

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 3. Januar 1941

Heft 1/3

Entlastung bestehender Brückenwiderlager durch Anordnung einhäufiger Rahmenträger.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Wilhelm Maelzer, Beratender Ingenieur VBI, Berlin-Zehlendorf.

Die Einführung schwerer Lokomotiven sowie die Inbetriebnahme der Großgüterwagen bedingte die statische Untersuchung der vorhandenen Brückenbauwerke im Bereiche der Deutschen Reichsbahn. Auf Grund dieser Nachrechnungen mußte insbesondere eine große Anzahl von Bauwerken der Berliner Stadt- und Ringbahn ausgewechselt bzw. verstärkt werden. Bei diesen Untersuchungen wurde in den meisten Fällen festgestellt, daß die vorhandenen, in der Hauptsache gemauerten Brückenwiderlager den neuen Belastungsvorschriften nicht genügen.

Namentlich erwiesen sich die unter den festen Brückenauflegern vorhandenen Widerlager in keiner Weise zur Aufnahme der Bremskräfte in der vorgeschriebenen Größe ausreichend. Eine Ausnahme bildeten diejenigen Brückenwiderlager, an welche sich unmittelbar gewölbte Viadukte anschlossen. Diese zeigten mit Rücksicht auf den einseitig wirkenden Horizontalschub aus dem angrenzenden Gewölbe meistens reichliche Abmessungen. Schließen sich dagegen an das Brückenbauwerk beiderseitige

Luftdruckbremsen üben auf die Widerlager eine besonders ungünstige Wirkung aus. Auch hat die seinerzeit übliche Ausbildung der Brückenaufleger als Flächenlager eine Verteilung der Bremskräfte auf beide Widerlager sehr begünstigt, ein Umstand, der bei den Neubauten nicht mehr zutrifft. Das am weitesten verbreitete Brückensystem bei städtischen Eisenbahnüberführungen stellt sicherlich der durchlaufende Balken auf zwei Mittelstützen mit oder ohne Gelenke in seinen drei Öffnungen dar. Liegt nun die Aufgabe vor, eine derartige Brücke durch einen Neubau zu ersetzen, so hat man auch für die einwandfreie Überleitung der Bremskräfte in den Baugrund Vorsorge zu tragen. Der nächstliegende Vorgang, nämlich eine vollständige Erneuerung der Endwiderlager, kommt aus

wirtschaftlichen Gründen meist überhaupt nicht in Frage. Aber auch jegliche Verstärkung der Widerlager, insbesondere eine Verbreiterung der Widerlagersohle, erhöht die Kosten des Neubaus ganz bedeutend, namentlich auch deshalb, weil derartige Arbeiten stets unter Einhaltung

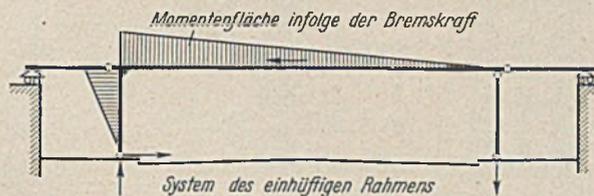


Bild 1.

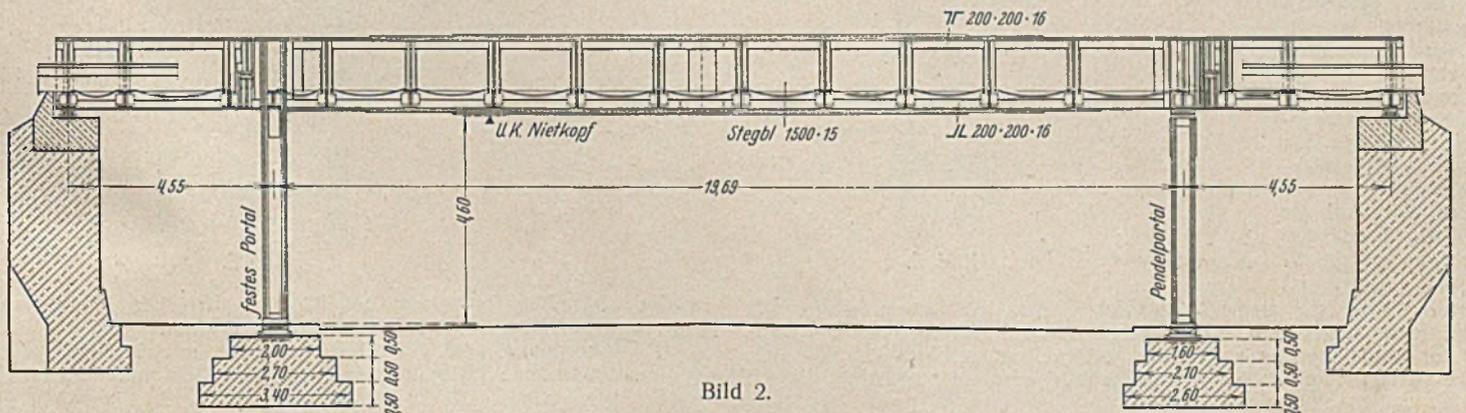


Bild 2.

Erddämme an, so kommt man selbst bei weitgehender Verteilung der Bremskräfte nach der Breitenrichtung des Widerlagers auf überaus hohe Werte der Bodenpressung an der Vorderkante der Widerlagersohle.

Dieses Ergebnis dürfte wohl darin seine Erklärung finden, daß die meist aus den 80er Jahren stammenden Widerlager von Brücken kleiner und mittlerer Stützweite außer für die damaligen verhältnismäßig geringen Verkehrslasten lediglich noch für die auftretenden Erddruckkräfte, nicht aber für die Bremskräfte bemessen worden sind. Wenn man bei der Nachrechnung bestehender Bauwerke vielleicht auch nicht die durch die Vorschriften geforderten Höchstwerte der Bremskräfte einzuführen braucht, so würde eine vollständige Vernachlässigung der zweifellos auftretenden Brems- bzw. Anfahrkräfte doch ein vollkommen falsches Bild der tatsächlich auftretenden Widerlagerbeanspruchungen sowie der Bodenpressung ergeben. Die heutigen, wesentlich höheren Fahrgeschwindigkeiten der Züge sowie die schnell wirkenden

des Eisenbahnbetriebes sowie des Straßenverkehrs durchzuführen sind, tiefe Ausschachtungen erfordern und oft umfangreiche Verlegungen von Straßenleitungen aller Art bedingen.

Es liegt nun der Gedanke nahe, das System des neu einzubauenden Brückenhauptträgers so zu wählen, daß eine vollständige Entlastung der Widerlager von den Bremskräften erzielt und die Widerlagerverstärkung ganz vermieden wird.

Das in Bild 1 veranschaulichte einhäufige Rahmensystem stellt, wie Vergleichsrechnungen zeigen, die wirtschaftlichste Lösung der Aufgabe unter den gegebenen Vorbedingungen dar. Die Gelenke in den Seitenöffnungen sind einmal zur Schonung der Brücke von den Folgen der Auflagersenkungen und dann auch zur Vermeidung der bei den üblichen Stützweitenverhältnissen auftretenden Ankerzüge angezeigt. Als Brückensystem hat der einhäufige Rahmen bisher bei längeren Stahlviadukten, insbesondere bei Förderbrücken, Verwendung gefunden. Als Mittel zur Entlastung vorhandener schwacher Widerlager



Bild 3.

und somit auch zu sparsamer Erneuerung bestehender Balkenbrücken unter Eisenbahngleisen ist das System, soweit bekannt, erstmalig vom Verfasser anlässlich des Neubaus einer Straßenerüberführung in Berlin vorgeschlagen worden.

Inzwischen ist bereits eine größere Zahl von Überbauten dieser Bauart zur Ausführung gebracht worden. Die Bilder 2 u. 3 stellen einen neuen Überbau mit einhüftigen Rahmenträgern dar. Die Stützweite der Mittelöffnung ist gegenüber dem alten Bauwerk auf 19,69 m vergrößert worden, um eine beabsichtigte spätere Fahrdammverbreiterung zu ermöglichen. Die linke Stütze (s. Ansicht) ist biege- und druckfest an den Hauptträger angeschlossen und leitet die Bremskräfte dem Stützenfundament zu, die rechte Stütze ist als Pendelstütze ausgebildet, während sämtliche Endauflager längsbeweglich sind. Die Stützen beider Hauptträger des Unterbaues sind durch Querriegel paarweise zu Zweigelenrahmen gekuppelt. Durch die Anordnung von seitlichen Längsträgern ließen sich die biege- und druckfest angeschlossenen Stützen ohne Durchbrechung von Buckelplatten bis an die obere Hauptträgergurtung hochführen (Bild 4). Die konstruktive Ausbildung des Stützenanschlusses ist aus Bild 5 ersichtlich. Die Niete sind für das Moment aus der am Stützenfuß wirkenden Bremsreaktion, für die betreffende Querkraft und den gesamten Stützendruck berechnet. Auch der Seitenstoß von 100 t infolge der eventuellen Rammwirkung durch Straßenerfahrzeuge ist bei den Stützen berücksichtigt worden.

Der Werkstoff für sämtliche Teile des Überbaues ausschließlich der Lager ist Flußstahl St 37, die Bemessung erfolgte für den Lastenzug N. Die bestehenden Widerlager zeigen recht knappe Abmessungen. Dank ihrer zur Aufnahme des Erddruckes gut geeigneten Form (Bild 2) sowie der vorgenommenen Zurücklegung der Brückenaullager übertrifft die aus



Bild 6.

der ständigen Last, dem Lastenzug N und dem Erddruck resultierende Bodenpressung an der Vorderkante nicht den Wert von 3,15 kg/cm². Hingegen wäre an die Aufnahme der Bremskräfte durch die vorhandene Widerlagerecke nicht zu denken. Durch die gewählte Neubauanordnung konnte von jeglicher Widerlagerverstärkung abgesehen werden. Die einzigen an den Widerlagern vorgenommenen Arbeiten waren der Einbau von Eisenbeton-Auflagerbänken und die Entfernung der durch den Einbau von Gelenken entbehrlich gewordenen Anker.

Ein zweites nach demselben System erneuertes Brückenbauwerk ist die in Bild 6 dargestellte Straßenerüberführung.

Die durch den einhüftigen Rahmen herbeigeführte Entlastung der Widerlager von den Bremskräften läßt sich natürlich auch durch einen Zweigelenrahmen erreichen. Der ebenfalls von dem Verfasser ausgearbeitete Entwurf nach Bild 7 stellt die Anwendung dieses Systems zur Erneuerung einer weiteren Straßenerüberführung dar. Der einzige Vorteil des Zweigelenrahmens gegenüber dem einhüftigen Rahmen liegt

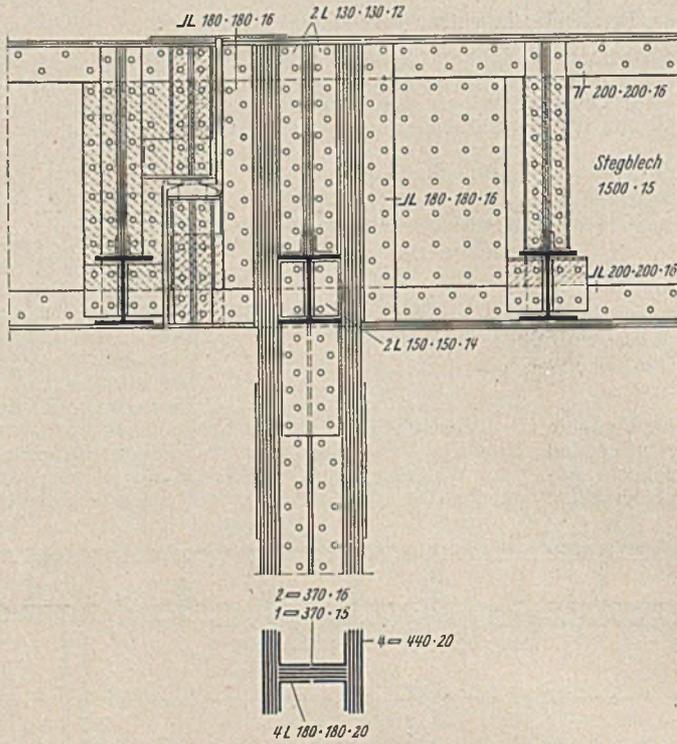


Bild 5.

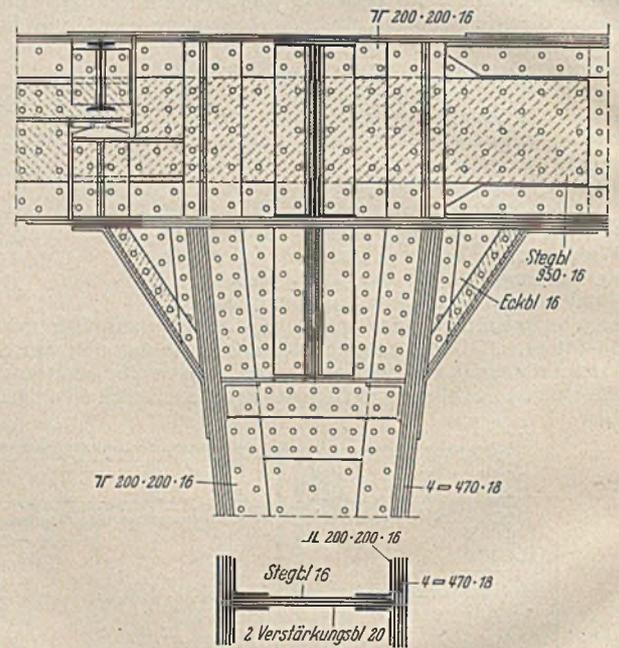


Bild 8.

