

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
 Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
 Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
 Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

12. Jahrgang

BERLIN, 6. Oktober 1939

Heft 21/22

Alle Rechte vorbehalten.

Grundlagen zu einer Theorie räumlicher Rahmentragwerke.

Von Professor Dr.-Ing. Ludwig Mann, Breslau.

(Schluß aus Heft 19/20.)

4. Spezielle Durchführung der Koeffizientenberechnung.

In der m -ten Gl. (26) ist a_{mn} der Koeffizient der Unbekannten w_n . Zur leichteren Übersicht führen wir an Stelle von a_{mn} die Bezeichnung ($w_m w_n$) ein. Die Symmetrie der Gl. (26) findet ihren Ausdruck in der Beziehung

$$(w_m w_n) = (w_n w_m).$$

a) Die an einem Knoten auftretenden Drehwinkel geben Anlaß zu den sechs Koeffizienten: ($x x$), ($x y$), ($x z$), ($y y$), ($y z$), ($z z$), die zunächst bestimmt werden sollen.

Es sei \vec{v}_i mit den Komponenten x, y, z der Drehwinkel des Knotens i . Bei Festlegung aller übrigen Knoten ist $\gamma = \tau$, und wir erhalten aus Gl. (1) bis (3), (9) u. (10) an einem Stab:

$$\begin{aligned} X_i &= \varrho_a \alpha_i = \varrho_a (a_1 x + a_2 y + a_3 z) \\ Y_i &= \varrho_b \beta_i = \varrho_b (b_1 x + b_2 y + b_3 z) \\ D &= \varrho_c \tau = \varrho_c (c_1 x + c_2 y + c_3 z), \end{aligned}$$

wobei
$$\varrho_a = \frac{z_{ii}}{l'}, \quad \varrho_b = \frac{z_{ii}}{l''}, \quad \varrho_c = \frac{G J_d}{l}.$$

Durch Zerlegung der drei Momente nach den Richtungen x, y, z folgt weiter:

$$\begin{aligned} M_x &= \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z \\ M_y &= \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z \\ M_z &= \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z, \end{aligned}$$

wobei

$$(30) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = \varrho_a a_1^2 + \varrho_b b_1^2 + \varrho_c c_1^2 \\ \alpha_{22} = \varrho_a a_2^2 + \varrho_b b_2^2 + \varrho_c c_2^2 \\ \alpha_{33} = \varrho_a a_3^2 + \varrho_b b_3^2 + \varrho_c c_3^2 \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \varrho_a a_1 a_2 + \varrho_b b_1 b_2 + \varrho_c c_1 c_2 \\ \alpha_{23} = \alpha_{32} = \varrho_a a_2 a_3 + \varrho_b b_2 b_3 + \varrho_c c_2 c_3 \\ \alpha_{31} = \alpha_{13} = \varrho_a a_3 a_1 + \varrho_b b_3 b_1 + \varrho_c c_3 c_1. \end{cases}$$

Ermittelt man am Knoten i die Summen der von den einzelnen Stäben herrührenden Beträge, so erhält man für das Moment \vec{M}_v , welches die Drehung \vec{v} bewirkt, die Komponenten

$$(31) \quad \begin{cases} M_x = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z \\ M_y = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z \\ M_z = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(32) \quad \begin{cases} a_{11} = \sum \alpha_{11} & a_{12} = a_{21} = \sum \alpha_{12} \\ a_{22} = \sum \alpha_{22} & a_{23} = a_{32} = \sum \alpha_{23} \\ a_{33} = \sum \alpha_{33} & a_{31} = a_{13} = \sum \alpha_{31}. \end{cases}$$

Im Hinblick auf die am Schluß des vorigen Abschnitts erfolgte Deutung gelangen wir jetzt zu den gesuchten Koeffizienten durch Berechnung der Arbeit, welche das Moment \vec{M}_v an einer davon unabhängigen Drehung \vec{v} des Knotens mit den Komponenten x, y, z leistet.

Man erhält dafür das innere Produkt:

$$\begin{aligned} M_v = & (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z) x \\ & + (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z) y \\ & + (a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z) z. \end{aligned}$$

Setzt man einen der Werte x, y, z und zugleich einen der Werte x, y, z gleich 1 und alle übrigen Drehwinkel gleich Null, so findet man dadurch

$$(33) \quad \begin{cases} (x x) = a_{11} & (y y) = a_{22} & (z z) = a_{33} \\ (x y) = a_{12} & (x z) = a_{13} & (y z) = a_{23}. \end{cases}$$

Die Übersicht über die auszuführenden Operationen wird durch nachfolgende einfache Deutung sehr erleichtert:

Auf den Achsen a, b und c der einzelnen Stäbe nehmen wir im Abstand 1 vom Knoten Massen ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c an. Wir haben z. B.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum \varrho_a a_1^2 + \varrho_b b_1^2 + \varrho_c c_1^2 \\ a_{12} &= \sum \varrho_a a_1 a_2 + \varrho_b b_1 b_2 + \varrho_c c_1 c_2. \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden werden durch Multiplikation der Massen mit den Quadraten oder Produkten der Abstände von den Koordinatenebenen erhalten. Die Koeffizienten stellen daher die Massenmomente zweiter Ordnung dar.

b) Bestimmung von Koeffizienten (x_i, x_k) usw. für Drehwinkel an verschiedenen Knoten.

Nur Kombinationen von Drehwinkeln an Knoten, die durch einen Stab verbunden sind, liefern von Null verschiedene Werte.

Der unter a) durch den Drehwinkel v_i bestimmte Zustand erfordert in K ein am Knoten wirkendes Moment M_k , dessen Komponenten nach Gl. (9) u. (10) folgende Werte besitzen:

$$\begin{aligned} X_k &= \varrho_a' \alpha_i = \varrho_a' (a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i) \\ Y_k &= \varrho_b' \beta_i = \varrho_b' (b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 z_i) \\ D &= \varrho_c \tau = \varrho_c (c_1 x_i + c_2 y_i + c_3 z_i). \end{aligned}$$

Hierbei ist
$$\varrho_a' = \frac{z_{ik}}{l'}, \quad \varrho_b' = \frac{z_{ik}}{l''}.$$

Mitunter ist es vorteilhaft, in k die Richtung der Bezugsachsen zu wechseln. An Stelle der Gl. (1) bis (3) setzen wir dann

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 z_k \\ \beta_k &= b_1 x_k + b_2 y_k + b_3 z_k \\ \gamma_k &= c_1 x_k + c_2 y_k + c_3 z_k. \end{aligned}$$

Die gesamte Arbeit, welche die Knotenlasten des Zustandes v_i an den Wegen des Zustandes v_k leisten, ist hiermit

$$\begin{aligned} M_k v_k = & \varrho_a' (a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i) (a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 z_k) \\ & = \varrho_b' (b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 z_i) (b_1 x_k + b_2 y_k + b_3 z_k) \\ & = \varrho_c (c_1 x_i + c_2 y_i + c_3 z_i) (c_1 x_k + c_2 y_k + c_3 z_k). \end{aligned}$$

Ordnet man nach Produkten der x_i, y_i, z_i mit den x_k, y_k, z_k , so stellen die dabei auftretenden Faktoren die gesuchten neun Koeffizienten dar. Man hat z. B.

$$(34) \quad \begin{cases} (x_i x_k) = \varrho_a' a_1 \bar{a}_1 + \varrho_b' b_1 \bar{b}_1 + \varrho_c c_1 \bar{c}_1 \\ (x_i y_k) = \varrho_a' a_1 \bar{a}_2 + \varrho_b' b_1 \bar{b}_2 + \varrho_c c_1 \bar{c}_2 \\ (y_i x_k) = \varrho_a' a_2 \bar{a}_1 + \varrho_b' b_2 \bar{b}_1 + \varrho_c c_2 \bar{c}_1 \\ \dots = \dots \end{cases}$$

Eine übersichtliche Darstellung gewinnt man durch folgende Umformung:

Für den Zusammenhang der Achsenrichtungen in i und k gelte folgendes Schema:

	x_i	y_i	z_i
x_k	e_1	e_2	e_3
y_k	f_1	f_2	f_3
z_k	g_1	g_2	g_3

Dementsprechend setzen wir in Gl. (34)

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3 & \bar{a}_2 &= f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3 \\ \bar{b}_1 &= e_1 b_1 + e_2 b_2 + e_3 b_3 & \bar{b}_2 &= f_1 b_1 + f_2 b_2 + f_3 b_3 \\ \bar{c}_1 &= -(e_1 c_1 + e_2 c_2 + e_3 c_3) & \bar{c}_2 &= -(f_1 c_1 + f_2 c_2 + f_3 c_3) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} (x_i x_k) &= e_1 A_1 + e_2 B_3 + e_3 B_2 \\ (x_i y_k) &= f_1 A_1 + f_2 B_3 + f_3 B_2 \\ (y_i x_k) &= e_1 B_3 + e_2 A_2 + e_3 B_1 \\ &\dots \dots \dots \\ (z_i z_k) &= g_1 B_2 + g_2 B_1 + g_3 A_3. \end{aligned}$$

Hierbei ist:

$$\begin{aligned} A_1 &= \varrho_a' a_1^2 + \varrho_b' b_1^2 + \varrho_c' c_1^2 \\ A_2 &= \varrho_a' a_2^2 + \varrho_b' b_2^2 + \varrho_c' c_2^2 \\ A_3 &= \varrho_a' a_3^2 + \varrho_b' b_3^2 + \varrho_c' c_3^2 \\ B_1 &= \varrho_a' a_2 a_3 + \varrho_b' b_2 b_3 + \varrho_c' c_2 c_3 \\ B_2 &= \varrho_a' a_3 a_1 + \varrho_b' b_3 b_1 + \varrho_c' c_3 c_1 \\ B_3 &= \varrho_a' a_1 a_2 + \varrho_b' b_1 b_2 + \varrho_c' c_1 c_2 \\ \varrho_c' &= -\varrho_c = -\frac{G J_d}{l} \end{aligned}$$

Die Größen A und B stellen die auf das Koordinatensystem in i bezogenen Momente zweiter Ordnung von Massen ϱ_a' , ϱ_b' und ϱ_c' dar, welche im Abstand l vom Knoten i auf den Achsen a , b und c angenommen werden.

