenen Knoten um $\delta \mathcal{L}$ vergrößern. Die Knotendrehwinkel sollen ungeändert bleiben, d. h. es sei $\delta \nu = 0$. Bei dieser Verschiebung werden die Stabsehnung zwangsläufig um die Winkel $\delta \alpha_r$ und $\delta \beta_r$ gedreht, und die Knoten führen Verschiebungen aus, deren Projektionen auf die Richtungen a, b und c mit $\delta a, \delta b$ und δc bezeichnet werden.

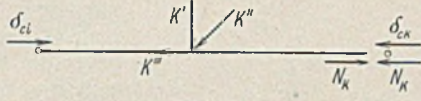


Bild 14.

Die Endmomente führen wir wieder nach Gl. (6) ein und zerlegen die äußeren Kräfte am Stab in K' und K'' senkrecht und K''' parallel zur Stabachse und ermitteln die von den Kräften am Stab und Knoten bei der Verschiebung geleistete Arbeit in Teilen:

1. X_i, X_k, Y_i und Y_k liefern:
 $-(X_i + X_k) \delta \alpha_r - (Y_i + Y_k) \delta \beta_r = -(X_r \delta \alpha_r + Y_r \delta \beta_r).$
2. Die aus den Kräften K' und K'' und den Momenten $M_{x_i}^{(o)}, M_{y_i}^{(o)}, M_{y_k}^{(o)}$ und $M_{x_k}^{(o)}$ bestehende Gruppe würde bei festgelegten Knotenreaktionen hervorrufen, die wir mit $A_i^{(o)}$ und $A_k^{(o)}$ bzw. $B_i^{(o)}$ und $B_k^{(o)}$ bezeichnen (Abb. 9).

Aus statischen Gründen ist dann die Arbeit dieser Gruppe gleich $-(A_i^{(o)} \delta a_i + A_k^{(o)} \delta a_k + B_i^{(o)} \delta b_i + B_k^{(o)} \delta b_k).$

3. Die Arbeit der Komponenten K''' und der beiden Kräfte N_k am Stab und Knoten beträgt

$$(N_k - \sum K''') \delta c_i + N_k \delta c_k,$$

wofür auch aus statischen Gründen $N_i \delta c_i + N_k \delta c_k$ geschrieben werden darf. Mit Benutzung von Gl. (6) und der geometrischen Beziehung $\delta c_i + \delta c_k = -\delta \mathcal{L}$ folgt schließlich der Betrag:

$$-S \delta \mathcal{L} + N_i^{(o)} \delta c_i + N_k^{(o)} \delta c_k.$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen sagt aus, daß die Summe aller Arbeiten, für sämtliche Stäbe genommen, verschwindet. Dadurch erhalten wir die Beziehung:

$$(22) \quad \sum_r (X_r \delta \alpha_r + Y_r \delta \beta_r + S \delta \mathcal{L}) = \delta L_2,$$

wobei
$$\delta L_2 = \sum_i \sum (-A_i^{(o)} \delta a_i - B_i^{(o)} \delta b_i + N_i^{(o)} \delta c_i).$$

Zählen wir Gl. (21) u. (22) zusammen, so folgt mit Rücksicht auf Gl. (20) $\sum \delta \phi = \delta L_1 + \delta L_2.$

Entsinnt man sich jetzt der Bedeutung der in Gl. (14) eingeführten Größe L , so erkennt man ohne weiteres, daß $\delta L_1 + \delta L_2$ den Zuwachs δL dieser Größe darstellt, falls die Grundverformungen w der Gleichgewichtslage in $w + \delta w$ übergehen.

Hiermit gelangt man zu dem Resultat:

$$(23) \quad \delta \Pi = \delta [\sum \phi - L] = 0,$$

d. h. in der Gleichgewichtslage entsprechen die Grundverformungen allgemein einem stationären Wert der potentiellen Energie, der bei stabilen Systemen ein Minimum darstellt.

Hieraus folgt unter Beachtung von Gl. (14a) für die ρ Größen w ein System von ρ Gleichungen:

$$(24) \quad \sum_r \frac{\partial \phi}{\partial w_m} = L_m; \quad m = 1, 2, \dots, \rho.$$

Gleichzeitig kommt hierbei das wichtige Resultat zum Ausdruck, daß man zur Bestimmung der Grundverformungen an Stelle der gegebenen Lasten Kräfte einführen darf, die von jedem Stab unabhängig auf die festgelegten Knoten übertragen würden. Diese Kräfte sollen als „Knotenlasten“ bezeichnet werden.