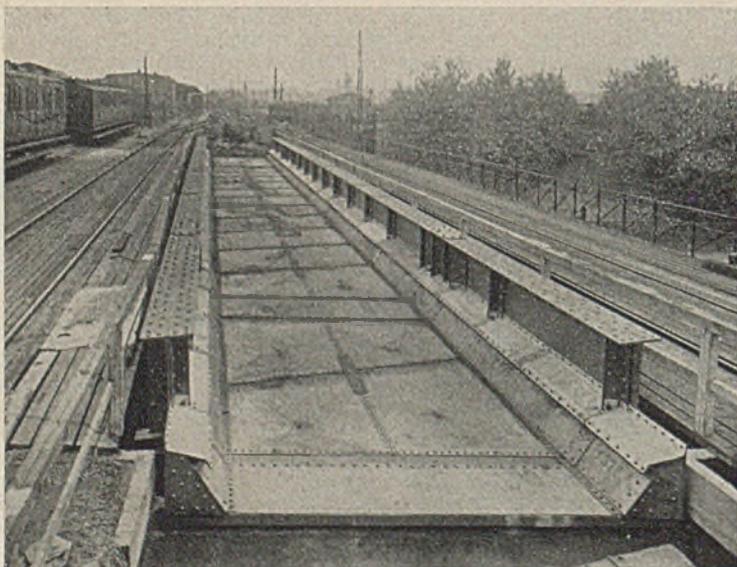


Bild 4.

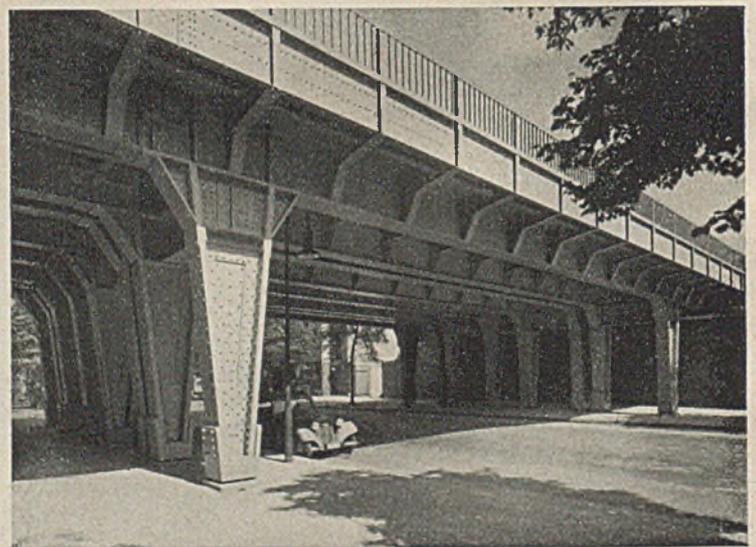


Bild 7.

in der wirksamen Entlastung des Riegels durch den Horizontalschub, wonach dieser Hauptträger relativ leicht ausfällt.

Die Anordnung wird aber durch die Umwandlung der Pendelstütze in eine zweite feste Stütze äußerlich statisch unbestimmt und im Gegen-

satz zum einhäufigen Rahmen gegen die waagerechten Verschiebungen der Stützenfundamente empfindlich. Die Stützen erfordern jedenfalls eine breite und relativ kostspielige Gründung; bei einigermaßen unzuverlässigem Baugrund ist das System überhaupt nicht zu empfehlen.

Andererseits werden die Stützen des Zweigelenrahmens in höchst ungünstiger Weise auch durch Biegemomente aus der senkrechten Belastung, der Wärmeänderung, den Bremskräften beansprucht und sind außerdem noch für die Stöße der Straßenfahrzeuge bis zu einer Höhe von 100 t nachzuweisen.

Die einfache und schlanke Formgebung nach Bild 2 wird bei gleichzeitiger Wirkung aller dieser Kräfte nur schwierig einzuhalten sein; vor allem aber wird sich der momentenfeste Anschluß an den Hauptträger entsprechend Bild 5 als überhaupt nicht ausführbar erweisen. Man kommt nun zwangsläufig auf eine Stützenform, wie sie aus der Konstruktionszeichnung der Rahmenecke in Bild 8 hervorgeht. Hierdurch wird entweder das lichte Straßendurchfahrprofil eingeengt, oder aber es muß die Stützweite der Mittelöffnung auf Kosten der Bürgersteige vergrößert werden.

Wie Vergleichsrechnungen zeigen, ist der Stahlbedarf des einhäufigen Rahmens nahezu der gleiche wie für den Zweigelenrahmen. Was sich beim Zweigelenrahmen am Riegel sparen läßt, wird bei den Stützen und Eckblechen wieder zugegeben. Durch die erheblich kostspieligeren Fundamente des Zweigelenrahmens wird somit die Frage der Wirtschaftlichkeit zugunsten des einhäufigen Rahmens entschieden.

Der einhäufige Rahmen der oben beschriebenen Art, unter Umständen auch über nur zwei Öffnungen, d. h. ohne Pendelstütze, kommt in erster Linie bei der Auswechslung bestehender Überbauten von Eisenbahnbrücken in Frage. Dies schließt jedoch seine Verwendung auch bei vollständigen Neubauten keineswegs aus. Namentlich dort, wo der Baugrund keine hohe Bodenpressung verträgt, lassen sich die Bremskräfte weit zweckmäßiger durch biegezugsfeste Stützen und Stützenfundamente in den Baugrund leiten als durch Widerlager, die in solchen Fällen eine überaus große Sohlenfläche erfordern, in ihren durchschnittlichen Abmessungen stark zunehmen und die Wirtschaftlichkeit des Gesamtbauwerks sehr ungünstig beeinflussen.

Alle Rechte vorbehalten.

Die Stabilität des Dreigelenrechteckrahmens.

Von Dipl.-Ing. Wilhelm Bültmann, Hamburg.

Einleitung.

Neuerdings wird für die Ermittlung der Knickfestigkeit der Stiele von Zweigelenrechteckrahmen in der Rahmenebene die Knicklänge $s_k \cong 2h$ gefordert, wo h die Stielhöhe entsprechend Bild 1 ist. Diese Forderung stützt sich auf theoretische Untersuchungen von Hertwig und Pohl¹⁾ und Chwalla²⁾ sowie auf Versuche von Chwalla und Kollbrunner³⁾, die den Nachweis der antisymmetrischen Knickfigur des symmetrisch belasteten Zweigelenrahmens erbrachten.

Ähnliche Überlegungen treffen auch für den in der Baupraxis manchmal nicht vermeidbaren Dreigelenrechteckrahmen zu.

Dieser Rahmen soll hier untersucht werden, insbesondere auch, wenn die Lasten in veränderlicher Höhe am Rahmenstiel angreifen, da diesem Belastungsfall in der Praxis immerhin einige Bedeutung zukommt und derselbe nur durch umständliche, viel Zeit beanspruchende Rechnung zu erfassen ist.

A. Die Trägheitsmomente der Rahmenstäbe sind konstant.

1. Die Last greift an der Rahmenecke an.

Der Dreigelenrechteckrahmen nach Bild 1 hat, wie leicht einzusehen ist, durch die Anordnung des Gelenkes bei a geringere Stabilität als ein Zweigelenrechteckrahmen gleicher Abmessungen und Querschnitte. Wird die Untersuchung der Stabilität dieses Rahmens auf die in der Bildebene beschränkt, ist weiterhin der Elastizitätsmodul des Riegels und Stieles konstant, dann ergibt sich die Knickbedingung des Dreigelenrechteckrahmens mit den Daten und für die Belastung nach Bild 1 aus der vereinfachten Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$(1) \quad z \cdot \operatorname{tg} z = 3c, \quad \text{die räuml. } \Pi \text{ v. } \text{Gelenk. 88}$$

worin $z = \alpha h$, $\alpha^2 = \frac{P}{E J_h}$ und $c = \frac{h J_r}{l J_h}$ bedeuten. Wird

$$(2) \quad \gamma = \frac{\pi}{z}$$

gesetzt, dann ist die Grenzkraft

$$(3) \quad P_k = \frac{E J_h \pi^2}{(\gamma h)^2}$$

In Bild 2 ist die Knicklänge $s_k = \gamma h$ für $h = 1$ als $f(c)$ dargestellt worden. Die Grenzwerte sind

für $c = 0$; $\gamma = \infty$, also $P_k = 0$ und

für $c = \infty$; $\gamma = 2$, also $P_k = \frac{E J_h \pi^2}{4 h^2}$ (I. Eulerfall).

Die Kurve $\gamma = f(c)$ nähert sich sehr schnell dem Grenzwert $\gamma = 2$. Von diesem Verlauf wird man bei der Bemessung von Dreigelenrechteckrahmen Gebrauch machen, um große Knicklängen der Stiele zu vermeiden. Eine Frage der Normung wäre, für den Rahmensteifigkeitswert c Mindestwerte vorzuschreiben.

Bei $c \geq 2$ läßt sich $\gamma = f(c)$ auch genau genug durch die Näherungsformel

$$(4) \quad \gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{c}}$$

erfassen⁴⁾, während für $c \leq 2$

$$(4a) \quad \gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{c} + \frac{0,035}{c^2}} \quad \text{ist.}$$

¹⁾ A. Hertwig u. K. Pohl, Die Stabilität der Brückenendrahmen. Stahlbau 1936, S. 129.

²⁾ E. Chwalla, Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen. Bauing. 1938, S. 69.

³⁾ E. Chwalla u. C. F. Kollbrunner, Beiträge zum Knickproblem des Bogenträgers und des Rahmens. Stahlbau 1938, S. 94.

⁴⁾ E. Chwalla gibt in den Erläuterungen zu DIN E 4114 für den Zweigelenrechteckrahmen eine entsprechende Faustformel an, aus der Gl. (4) entwickelt wurde.

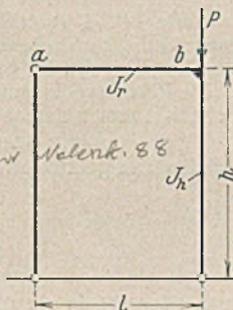


Bild 1.

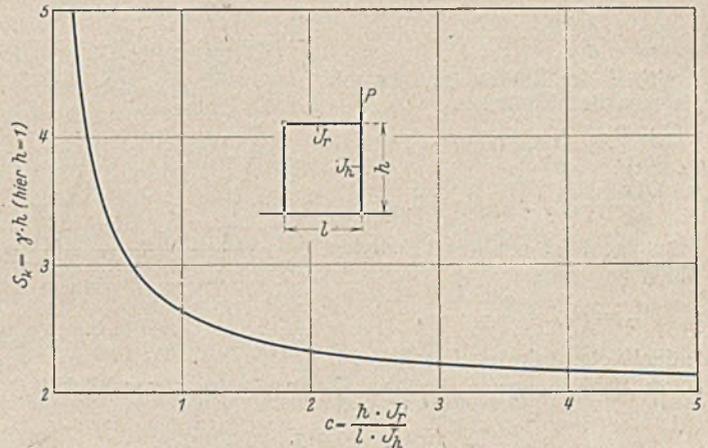


Bild 2. Dreigelenrechteckrahmen.
Knicklänge des Rahmenstieles $s_k = \gamma h$.

Schreibt man statt $c_m = \frac{h J_r}{l J_h} \approx \frac{c}{\tau}$ und ersetzt τ durch $\tau = A \lambda^2 = A \gamma^2 \lambda_{II}^2$, worin $\lambda_{II} = \frac{h}{i}$ den Stielschlankheitsgrad des II. Eulerfalles und $i = \sqrt{\frac{J_h}{F_h}}$ den Trägheitsradius des Stielquerschnitts bedeuten, dann liefert Gl. (4) die im plastischen Bereich gültige Gleichung

$$(4b) \quad \gamma \approx \sqrt{2 + 2 \sqrt{1 + \frac{0,70 A \lambda_{II}^2}{c}}}$$

Nach DIN E 4114, Tafel 1, ist, wie leicht nachzuprüfen ist, für St 37 $A = \frac{\sigma_{ki}}{E \pi^2} = 0,000 115 8$ und entsprechend für St 52 $A = 0,000 173 7$, wenn $\sigma_{ki} = 2400 \text{ kg/cm}^2$ und 3600 kg/cm^2 die entsprechenden Knickspannungen des plastischen Bereiches sind. Die Abgrenzung der Bereiche müßte dann nach DIN E 4114, Tafel 1, durch die Schlankheitsgrade $\lambda = 92,9$ und $\lambda = 75,9$ erfolgen.