Die Gesamtheit der neun Koeffizienten läßt sich jetzt am einfachsten durch ein Matrizenprodukt darstellen:

$$(35) \quad \begin{pmatrix} (x_i x_k) & (y_i x_k) & (z_i x_k) \\ (x_i y_k) & (y_i y_k) & (z_i y_k) \\ (x_i z_k) & (y_i z_k) & (z_i z_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{pmatrix}$$

d. h. man erhält das q -te Element der p -ten Zeile der aus den Koeffizienten gebildeten Matrix auf der linken Seite, indem man rechts jedes Glied der p -ten Zeile der ersten Matrix mit dem entsprechenden Gliede der q -ten Spalte der zweiten Matrix multipliziert und die Produkte addiert; $p = 1, 2, 3, q = 1, 2, 3$.

Bis auf Sonderfälle ist es zweckmäßig, die Koordinatensysteme in i und k gleichgerichtet anzunehmen, dann erhält man mit

$$(36) \quad \begin{aligned} e_1 &= f_2 = g_3 = 1 \quad \text{und} \\ e_2 &= e_3 = f_1 = f_3 = g_1 = g_2 = 0 \\ \begin{pmatrix} (x_i x_k) & (y_i x_k) & (z_i x_k) \\ (x_i y_k) & (y_i y_k) & (z_i y_k) \\ (x_i z_k) & (y_i z_k) & (z_i z_k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d. h. die Koeffizienten sind gleich den Massenmomenten zweiter Ordnung.

c) Bestimmung von Koeffizienten, welche Kombinationen $(v_n u_m)$ entsprechen.

Der Formänderungszustand v_n sei dadurch gekennzeichnet, daß dem Knoten n bei Sperrung aller anderen Knoten die Drehung mit den Komponenten x_n, y_n, z_n erteilt werde. Den Index i weisen wir den angeschlossenen Stabenden zu.

Als Stabverzerrungen kommen nur α_i, β_i und τ in Betracht. Die Formänderung $u_m = 1$ hat nur Stabdrehwinkel $\alpha_r^{(m)}$ und $\beta_r^{(m)}$ zur Folge, da mit den Knotendrehwinkeln auch die Verwindungen $\tau^{(m)}$ verschwinden.

Nach Gl. (9) u. (10) ist somit

$$\begin{aligned} X_i^{(m)} &= \frac{z_{ir}}{l'} \cdot \alpha_r^{(m)} \\ Y_i^{(m)} &= \frac{z_{ir}}{l''} \cdot \beta_r^{(m)} \\ D^{(m)} &= 0. \end{aligned}$$

Die Arbeit dieser Kräfte an den zur Drehung v_n gehörigen Wegen ist daher mit Rücksicht auf Gl. (1) u. (2)

$$\begin{aligned} \sum \frac{z_{ir}}{l'} \cdot \alpha_r^{(m)} (a_1 x_n + a_2 y_n + a_3 z_n) \\ + \sum \frac{z_{ir}}{l''} \cdot \beta_r^{(m)} (b_1 x_n + b_2 y_n + b_3 z_n). \end{aligned}$$

Identifiziert man der Reihe nach v_n mit x_n, y_n oder z_n , so erhält man gemäß Gl. (27):

$$(37) \quad \begin{cases} (x_n u_m) = \sum \left(\frac{z_{ir}}{l'} \cdot a_1 \alpha_r^{(m)} + \frac{z_{ir}}{l''} \cdot b_1 \beta_r^{(m)} \right) \\ (y_n u_m) = \sum \left(\frac{z_{ir}}{l'} \cdot a_2 \alpha_r^{(m)} + \frac{z_{ir}}{l''} \cdot b_2 \beta_r^{(m)} \right) \\ (z_n u_m) = \sum \left(\frac{z_{ir}}{l'} \cdot a_3 \alpha_r^{(m)} + \frac{z_{ir}}{l''} \cdot b_3 \beta_r^{(m)} \right). \end{cases}$$

Dabei erstrecken sich die Summen nur über Stäbe, die vom Knoten n ausgehen.

In Worten kann man die Regel aufstellen:

Projiziert man die mit $\frac{z_{ir}}{l'}$ bzw. $\frac{z_{ir}}{l''}$ multiplizierten Drehvektoren $\alpha_r^{(m)}$ und $\beta_r^{(m)}$ der einzelnen vom Knoten n ausgehenden Stäbe auf die Richtungen der Achsen x, y, z und bildet die Summen, so erhält man die drei Koeffizienten $(x_n u_m), (y_n u_m)$ und $(z_n u_m)$

d) Bestimmung der Koeffizienten $(u_m u_n)$.

Da die Knotendrehwinkel und Drillungen ausscheiden, erhält man nach Gl. (27)

$$(u_m u_n) = \sum_r X_r^{(m)} \alpha_r^{(n)} + Y_r^{(m)} \beta_r^{(n)}.$$

Dabei ist nach Gl. (9)

$$X_r^{(m)} = \frac{z_{rr}}{l'} \cdot \alpha_r^{(m)} \quad Y_r^{(m)} = \frac{z_{rr}}{l''} \cdot \beta_r^{(m)},$$

somit wird für die Berechnung:

$$(38) \quad (u_m u_n) = \sum_r \left(\frac{z_{rr}}{l'} \cdot \alpha_r^{(m)} \alpha_r^{(n)} + \frac{z_{rr}}{l''} \cdot \beta_r^{(m)} \beta_r^{(n)} \right).$$

e) Berücksichtigung der Stablängenänderungen.

Der wesentliche Vorteil, daß die Größen $\mathcal{L}s$ zu den Grundverformungen zählen, kommt dadurch zur Geltung, daß bei zulässiger Vernachlässigung der Längsdehnungen in den Gl. (25), (26) und (17) einfach die von $\mathcal{L}s$ abhängigen Glieder zu streichen sind. Wir haben es dann nur mit Knotendrehungen und Verschiebungen u an der Kette als Grundverformungen zu tun, zu deren Berechnung die nötige Zahl von $\varrho - s$ Gleichungen nach Formel (26) mit Hilfe der unter a) bis d) ermittelten Koeffizienten aufgestellt werden kann.

Die weitere Berechnung stützt sich auf die Formeln (25), (9) und (10), während (11) illusorisch wird. Näherungswerte für die Stabkräfte findet man durch Berechnung des aus der Kette durch Hinzufügen der u -Stäbe erzeugten statisch bestimmten oder unbestimmten Systems, wenn man zu den gegebenen Lasten die Biegemomente an den Stabenden nach den Formeln (6) hinzufügt, beziehungsweise an den an i und k angrenzenden Knoten durch Einzelkräfte:

$$\frac{M_{ix} + M_{kx}}{l} \quad \text{und} \quad \frac{M_{iy} + M_{ky}}{l}$$

ersetzt.

Will man den Einfluß von $\mathcal{L}s$ in zweiter Annäherung verfolgen, so kann man die Näherungswerte von S benutzen, um entsprechend Gl. (11) $\mathcal{L}s$ in Gl. (24a) einzuführen. Dabei ist $S^{(m)}$ gleich Null, insofern w_m einen Knotendrehwinkel oder eine Kettenverschiebung u bedeutet. Ferner sind die nach Gl. (25) einzuführenden Größen $\alpha_i, \beta_i, \alpha_k, \beta_k$ und τ unabhängig von $\mathcal{L}s$.

α_r und β_r hängen von u und $\mathcal{L}s$ ab.

Wir setzen daher

$$(39) \quad \begin{cases} \alpha_r = \sum_n \alpha_r^{(n)} u_n + \alpha_r' \\ \beta_r = \sum_n \beta_r^{(n)} u_n + \beta_r' \end{cases}$$

indem wir in α_r' und β_r' die Anteile der Stabdrehwinkel, die geometrisch durch die Längenänderungen der Stäbe bedingt sind, zusammenfassen.