Wir betrachten noch die in Gl. (24) auftretende Ableitung $\frac{\partial \phi}{\partial w_m}$.

Als lineare Funktion der Größen w setzen wir z. B.

$$(25) \quad \alpha_i = \sum_{n=1}^{\rho} \alpha_i^{(n)} w_n, \quad \alpha_r = \sum_{n=1}^{\rho} \alpha_r^{(n)} w_n,$$

wobei $\alpha_i^{(n)}$ und $\alpha_r^{(n)}$ die Drehwinkel infolge $w_n = 1$ darstellen. In gleicher Weise können wir alle anderen Stabverzerrungen ausdrücken. Mit Rücksicht auf Gl. (16) erhalten wir

$$\frac{\partial \phi}{\partial w_m} = X_i \alpha_i^{(m)} + X_k \alpha_k^{(m)} + X_r \alpha_r^{(m)} + \dots + S \mathcal{L}^{(m)}.$$

Nach dem Reziprozitätssatz können wir auch setzen

$$(24a) \quad \frac{\partial \phi}{\partial w_m} = X_i^{(m)} \alpha_i + X_k^{(m)} \alpha_k + X_r^{(m)} \alpha_r + \dots + S^m \mathcal{L}.$$

Führt man noch für die Stabverzerrungen ihre Werte nach dem Vorbild von Gl. (25) ein, so hat man schließlich

$$\frac{\partial \phi}{\partial w_m} = \sum_{n=1}^{\rho} \phi_{mn} w_n,$$

wobei ϕ_{mn} durch Gl. (17) dargestellt wird mit der besonderen Bestimmung, daß die oberen Indizes (m) und (n) auf Werte hindeuten, die den Verschiebungen $w_m = 1$ bzw. $w_n = 1$ entsprechen.

Zur endgültigen Formulierung der Bestimmungsgleichungen für die Größen w setzen wir den gefundenen Ausdruck in Gl. (24) ein, vertauschen noch die Reihenfolge der Summation und erhalten

$$(26) \quad \sum_n a_{mn} w_n = L_m; \quad m = 1, 2, \dots, \rho.$$

Hierbei ist

$$(27) \quad a_{mn} = \sum_r \phi_{mr},$$

und es gilt der Satz

$$a_{mn} = a_{nm}$$

Die Anwendung der Formel (27) erfordert lediglich die Ermittlung der Beiwerte $\alpha_i^{(m)} \dots S^{(m)}$ auf Grund meist sehr einfacher, rein kinematischer Erwägungen. Die Größen $X^{(m)} \dots S^{(m)}$ werden dann mit Hilfe der Gl. (9), (10) u. (11) bestimmt.

Der allgemeinen Formel (27) läßt sich eine zweite zur Berechnung von a_{mn} zur Seite stellen.

Zu dem Zwecke stellen wir die Aufgabe, Knotenlasten zu bestimmen, die beliebig vorgegebene Grundverformungen erzeugen. Die Lösung folgt aus Gl. (9) in Verbindung mit den kinematischen Beziehungen nach Art von Gl. (25).

Man erhält die Knotenlasten durch Zusammensetzen der w -Kräfte $X_r, Y_r, D, \frac{X_r}{l}, \frac{Y_r}{l}$ und S (Bild 12), welche an den Stabenden wirken, die am Knoten zusammenstoßen. Das Resultat bestehe aus dem Moment mit den Komponenten M_x, M_y, M_z und der Einzellast mit den Komponenten P_x, P_y, P_z .

Diese Größen erfüllen zunächst zusammen mit den auf den Knoten übertragenen Kräften, d. h. den umgekehrten w -Kräften, die Gleichgewichtsbedingungen; zweitens folgt die Eindeutigkeit aus folgender Betrachtung:

Die Knotendrehwinkel x, y, z und die Knotenverschiebungen ξ, η, ζ bilden, wie im Abschnitt 1 erläutert wurde, ein unabhängiges System von Grundverformungen; ferner geht aus Gl. (12) hervor, daß bei fehlenden Stablasten die gesamte innere Energie darstellt. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen hat man daher

$$(28) \quad \sum_i (M_x \delta x + M_y \delta y + M_z \delta z + P_x \delta \xi + P_y \delta \eta + P_z \delta \zeta) = \sum_i \delta \phi,$$

wobei
$$\delta \phi = X_i \delta \alpha_i + \dots + S \delta \mathcal{L}.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe noch ein zweites System von Knotenlasten, die mit $\bar{M}_x \dots$ bis \bar{P}_z bezeichnet werden sollen, so würde eine der Gl. (28) analoge bestehen. Durch Subtraktion erhalte man

$$\sum_i (M_x - \bar{M}_x) \delta x + (M_y - \bar{M}_y) \delta y + (M_z - \bar{M}_z) \delta z + (P_x - \bar{P}_x) \delta \xi + (P_y - \bar{P}_y) \delta \eta + (P_z - \bar{P}_z) \delta \zeta = 0.$$

Bei der Unabhängigkeit der Variationen $\delta x \dots \delta \zeta$ folgt aber daraus, daß die Klammerwerte verschwinden, d. h. die Knotenlasten stimmen überein.

Die Knotenlasten, welche die Verschiebung $w_n = 1$ bewirken, kennzeichnen wir durch den oberen Index (n). Wir können für diesen Zustand Gl. (26) ansetzen, indem wir neben $w_n = 1$ alle anderen Größen w gleich Null setzen und für L_m die Arbeit bilden, welche die Knotenlasten an den zum Verschiebungszustand $w_m = 1$ gehörigen Wegen leisten. Dadurch erhalten wir

$$(29) \quad a_{mn} = \sum (M_x^{(n)} x^{(m)} + M_y^{(n)} y^{(m)} + M_z^{(n)} z^{(m)} + P_x^{(n)} \xi^{(m)} + P_y^{(n)} \eta^{(m)} + P_z^{(n)} \zeta^{(m)}).$$

Nach dem Reziprozitätssatz bleibt dieser Wert bei Vertauschung der Indizes (m) und (n) unverändert. Wir haben daher die zweifache Deutung:

Der Koeffizient a_{mn} ist gleich der Arbeit der Knotenlasten des Zustandes $w_n = 1$ an den Wegen des Zustandes $w_m = 1$ oder gleich der Arbeit der Knotenlasten des Zustandes $w_m = 1$ an den Wegen des Zustandes $w_n = 1$. (Schluß folgt.)

Die neuen Bahnsteighallen des Bahnhofs Ankara (Türkei).

Von Dr.-Ing. C. J. Hoppe, Düsseldorf (vordem Rheinbrohl).
(Schluß aus Heft 18.)

Die Seitenhallen.

Die Binder der Seitenhallen sind mit Ausnahme des Binders in Reihe 1, der symmetrisch ist, wegen der einseitigen Auflagerung auf das Empfangsgebäude einhäutig ausgebildet (Bild 8). Als Stiele sind IP 65, als Riegel zusammengesetzte Träger aus Stegblech 610 · 10 und Gurtplatten \square 300 · 20 vorgesehen. Die langen Stiele endigen in Linienkipplagern, die — ähnlich wie bei der Mittelhalle — aus St 52 zusammengesgeschweißt sind; unter die kurzen Stiele auf der Gebäude-seite sind Einrollenlager aus Stahlguß untergesetzt. In den Ecken sind die Stege auf Gehrung gestoßen. An den außenstehenden langen Stielen sind die Binderarme des Kragdaches angeschlossen.

Beim symmetrischen, da frei stehenden Binder der Reihe 1 ist eine Glasschürze eingezogen (Bild 9). Vom Binder Reihe 17 beginnt nach Reihe 24 zu die einfache ein-stielige Überdachung; der Binder erhält daher zur Aufnahme der Pfetten dieser Überdachung auch noch einen nach innen gerichteten Kragarm und eine entsprechende Glasschürze (Bild 8).

Die Pfetten liegen mit ihrer Oberkante durchweg 140 mm über den Bindern; die unteren Flansche sind mit eingeschweißten Dreiecksblechen heruntergezogen. Die Innen- und Mittelpfetten sind I 26 bzw. IP 26, in den Endfeldern durch Beilagen auf den Gurten verstärkt. Die Randpfetten sind, da sie ja zusätzlich den waagerechten Winddruck auf das Lichtband aufzunehmen haben, aus geeigneten Profilen zu einem unsymmetrischen Querschnitt zusammengesetzt.

Die ein- und zweistieligen Überdachungen.