Bedient man sich zur Ermittlung von τ der σ_k -Linie nach Tafel 1 der DIN E 4114, dann werden die γ -Werte noch kleiner als die aus Gl. (4b) errechneten, so daß man sich mit den Ergebnissen der Näherungsgleichung (4b) immer auf der sicheren Seite bewegt.

Ein Beispiel erläutere den Rechnungsgang.

Die Abmessungen und Querschnittswerte des zu untersuchenden Dreigelenrechteckrahmens sind:

- der Riegel $l = 4 \text{ m}$; $J_r = 113\,200 \text{ cm}^4$;
 der Stiel $h = 4 \text{ m}$; $J_h = 36\,940 \text{ cm}^4$ und $i = 14,5 \text{ cm}$.
- $c = \frac{400 \cdot 113\,200}{400 \cdot 36\,940} = 3,064$, nach Bild 2 oder Gl. (4) ist dann
 - $\gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{3,064}} \approx 2,217$ und
 - $s_k \approx 2,217 \cdot 4,00 \approx 8,87 \text{ m}$, so daß
 - $\lambda \approx \frac{887}{14,5} \approx 61,2 < 92,9$ für St 37, also plastisches Knicken.
 - $\lambda_{II} = \frac{400}{27,6} = 27,6$ liefert mittels Gl. (4b)
 - $\gamma \approx \sqrt{2 + 2 \sqrt{1 + \frac{0,70 \cdot 0,0001158 \cdot 27,6^2}{3,064}}} \approx 2,005$
 - $s_k \approx 2,005 \cdot 4,00 \approx 8,02 \text{ m}$ die Knicklänge und
 - $\lambda \approx \frac{802}{14,5} \approx 55,3$ den Schlankheitsgrad für St 37, der zur Ermittlung der weiteren Größen anzusetzen ist.

2. Die Last greift am Stiel unterhalb der Rahmenecke an.

Für den Belastungsfall, daß nach Bild 3 die Last am Stiel angreift, stehen noch keine Werte, die eine einfache praktische Rechnung ermöglichen, zur Verfügung, obwohl diesem Fall einige Bedeutung zukommt, da er in der Praxis sehr oft zu verfolgen ist. Daher kann man leider noch allzuoft erleben, daß in den oberhalb dieses Lastangriffspunktes nachgewiesenen Spannungswerten der Stiele die Last gar nicht mehr berücksichtigt wird. Im Bereich I des Stieles ist mit den Daten von Bild 3, wie sich mittels der linearisierten Differentialgleichung der elastischen Linie leicht nachweisen läßt,

$$y = \frac{f}{\sin \alpha u} \cdot \sin \alpha x,$$

worin wiederum $\alpha^2 = \frac{P}{E J_h}$ ausmacht.

An der Stelle $x = u$ ist mithin

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha f}{\text{tg } \alpha u}.$$

Im Bereich II des Stieles ist aber mit den gleichen Bezeichnungen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 f = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} + \alpha^2 f x + K_1 = 0.$$

Das Eckmoment ist mit den bekannten Bedingungen

$$M_b = P_1 f = \frac{3 E J_r \tau}{l},$$

wenn τ der Knotendrehwinkel der Ecke ist.

Durch Umformung und Einführung von α^2 wird dieser Winkel

$$\tau = \frac{l J_h}{3 J_r} \cdot \alpha^2 f.$$

Die Konstante K_1 wird der Grenzbedingung $x = h$, $\frac{dy}{dx} = \tau$ zufolge

$$K_1 = -\alpha^2 f h - \frac{l J_h}{3 J_r} \cdot \alpha^2 f$$

und demnach

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} - \alpha^2 f (h - x) - \frac{l J_h}{3 J_r} \cdot \alpha^2 f = 0.$$

Schreibt man $\frac{u}{h} = \psi$, $\alpha h = z_1$ und wiederum $\frac{h J_r}{3 J_h} = c$, dann lautet die

Gleichung der Knickbedingung nach Verknüpfung der beiden Bereiche des Stieles mittels Gl. (5) u. (6) für $x = u$

$$(7) \quad z_1 \cdot \text{tg } \psi z_1 \left(1 - \psi + \frac{1}{3c}\right) = 1.$$

Mit gegebenen c und ψ liefert die Wurzel z_1 der Gl. (7), wenn wiederum $\gamma_1 = \frac{\pi}{z_1}$ gesetzt wird, die Grenzkraft

$$P_{k_1} = \frac{E J_h \pi^2}{(\gamma_1 h)^2}.$$

Wird die in Abschnitt I für Lasten, die am Rahmeneckpunkt angreifen, errechnete Knicklänge $s_k = \gamma h$ beibehalten, dann ist nach Einführung von

$$(8) \quad \mu = \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} = \frac{z^2}{z_1^2}$$

$$(9) \quad P_{k_1} = \frac{E J_h \pi^2}{\mu (\gamma h)^2}.$$

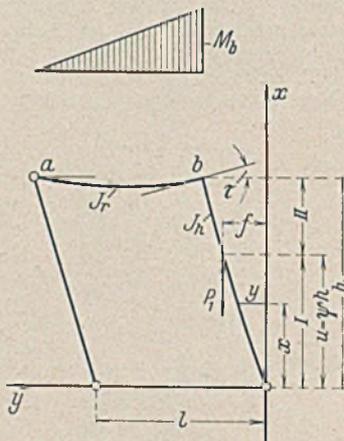


Bild 3.

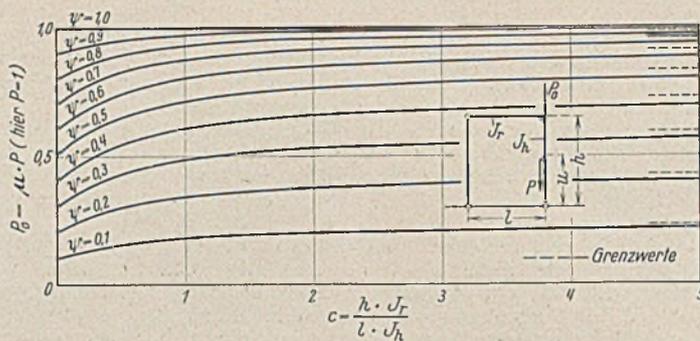


Bild 4. Dreigelenrechteckrahmen. Beiwerte μ der am Rahmenstiel angreifenden Kräfte.

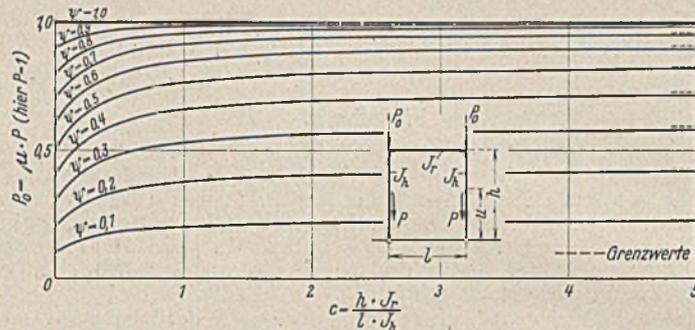


Bild 4a. Zweigelenrechteckrahmen. Beiwerte μ der an den Stielen angreifenden Kräfte.

In Bild 4 sind diese Abminderungsbeiwerte μ mit c als Abszisse und ψ als Parameter für $\psi = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ dargestellt worden. Die μ -Werte nähern sich asymptotisch den Grenzwerten, die durch starre Einspannung des Stieles ($J_r = \infty$) gekennzeichnet sind. Bei $c = 0$ ist $\mu = \psi$, wie sich aus Gl. (1), (7) u. (8) leicht nachweisen läßt, wenn $\text{tg } z = z$ und $\text{tg } \psi z_1 = \psi z_1$ gesetzt wird, da $z \rightarrow 0$ und ebenfalls $z_1 \rightarrow 0$.

Für den entsprechend, aber symmetrisch belasteten Zweigelenrechteckrahmen sind die Grenzwerte, einfachen Überlegungen zufolge, dieselben. Allerdings nähern sich die μ -Werte schneller den Asymptoten, wie das zum Vergleich eingefügte Bild 4a zeigt.

Wie Bild 4 vermittelt, ist der Einfluß der am Stiel angreifenden Last doch immerhin bedeutend. So ist z. B. eine Last, die in halber Höhe am Stiel angreift, im Bereich praktischer Rahmensteifigkeiten mit $\mu \approx 0,75$ in die Rechnung einzuführen. Beim Lastangriff $\psi > 0,7$ sind im gleichen Bereich kaum nennenswerte Abminderungen zu verzeichnen.

Will man die Abminderungswerte rechnerisch erfassen, dann leistet für den Dreigelenrechteckrahmen die Faustformel

$$(10) \quad \mu \approx \frac{\mu_{c=\infty} c + 0,70 \psi}{c + 0,70} \quad \text{mit}$$

$$(11) \quad \mu_{c=\infty} \approx (2,55 - 2,00 \psi + 0,45 \psi^2) \psi$$

gute Dienste, da sie diese Werte ziemlich genau wiedergibt.

In Gl. (11) sind die Asymptoten der Abminderungsbeiwerte in Abhängigkeit von den Lastangriffspunkten festgelegt. Die Zahlen dieser Gleichung wurden nach praktischen Gesichtspunkten abgerundet. Für den symmetrisch belasteten Zweigelenrahmen nach Bild 4a gilt sinngemäß

$$(10a) \quad \mu \approx \frac{\mu_{c=\infty} c + 0,35 \psi}{c + 0,35},$$

wo $\mu_{c=\infty}$, wie schon erwähnt, Gl. (11) zu entnehmen ist.

3. Die Lasten greifen gleichzeitig an der Rahmenecke und unterhalb derselben am Stiel an.

Greifen die Lasten, wie Bild 5 zeigt, gleichzeitig an der Rahmenecke und am Stiel unterhalb der Rahmenecke an, dann ist der Einfluß der Stiellasten P_1 und P_2 auf die Stabilität des Rahmens ein anderer als bei getrenntem Angriff nach A 1 und A 2. Dieser Unterschied soll an Hand der abzuleitenden Bedingungsgleichung festgelegt werden.

Die vereinfachte Differentialgleichung der elastischen Linie des Bereiches II des Rahmenstieles lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y + (\alpha^2 - \beta^2) f = 0,$$

wenn statt

$$\frac{P_1}{E J_h} = \beta^2 \quad \text{und} \quad \frac{P_2}{E J_h} = \alpha^2 - \beta^2$$

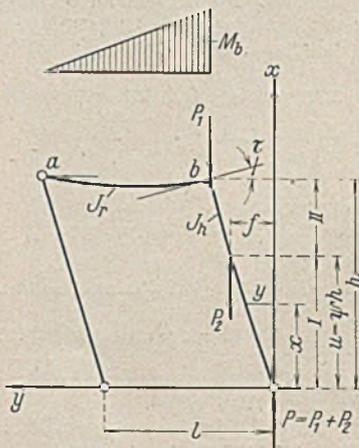


Bild 5.

geschrieben wird. Die Konstanten der Lösung

$$y = K_1 \cdot \sin \beta x + K_2 \cdot \cos \beta x - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} \cdot f$$

liefern die Grenzbedingungen

$$x = h, \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_b}{E J_h} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \tau$$

und $x = u, y = f$, wenn die Verknüpfung von M_b und τ mit

$$\frac{M_b}{E J_h} = \frac{3 J_r \tau}{l J_h}$$

berücksichtigt wird. Es ist

$$\frac{3 J_r \tau}{l J_h} = \beta^2 K_1 \cdot \sin \beta h + \beta^2 K_2 \cdot \cos \beta h$$

$$\frac{3 J_r \tau}{l J_h} = \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \beta K_1 \cdot \cos \beta h - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \beta K_2 \cdot \sin \beta h$$

$$0 = K_1 \left(\beta \cdot \sin \beta h - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta h \right) + K_2 \left(\beta \cdot \cos \beta h + \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \sin \beta h \right)$$

$$f \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} = K_1 \cdot \sin \beta u + K_2 \cdot \cos \beta u$$

$$K_1 = - \frac{f \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\beta \cdot \cos \beta h + \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \sin \beta h \right)}{\beta \cdot \sin \beta (h - u) - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta (h - u)}$$

$$K_2 = \frac{f \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\beta \cdot \sin \beta h - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta h \right)}{\beta \cdot \sin \beta (h - u) - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta (h - u)}$$

Nach Abkürzung durch $u = \psi h, \beta^2 = m \alpha^2$ bzw. $\beta = \alpha \sqrt{m}, z_2 = \alpha h, c = \frac{h J_r}{l J_h}$ und Einsetzen der Konstanten ergibt sich die Gleichung der Knickbedingung nach Verknüpfung mit Gl. (5) der Bedingung des Bereiches I und zweckmäßiger Umformung zu

$$(12) \quad \frac{z_2 \left\{ \sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} \psi z_2 + m \cdot \operatorname{tg} [(1 - \psi) \sqrt{m} z_2] \right\}}{\sqrt{m} - \operatorname{tg} \psi z_2 \cdot \operatorname{tg} [(1 - \psi) \sqrt{m} z_2]} = 3 c$$

Die Lösung dieser Gleichung wirft die auf die Knicklänge nach A 1 bezogene Grenzkraft

$$(13) \quad P_{k_2} = \frac{E J_h \pi^2}{\mu_1 (\gamma h)^2}, \text{ wo } \mu_1 = \frac{z^2}{z_2^2} \text{ entsprechend Gl. (8),}$$

aus. Wird der Last P_1 derselbe Einfluß auf die Stabilität des Rahmengebildes wie P in A 1 beigemessen, dann muß die Wirkung von P_2 durch die Gleichung $\mu_1 (P_1 + P_2) = P_1 + \mu_2 P_2$ erfaßt werden. Bei Beachtung der Bedeutung des eingeführten Lastverhältnisses mit $\frac{P_1}{P_2} = \frac{m}{1 - m}$ ist der Einflußfaktor, der der Last P_2 zugeordnet ist,

$$(14) \quad \mu_2 = \frac{u_1 - m}{1 - m}$$

In Bild 6 sind die Beiwerte μ_2 für $\psi = 0,5$ und $m = 0,0, 0,2, 0,4, 0,6$ und $0,8$ als Parameter über c aufgetragen worden.