Wir setzen $S^{(m)} = 0$ sowie nach Gl. (39) α_r und β_r in Gl. (24a) ein, wodurch weiter Gl. (26) die Form erhält:

$$(40) \quad \sum a_{mn} w_n = L_m' = L_m - \sum_n (X_r^{(m)} \alpha_r' + Y_r^{(m)} \beta_r').$$

Je nachdem nun w_m einen der Knotendrehwinkel x_m, y_m, z_m bedeutet, erhalten wir nach Gl. (9) und (1) $X_r^{(m)}$ und $Y_r^{(m)}$. Durch Multiplikation mit a_1, a_2, a_3 bzw. mit b_1, b_2, b_3 oder, wenn w_m die Verschiebung u_m bedeutet, wird

$$\begin{aligned} X_r^{(m)} &= \frac{z_{rr}}{l'} \cdot \alpha_r^{(m)} \\ Y_r^{(m)} &= \frac{z_{rr}}{l''} \cdot \beta_r^{(m)}. \end{aligned}$$

In den vier genannten Fällen wird somit die rechte Seite von Gl. (40) eine der Größen

$$L_m' = L_m - \sum_r \left(\frac{z_{ri}}{l'} \cdot a_1 \alpha_r' + \frac{z_{ri}}{l''} \cdot b_1 \beta_r' \right); \quad w_m = x_m$$

$$L_m' = L_m - \sum_r \left(\frac{z_{ri}}{l'} \cdot a_2 \alpha_r' + \frac{z_{ri}}{l''} \cdot b_2 \beta_r' \right); \quad w_m = y_m$$

$$L_m' = L_m - \sum_r \left(\frac{z_{ri}}{l'} \cdot a_3 \alpha_r' + \frac{z_{ri}}{l''} \cdot b_3 \beta_r' \right); \quad w_m = z_m$$

$$L_m' = L_m - \sum_r \left(\frac{z_{rr}}{l'} \cdot \alpha_r^{(m)} \alpha_r' + \frac{z_{rr}}{l''} \cdot \beta_r^{(m)} \beta_r' \right); \quad w_m = u_m$$

5. Beispiele.

Für das im Abschnitt 2 besprochene und in Bild 5 dargestellte Rahmentragwerk sollen die Koeffizienten der Gl. (40) bestimmt werden. Bei den Balken und Stielen wurden die Richtungen der Achsen a und b bereits festgelegt, bei den Querträgern sollen sie mit den Richtungen von x und z übereinstimmen. Die in Abschnitt 4 unter a) eingeführten „Massen“ e_a, e_b, e_c werden bei den einzelnen Stäben durch Anhängung der Stabnummer als Index unterschieden. Die Zentrifugalmomente der für einen der beiden freien Knoten in Bild 15 zusammengestellten Massen verschwinden. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} (x_1 x_1) &= (x_2 x_2) = e_{c_1} + e_{c_2} + e_{a_3} + e_{a_4} \\ (y_1 y_1) &= (y_2 y_2) = e_{a_1} + e_{a_2} + e_{b_3} + e_{c_4} \\ (z_1 z_1) &= (z_2 z_2) = e_{b_1} + e_{b_2} + e_{c_3} + e_{b_4} \\ (x_1 y_1) &= (x_1 z_1) = (y_1 z_1) = 0 \\ (x_2 y_2) &= (x_2 z_2) = (y_2 z_2) = 0. \end{aligned}$$

Nach den in Abschnitt 4 unter b) gegebenen Regeln ist weiter für die Ermittlung von $(x_1 x_2)$ usw. (Bild 16)

$$\begin{aligned} A_1 &= e_{a_1}' \\ A_2 &= e_{c_1}' = -e_c \\ A_3 &= e_{b_1}' \\ B_1 = B_2 = B_3 &= 0, \end{aligned}$$

wodurch wir nach Formel (36) erhalten:

$$\begin{aligned} (x_1 x_2) &= e_{a_1}' \\ (y_1 y_2) &= -e_c \\ (z_1 z_2) &= e_{b_1}' \\ (y_1 x_2) &= (x_1 y_2) = 0 \\ (z_1 x_2) &= (x_1 z_2) = 0 \\ (z_1 y_2) &= (y_1 z_2) = 0. \end{aligned}$$

Am Doppelknoten a) war infolge der Auflagerkonstruktion $x_a = 0, z_a = 0$. Für die aus der Kombination mit y_a folgenden Koeffizienten findet man (Bild 17):

$$\begin{aligned} (y_a y_a) &= e_{a_1} + e_{c_5} & (y_a y_d) &= e_{c_5} & (y_a y_1) &= e_{c_1}' \\ (y_a x_1) &= 0 & (y_a z_1) &= 0. \end{aligned}$$

Schließlich sind noch die den Kombinationen mit u entsprechenden Koeffizienten zu bestimmen. Am Fuß der Stiele sollen Kugelgelenke angenommen werden.

Man hat (vgl. Abschnitt 2)

$$\begin{aligned} \text{für Stab 1} \quad \beta_r &= -\frac{1}{l} & b_2 &= 1 & z_{ir} &= 6 \\ \text{für Stab 2} \quad \beta_r &= -\frac{1}{l} & b_2 &= 1 & z_{ir} &= 6 \\ \text{für Stab 3} \quad \alpha_r &= \frac{1}{h} & a_1 &= 1 & z_{ir} &= 3. \end{aligned}$$

Die Formeln (37) liefern hiermit

$$\begin{aligned} (y_a u) &= -\frac{6}{l l''} & (y_b u) &= +\frac{6}{l l''} & (x_1 u) &= \frac{3}{h h'} \\ (y_1 u) &= 0 & (z_1 u) &= 0. \end{aligned}$$

Aus Formel (38) folgt noch mit $z_{rr} = 12$ an den Balken und $z_{rr} = 3$ an den Stielen

$$(u u) = 4 \cdot \frac{12}{l^2 l''} + 2 \cdot \frac{3}{h^2 h'}$$

In nachfolgendem Schema sind die Koeffizienten mit abgekürzten Bezeichnungen zusammengestellt:

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	y_a	y_b	y_c	v_d	u	
x_1	a_1			b_1							e	L_1
y_1		a_2			b_2		c	c				L_2
z_1			a_3			b_3						L_3
x_2	b_1			a_1							e	L_4
y_2		b_2			a_2			c	c			L_5
z_2			b_3			a_3						L_6
y_a		c					d_1		d_2		$-f$	L_7
y_b		c						d_1	d_2		f	L_8
y_c					c			d_2	d_1		f	L_9
y_d					c		d_2		d_1		$-f$	L_{10}
u	e			e			$-f$	f	f	$-f$	g	L_{11}

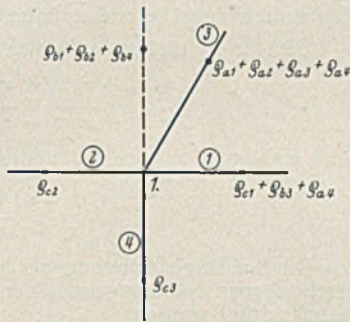


Bild 15.

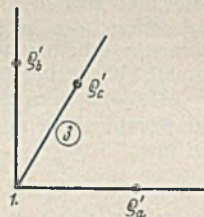


Bild 16.

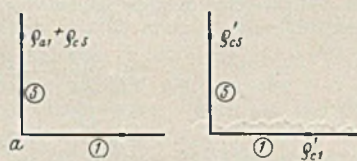


Bild 17.

Die infolge der Symmetrie des Tragwerks doppelt-symmetrischen Gleichungen werden in bekannter Weise durch Additionen und Subtraktionen auf Gleichungen mit einer verminderten Zahl von Unbekannten zurückgeführt.

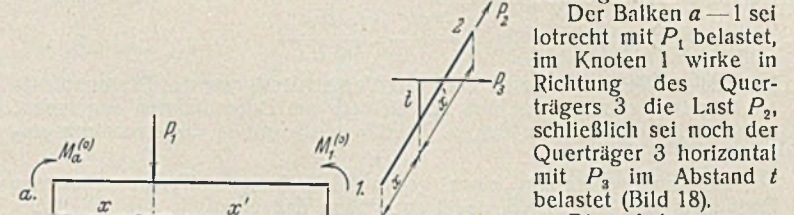


Bild 18.

$$\begin{aligned} M_a^{(0)} &= P_1 \cdot \frac{x x'^2}{l_1^2} & M_1^{(0)} &= P_1 \cdot \frac{x^2 x'}{l_1^2} & A^{(0)} &= P_1 \cdot \frac{x'^2}{l_1^2} \left(1 + \frac{2x}{l_1}\right) \\ B^{(0)} &= P_1 \cdot \frac{x^2}{l_1^2} \left(1 + \frac{2x'}{l_1}\right) \end{aligned}$$

und auf die Knoten 1 und 2 vom Querträger übertragene Drehmomente:

$$M_{d_1}^{(0)} = P_3 t \cdot \frac{x'}{l_3} \quad \text{und} \quad M_{d_2}^{(0)} = P_3 t \cdot \frac{x}{l_3}$$

Die Werte L ergeben sich als die Arbeiten dieser übertragenen Kräfte an den Wegen $x_1 = 1, y_1 = 1$ usw. Man findet:

$$\begin{aligned} L_2 &= -P_1 \cdot \frac{x^2 x'}{l_1^2} + P_3 t \cdot \frac{x'}{l_3} \\ L_3 &= -P_3 \cdot \frac{x x'^2}{l_3^2} \\ L_5 &= P_3 t \cdot \frac{x'}{l_3} \\ L_6 &= P_3 \cdot \frac{x^2 x'}{l_3^2} \\ L_7 &= P_1 \cdot \frac{x^2 x'}{l_1^2} \\ L_{11} &= P_2. \end{aligned}$$

Die übrigen Größen verschwinden.

An Hand des behandelten Beispiels werde noch eine Vereinfachung besprochen, die von allgemeiner Bedeutung ist. In der Regel ist der Drillungswiderstand des Querträgers im Vergleich mit der Biegesteifigkeit des Balkens gering, so daß am Querträger $D = 0$ gesetzt werden darf. Zunächst würde daraus noch keine Vereinfachung folgen. Am Auflager verschwinden aber aus Gleichgewichtsgründen die Balkenmomente um die y -Achse, so daß statisch kein Unterschied besteht, wenn der drehfeste Anschluß am Knoten durch ein Gelenk ersetzt wird (vgl. Abschnitt 1). Dann scheiden die Knotendrehwinkel y_a, y_b, y_c und y_d aus den Grundverformungen aus, deren Zahl somit von 11 auf 7 reduziert wird. In dem oben aufgestellten Schema sind die entsprechenden vier Reihen und Spalten zu unterdrücken. Die Berechnung der Koeffizienten ist entsprechend der einseitigen Einspannung des Balkens an der Achse a mit Rücksicht auf Tabelle (9a) zu modifizieren.