Die einstieligen Binder des westlichen Teiles von Bahnsteig 1 sowie des Bahnsteiges 2 sind sämtlich grundsätzlich gleich ausgeführt. Sie unterscheiden sich nur durch die Abmessungen der mit Rücksicht auf die verschiedenen Kragweiten verschieden gewählten Profile. Die Stiele bestehen durchweg aus IP 50 und IP 55; die Kragarme sind, dem Momentenverlauf entsprechend und auch aus ästhetischen Gründen, nach außen verjüngt und hierzu aus 10 mm-Blechen mit Gurtplatten \square 300 · 26 bzw. 300 · 30 zusammengesetzt (Bild 10). Bei den zweistieligen Bindern sind als Stiele IP 36 gewählt, während die Kragarme ähnlich wie bei den einstieligen Bindern ausgebildet sind.

Sämtliche Pfetten liegen auch hier 140 mm über den Kragarmobergurten und sind mit eingeschweißten Dreiecken in die Binder hineingezogen. Die Innenpfetten sind I-Normalprofile, die Mittelpfetten zwei C-Stähle, zwischen die die Entwässerungsrinne eingehängt ist, die Randpfetten zusammengesetzte Profile, ähnlich wie bei der Seitenhalle besprochen.

Die einstieligen Binder des Gepäckbahnsteiges haben, da durch den Fortfall der Glasschürzen und damit der seitlichen Windflächen sowie durch die geringere Dachbreite wesentlich kleinere Biegemomente auftreten, Stiele aus Normalprofilen I 50 und I 42 $\frac{1}{2}$, je nach dem Binderabstand erhalten. Als Randpfetten genügen hier C-Stähle.

Besondere Merkmale des Entwurfs.

Wie aus der Beschreibung und den Abbildungen zu ersehen, sind bei der baulichen Gestaltung in weitgehendstem Maße Peiner Träger verwendet worden. Hierfür sprachen sowohl wirtschaftliche wie auch ästhetische Gesichtspunkte. Die an sich schon sehr umfangreichen Schweißarbeiten würden sich stark erhöht haben, wenn man nicht auf die Peiner Profile zurückgegriffen hätte. Hierbei ist nicht nur an den Fortfall der Halsnähte, die bei aus Stegblechen und Gurtplatten zusammengesetzten Querschnitten erforderlich gewesen wären, gedacht; vielmehr konnten auch durchweg die sonst üblichen Aussteifungen und Querschotten entfallen, ein Vorteil, der nicht nur wirtschaftlich, sondern vor allem hinsichtlich der ästhetischen Wirkung der Konstruktion sehr ins Gewicht fällt, zumal gerade die aus P-Trägern bestehenden Binderstiele unmittelbar vor den Augen der Betrachter liegen.

Alle Rechte vorbehalten.