Der Verlauf der Kurven zeigt deutlich, daß man der praktischen Rechnung das Überlagerungsprinzip mittels der Kurventafel nach Bild 4 bzw. Gl. (10) genau genug zugrunde legen kann. Die so begangenen

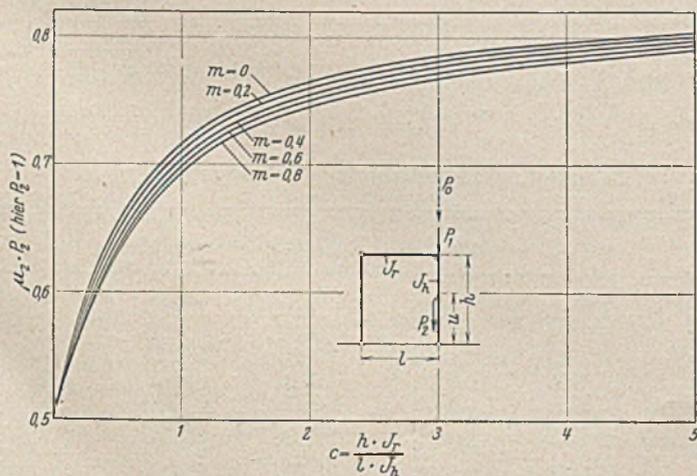


Bild 6. Dreigelenrechteckrahmen.
Beiwerte μ_2 der am Rahmenstiel bei $\psi = 0,5$ angreifenden Kräfte ($P_0 = P_1 + \mu_2 \cdot P_2$).

Fehler sind gering und liegen immerhin auf der sicheren Seite, so daß die erhebliche Vereinfachung der praktischen Rechnung die Anwendung des Überlagerungsprinzips gerechtfertigt erscheinen läßt.

B. Das Trägheitsmoment des Riegels ist veränderlich.

Die Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente des Riegels bereitet keine Schwierigkeiten, wenn beachtet wird, daß in obigen Entwicklungen jeweils für den Knotendrehwinkel τ die Beziehung

$$E \tau = \frac{l}{3 J_r}$$

bestand, die durch die Momentenfläche mit dem Eckmoment $M_b = 1$ gemäß Bild 3 und 5 zu deuten ist.

Bei veränderlichem Trägheitsmoment ist also nur der Mittelwert J_r zu errechnen, der $J_r = \frac{l}{3 E \tau}$ und der Momentenfläche des Riegels mit dem Moment $M_b = 1$ über der Ecke entspricht.

1. Die Trägheitsmomente des Riegels lassen sich durch eine Gerade angleichen.

Sind die Trägheitsmomente J_x , wie Bild 7 zeigt, linear veränderlich, dann ist der E -fache Knotendrehwinkel τ bei b mit den Größen dieses Bildes, wenn $J_x = J \left(1 + \frac{n-1}{l} \cdot x \right)$ die Trägheitsmomente wiedergibt:

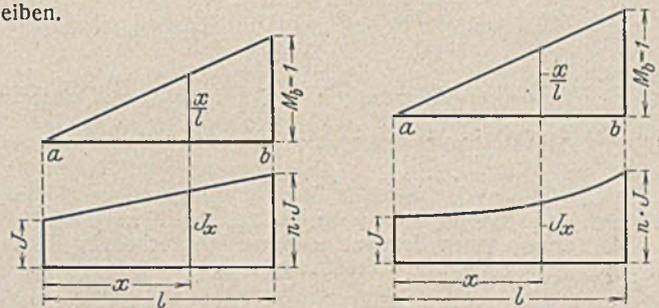
$$E \tau = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2}{J_x} \cdot dx = \frac{1}{l^2 J} \int_0^l \frac{x^2}{\left(1 + \frac{n-1}{l} \cdot x \right)} \cdot dx$$

$$E \tau = \frac{l}{(n-1)^3 J} \left[\frac{(n-1)^2}{2} - (n-1) + \ln(n) \right]$$

Demnach kann man für den Mittelwert J_r der Trägheitsmomente

$$(15) \quad J_r = \frac{J(n-1)^3}{3 \left[\frac{(n-1)^2}{2} - (n-1) + \ln(n) \right]}$$

schreiben.



2. Die Trägheitsmomente lassen sich durch eine Halbparabel angleichen.

Sind die Trägheitsmomente J_x des Riegels nach Bild 8 durch die Halbparabel 2. Ordnung

$$J_x = \frac{J}{1 + \frac{1-n}{n} \cdot \frac{x^2}{l^2}}$$

erfaßbar und ist so der E -fache Knotendrehwinkel τ bei b , wenn die Momentenfläche des Riegels gemäß Bild 8 in Rechnung gestellt wird,

$$E \tau = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2}{J_x} \cdot dx$$

$$E \tau = \frac{1}{l^2 J} \int_0^l \left(1 + \frac{1-n}{n} \cdot \frac{x^2}{l^2} \right) dx$$

$$E \tau = \frac{l}{15 J} \left[5 + \frac{3(1-n)}{n} \right]$$

dann kann der Mittelwert J_r der Trägheitsmomente aus der einfachen Gleichung

$$(16) \quad J_r = J \cdot \frac{5n}{2n+3}$$

ermittelt werden.

3. Die Trägheitsmomente sind sprunghaft veränderlich.

Der Vollständigkeit halber soll noch der Mittelwert angegeben werden, wenn die Trägheitsmomente nach Bild 9 sprunghaft veränderlich sind. Die einfache

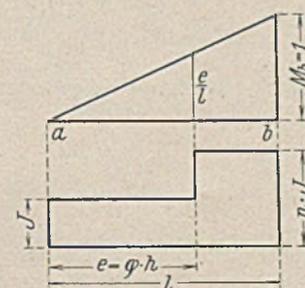


Bild 9.

Zwischenrechnung soll hier jedoch nicht eingefügt werden. Setzt man $\varphi = \frac{e}{h}$, dann lautet:

$$(17) \quad J_r = \frac{nJ}{1 + \varphi(n-1)}$$

Es macht keine Mühe, den Mittelwert J_r bei mehrfach abgestuften Trägheitsmomenten zu erfassen. Bei unregelmäßigen Trägheitsmomenten kann man den Mittelwert notfalls graphisch erfassen.

C. Die Trägheitsmomente des Stieles sind veränderlich.

1. Die Last greift an der Rahmenecke an.

a) Die Trägheitsmomente sind sprunghaft veränderlich.

Bei Rahmenstielen aus Profilstählen kann man manchmal nicht umhin, den oberen Teil des Stieles wirtschaftlicher Bemessung halber durch Lamellen zu verstärken. Die Trägheitsmomente ändern sich dann, wie Bild 10 zeigt, sprunghaft.

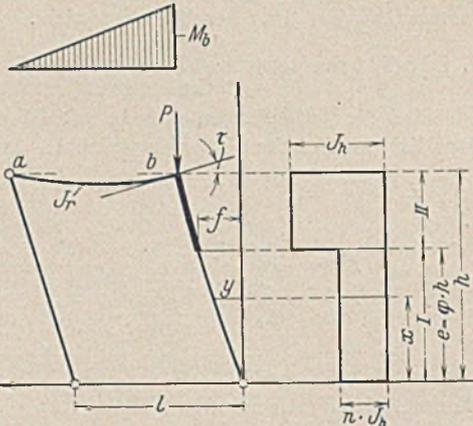


Bild 10.

Die Ermittlung der die Stabilitätsgrenze kennzeichnenden Gleichung erfolgt wiederum durch Lösung der für die beiden Stielbereiche I und II verschiedener Trägheitsmomente aufzustellenden vereinfachten Differentialgleichungen der elastischen Linie.

Mit den Abmessungen und Querschnittswerten von Bild 10 ist der Stielbereich I gemäß Gl. (5) durch

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha f}{\sqrt{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha e}{\sqrt{n}}}$$

bei $x = e$ gekennzeichnet, wenn wiederum $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_h}$. Die Differentialgleichung des Bereiches II ist mit obigen Bezeichnungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0.$$

Die Konstanten der Lösung sind nach der den Ausführungen unter A 3 und den dort angegebenen Randbedingungen entsprechenden Rechnung, wenn u durch h und β durch α ersetzt werden,

$$K_1 = \frac{f \left(\alpha \cdot \cos \alpha h + \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \sin \alpha h \right)}{\alpha \cdot \sin \alpha (h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \cos \alpha (h-e)}$$

$$K_2 = \frac{f \left(\alpha \cdot \sin \alpha h - \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \cos \alpha h \right)}{\alpha \cdot \sin \alpha (h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \cos \alpha (h-e)}$$

Nach Einsetzen dieser Festwerte und zweckmäßiger Umformung ist

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = -\alpha f \cdot \frac{\alpha + \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \operatorname{tg} \alpha (h-e)}{\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha (h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h}}$$

bei $x = c$. Die Verbindung der Gl. (18) u. (19) liefert, wenn noch $\varphi = \frac{e}{h}$ und $z_3 = \alpha h$ abgekürzt wird, die Knickbedingung

$$(20) \quad \frac{z_3 \left[\sqrt{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi z_3}{\sqrt{n}} + \operatorname{tg} (1-\varphi) z_3 \right]}{1 - \sqrt{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi z_3}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg} (1-\varphi) z_3} = 3c,$$

worin der Rahmensteifigkeitswert wiederum c ist.

Wird die Grenzkraft wieder auf die unter A 1 errechnete Knicklänge bezogen, dann ist diese

$$(21) \quad P_k = \frac{n E J_h \pi^2}{(\varphi h)^2}$$

mit $n = \frac{z_3^2}{z^2}$.

Bei stufenförmigem Verlauf der Trägheitsmomente ist also nur das mittlere Trägheitsmoment nJ_h zu bestimmen. Die Berechnung kann im übrigen in der bekannten Weise erfolgen.

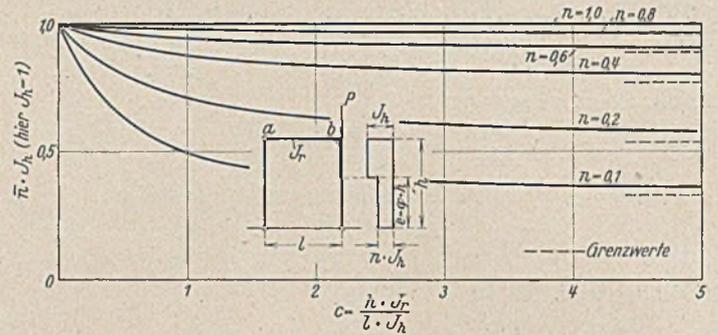


Bild 11. Dreigelenrechteckrahmen. Trägheitsmomente nJ_h bei $\varphi = 0,5$ und γ nach Bild 2.

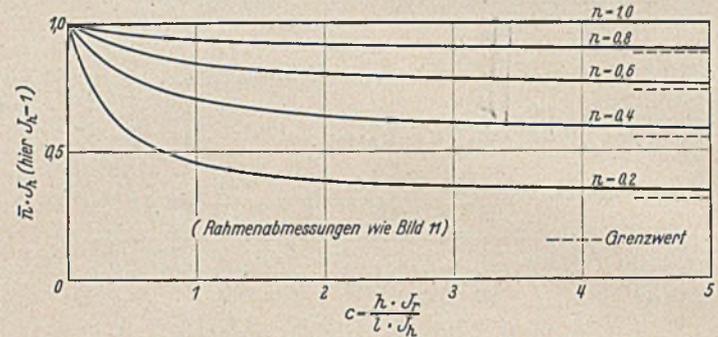


Bild 12. Dreigelenrechteckrahmen. Trägheitsmomente nJ_h bei $\varphi = 0,75$ und γ nach Bild 2.