Wir betrachten den Unterschied der Berechnung an einem möglichst einfachen Schulbeispiel. Bei einem einseitig eingespannten Freitrag

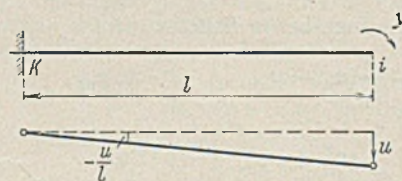


Bild 19.

$$\begin{aligned} (y y) &= \frac{z_{ii}}{l'} = \frac{4}{l'} & L_1 &= 0 \\ (y u) &= -\frac{z_{ri}}{l l'} = -\frac{6}{l l'} & L_2 &= P \\ (u u) &= \frac{z_{rr}}{l^2 l'} = \frac{12}{l^2 l'}. \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichungen für x und u lauten:

$$\begin{aligned} \frac{4}{l'} \cdot y - \frac{6}{l l'} \cdot u &= 0 \\ -\frac{6}{l l'} \cdot y + \frac{12}{l^2 l'} \cdot u &= P. \end{aligned}$$

Weil aber in i kein Moment übertragen wird, bestehen bei drehbarem Anschluß an dem Knoten dieselben statischen Verhältnisse, und man hat bei dieser Annahme nur die eine Grundverformung u .

Mit $z_{rr} = 3$ findet man

$$(u u) = \frac{3}{l^2 l'}$$

Schließlich wurde noch $(v v)$ bestimmt.

Mit Hilfe von (41) u. (42) sowie in Anlehnung an (38) findet man

$$(v v) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{z_{rr}}{l_2' l_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_2 (\cos \varphi_m - \cos \varphi_{m+1})^2 + \frac{z_{rr}}{s_2' s_2^2} \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{z_{rr}}{s_2'' s_2^2} \cdot \sin^2 \varphi_m$$

Die Ausführung der Summation liefert

$$(45) (v v) = \frac{n}{2} \left[\frac{z_{rr}}{l_2' l_2^2} \cdot 4 \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma_2 + \frac{z_{rr}}{s_2' s_2^2} \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{z_{rr}}{s_2'' s_2^2} \right]$$

Die Unbekannten lassen sich, abgesehen von v , das auf die rechte Seite der Gleichung gebracht wird, in Gruppen zu n Größen derselben Art ordnen; innerhalb einer Gruppe sollen sie durch Indizes 0 bis $n-1$ unterschieden werden.

Zur leichteren Verständigung werde diejenige Gleichung (26), welche dem Index m entspricht, bei welcher also ω_m in der Hauptdiagonale vorkommt, die Gleichung für ω_m genannt.

Die linken Seiten der Gleichungen für x_0 bis x_{n-1} haben die Form

$$(46) \begin{cases} a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} \\ \quad + b_0 y_0 + b_1 y_1 + \dots + b_{n-1} y_{n-1} + \dots \\ a_{n-1} x_0 + a_0 x_1 + \dots + a_{n-2} x_{n-1} \\ \quad + b_{n-1} y_0 + b_0 y_1 + \dots + b_{n-2} y_{n-1} + \dots \\ \vdots \\ a_1 x_0 + a_2 x_1 + \dots + a_0 x_{n-1} \\ \quad + b_1 y_0 + b_2 y_1 + \dots + b_0 y_{n-1} + \dots \end{cases}$$

wobei in gleicher Weise noch ebensolche Glieder für z , u und x , y , z hinzuzufügen sind.

Man erhält aus der ersten Gleichung die $n-1$ folgenden, indem man innerhalb jeder Gruppe die Koeffizienten zyklisch permutiert. Dies folgt aus der zyklischen Symmetrie des Systems, wonach offenbar immer die Beziehungen bestehen:

$$(x_0 x_p) = (x_1 x_{p+1}) = (x_2 x_{p+2}) \dots$$

$$\text{und ebenso } (x_0 y_p) = (x_1 y_{p+1}) = (x_2 y_{p+2}) = \dots$$

für alle Werte von $p=0$ bis $p=n-1$, wenn zugleich an Stelle von $n+m$ m gesetzt wird.

In entsprechender Weise haben die linken Seiten der Gleichung für y_0 bis y_{n-1} die Form:

$$(47) \begin{cases} c_0 x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_{n-1} x_{n-1} \\ \quad + d_0 y_0 + d_1 y_1 + \dots + d_{n-1} y_{n-1} + \dots \\ c_{n-1} x_0 + c_0 x_1 + \dots + c_{n-2} x_{n-1} \\ \quad + d_{n-1} y_0 + d_0 y_1 + \dots + d_{n-2} y_{n-1} + \dots \\ \vdots \\ c_1 x_0 + c_2 x_1 + \dots + c_0 x_{n-1} \\ \quad + d_1 y_0 + d_2 y_1 + \dots + d_0 y_{n-1} + \dots \end{cases}$$

Ebenso erhalten wir je n Gleichungen für z , u und x , y , z .

Aus der Beziehung $a_{mn} = a_{nm}$ folgt noch, daß sich die Matrix der Koeffizienten c aus der der Koeffizienten b durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten ergibt.

Zur leichteren Übersicht legen wir unseren nächsten Betrachtungen die allgemeine Form (46) u. (47) zugrunde, obwohl dem speziellen Charakter des Systems noch wesentliche Vereinfachungen entsprechen. So sind z. B. von den Koeffizienten a nur a_0 und $a_1 = a_{n-1}$ von Null verschieden. Ferner verschwinden die Koeffizienten b bis auf $b_1 = -b_{n-1}$. Die Werte d zeigen das gleiche Verhalten wie die Werte a usw.

Zur allgemeinen Lösung zyklischer Gleichungen werde auf die angegebene Literatur verwiesen²⁾.

Immerhin erfordert bei größerer Knotenzahl die numerische Durchführung der strengen Lösung einen erheblichen Arbeitsaufwand, so daß man nach Fällen suchen wird, die weitere Vereinfachungen gestatten.

Greift in der Ebene des versteiften Schlußringes ein Kräftepaar an, so ist wieder jeder Meridian in gleicher Weise beansprucht, zudem sind die Knotendrehwinkel x und x gleich Null. Ebenso verschwindet v , dafür tritt aber als Unbekannte der Drehwinkel der Scheibe hinzu. Wir behalten daher im ganzen sechs Unbekannte. Unter Umständen gestattet die Art der Versteifungskonstruktion des Schlußringes eine weitere Reduktion an den Größen y und z .

Auch im Fall einer Einzellast K in der Ebene des Schlußringes, die wir unter Absonderung eines Kräftepaares radial gerichtet und etwa am Knoten 0 eingreifend annehmen können, ist eine ebenso wirkungsvolle Reduktion möglich.

Eine zyklische Gruppe von Grundverformungen habe infolge $K_0 = 1$ (Bild 21) die Werte

$$\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_{n-1};$$

dann entstehen infolge $K_p = 1$ und $K_m = 1$ die Wertefolgen

$$\begin{matrix} \omega_p & \omega_{p+1} & \omega_{p+2} & \dots & \omega_{p-1} \\ \omega_m & \omega_{m+1} & \omega_{m+2} & \dots & \omega_{m-1}. \end{matrix}$$

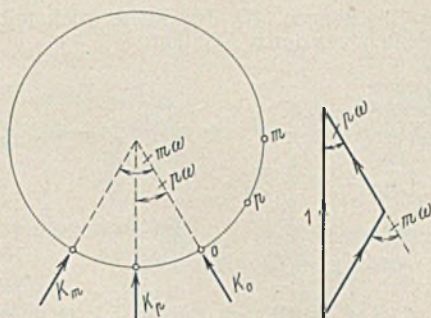


Bild 21.

Es entspricht nun dem Begriff der starren Scheibe, daß eine Kraft beliebig an ihr in Komponenten zerlegt werden darf, ohne daß die Wirkung sich ändert. Zerlegen wir K_p nach Richtung K_0 und K_m in die Komponenten

$$\frac{\sin(m-p)\omega}{\sin m\omega}$$

und

$$\frac{\sin p\omega}{\sin m\omega},$$

so folgt daraus

$$\omega_{p+q} = \omega_q \cdot \frac{\sin(m-p)\omega}{\sin m\omega} + \omega_{m+q} \cdot \frac{\sin p\omega}{\sin m\omega}$$

oder auch

$$(\omega_{p+q} - \omega_q \cdot \cos p\omega) \sin m\omega = (\omega_{m+q} - \omega_q \cdot \cos m\omega) \sin p\omega.$$

Man genügt dieser Gleichung durch den Ansatz:

$$\omega_p = C \cdot \cos p\omega + D \cdot \sin p\omega \quad p = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die linke Seite nimmt dadurch den Wert an:

$$(D \cdot \cos q\omega - C \cdot \sin q\omega) \sin p\omega \cdot \sin m\omega.$$

Denselben Wert erhält aber auch die rechte Seite, da sie aus der linken durch Vertauschung von p und m hervorgeht.