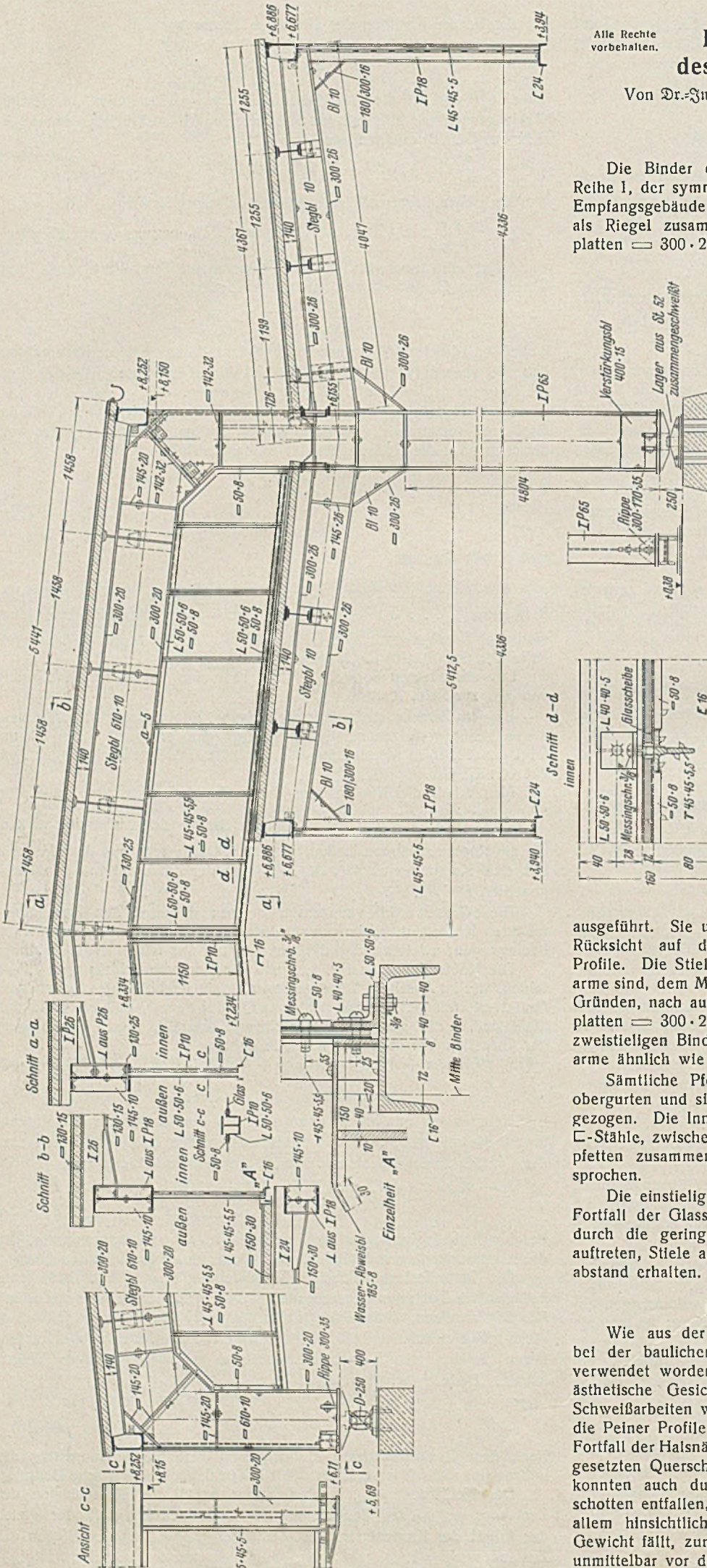


Bild 8. Einhäutiger Binder der Seitenhalle.