In Bild 11 und 12 sind die Trägheitsmomentenbeiwerte n für $\varphi = 0,5$ und $0,75$ bei verschiedenen Stufenverhältnissen n als $f(c)$ dargestellt worden. Die angegebenen asymptotischen Grenzwerte $n_{c=\infty}$ sind nochmal in Bild 13 und Tabelle 1 zusammengefasst worden. Sie ergeben sich, wie leicht einzusehen ist, mittels der jeweils kleinsten, von Null verschiedenen Lösung $z_{3c=\infty}$ der Gleichung für den einseitig eingespannten, am anderen Ende frei beweglichen Stiel

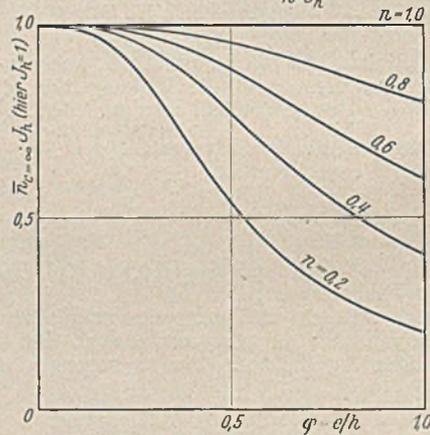
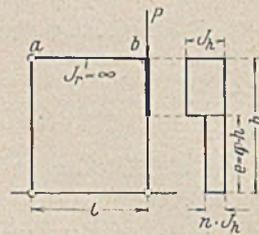


Bild 13. Trägheitsmomente $n_{c=\infty} \cdot J_h$ bei $J_r = \infty$ und $\gamma = 2$. genau genug ermitteln.

$$(22) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi z_3}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg} (1-\varphi) z_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{zu } n_{c=\infty} = \frac{z_{3c=\infty}^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Im Bereiche praktischer Rahmensteifigkeiten c und Stielträgheitsmomentenverhältnisse n lassen sich die Trägheitsmomentenbeiwerte n mittels der $n_{c=\infty}$ aus der Faustformel

$$(23) \quad n = \frac{c + 0,70}{n_{c=\infty} + 0,70}$$

Tabelle 1. Trägheitsmomentenbeiwerte $n_{c=\infty}$.

φ	$n = 0,2$	$n = 0,4$	$n = 0,6$	$n = 0,8$	$n = 1,0$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9926	0,9976	0,9989	0,9996	1,0000
0,2	0,9543	0,9802	0,9913	0,9984	1,0000
0,3	0,8305	0,9358	0,9716	0,9894	1,0000
0,4	0,6782	0,8623	0,9366	0,9759	1,0000
0,5	0,5375	0,7700	0,8876	0,9560	1,0000
0,6	0,4277	0,6765	0,8293	0,9297	1,0000
0,7	0,3451	0,5903	0,7676	0,9009	1,0000
0,8	0,2832	0,5155	0,7071	0,8664	1,0000
0,9	0,2363	0,4526	0,6508	0,8328	1,0000
1,0	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000

Zur Erleichterung des Auffindens der Lösung der Gl. (22), die durch Probieren zu erhalten ist, sind in Bild 14 noch die $z_{3c=\infty}$ über φ für verschiedene Trägheitsmomentenverhältnisse n aufgetragen worden.

Der Faustformel (23) für den nach Bild 10 belasteten und ausgebildeten Dreieckenrechteckrahmen entspricht die Faustformel

$$(24) \quad n = \frac{c + 0,35}{\frac{c}{n_{c=\infty}} + 0,35}$$

für den gemäß Bild 4a symmetrisch nur durch P_0 belasteten Zweieckenrechteckrahmen bei entsprechenden Bedingungen praktischer Rahmensteifigkeiten und Stufenverhältnisse der Stielträgheitsmomente, wobei zu berücksichtigen ist, daß beide Rahmenstiele gemäß Bild 10 gleich ausgebildet sind.

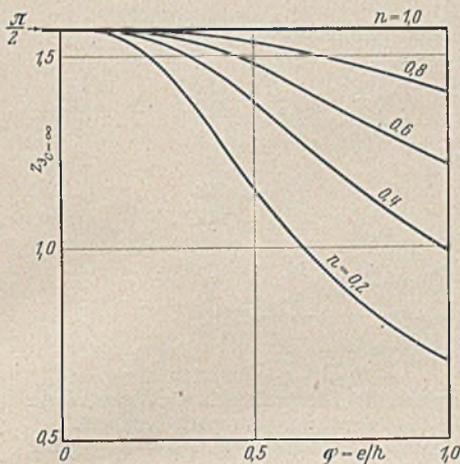


Bild 14. Die Werte $z_{3c=\infty}$ bei $J_r = \infty$.

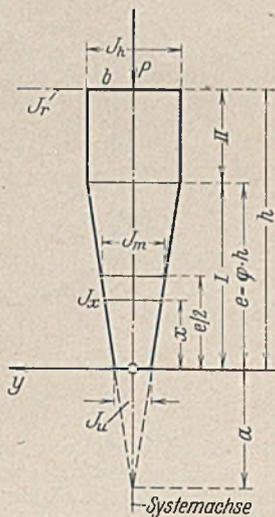


Bild 15.

b) Die Trägheitsmomente sind stetig veränderlich.

Sehr oft wird man die Rahmenstiele, sei es aus Gründen der Materialersparnis, der Architektur oder solchen der Raumaussnutzung, mit in der Rahmenebene veränderlichen Querschnittshöhen ausbilden. Stiele mit ausschließlich linear veränderlicher Querschnittshöhe kommen zwar zumeist vor, aber auch entsprechend Bild 15 ausgebildete Stiele haben im Industriebau zur Wahrung des freien Kranbahndurchgangsprofils ihre Berechtigung.

Die Trägheitsmomente haben nach Bild 15 im Stielabschnitt II den konstanten Wert J_h , der im Abschnitt I nach dem Gesetz

$$(25) \quad J_x = J_h \left(\frac{a+x}{a+e} \right)^{\lambda}$$

auf den minimalen Wert J_u am Fußgelenk abfällt.

Wie leicht nachzuweisen ist, verschwindet das Trägheitsmoment bei $x = -a$, wo nach Einführung des minimalen Trägheitsmoments J_u und des Verhältnisses $n = \frac{J_u}{J_h}$ der Nullpunkt mit

$$(26) \quad a = e \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{1 - \sqrt[n]{n}}$$

festgelegt ist.

Hat der Exponent λ in Gl. (25) u. (26) einen gebrochenen Wert, dann läßt sich dieser aus der Gleichung

$$(27) \quad 2 \sqrt[n']{n'} - \sqrt[n]{n} = 1$$

durch Probieren näherungsweise errechnen. In Gl. (27) ist $n' = \frac{J_m}{J_h}$,

wo J_m das Trägheitsmoment in $x = \frac{e}{2}$ ist.

Zur Veranschaulichung wurden in Bild 16 für den dort skizzierten Träger mit I-Querschnitten linear veränderlicher Höhe die Trägheitsmomente für verschiedene λ und Trägerneigungen vergleichsweise angegeben. Für den tatsächlichen Verlauf der Trägheitsmomente wurde der Exponent λ jeweils aus Gl. (27) ermittelt.

Der Nachweis der Knickkräfte bzw. der Trägheitsmomentenbeiwerte kann auf die Zahlen $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$ beschränkt werden, da mit diesen Zahlen einmal die meisten in der Konstruktionspraxis vorkommenden Fälle erfaßt werden und andererseits im folgenden gezeigt wird, daß sich die Trägheitsmomentenbeiwerte für veränderliche Rahmensteifigkeiten c wiederum mittels Näherungsformeln und der für den starren Rahmenriegel schon bekannten Abminderungsbeiwerte der Stielträgheitsmomente, die wir wieder mit $n_{c=\infty}$ bezeichnen wollen, erfassen lassen.

Der Fall $\lambda = 0$ wurde unter A 1 behandelt. Für gebrochene Exponenten λ können die für die Rechnung erforderlichen Trägheitsmomentenbeiwerte durch Interpolation ermittelt werden.

Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet im Stielabschnitt I mit veränderlichem Trägheitsmoment J_x mit den bekannten Vereinfachungen, wenn wiederum die x -Achse gleichzeitig Symmetrieachse des Stieles ist,

$$(28) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P y}{E J_h} \left(\frac{a+e}{a+x} \right)^{\lambda} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist für $\lambda = 2$ und $\lambda = 4$, wie schon Lommel⁴⁾ nachgewiesen hat, mittels Elementarfunktionen möglich. Bei $\lambda = 1$ und $\lambda = 3$ ist die Differentialgleichung (28) in eine Besselsche Differentialgleichung umzuformen, wie Lommel⁴⁾ erstmalig gezeigt hat, deren Lösung dann durch Besselsche oder Zylinderfunktionen zu erzielen ist.

α) Der Exponent des Trägheitsmomentengesetzes (25) ist $\lambda = 2$.

Der durch $\lambda = 2$ gegebene Verlauf der Trägheitsmomente im Stielabschnitt e hat für den Stahlbau das größte Interesse. Der Verlauf entspricht einem Stab mit linear veränderlicher Höhe, konstanten Gurten

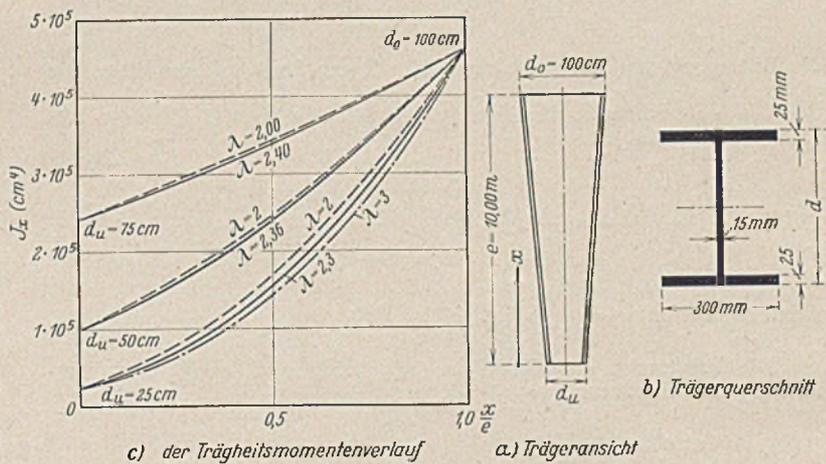


Bild 16. Trägheitsmomente des Stabes mit linear veränderlicher Höhe.

und vernachlässigbaren Trägheitsmomenten der Gurte und des oder der Stege.

Wenn auch solche Stäbe, wie schon Bild 16 zeigt, praktisch nie vorkommen, so wollen wir der erforderlichen Interpolation wegen doch für $\lambda = 2$ die Abminderungsbeiwerte ermitteln, da es praktisch unmöglich ist, für die Vielzahl der möglichen gebrochenen Exponenten λ diese Beiwerte zu ermitteln.

Für den Stielabschnitt I geht die Differentialgleichung (28) mit $\lambda = 2$ in

$$(29) \quad (a+x)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y = 0$$

über, worin zur Abkürzung

$$(30) \quad \beta^2 = \frac{P(a+e)^2}{E J_h}$$

gesetzt wurde.

Die periodische Lösung von (29), die für die Beziehungen, die hier nachgewiesen werden sollen, durchaus genügt, ergibt sich zu

$$(31) \quad y = \sqrt{a+x} \left[A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right],$$

wenn

$$(32) \quad k = \sqrt{4\beta^2 - 1} \text{ ist.}$$

Für die Ermittlung der Konstanten A und B benötigen wir noch die erste Ableitung von (31) und schreiben gleichzeitig zum Nachweis der Richtigkeit des Lösungsansatzes die zweite Ableitung an.

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{a+x}} \left\{ A \left[\sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) - k \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + B \left[\cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) - k \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{k^2 + 1}{4 \sqrt{(a+x)^3}} \left[A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right].$$

Wie man sofort sieht, erfüllt Gl. (31) Gl. (29). Die Konstanten sind durch die Grenzbedingungen $x = 0, y = 0$ und $x = e, y = f$ über

$$0 = A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a} \right)$$

$$\text{und} \quad \frac{f}{\sqrt{a+e}} = A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+e} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+e} \right)$$

⁴⁾ E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868.

festgelegt zu

$$A = - \frac{f \cdot \cos\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a}\right)}{\sqrt{a+e} \cdot \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right)}$$

$$B = \frac{f \cdot \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a}\right)}{\sqrt{a+e} \cdot \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right)}$$

Mit diesen Werten ergibt sich für $x = e$ aus Gl. (33) nach entsprechender Umformung und Vereinfachung

$$(34) \quad \frac{dy}{dx(x=e)} = \frac{f}{2(a+e)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right) + k}{\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right)}$$

die Bedingung, die der Stielabschnitt I für die Stetigkeit der Biegelinie stellt.

Die entsprechende Bedingung des Stielbereiches II ist dem Abschnitt C 1a zufolge

$$(19) \quad \frac{dy}{dx(x=e)} = -\alpha f \cdot \frac{\alpha + \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \operatorname{tg} \alpha (h-e)}{\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha (h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h}}$$

worin wiederum $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_h}$ ist.