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Die Gruppe der ω ist zum Meridian durch den Knoten 0 symmetrisch, d. h. es ist

$$\omega_{n-p} = \omega_p.$$

Dann wird in Gl. (48) $D = 0$, und wir haben

$$(49) \quad \omega_p = C \cdot \cos p\omega.$$

b) Im Fall der Antimetrie ist

$$\omega_{n-p} = -\omega_p.$$

Hieraus folgt $C = 0$, und wir haben

$$(50) \quad \omega_p = D \cdot \sin p\omega.$$

Symmetrische Größen sind die Knotendrehwinkel x und x , antimetrische Größen y und z sowie y und z .

c) Für die Verschiebungen u gilt die Beziehung

$$u_{n-1-p} = -u_p.$$

Der allgemeine Ansatz fordert dann, daß

$$C \cdot \cos \frac{\omega}{2} = D \cdot \sin \frac{\omega}{2}.$$

Dieser Gleichung genügen wir durch $C = G \cdot \sin \frac{\omega}{2}$ und $D = G \cdot \cos \frac{\omega}{2}$, wodurch wir aus Gl. (48) erhalten:

$$(51) \quad u_p = G \cdot \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) \omega.$$

In jedem Fall haben wir somit die Gruppe von n Unbekannten auf eine Unbekannte C , D oder G zurückgeführt, zu deren Bestimmung nur noch je eine, etwa die erste Gleichung aus jeder Gruppe notwendig wäre. Da man jedoch auf diese Weise die Symmetrie der Gleichungen zerstören würde, wählen wir einen anderen Weg und leiten zu diesem Zweck zunächst einen Hilfssatz ab. Es sei

$$(52) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot \cos \omega + a_2 \cdot \cos 2\omega + \dots + a_{n-1} \cdot \cos(n-1)\omega = a \\ a_1 \cdot \sin \omega + a_2 \cdot \sin 2\omega + \dots + a_{n-1} \cdot \sin(n-1)\omega = a' \end{cases}$$

Hierfür läßt sich auch schreiben:

$$(52a) \quad \begin{cases} a_0 + a_{n-1} \cdot \cos \omega + a_{n-2} \cdot \cos 2\omega + \dots + a_1 \cdot \cos(n-1)\omega = a \\ a_{n-1} \cdot \sin \omega + a_{n-2} \cdot \sin 2\omega + \dots + a_1 \cdot \sin(n-1)\omega = -a' \end{cases}$$

Die mit $i = \sqrt{-1}$ multiplizierte zweite Gleichung werde zur ersten addiert, hierauf multipliziere man beide Seiten der entstandenen Gleichung mit $e^{ip\omega}$. Indem wir noch die Reihenfolge der Summanden umordnen und Reelles und Imaginäres trennen, erhalten wir das Resultat:

$$\begin{aligned} a_p + a_{p-1} \cdot \cos \omega + a_{p-2} \cdot \cos 2\omega + \dots + a_{p+1} \cdot \cos(n-1)\omega \\ = a \cdot \cos p\omega + a' \cdot \sin p\omega \\ a_{p-1} \cdot \sin \omega + a_{p-2} \cdot \sin 2\omega + \dots + a_{p+1} \cdot \sin(n-1)\omega \\ = a \cdot \sin p\omega - a' \cdot \cos p\omega. \end{aligned}$$

Die Gleichungen gelten für $p=0$ bis $n-1$ mit der Bestimmung, daß durch Hinzufügen von n negative Indizes vermieden werden. Die mit den Kosinus oder Sinus der Vielfachen des Winkels multiplizierten Koeffizienten sind die der $p-1$ ten Spalte der Gl. (46).

Wir multiplizieren nun die n Gleichungen (46) der Reihe nach mit $\cos p\omega$, $p=0 \dots n-1$ und erhalten durch Addition:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} (a \cdot \cos p\omega + a' \cdot \sin p\omega) \cos p\omega \\ + \sum_{p=0}^{n-1} (b \cdot \cos p\omega + b' \cdot \sin p\omega) \sin p\omega + \dots \\ = \frac{n}{2} \cdot a C_1 + \frac{n}{2} \cdot b' C_2 + \dots \end{aligned}$$

²⁾ Mann, Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendungen auf das räumliche Fachwerk. Der Eisenbau 1911, Leipzig, Wilh. Engelmann.

Multiplizieren wir ebenso die n Gleichungen (47) der Reihe nach mit $\sin p\omega$, $p=0 \dots n-1$, so erhalten wir durch Addition:

$$C_1 \sum_{p=0}^{n-1} (c \cdot \sin p\omega - c' \cdot \sin p\omega) \cos p\omega + C_2 \sum_{p=0}^{n-1} (d \cdot \sin p\omega - d' \cdot \cos p\omega) \sin p\omega + \dots = -\frac{n}{2} \cdot c' \cdot C_1 + \frac{n}{2} \cdot d \cdot C_2.$$

Hierbei wurde gemäß Gl. (49) u. (50) $x_p = C_1 \cdot \cos p\omega$ und $y_p = C_2 \cdot \sin p\omega$ gesetzt.

Die Bedeutung von b, b', c, c', d, d' erhält man aus Gl. (52), wenn a durch b, c oder d ersetzt wird. Man erkennt auch, daß $c' = -b'$ ist. Man hat nämlich:

$$-b' = b_{n-1} \cdot \sin \omega + b_{n-2} \cdot \sin 2\omega + \dots + b_1 \cdot \sin(n-1)\omega = -b_1 \cdot \sin \omega - b_2 \cdot \sin 2\omega - \dots - b_{n-1} \cdot \sin(n-1)\omega = +c'.$$

In analoger Weise setzen wir

$$z_p = C_3 \cdot \sin p\omega \quad u_p = C_4 \cdot \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)\omega \\ \bar{x}_p = C_5 \cdot \cos p\omega \quad \bar{y}_p = C_6 \cdot \sin p\omega \quad \bar{z}_p = C_7 \cdot \sin p\omega.$$

Multiplizieren wir die dritte, sechste und siebente Gruppe von n Gleichungen nach Art von Gl. (46) der Reihe nach mit $\sin p\omega$, die vierte mit $\sin\left(p + \frac{1}{2}\right)\omega$ und die fünfte mit $\cos p\omega$, $p=0 \dots n-1$ und addieren jedesmal, so schrumpfen $7n$ Gleichungen in 7 symmetrische Gleichungen für die Größen C_1 bis C_7 zusammen:

$$(53) \quad \sum_{k=1}^7 \alpha_{mk} C_k + \alpha_m v = 0 \quad \text{für } m = 1, 2 \dots 7.$$

Mit Unterdrückung des Faktors $\frac{n}{2}$ ist z. B.

$$\alpha_{11} = a \quad \alpha_{21} = \alpha_{12} = b' \quad \alpha_{22} = d.$$

Hierzu kommt noch als achte Gleichung

$$(54) \quad \sum_{k=1}^7 \alpha_k C_k + \alpha_8 v = \frac{2}{n} \cdot K.$$

Zur leichteren Übersicht seien die Bezeichnungen eingeführt

$$a = \gamma_{11} \quad a' = \gamma_{11}'.$$

Setzt man an Stelle von $a_0, a_1 \dots a_{n-1}$ in die Gl. (52) die Koeffizienten der k -ten Gruppe der Unbekannten, die in der m -ten Gruppe

der Gleichungen nach dem Vorbild von Gl. (46) auftreten, in der natürlichen Reihenfolge ein, so bezeichnen wir die erhaltenen Werte mit γ_{mk} und γ'_{mk} .

Dann ergibt eine leichte Ausrechnung nach Durchführung der Summationen folgende Werte für die Koeffizienten α_{mk} der Gl. (53), wobei wir wieder den Faktor $\frac{n}{2}$ unterdrücken:

- a) $\alpha_{mk} = \gamma_{mk}$
für $\alpha_{11}, \alpha_{15}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{26}, \alpha_{27}, \alpha_{33}, \alpha_{36}, \alpha_{37}, \alpha_{44}, \alpha_{55}, \alpha_{66}, \alpha_{67}, \alpha_{77}$;
- b) $\alpha_{mk} = \gamma'_{mk}$
für $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{56}, \alpha_{57}$;
- c) $\alpha_{mk} = -\gamma'_{mk}$
für α_{25}, α_{35} ;
- d) $\alpha_{mk} = \gamma_{mk} \cdot \sin \frac{\omega}{2} + \gamma'_{mk} \cdot \cos \frac{\omega}{2}$
für α_{14} ;
- e) $\alpha_{mk} = \gamma_{mk} \cdot \cos \frac{\omega}{2} - \gamma'_{mk} \cdot \sin \frac{\omega}{2}$
für α_{24}, α_{34} ;
- f) $\alpha_{mk} = \gamma_{mk} \cdot \sin \frac{\omega}{2} - \gamma'_{mk} \cdot \cos \frac{\omega}{2}$
für α_{45} ;
- g) $\alpha_{mk} = \gamma_{mk} \cdot \cos \frac{\omega}{2} + \gamma'_{mk} \cdot \sin \frac{\omega}{2}$
für α_{46}, α_{47} .

Man erkennt übrigens, daß die Herleitung der Gl. (53) u. (54) darauf hinausläuft, in den Ausdruck Gl. (14) für die potentielle Energie die Substitutionen nach Gl. (49) bis (51) einzuführen.

Zwecks Darstellung der Koeffizienten α_k entnimmt man aus den Gl. (43) u. (44), daß $(w_m v)$ in einer der Formen auftritt

$$\gamma_k \cdot \cos(p\omega); \quad \gamma_k \cdot \sin(p\omega) \text{ oder } \gamma_k \cdot \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)\omega + \gamma_k' \cdot \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)\omega;$$

entsprechend erhält man nach Unterdrückung von $\frac{n}{2}$

$$\alpha_k = \gamma_k \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$$

und $\alpha_k = \gamma_k'$ für $k = 4$.

Schließlich hat man noch nach Gl. (45)

$$\alpha_8 = \frac{2}{n} (v v).$$

Alle Rechte vorbehalten.

Stahlkonstruktion zu einem Fabrikationsbau.

Von Direktor Hermann Maushake Vdl, Braunschweig.