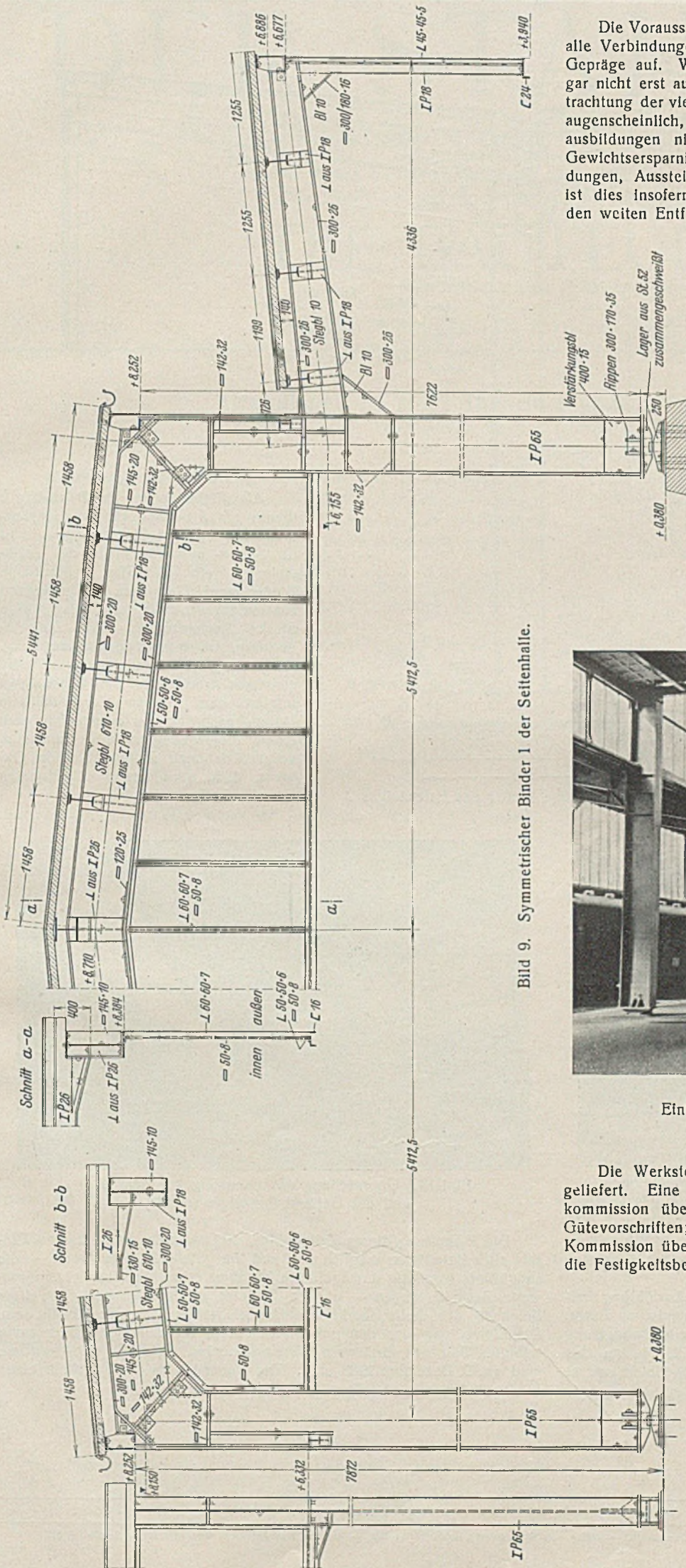


Bild 9. Symmetrischer Binder 1 der Seitenhalle.

Die Voraussetzung, durchweg in der Werkstatt und auf der Baustelle alle Verbindungen zu schweißen, drückt naturgemäß dem Entwurf sein Gepräge auf. Wenn auch in diesem Falle ein genieteter Gegenentwurf gar nicht erst aufgestellt ist, so ist es doch, insbesondere bei der Betrachtung der vielen biegungsfesten Ecken der großen und kleinen Binder, augenscheinlich, daß sich in genieteter Ausführung ähnlich glatte Eckausbildungen nicht hätten verwirklichen lassen. Auf die wesentliche Gewichtsersparnis durch die Vereinfachung der Anschlüsse, Stoßausbildungen, Aussteifungen, sei nur kurz hingewiesen. Für Auslandsbauten ist dies insofern ein wesentlicher Gesichtspunkt, als die Frachten bei den weiten Entfernungen eine fühlbare Rolle spielen.

Das Gewicht der Stahlkonstruktion beträgt 825 t, die sich wie folgt aufgliedern:

Bahnsteig 1 für die Mittel- und Seitenhallen	319 t = 38,7%
für die einstiegligen Dächer	108 t = 13,1%
Gepäckbahnsteig	122 t = 14,8%
Bahnsteig 2	276 t = 33,4%
Gesamt	825 t = 100,0%

Hierin ist das Gewicht von 11,8 t = 148 000 Stück Elektroden eingeschlossen, von denen 8,0 t in der Werkstatt und 3,8 t auf der Baustelle verschweißt wurden. Der Elektroden-Verbrauch, nach Gewicht beurteilt, stellt sich somit auf etwa 1,5% der Fertigungskonstruktion; hieraus ist zu erkennen, daß durch die weitgehende Verwendung von Peiner Trägern — etwa 110 t P-Träger sind eingebaut — der Elektrodenbedarfsbedarf verhältnismäßig gering gehalten werden konnte. Insgesamt sind etwa 20 000 lfdm Schweißnähte, d. h. 24 m/t Konstruktion erforderlich gewesen.

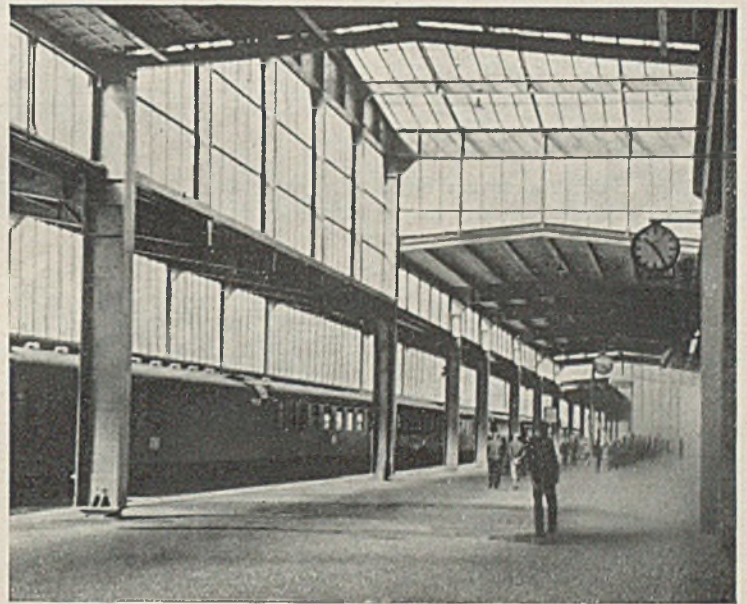


Bild 11. Einblick in die Mittelhalle des Bahnsteiges 1.