Die Forderung, daß Gl. (19) u. (34) gleich sind, ergibt nach Umformung und Einführung von

$$(35) \quad \alpha = \frac{\sqrt{k^2+1}}{2(a+e)} \quad c = \frac{hJ_r}{lJ_h} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{e}{h}$$

die Gleichung der Knickbedingung zu

$$(36) \quad \frac{(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1} \left\{ \sqrt{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{(1-\varphi)(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1}}{2\varphi}\right) \left[\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + k \right] \right\}}{2\varphi \left\{ k - \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[\sqrt{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(1-\varphi)(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1}}{2\varphi}\right) - 1 \right] \right\}} = 3c$$

Diese transzendente Gleichung wurde wiederum in der Form $c = f(k)$ angedrückt, da es praktisch unmöglich ist, die Unbekannte k nach gegebenem c zu ermitteln. Auf Vereinfachungen, die durch die Einführung des Cotangens möglich sind, wurde verzichtet, da das für die numerischen Ermittlungen zur Verfügung stehende Tabellenwerk⁵⁾ nur den Tangens mit den natürlichen Zahlen als Argument führt, so daß die jeweilige Ermittlung des Cotangens die Vereinfachung wieder hinfällig macht.

Die maßgebende Lösung k der Gl. (36), das ist der kleinste von Null verschiedene Wert $k \geq 0$, liefert mit und nach Einführung von φ aus (35) die Knickbedingung

$$P_k = \frac{k^2+1}{4} \cdot \frac{EJ_h(1-\sqrt{n})^2}{h^2\varphi^2}$$

Wird wiederum die unter A 1 errechnete Knicklänge γh eingeführt, dann geht diese Gleichung wieder in

$$(21) \quad P_k = \frac{\bar{n} EJ_h \pi^2}{(\gamma h)^2}$$

mit dem Abminderungsbeiwert \bar{n} des maximalen Trägheitsmoments J_h

$$(37) \quad \bar{n} = \frac{(k^2+1)(1-\sqrt{n})^2}{4\varphi^2\pi^2}$$

über. Diese Beiwerte \bar{n} müssen einfachen Überlegungen zufolge ähnlich verlaufen, wie die in Bild 11 und 12 dargestellten Beiwerte für konstante, abgestufte Stielträgheitsmomente. Bei $c=0$ wird wiederum $\bar{n}=1$, während die Asymptoten $\bar{n}_{c=\infty}$ sich für $c=\infty$ mittels k aus der Gleichung

$$(38) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[\sqrt{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(1-\varphi)(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1}}{2\varphi}\right) - 1 \right] = k$$

zu

$$(39) \quad \bar{n}_{c=\infty} = \frac{(k^2+1)(1-\sqrt{n})^2}{\varphi^2\pi^2} \quad \text{ergeben.}$$

Gl. (38) ergibt sich aus der Tatsache, daß bei $c=\infty$ der Nenner von Gl. (36) zu Null wird.

Der Gl. (38) entsprechende Formeln wurden von Tölke⁶⁾ angegeben, die aus der aperiodischen Lösung von Gl. (29) ermittelt wurden. Da

⁵⁾ Keiichi Hayashi, Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin 1938.

⁶⁾ F. Tölke, Über die Bemessung von Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt. Bauing. 1929, S. 500.

Gl. (36) u. (38) jedoch durch alle praktisch vorkommenden Parameter n und φ befriedigt werden, wie nachstehend gezeigt werden soll, genügt der Lösungsansatz (31) durchaus.

Zu diesem Zwecke vergegenwärtige man sich, daß Gl. (38) nur zu Null wird, wenn deren Lösung $k=0$ ist. Dieser Grenzwert $k=0$ gibt uns aber den Periodenwechsel an, für den wir nach kurzer Umformung für die Parameter

$$(40) \quad \varphi = \frac{1}{1 + \frac{2}{1-\sqrt{n}} \cdot \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{2}{\ln \frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}$$

erhalten.

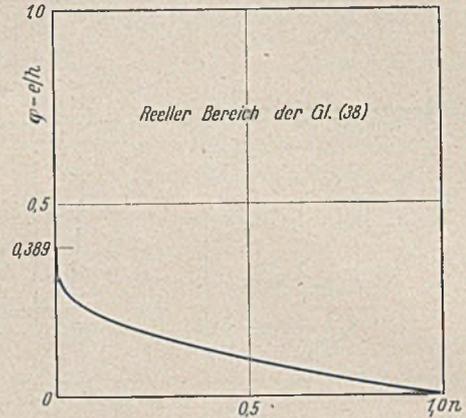
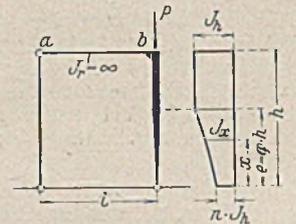


Bild 17.

In Bild 17 wurde φ über n dargestellt. Die praktisch wichtigen Werte von φ und n befriedigen also Gl. (38). Wird nunmehr noch beachtet, daß die Lösungen k der Gl. (36) zwischen $k=0$ bei $c=0$ und $k=k_{c=\infty}$ bei $c=\infty$ liegen und positiv sind, dann erkennt man sofort, daß Gl. (40) und Bild 17 auch zugleich Grenzkriterien der Gl. (36) sind.



Da die in Abb. 14 der angeführten Arbeit⁷⁾ aufgestellten Beiwerte $\bar{n}_{c=\infty}$, die dort mit u bezeichnet sind, mit dem Parameter $k_1 = \frac{b_0}{b_m}$,

wo b_0 und b_m die Grenzwerte der Abstände der Gurtschwerpunkte des Stieles sind, in Abhängigkeit von $\frac{\varphi}{2}$ wiedergegeben sind, sollen dieselben zur Vereinfachung der numerischen Rechnung nochmals in Bild 18 und Tabelle 2 mit dem Parameter $n = \frac{J_u}{J_h}$ von φ abhängig zusammengefaßt werden⁷⁾.

In Bild 19 und 20 wurden außerdem die Trägheitsmomentenbeiwerte \bar{n} für $\varphi=0,5$ und $\varphi=1,0$ und $n=0,05; 0,1; 0,2$ usw. als Funktion des Rahmensteifigkeitswertes c aufgezeichnet.

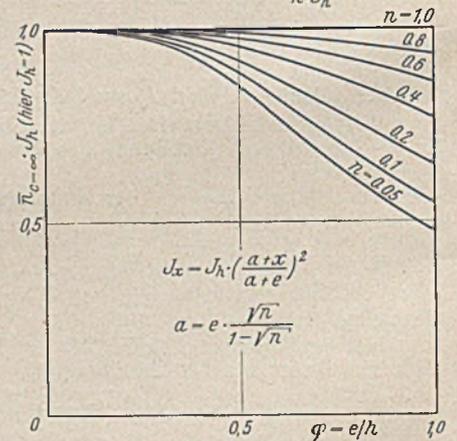


Bild 18. Trägheitsmomente

$\bar{n}_{c=\infty} \cdot J_h$ bei $J_r = \infty, \lambda = 2$ und $\gamma = 2$.

Tabelle 2. Trägheitsmomentenbeiwerte $\bar{n}_{c=\infty}$ ($\lambda = 2$).

$\varphi \backslash n$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,990	0,992	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000
0,4	0,918	0,937	0,956	0,976	0,987	0,995	1,000
0,5	0,851	0,885	0,920	0,955	0,975	0,989	1,000
0,6	0,770	0,819	0,872	0,927	0,960	0,982	1,000
0,8	0,605	0,676	0,759	0,853	0,915	0,962	1,000
1,0	0,471	0,547	0,647	0,771	0,862	0,936	1,000

⁷⁾ Vgl. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, 4. Bd., 1. Hälfte, S. 103, und E. Chwalla, Erläuterungen zum Normblattentwurf DIN E 4114.

Diese Bilder bestätigen die Erwartung, daß diese Beiwerte \bar{n} , von $\bar{n} = 1$ bei $c = 0$ ausgehend, sich wiederum den Werten $n_{c=\infty}$ asymptotisch nähern.

Um die Beiwerte \bar{n} der numerischen Rechnung nutzbar zu machen (die Lösung der Gl. (36) für gegebene Stabwerte bereitet derartige Schwierigkeiten, daß der erforderliche Rechenaufwand als nicht mehr erträglich zu bezeichnen ist, zumal sie einige Gewandtheit erfordert), sollen dieselben wiederum durch eine Näherungsformel erfaßt werden. Das bereitet indes keine Schwierigkeit, denn mittels Faustformel (23), die hier nochmal angeschrieben werden soll,

$$(23) \quad \bar{n} \approx \frac{c + 0,70}{c + 0,70 + n_{c=\infty}}$$

lassen sich die Beiwerte hinreichend genau errechnen.

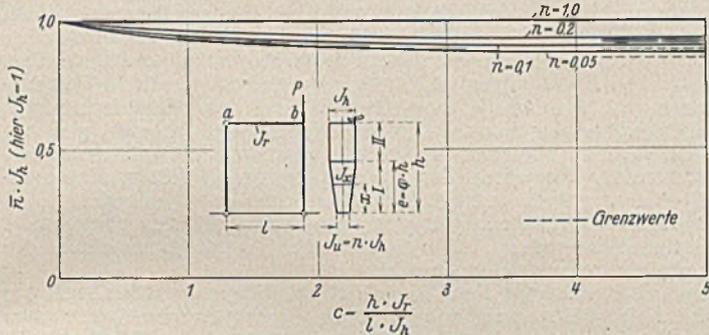


Bild 19. Dreigelenrechteckrahmen.
Trägheitsmomente $\bar{n} J_h$ bei $\varphi = 0,5$, $\lambda = 2$ und γ nach Bild 2.

Wie Bild 19, in das zu den genauen Beiwerten die aus der Näherungsgleichung errechneten Werte zum Vergleich eingetragen wurden, darlegt, sind die Abweichungen nur bei kleiner Abszisse etwas größer. Trotzdem erscheint die Anwendung von Gl. (23) unbedenklich, da in diesem Bereich, wo die Knicklänge γh ohnehin mit c stark veränderlich ist, die Erhöhung der Sicherheit durch die Anwendung der Näherungswerte nur wünschenswert sein kann. Zur Vervollständigung sollen noch die Formeln, die sich mit $\varphi = 1$ ergeben, aufgeführt werden.

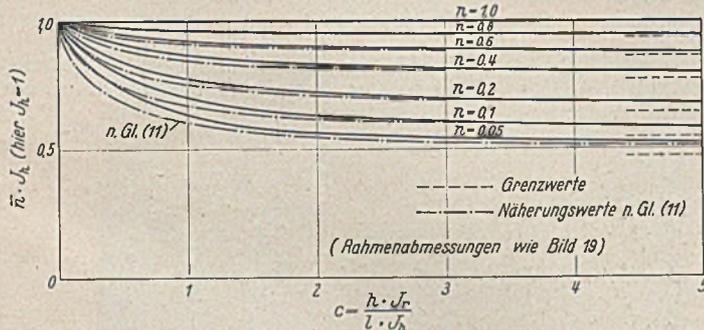


Bild 20. Dreigelenrechteckrahmen.
Trägheitsmomente $\bar{n} J_h$ bei $\varphi = 1,0$, $\lambda = 2$ und γ nach Bild 2.

Es wird die Knickbedingung

$$(41) \quad \frac{(1 - \sqrt{n})(k^2 + 1) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{2 \left[k + \operatorname{tg} \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]} = 3c$$

und die Beiwerte

$$(42) \quad \bar{n} = \frac{(k^2 + 1)(1 - \sqrt{n})^2}{4z^2}$$

Für $c = \infty$ geht dann die Bedingungsgleichung (41) in

$$(43) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -k$$

über. Diese Formel stimmt mit der von Bleich⁹⁾ angegebenen überein, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Bedeutung der gewählten Bezeichnungen entsprechend berücksichtigt. Der Beiwert ist

$$(44) \quad \bar{n}_{c=\infty} = \frac{(k^2 + 1)(1 - \sqrt{n})^2}{\pi^2}$$

Es erübrigt sich weiter darauf einzugehen, daß die Beiwerte auch der von Bleich stammenden Näherungsformel

$$(45) \quad \bar{n}_{c=\infty} = 0,34 + 0,66\sqrt{n},$$

⁹⁾ F. Bleich, Stahlhochbauten, Bd. I., S. 168. Berlin 1932.

die in DIN 1050 niedergelegt ist, entnommen werden können, wenn nur $n \geq 0,2$ ist.

Die Beziehungen, die hier für den Dreigelenrechteckrahmen entwickelt wurden, lassen sich auf den symmetrisch ausgebildeten Zweigelenrechteckrahmen, der in jedem Rahmeneckpunkt mit P belastet ist, ohne weiteres übertragen. Man muß sich nur vergegenwärtigen, daß beim antisymmetrischen Knicken des Zweigelenrahmens die Riegelmomentenfläche antisymmetrisch verschränkt ist und daher der Koeffizient des Rahmensteifigkeitswertes c jeweils 6 statt 3 für den Dreigelenrechteckrahmen ist.

Dementsprechend geht die Faustformel (23) des Dreigelenrechteckrahmens auch bei dieser Art der Stielausbildung in die Näherungsformel (24) für den Zweigelenrechteckrahmen über. Die Grenzwerte sind bei beiden Rahmen gleich.