Dieser Bau ist für ein größeres chemisches Werk im Westen Deutschlands erstellt worden. Wie aus der Übersicht (Bild 1) ersichtlich, besteht eine Länge von 112 m und eine Breite von 32 und 36 m. Die Gliederung ist dreiteilig, wovon der linke Teil, das eigentliche Apparate- und Behälterhaus, die Grundrißabmessungen 44×32 m und eine Traufenhöhe von 24,1 m hat, während der Mittelbau 38×36 m groß und 17,43 m hoch ist. Das rechts anschließende Lagerhaus ist 40×36 m groß und hat die Höhe vom Fußboden und von den Verladerrampen bis Traufe von 13,8 m und vom Fabrikflur 14,8 m. Die drei Bauteile werden jedoch nicht durch Wände abschließend getrennt, so daß die Anlage als ein Bauwerk anzusprechen ist.

Als Traggerippe wurde ein Stahlskelett wegen seiner Vorzüge in wirtschaftlicher und baulicher Hinsicht gewählt. Es war auch in diesem Falle mit Erweiterungserfordernissen zu rechnen, und dafür bietet die Stahlbauweise auch die Vorteile, daß Veränderungen an den Konstruktionen ohne Schwierigkeiten vorgenommen werden können. Die Wandung des Bauwerks ist nicht tragend, sondern nur raumabschließend und aus einem schlichten einsteinigen Klinkermauerwerk (25 cm) gebildet. Hierdurch wurden an dem zu umbauenden Raum nicht unbedeutende Einsparungen erreicht.

Die Wandkonstruktionen und Stützen stehen bis zur halben Wanddicke in der Wand, so daß das Mauerwerk noch mit einer halben Mauersteindicke außen vor der Konstruktion durchgeführt werden konnte. Das Stahlgerippe ist mithin von außen vollständig verdeckt, und dadurch bestand die Möglichkeit, dem ganzen Bau eine ruhige einheitliche Ansichtfläche zu geben, die unterbrochen ist durch die aufsteigenden Fenster, die Tore sowie Kranschürzen für die herausfahrenden Krane des mittleren Bauteils.

Aus luftschutzttechnischen Gründen wurde streng darauf geachtet, durchweg nur senkrechte Belichtungsflächen anzuordnen. Auch die Entlüftungsaufbauten erhielten teilweise senkrecht stehende Lichtflächen mit kittloser Sprossenverglasung. Die Belichtung der Räume ist ausreichend und beträgt ungefähr für den Behälterbau 90% und für die übrigen beiden Gebäudeteile etwa 40% der Grundrißflächen. Bei dem linken großen Bauteil ist für einen besonders reichlichen Lichteinfall gesorgt, weil in diesem Bau viel Bühnen bestehen, die Apparate aufzunehmen haben, und ferner Behälter zur Aufstellung kommen, wodurch der Lichteinfall beeinträchtigt und der Raum verdunkelt wird.

Die Entlüftung der Dachaufbauten ist durch Asbestjalousien gebildet, und da ferner in den Fenstern der Außenwände für reichliche Entlüftungsmöglichkeit vorgesorgt wurde, bietet die Entlüftungseinrichtung eine Gewähr für den erforderlichen Frischluftzugang.

Die Dachdecke wurde aus Zomak-Leichtsteinen mit Ausgleichsschicht und doppellagiger teerloser Pappe auf durchgehenden Trägern (Pfetten) hergerichtet.

Für jeden Bauteil wurde die Konstruktion hergestellt, daß jeder Teil in sich standfest ist. Es mußte aber vermieden werden, die Haupttragglieder (Stützen) als im Fundament eingespannt zu rechnen, um nicht allzugroße Fundamentabmessungen zu bekommen und um ferner Neben- spannungen durch Senkungen zu vermeiden.

Das Stahlskelett ist derartig ausgeführt, daß die eigentlichen Überdachungskonstruktionen entweder rahmenartig oder aber durch Verbände versteift sind, um die Windlasten und Kranschübe in die Verbandskonstruktionen und von hier aus in die Fundamente abzuleiten.

A. Apparate- und Behälterhaus (linker Bauteil).

Wie bereits erwähnt, sind in diesem Bau hauptsächlich die Apparate und Behälter zur Aufstellung gekommen. Hierfür mußten Bühnen in 4, 8, 12 und 16 m Höhe vorgesehen werden. Dieser Hallenteil ist dreischiffig mit den Stützenabständen von 12 und zweimal 16 m. Um eine Einheitlichkeit zu erzielen und um Schneesäcke zu vermeiden, ist das Dach nicht unterteilt, sondern als flaches einheitliches Satteldach hergerichtet worden. Der Binder- und Dachstützenabstand beträgt 8 m.

Die Binderträger sind in den 16 m-Feldern durchgehend über drei Stützen gerechnet. In 20 m Höhe befinden sich elektrische, von den Bühnen zu bedienende Laufkrane von 20 und 10 t Tragkraft.

Zur Aufnahme der Schübe sowie des Winddruckes auf die durch Stiele und Riegel versteiften hohen Wände dient in erster Linie der in Dachebene angebrachte Verband zur Überführung auf die Versteifungskonstruktionen. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die hohen Längswände (West- und Ostseite) bei den großen Stützenabständen von 12 und 16 m auch in 12 m Bühnenhöhe auf das Bühnengerüst abgestützt vorgesehen werden mußten, weil sonst außergewöhnlich schwere Wandkonstruktionen erforderlich geworden wären. Da in der Stirnwand (Nordseite) der Hauptstützenabstand nur 8 m beträgt und das letzte Hallenfeld von 12 m für Aufstellung hoher Behälter vollkommen frei zu halten war, wird die Konstruktion dieser Stirnwand auf ganzer Wandhöhe freitragend ausgebildet.

Für den Einbau der Bühnenkonstruktionen mußten die Entfernungen der Gebäudestützen von 8, 12 und 16 m erheblich unterteilt werden, und zwar betragen die Stützenabstände der Bühnen 4 m. Die Bühnenabdeckung besteht aus 8/10 mm Riffelblech. Als Belastung wurde eine gleichmäßige Last mit Eigengewicht von 1,3 t/m² berücksichtigt. Hinzu

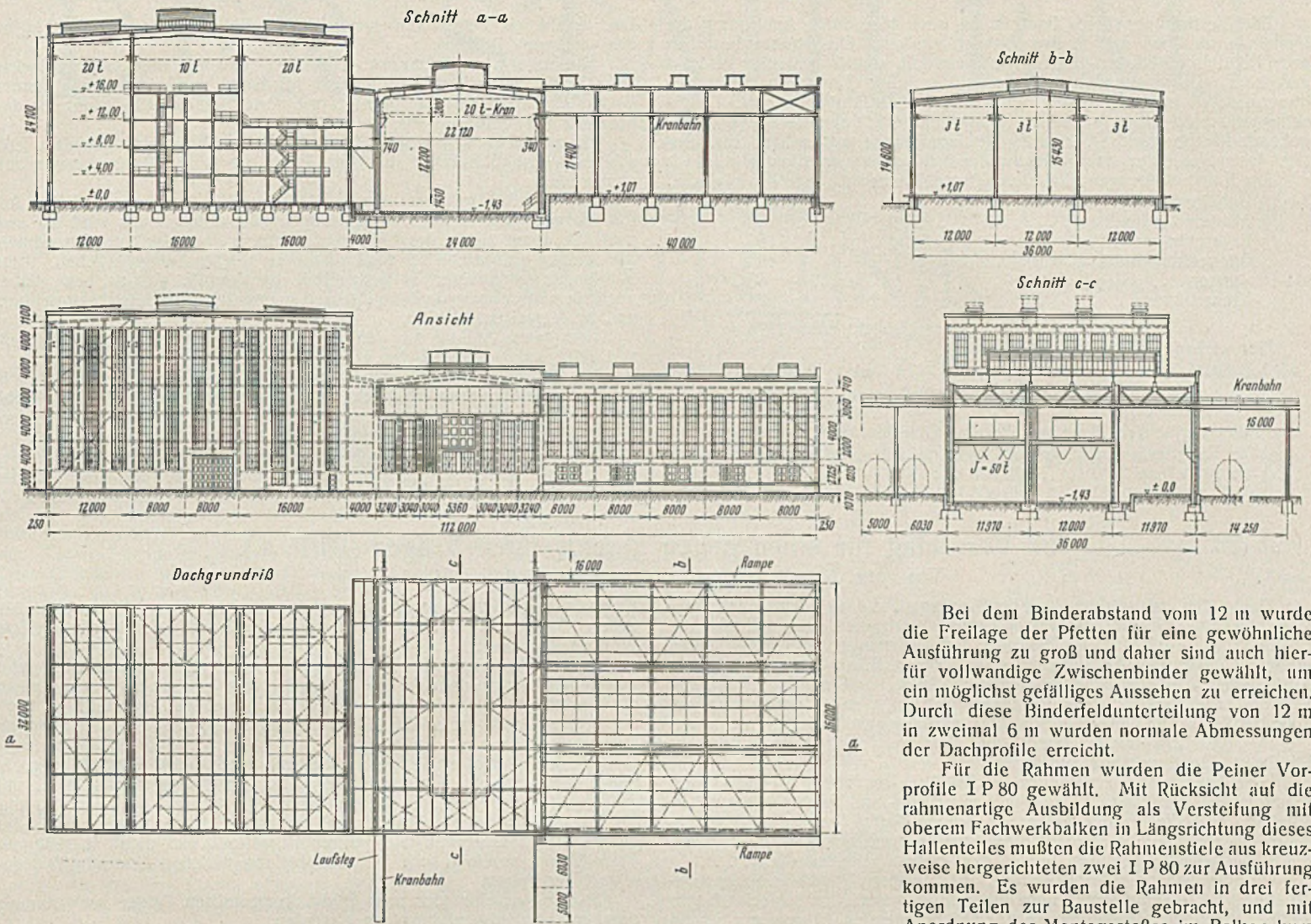


Bild 1. Übersicht.

kommt natürlich die Belastung durch die Behälter, die bis 300 t je Apparat oder Behälter betragen kann.