Werkstattarbeiten.

Die Werkstoffe wurden in Güte St 37 mit Werkbescheinigung angeliefert. Eine in Deutschland einige Monate weilende Abnahme-Kommission überzeugte sich durch Stichproben von der Einhaltung der Gütevorschriften; Beanstandungen sind nicht vorgekommen. Die gleiche Kommission überprüfte sodann die gesamten Entwurfszeichnungen sowie die Festigkeitsberechnung und überwachte die Werkstattarbeiten.

Der Wunsch, die Bauteile bereits in der Werkstatt zu möglichst großen Einheiten zusammenzuschweißen, fand seine Begrenzung in den Beförderungsmöglichkeiten, wobei Gewicht und Sperrigkeit der Versandstücke in gleicher Weise zu berücksichtigen waren. Sorgfältigste Vorarbeiten erforderten vor allem die unsymmetrischen Profile, deren ungleiche Schrumpfungen ein Verziehen begünstigten. Nach einigen Versuchen gelang es aber, auch ohne wesentliches Nachrücken einwandfrei gerade Bauteile zu erhalten. Die Güte der Schweißarbeiten wurde durch laufende Röntgenuntersuchungen ständig überwacht, wobei insbesondere die Stegblechstöße der Binder geprüft wurden.

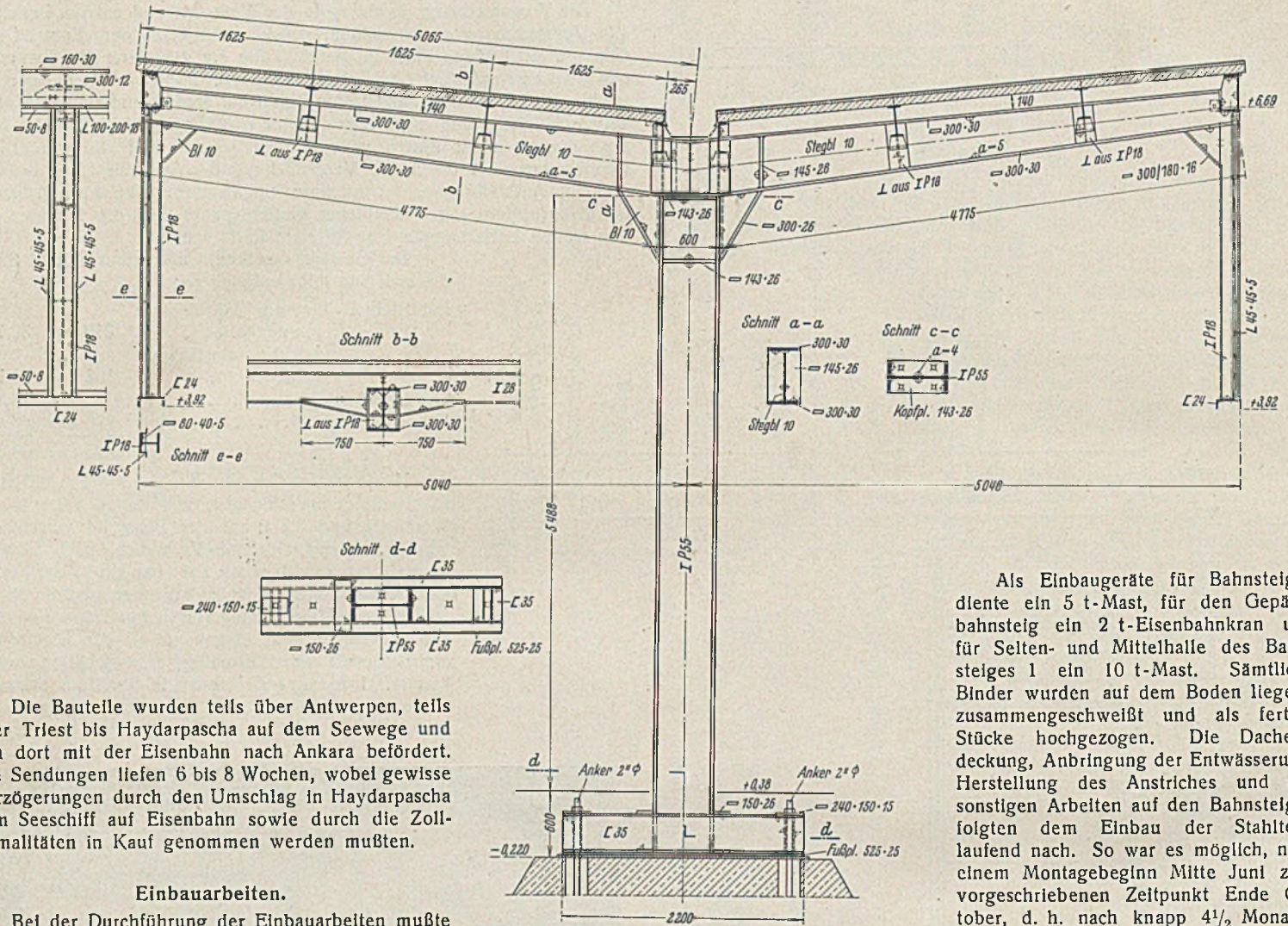


Bild 10. Einstellige Binder des Bahnsteiges 2.

Die Bauteile wurden teils über Antwerpen, teils über Triest bis Haydarpascha auf dem Seewege und von dort mit der Eisenbahn nach Ankara befördert. Die Sendungen liefen 6 bis 8 Wochen, wobei gewisse Verzögerungen durch den Umschlag in Haydarpascha vom Seeschiff auf Eisenbahn sowie durch die Zollformalitäten in Kauf genommen werden mußten.

Einbauarbeiten.

Bei der Durchführung der Einbauarbeiten mußte auf die Aufrechterhaltung des Zugverkehrs Rücksicht