β) Der Exponent des Trägheitsmomentengesetzes (25) ist $\lambda = 3$.

Gl. (25) gibt mit $\lambda = 3$ die Trägheitsmomente rechteckiger Querschnitte mit linear veränderlicher Querschnittshöhe, wie sie insbesondere im Eisenbetonbau zur Anwendung gelangen, wieder. Da wir jedoch eingangs gesehen haben, daß die Trägheitsmomente der I- oder ähnlicher Querschnitte mit linear veränderlicher Höhe durch $\lambda = 2$ nicht exakt erfaßt werden, da für diese der Exponent wegen der Eigentragheitsmomente der Gurte und Stege $2 < \lambda < 3$ ist, benötigen wir die Ergebnisse \bar{n} bzw. $n_{c=\infty}$ aus $\lambda = 3$ zur Interpolation von \bar{n} und $n_{c=\infty}$ für gebrochene Werte von λ .

Die Anwendungsmöglichkeit der im Abschnitt C 1 a gefundenen Faustformel (23) beim Trägheitsmomentenverlauf des Stieles nach Gl. (25) mit $\lambda = 2$ läßt die Schlußfolgerung aufkommen, daß diese Faustformel auch für $\lambda = 3$ ihre durchaus genügende Berechtigung hat.

Da die erforderlichen $n_{c=\infty}$ -Werte bekannt sind⁷⁾, wäre jede weitere Untersuchung überflüssig. Dessen ungeachtet sollen in einer folgenden Arbeit für $\lambda = 3$ die entsprechenden Beziehungen nachgewiesen werden. In dieser Arbeit sollen dann auch noch die Einflüsse der an den Rahmenstielen mit veränderlichen Trägheitsmomenten in verschiedenen Höhen angreifenden Lasten untersucht werden.

Beispiel I a.

Der in Bild 21 skizzierte Rahmen soll zur weiteren Erläuterung untersucht werden. Diese Untersuchung wird hier auf die Ermittlung der Knickfestigkeit bzw. der Knicklast beschränkt. Örtliche Deformationen durch Ausbeulen usw., die hier nicht verfolgt werden, sind natürlich zu beachten. Die Abmessungen des mittleren Rahmenstiels entsprechen bis auf die Stielhöhe, die hier mit $h = 15$ m gewählt wurde, denen des in Bild 16 skizzierten Trägers mit $d_u = 25$ cm.

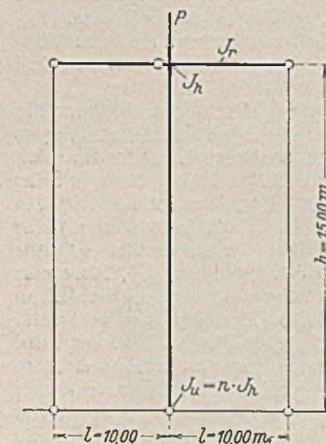


Bild 21.

Es sind die angenommenen Abmessungen und Querschnitte
des Riegels: $l = 10,00$ m,
IP 100 mit $J_f = 644 700$ cm⁴,
des Stieles: $h = 15,00$ m,
 $J_h = 463 700$ cm⁴, $F_h = 292,5$ cm²,
 $J_u = 20 060$ cm⁴.

Mit diesen Daten ist
 $n = \frac{20 060}{463 700} = 0,0432$

und der Rahmensteifigkeitswert

$$c = \frac{15,00 \cdot 644 700}{10,00 \cdot 463 700} = 2,08.$$

Aus der Näherungsgleichung (4) ergibt sich mit

$$\gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{2,08}} \approx 2,34$$

die Knicklänge zu $s_k \approx \gamma h \approx 2,34 \cdot 15,00 \approx 35,10$ m. Durch Interpolation erhalten wir $n_{c=\infty} = 0,45$.

Mithin ist nun nach (11)

$$\bar{n} \approx \frac{2,08 + 0,70}{\frac{2,08}{0,45} + 0,70} \approx 0,523$$

die Knickkraft

$$P_k = \frac{0,523 \cdot 21 000 000 \cdot 0,004 637 \pi^2}{35,10^2}$$

$$P_k = 406 \text{ t,}$$

wenn noch berücksichtigt wird, daß mittels

$$i = \sqrt{\frac{0,523 \cdot 463 700}{292,5}} = 28,8 \text{ cm}$$

der Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{3510}{28,8} = 122$$

das elastische Knicken anzeigt.

Beispiel 1 b.

Ist die untere Querschnittshöhe des Rahmenstieles mit $d_u = 50$ cm bemessen, dann wird, wenn alle anderen Abmessungen beibehalten werden,

$$P_k = \text{rd. } 548 \text{ t bei } \lambda = \text{rd. } 105.$$

Die Beispiele 1 a und 1 b zeigen deutlich, in welchem erheblichem Maße die Knickkraft bei nur geringer Materialersparnis absinkt. Dieser Umstand ist bei der Bemessung von Stahlbauten wohl zu beachten.

Beispiel 2 a.

Der Rahmenstiel im Beispiel 1 nach Bild 21 bestehe aus einem durchgehenden Profil IP 60 und sei im oberen Teil von $\varphi = 0,8$ bis $\varphi = 1,0$ durch zwei auf die Flansche aufgeschweißte $\text{—} 320 \cdot 20$ verstärkt. Alle übrigen Daten werden beibehalten. Somit ist für den Stiel

$$J_h = 303\,900 \text{ cm}^4, F_h = 291 \text{ cm}^2, J_u = 180\,800 \text{ cm}^4$$

$$n = \frac{J_u}{J_h} = \frac{180\,800}{303\,900} = 0,596 \text{ und } \varphi = 0,8.$$

Es ist nunmehr mit

$$c = \frac{15,00 \cdot 644\,700}{10,00 \cdot 303\,900} = 3,17$$

$$\gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{3,17}} \approx 2,21$$

$$s_k = 2,21 \cdot 15,00 = 33,20 \text{ m.}$$

Nach Bild 13 ist $n_{c=\infty} = 0,70$ und somit

$$\bar{n} \approx \frac{3,17 + 0,70}{\frac{3,17}{0,70} + 0,70} \approx 0,74$$

$$P_k = \frac{0,74 \cdot 21\,000\,000 \cdot 0,002\,245 \pi^2}{33,20^2} = 420 \text{ t}$$

$$i = \sqrt{\frac{0,74 \cdot 303\,900}{291}} = 27,8 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{33,20}{27,8} = 119,$$

also elastisches Knicken.

Beispiel 2 b.

Das Profil IP 60 des Stieles wird nicht verstärkt, sonst wie vor. Ohne Zwischenrechnung ist mit $c = 5,34$, $\gamma = 2,13$, $s_k = 32$ m die Knickkraft $P_k = 365$ t bei $i = 25$ cm und $\lambda = 128$.

Schlußbemerkung.

Vom Dreigelenrahmen ausgehend sollte für einige Systeme und Belastungsfälle bei verschiedenartigem Verlauf der Trägheitsmomente sowohl der Stiele als auch der Riegel der Praxis das Problem der Rahmenknickung nutzbar gemacht werden. Die Ausführungen legen natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit, denn in diesem Rahmen konnte das Problem nicht erschöpfend behandelt werden. Daher sollen in einer weiteren Arbeit, wie schon erwähnt, weitere Fragen untersucht werden.

Die in den Ermittlungen getroffenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen, wie Außerachtlassung des Einflusses der Längenänderungen der Stäbe infolge der Normalkräfte und Querkkräfte, konnten, die angegebenen Veröffentlichungen als bekannt voraussetzend, stillschweigend gemacht werden. Es wurde der größte Wert darauf gelegt, die numerische Rechnung auf ein erträgliches Mindestmaß so zu reduzieren, daß keine erheblichen Abweichungen von den exakten Werten vorkommen. Das dürfte insbesondere bei veränderlichen Trägheitsmomenten der Rahmenstiele durchaus gelungen sein.

Neben der richtigen Knicklänge ist bei Rahmengebilden auch der tatsächliche Trägheitsmomentenbeiwert zu berücksichtigen, wenn man sich über die Sicherheit eines Bauwerks keiner Täuschung hingeben will; dabei ist es bedeutungslos, ob die Stäbe vollwandig oder fachwerkartig ausgebildet sind.

Alle Rechte vorbehalten.

Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP. a., eine bautechnische Neuheit.

Von Ing. Walter E. Uhlig VDI, Mannheim.

Bei der Berechnung der Stahlkonstruktion von Stahlskelettbauten, also Bauwerken, bei welchen die Stahlteile ausgefacht, ummantelt oder einbetoniert werden, verzichtet der Ingenieur bei der Bemessung grundsätzlich auf die statische Mitwirkung des Betons, und zwar aus folgenden drei Gründen:

Erstens ist im Normalfall eines Unterzuges oder Deckenträgers die Verbundwirkung gering, d. h. zweifellos wird die Steifigkeit des Trägers durch den ihn umgebenden Beton erheblich verbessert, aber die sich herausrechnende Ersparnis an Stahl ist unbedeutend. Selten kann auf das nächst niedrigere Profil zurückgegriffen werden. Zweitens ist auch in der DIN-Vorschrift 1050 (Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau) der Fall einer Verbundkonstruktion nicht vorgesehen. Und endlich drittens heißt es in der Deutschen Bestimmung 1932 für Eisenbeton, § 1, Absatz 3: „... Walz- und Blechträger in Beton, deren Steghöhe einen erheblichen Teil der Balkenhöhe ausmacht, dürfen nicht als Eisenbetonbalken berechnet werden, sie sind vielmehr so zu bemessen, daß sie ohne Rücksicht auf die Tragfähigkeit des Betons die Lasten allein aufnehmen können“. In der Praxis bedeutet dies, daß Walz- und Vollwandträger nur dann als Glieder einer Verbundkonstruktion betrachtet werden können, wenn der Träger unterhalb der Nulllinie des Querschnitts bleibt, also nicht in die Druckzone des Betonquerschnittes hineinragt (Bild 1). Nachdem diese Bedingung in der Praxis nur in den seltensten Fällen erfüllt ist, wird von seiten des Stahlbau-Ingenieurs auf die Verbundwirkung bei der Bemessung verzichtet.



Bild 1.

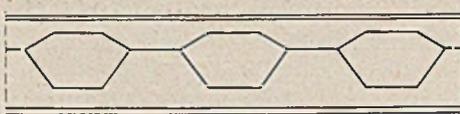


Bild 2.

Der starke Auftrieb der Bauwirtschaft in den verflosseneren Jahren und die dadurch und durch die Aufrüstung eingetretene Verknappung des Baustoffs Stahl hat zu einer Reihe von staatlichen Vorschriften über die sparsamste Verwendung von Eisen und Stahl geführt. Im Zuge dieser Maßnahmen ist der Stahlskelettbau vollständig verboten worden und der Stahlträger als Unterzug und Deckenträger vom reinen Eisenbetonträger verdrängt worden, da in diesem Falle eine Stahlersparnis von 50 und mehr Prozent gegenüber dem Stahlträger erzielt wird.

Gegenüber dem Stahlträger haben Eisenbetonträger Nachteile, die auch für die augenblickliche Lage der deutschen Wirtschaft ins Gewicht fallen. Der Eisenbetonträger erfordert einen größeren Facharbeiteraufwand, seine Herstellung ist fast nur Baustellenarbeit, und er verbraucht viel Bauholz infolge der erforderlichen Einschalungen, Abstützungen und kompletten Lehrgerüste. Demgegenüber stehen auch Vorteile, die außer der bereits erwähnten großen Stahlersparnis auch in seiner großen statischen Steifigkeit bestehen. Die Durchbiegung ist gegenüber dem Stahlträger unerheblich.

Der Gedanke liegt nahe, ein Tragelement zu entwickeln, welches die Vorteile beider Bauweisen in sich vereinigt und ihre Nachteile ausschließt.

Es sind verschiedene Lösungen dieses Problems bekanntgeworden, so unter anderem der sog. Alpha-Träger, ein Stahlträger mit auf dem Oberflansch aufgeschweißter Rundeisenspirale. Die Rundeisenspirale wird ganz einbetoniert, wodurch der Stahlträger etwas tiefer in die Zugzone zu liegen kommt, und die Spirale ist in der Lage, die für die Verbundwirkung wichtigen Schubkräfte aufzunehmen und in den Träger zu leiten.

Eine neue Lösung ist der vom Verfasser entwickelte Hohlsteg-Verbundträger (Bild 2 u. 3). Dieser Träger unterscheidet sich vom Walzträger und Vollwandträger durch folgende Merkmale:



Bild 3.

1. der Obergurt ist schwächer als der Untergurt,
2. der Steg hat Öffnungen (Aussparungen),
3. der Träger wird grundsätzlich überhöht hergestellt, wodurch den Eigengewichtsdurchbiegungen begegnet wird,
4. der Träger kann freier dimensioniert werden, wodurch eine restlose Ausnutzung des Stahls möglich ist.