Jede Stütze ist einstiellig und aus einem IP-Träger hergerichtet. Die höchste Stützenlast beträgt 250 t. Die Bühnen sind sehr unterschiedlich ausgebildet. Der Zugang ist überall durch leicht begehbare Treppen mit Riffelblechstufen vorgesehen. Das Geländer besteht durchweg aus Röhren.

Um auch eine Aufstiegsmöglichkeit auf die Dächer zu haben, wurden von der 11 m-Bühne aus an dem Übergang zum mittleren Bauteil die nötigen Leitern mit Rückenschutz, Podest und eine Tür angebracht.

Die Bühnenkonstruktion wurde zur Aufnahme der Windlasten auf die 12 m-Bühne und zur eigenen Versteifung mit entsprechenden Verbänden versehen. — An der Ostseite befinden sich im Erdgeschoß und I. Stock kleinere Räume für Belegschaft und Aufsicht.

B. Mittlerer Hallenteil.

Der Fußboden liegt 1,43 m unter der ±-Nulllinie, was betriebstechnische Gründe erfordern. Die Bauhöhe ist 17,43 m. Für diesen Bauteil ist eine schöne 24 m frei tragende Zweigelenkrahmen-Konstruktion aus IP-Trägern geschweißt hergerichtet. Der Rahmenabstand ist 12 m. Vom Auftraggeber wurden die Bedingungen gestellt, für diesen Bauabschnitt eine Überdachung zu schaffen, deren Abstützung den Raum sehr wenig beanspruchte. Verstreben von Gebäudeteilen konnten hier grundsätzlich nicht zugelassen werden. Die gewählte Konstruktion kann als eine durchaus befriedigende Lösung angesehen werden. Denn auch in Gebäudelängsrichtung ist keine Versteifung, sondern sind in die Rahmenstielreihen Portale eingebaut worden, so daß dadurch der überbaute Raum mit dem Übergang zu den anschließenden Bauteilen frei ist.

Da hierfür der Lichteinfall hauptsächlich nur von den Stirnseiten aus möglich ist, wurden auch Belichtungsflächen in die Wände des Entlüftungsaufbaues von 8 m Stützweite und 3 m Höhe gelegt.

Der elektrische 20 t-Kran in diesem Gebäude kann beiderseits für die Verladung aus der Halle heraus und 11 bzw. 16 m ins Freie fahren. Durch diese weite Ausfahrt über mehrere Gleise können nebeneinanderstehende Waggons beschickt werden. Die für den Krandruchtritt in den beiden Stirnwänden angebrachten Schürzen aus glattem Blech sind verfahrbar und mit einer Feststell- und Lösevorrichtung versehen.

Die Kranbahnen sind waagrecht mit Verbänden ausgesteift, und hiervon wurde für die eine Kranbahnseite diese Versteifung als Bedienungssteg mit Riffelblechabdeckung, Geländer und einer Zugangsleiter versehen.

Zwischen diesem Hallenbau und dem Behälterbau befinden sich innerhalb der 4 m-Breite das Kohlentransportband und zwei Doppelbunker für Kohlenlagerung. Das Becherwerk ist vorn an der Westfront aufgestellt.

Bei dem Binderabstand vom 12 m wurde die Freilage der Pfetten für eine gewöhnliche Ausführung zu groß und daher sind auch hierfür vollwandige Zwischenbinder gewählt, um ein möglichst gefälliges Aussehen zu erreichen. Durch diese Binderfeldunterteilung von 12 m in zweimal 6 m wurden normale Abmessungen der Dachprofile erreicht.

Für die Rahmen wurden die Peiner Vorprofile IP 80 gewählt. Mit Rücksicht auf die rahmenartige Ausbildung als Versteifung mit oberem Fachwerkbalken in Längsrichtung dieses Hallenteiles mußten die Rahmenstiele aus kreuzweise hergerichteten zwei IP 80 zur Ausführung kommen. Es wurden die Rahmen in drei fertigen Teilen zur Baustelle gebracht, und mit Anordnung des Montagestoßes im Balken kurz vor jedem Eckpunkt ermöglichte sich das Zusammenbauen und Aufstellen der Rahmen auf der Baustelle verhältnismäßig einfach und ging schnell vor sich. Das Eigengewicht einer Rahmenkonstruktion beträgt rd. 36 t. Die Lager für den Zweigelenkrahmen wurden aus IP 30 mit Platten hergestellt.

C. Lagergebäude (rechter Bauteil).

Dieser dreischiffige Bau hat auch wieder wie das Behältergebäude die einheitliche satteldachförmige Dachdecke, die von Gelenkpfetten und den über vier Stützen gehenden Binderträgern getragen wird.

Der Binderträgerabstand ist 8 m. Das Profil hierfür ist I 34 und für die Pfetten I 20.

Jedes Schiff wird mit einem elektrischen 3 t-Kran befahren. Die in 11 m Höhe liegenden Fahrbahnen sind miteinander verbunden, und diese waagerechten Verbände wurden mit Riffelblech abgedeckt. Hierdurch war die Versteifung zur Aufnahme der Kranschübe gegeben, und gleichzeitig bietet diese Abdeckung den zur Bedienung der Krane nötigen Laufsteg.

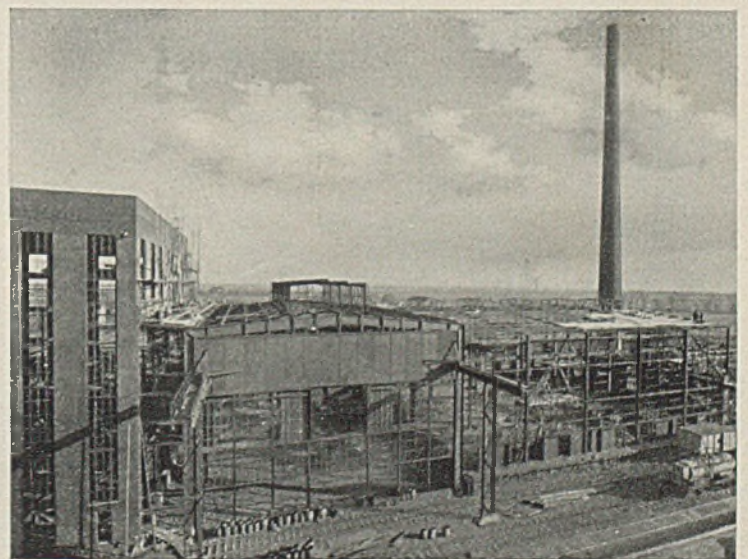


Bild 2. Ansicht.

Die Versteifung dieses Bauteils ist auch hier durch Anordnung der Verbände im Dach und in den Wänden erreicht. Die Stützen bestehen aus IP 28 bis IP 32 und sind nicht eingespannt, sondern gelenkig gelagert gerechnet. Der Fußboden liegt etwa 1 m über Fabrikflur. Auch für diesen Bauteil ist für eine gute Belichtung und Entlüftung gesorgt. Längsseitig sind beiderseits je fünf Stück zweiteilige Schiebetore sowie durchgehende Rampen für die Verladung der Erzeugnisse vorgesehen. Eine Ansicht der aufgestellten, zum Teil ausgefachten Stahlkonstruktion zeigt Bild 2.

Die Konstruktionsgewichte dieses ganzen Baues sind ungefähr folgende:

a.) Behälterbau	360 t
b.) Mittlerer Hallenbau	270 „
c.) Lagergebäude	180 „
Bühnenkonstruktion für Behälterbau	400 „
Bunker	55 „
Kranschürzen	25 „

Gesamtgewicht etwa 1290 t

Der umbaute Raum ist für:

a.) Behälterbau	etwa 34 600 m ³
b.) Mittelbau	18 000 „
c.) Lagergebäude	20 800 „

Mithin ergibt sich das ungefähre Gewicht des umbauten Raumes zu:

a.) für Behälterbau	360 000 kg : 34 600 m ³ = 10,4 kg/m ³
b.) für Mittelbau	270 000 kg : 18 000 m ³ = 15,0 „
c.) für Lagergebäude	180 000 kg : 20 800 m ³ = 8,7 „

Alle Rechte vorbehalten.

Ein Vorschlag für einen neuen geschweißten Träger (DRP. a.)

Von techn. Reichsbahn-Oberinspektor **Bernh. Sahling**, Hamburg.

Unter den zahlreichen Veröffentlichungen, die in letzter Zeit über Versuche auf schweißtechnischem Gebiet erschienen sind, nehmen die Erörterungen über den sogenannten Schweißraupenbiegeversuch einen größeren Raum ein. Als Besonderheit wird z. B. angeführt¹⁾, daß „der Ausfall des Schweißraupenbiegeversuchs weitgehend von der Lage der Schweißraupe abhängt; Schweißraupen an Kanten oder Verwendung von Sonderprofilen ergeben erheblich günstigere Biegewinkel“.

In ähnlichem Sinne äußert sich Dr.-Ing. Jurczyk in einer Abhandlung „Geschweißte Hohlträger“²⁾:

„Die bekannten Versuche an Flachstählen von 200 × 50 mm² Querschnitt sowie die Ergänzungsversuche mit Wulst- und Nasenprofilen haben ergeben, daß die in der Mitte der breiten Seiten liegenden Schweißnähte bei bedeutend geringeren Biege winkeln Risse verursachen, als wenn die Schweißnähte nahe den Kanten der Proben gelegt werden . . .“.