Als Einbaugeräte für Bahnsteig 2 diente ein 5 t-Mast, für den Gepäckbahnsteig ein 2 t-Eisenbahnkran und für Seltener- und Mittelhalle des Bahnsteiges 1 ein 10 t-Mast. Sämtliche Binder wurden auf dem Boden liegend zusammenschweißt und als fertige Stücke hochgezogen. Die Dacheindeckung, Anbringung der Entwässerung, Herstellung des Anstriches und die sonstigen Arbeiten auf den Bahnsteigen folgten dem Einbau der Stahlteile laufend nach. So war es möglich, nach einem Montagebeginn Mitte Juni zum vorgeschriebenen Zeitpunkt Ende Oktober, d. h. nach knapp 4 1/2 Monaten Bauzeit, fertig zu werden.



Bild 12. Blick gegen das östliche Ende des Bahnsteiges 1 (rechts), des Gepäckbahnsteiges (Mitte) und des Bahnsteiges 2 (links, Schürze).



Bild 13. Überdachung des Bahnsteiges 2 (halblinks) und des Gepäckbahnsteiges (rechts).

genommen werden. Außer einigen deutschen Monteuren und Schweißern wurden auch türkische, an Ort und Stelle angelernte Schweißer eingesetzt, die sich mit gutem Geschick bewährt haben.

Da die Mittelhalle erst zuletzt vom Bauherrn zur Ausführung freigegeben war, lag die Reihenfolge der Arbeiten des technischen Büros, der Werkstatt und damit die Anlieferung auf der Baustelle zwangsläufig fest. Zunächst wurden die Bauteile des Bahnsteiges 2, sodann des Gepäckbahnsteiges und schließlich des Bahnsteiges 1 angeliefert und in gleicher Reihenfolge eingebaut.

Die Einhaltung dieses Zeitpunktes, die nur unter tatkräftigstem Einsatz aller Beteiligten möglich war und die gute geleistete Arbeit — die endgültige, sorgfältig durchgeführte Abnahme erbrachte keinerlei nennenswerte Beanstandungen — dürften für eine erfolversprechende weitere Belebung der deutsch-türkischen Handelsbeziehungen nur günstig sein. Die Einweihung der neuen Bahnhofshallen, die durch den kurz zuvor erfolgten Tod des türkischen Staatspräsidenten mehrfach verzögert war, fand am 9. Dezember 1938 statt. Die Bilder 11 bis 13 vermitteln einen Eindruck der fertiggestellten Anlage.