Dr.-Ing. Jurczyk führt weiter aus, „daß die ungleichmäßige Spannungserhöhung auf einen dicken Querschnitt, insbesondere das schlechte Nachfließen des Materials bei der in der Mitte liegenden Längsraupe Schuld an dem Versagen haben muß“.

Nach Ansicht des Verfassers spricht hier noch ein anderer Umstand mit, der zur Erklärung der geschilderten Beobachtung beitragen kann: die Eigenspannung des Baustoffs. Wie bekannt, hat jeder Guß- oder Walzkörper infolge der ungleichmäßigen Abkühlung einen unter mehr oder minder großem Zug stehenden Kern, während der Mantel infolge des Gleichgewichts der inneren Kräfte entsprechend „inneren Druck“ erfährt. Je näher nun die Schweißnaht mit ihrem ohnehin starken Schrumpfbestrebem an den unter Zug stehenden Kern heranrückt, desto ungünstiger muß das Versuchsergebnis ausfallen.

Doch welcher Erklärung man auch den Vorzug geben möge, das Ergebnis der Versuche wird durch die Erfahrung bestätigt, daß die Schweißnähte an den Kanten, z. B. bei aufgeschweißten Gurtplatten, keine der bei den sogenannten Halsnähten aufgetretenen Mängel gezeigt haben. Diese Beobachtung und die vorstehende Deutung führten zu dem in Bild 1 dargestellten neuen Querschnitt für geschweißte Träger, dessen Zusammensetzung aus den Bildern 2 und 3 ersichtlich und weiter unten noch ausführlicher beschrieben ist.

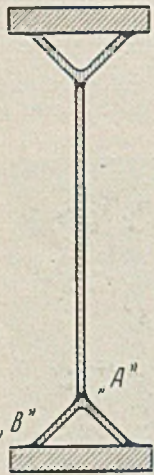


Bild 1.

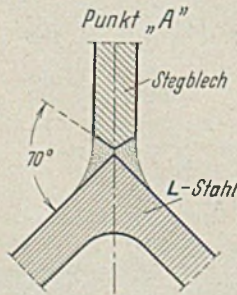


Bild 2.

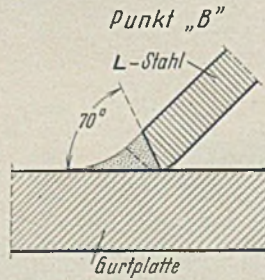


Bild 3.

Die Vorteile dieses neuen Trägerquerschnitts sind folgende:

1. An Stelle der Halsnaht in der Mitte der Gurtplatte treten Nähte an deren Kanten.
2. Der neue Trägerquerschnitt läßt sich leicht aus Breitflach- und Winkelstählen ohne Verwendung von Sonderprofilen herstellen.
3. Es werden eine innigere Verbindung zwischen Stegblech und Gurtplatte sowie ein günstigerer Kraftfluß als bei den bisher bekannten

¹⁾ Dr.-Ing. Wasmuth, Einfluß des Normalglühens auf Festigkeitseigenschaften und Schweißverhalten von Baustahl St 52. St. u. E. 1939, Heft 8.
²⁾ Arcos-Hausmitteilungen Nr. 88 vom Dezember 1938.

Das ergibt ein Durchschnittsgewicht für das Baugerippe von 10 kg/m³ des umbauten Raumes.

Hierbei soll nicht unerwähnt bleiben, daß von dem Gesamtgewicht etwa 38 % Peiner Träger, das sind rd. 490 t, zur Verwendung kamen. Es hat sich hierbei wieder gezeigt, wie vorteilhaft sich IP-Träger für den Stahlbau verwenden lassen.

Es ist daher zu begrüßen, daß das Peiner Walzwerk sich dazu entschlossen hat, IP-Träger bis zum Profil 100 in ihr Walzprogramm aufzunehmen.

Es ist ohne weiteres ein Bauwerk erstellt worden, das allen Anforderungen gerecht wird. Die Hauptkonstruktionsglieder sind so ausgebildet, damit sie in der Lage sind, kleinere Zusatzlasten aufzunehmen, die oftmals sich leicht bei der Einrichtung solcher Anlage ergeben. Eine Stahlkonstruktion bietet auf jeden Fall die Vorteile, daß sie beweglicher wie jede andere massive Bauweise und zugänglicher für Betriebseinrichtung und bei Erweiterungen ist.

Die ganze Anlage ist den bestehenden Fabrikteilen gut angepaßt und reiht sich würdig in das Landschaftsbild ein.

Es ist daher nur zu wünschen, daß die für den Vierjahresplan in Anspruch genommenen erheblichen Stahlmengen wieder mehr für gleiche oder ähnliche Zwecke, wie hier vorliegend, zur Verfügung gestellt werden, damit der vorteilbietende Stahlbau immer weiteren Zuspruch findet.

Es wird auch dankbar auf das schöne Einvernehmen während der Abwicklung dieses Auftrages zwischen Auftraggeber und den mit der Ausführung betrauten Wilke-Werken AG., Braunschweig, hingewiesen.

Bauweisen geschweißter Träger erzielt. Die bei der Nietbauweise üblichen Gurtwinkel werden durch schweißtechnisch richtig angeordnete Winkelstähle ersetzt.

4. Das Verkrümmen der Gurtplatten in der Querrichtung wird vermieden, desgleichen in der Längsrichtung, wie es sich zeigt, wenn die Gurtplatten nach den Aussteifungen aufgeschweißt werden.

5. Der Druckgurt erfährt durch den Winkel in waagerechter Richtung eine zusätzliche Aussteifung.

6. Die Beulsicherheit des Stegbleches wird durch Verringerung der Höhe heraufgesetzt. Es kann also unter Umständen möglich sein, mit geringeren Stegblechdicken auszukommen.

7. Die beim Schweißen nicht zu vermeidende Erwärmung wird gleichmäßiger über den Gurtquerschnitt verteilt und nicht so sehr auf einen Punkt vereinigt wie bei den bislang üblichen Querschnitten geschweißter Träger.

8. Das Aussehen der nach Bild 1 hergestellten Träger kann nur als durchaus befriedigend bezeichnet werden.

Die Ausführung in der Werkstatt ist denkbar einfach. Der Winkelstahl wird — nachdem dessen Kanten (vgl. Bild 3) bearbeitet wurden — auf die Gurtplatte aufgelegt und mit V-Nähten an diese angeschweißt. Sodann wird das Stegblech, dessen Längskanten nach Bild 2 gebrochen wurden, aufgesetzt und mit der Wurzel des Winkelstahls durch eine X-Naht fugenlos verbunden. Endlich wird der in gleicher Weise wie der untere Gurt vorbereitete obere Gurt auf das Stegblech gesetzt und mit diesem verschweißt.

Das Anschweißen von senkrechten Stegblechsaussteifungen, Querverbänden oder der Querträger ist ebenso einfach wie bei den bisher üblichen Bauweisen. Die genannten Bauteile erhalten wie bislang Ausparungen, damit beim Anschweißen ein Überschiessen der Gurtnähte vermieden wird.

Die Ermittlung des Trägheitsmoments bereitet keinerlei Schwierigkeiten, weil die J-Werte des verkanteten Winkelstahls aus den meisten Tabellenwerken zu ersehen sind. Wesentlich ist, daß die Winkelschenkel dick genug bemessen werden, um die Querkräfte einwandfrei übertragen zu können.

Für die Hohlräume besteht keine Rostgefahr, wenn die Stahlbauteile vor dem Zusammenbau gut mit Leinölfirnis gestrichen und die Winkelstähle an den Enden geschlossen werden, weil dann weder Luft noch Feuchtigkeit Zutritt haben. Falls es dennoch für erforderlich gehalten wird, können die Hohlräume mit einer Bitumenmasse vergossen werden.

Der einzige Nachteil gegenüber den bisher üblichen Bauweisen, daß je Gurt statt zweier Kehlnähte oder einer X-Naht nunmehr zwei Kehlnähte und eine X-Naht erforderlich sind, dürfte bei weitem durch die geschilderten Vorteile aufgewogen werden, um so mehr, als die Verteilung der Kräfte auf mehr Nähte spannungstechnisch günstiger ist und die Nähte je nach Erfordernis stärker oder schwächer ausgebildet werden können. Z. B. könnte sich empfehlen, im mittleren Drittel (oder gar in der mittleren Hälfte) der Trägerlänge schwächere Nähte zu wählen, weil hier die Querkräfte geringer, die Längsspannungen aber größer sind, und kräftigere Nähte nur in den beiden seitlichen Dritteln (oder Vierteln) der Trägerlänge auszuführen, wo stärkere Schrumpfspannungen infolge der Schweißnähte weniger nachteilig sind.

Die vorgeschlagene Lösung ist von der Brückenbauanstalt Johannes Dörnen in Dortmund-Derne entwickelt, durchgearbeitet und inzwischen zum Patent angemeldet worden. Auf den gleichen Gedanken ist später völlig unabhängig auch der Verfasser gekommen. Die genannte Brückenbauanstalt führt zur Zeit Versuche an fertiggestellten Trägern durch. Über die Ergebnisse wird demnächst berichtet werden.

INHALT: Grundlagen zu einer Theorie räumlicher Rahmentragwerke. (Schluß.) — Stahlkonstruktion zu einem Fabrikationsbau. — Ein Vorschlag für einen neuen geschweißten Träger (DRP. a.)

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöpperl, Darmstadt.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 9.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.