Die Herstellung des Trägers erfolgt in einfacher, eigenartiger, abfallloser Weise. Zwei verschieden große Walzträger werden zickzackförmig aufgetrennt und je zwei verschiedene Hälften an den hohen Stellen der Ausschnitte elektrisch miteinander verschweißt, wobei die Hälfte des kleineren Trägers den Obergurt und die Hälfte des größeren Trägers den Untergurt des neuen Trägers bilden (Bild 4). In der Praxis ist ein Träger bekanntgeworden, der in der gleichen Weise hergestellt wird. Es handelt sich jedoch in diesem Fall nur um eine Vergrößerung der Höhe und damit des Widerstandsmoments und um keinen Verbundträger. Die Gurte sind daher auch, da die Herstellung nur aus einem Walzträger erfolgt, gleich stark dimensioniert.

Statisch ist der Verbundträger zweierlei. In erster Funktion ist er ein selbständiges Tragelement und in der Lage, sein eigenes Gewicht, ferner

das einer etwaigen Einschalung zum Ausbetonieren, oder bei Decken das Gewicht etwaiger Deckenfüllkörper, und endlich das Gewicht des ihn umschließenden, nassen Betons aufzunehmen. In zweiter Funktion ist der Träger die Bewehrung eines Eisenbetonträgers.

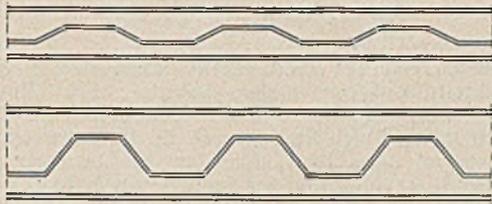


Bild 4.

Verwendung findet der Träger als Unterzug und Deckenträger für Decken verschiedener Ausführungen (Bild 5 bis 10).

Wie bereits gesagt, ist durch den Träger der Versuch gemacht, die statischen und bautechnischen Vorteile des reinen Eisenbetonträgers und des Stahlträgers zu erzielen. Dies kann in folgenden Punkten als gelungen bezeichnet werden:

1. beträchtliche Stahlersparnis gegenüber dem Stahlträger (40 bis 50%). Der Stahlbedarf des reinen, mit Rundeisen bewehrten Eisenbetonträgers wird jedoch nicht erreicht, sondern liegt immer noch 10 bis 30% höher,
2. Einsparung von Bauholz infolge Verringerung der Schalung (keine Abstützungen und keine Lehrgerüste),

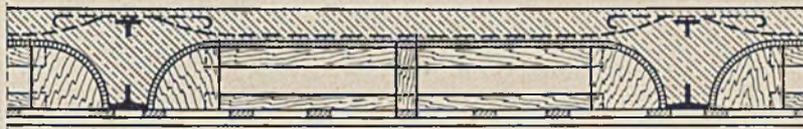


Bild 6.

3. größere statische Steifigkeit als der Stahlträger, da der fertige Querschnitt ein Eisenbetonquerschnitt mit guter Verbundwirkung (infolge der Öffnungen im Steg) ist,
4. Verringerung der Baustellenarbeit gegenüber dem Eisenbetonträger durch verminderte Schalungsarbeit und durch Wegfall des Rundeisenbiegens und Flechtens,
5. die Schalungs- und Bewehrungsfehlergefahr ist erheblich vermindert.

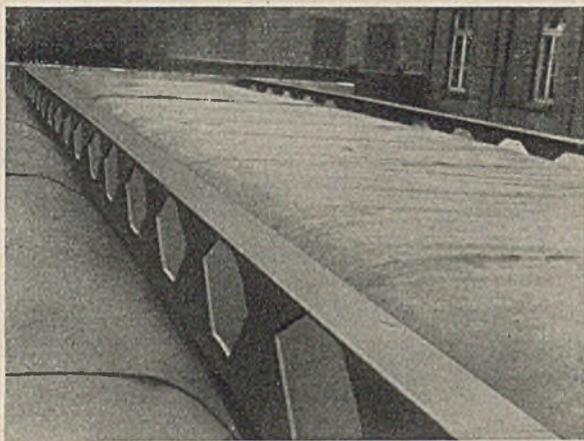


Bild 8.

Die Berechnungsweise des Hohlsteg-Verbundträgers erfolgt in zwei dem Bauvorgang entsprechenden Stufen. In erster Stufe wird der nackte Träger als selbständiges Tragelement berechnet. Nach dem Abbinden des Betons ist das Ganze ein Eisenbetonquerschnitt, und zwar ein Balken oder ein Plattenbalken mit Bewehrung auf der Zug- und Druckseite.

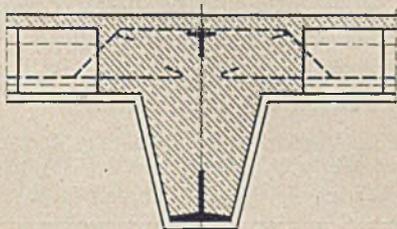


Bild 10.

Als Bewehrung in den Gurten des Eisenbetonträgers werden die \perp -förmigen Querschnitte angenommen, in der Abmessung, wie sie an der Stelle des offenen Trägerquerschnitts, also an der querschnittärmsten Stelle oben und unten vorhanden sind.

Versuche haben die rechnerischen Ergebnisse in jeder Richtung bestätigt. Es wurden bisher zwei Werkversuche durchgeführt, und zwar einer im Betrieb der Burbacher Hütte in Saarbrücken mit einer Hoyer-Decke (Versuch 1) und ein zweiter im Betrieb der Firma Hch. Fürst Söhne, Homburg, mit einem Plattenbalken (Versuch 2). Der Versuch 1 wurde in Anwesenheit verschiedener Behördenvertreter und Herrn Professor Kleinlogel, Darmstadt, durchgeführt.

Im Vorversuch wurde ein nackter Träger belastet, um zunächst die Berechnung der Durchbiegung infolge Eigenlasten zu prüfen. Die rechnerische Durchbiegung stimmte mit der praktischen scharf überein. Der Träger wurde weiter bis zum Bruch belastet. Der Obergurt wurde durch einen Gitterträger ausgesteift, so daß die Knicklänge noch 500 mm betrug. Bei einer Beanspruchung von 3100 kg/cm² knickte der Obergurt aus und der Träger brach zusammen (Bild 11). Es ist mit Bestimmtheit anzunehmen, daß bei Umschließung des Trägers mit nassem Beton, wodurch die Knicklänge gleich Null ist, eine weit höhere Bruchbeanspruchung erreicht wird. Die Schweißnähte zeigten keinerlei Beschädigung.

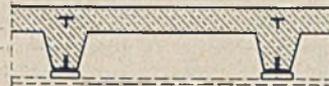


Bild 5.

Beim Großversuch mit einem 3,25 m breiten Deckenstreifen (schalungslose Hoyer-Decke) konnte ein ausgezeichnetes Verhalten des Trägers und die volle rechnerische Verbundwirkung festgestellt werden.

Auch der Versuch 2 eines 1,00 m breiten Stegdeckenstreifens nach Bild 5 bei der Firma Fürst bestätigte die rechnerischen Ergebnisse und die ausgezeichnete Verbundwirkung.

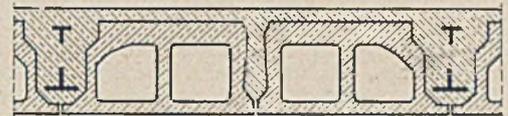


Bild 7.

Bei einer Beanspruchung von

$$\sigma_{eu} = 3170 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{eo} = 1765 \text{ kg/cm}^2$$

betrug die bleibende Durchbiegung rd. 80 mm. Ohne Berücksichtigung des Verbundes wäre die Beanspruchung folgende gewesen:

$$\sigma_{eu} = 3440 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{eo} = 6690 \text{ kg/cm}^2.$$

Leider konnte der Versuch nicht weiter bis zur Zerstörung des Trägers durchgeführt werden.

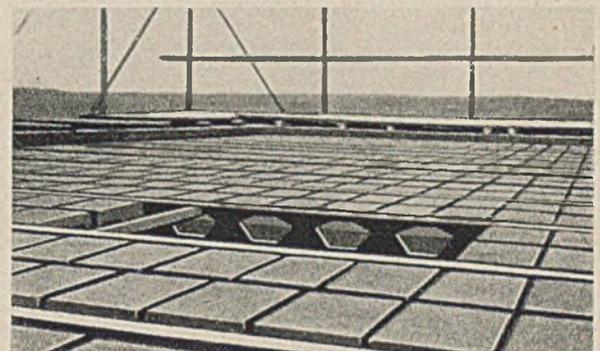


Bild 9.

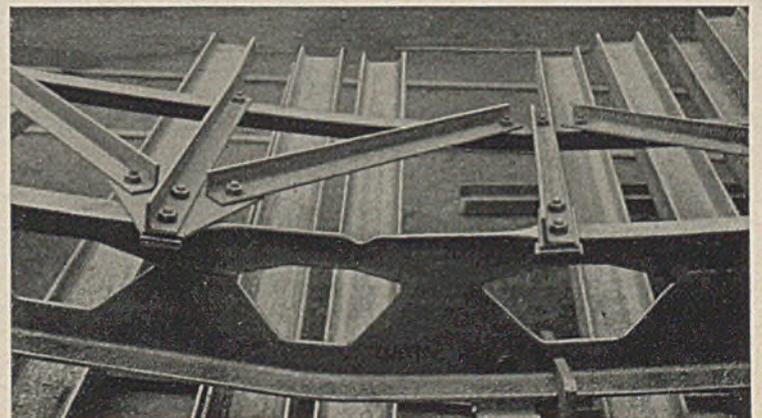


Bild 11.

Zusammenfassung.

Außer der großen Ersparnis an Stahl wird durch den Hohlsteg-Verbundträger als Deckenträger und Unterzug eine bautechnische Verbesserung erzielt. Der Hohlsteg-Verbundträger ist eine steife, tragfähige Bewehrung eines Eisenbetonträgers und gewissermaßen das Mittelding zwischen der Stahlbauweise und der Eisenbetonbauweise, und er vereinigt die Vorteile beider Bauweisen. Die Stahlersparnis ist beträchtlich. Der Versuchsträger des 2. Versuchs (Stegdecke) bestand aus I 20 und I 12, was ein Metergewicht von 18,75 kg/m $\left(\frac{26,3}{2} + \frac{11,2}{2}\right)$ ergibt. Das maximale Moment einschließlich das aus Eigengewicht betrug $M = 815\,000$ cmkg. Bei der erreichten maximalen Beanspruchung von 3170 kg/cm² (der Normalträger würde sich wahrscheinlich weit früher bleibend durchbiegen) würde ein Widerstandsmoment von 257 cm³ $\left(\frac{815\,000}{3170}\right)$ erforderlich sein, was einem I 22 mit einem Metergewicht von 31,1 kg entspricht. Die Stahlersparnis beträgt 40%. Bei höheren Abmessungen ist die Ersparnis weit größer.

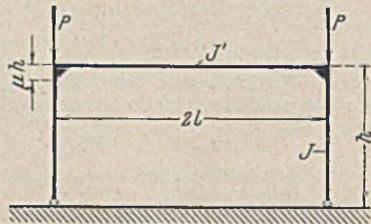
Verschiedenes.

Nachtrag zu dem Aufsatz „Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln“ von Oberingenieur Fritz Wansleben, Rheinhausen.

Einige an mich gerichtete Fragen lassen es als zweckmäßig erscheinen, meine in Heft 16/18 Jahrg. 1940 dieser Zeitschrift abgedruckte Abhandlung durch einige Erläuterungen zu ergänzen.

Zunächst sei klarstellend bemerkt, daß der Drehsinn der Lastmomente mit dem der Knotendrehwinkel übereinstimmt. Hierbei ist auf die besondere Annahme bezüglich des Drehsinnes von η und ζ zu achten.

Bei der Behandlung der Knickfestigkeit der Kuppel wurde, ohne es besonders zu erwähnen, eine wesentliche Vereinfachung vorgenommen. Um nämlich bei der an sich schon recht verwickelten Rechnung die sie außerordentlich erschwerenden transzendenten Funktionen zu vermeiden, wurde der bei Bauwerken der vorliegenden Art stets geringe Einfluß der Längskräfte auf die Größe des Biegemomentes der Stäbe vernachlässigt. Der begangene Fehler wird um so kleiner, je steifer die Rippenstäbe gegenüber den Ringstäben sind. Um einen ungefähren Überblick über die Größe des Fehlers zu erhalten, soll hier ein ganz einfaches, aber keineswegs besonders günstiges Beispiel durchgerechnet werden. Es handelt sich um ein einfaches rechteckiges Rahmenportal (Bild 1). Für dieses ist die Knickbelastung



$$P = \frac{u^2 EJ}{h^2} \cdot \text{Hierin ist } u \text{ der aus der Formel } u \cdot \operatorname{tg} u = \frac{3J'h}{Jl} \text{ ermittelte}$$

Wert. Für den Sonderfall $\frac{J'h}{Jl} = 1,0$ ergibt sich $u = 1,1925$ und damit

$$P = 1,428 \cdot \frac{EJ}{h^2}.$$

Wird wie in meiner Abhandlung die Wirkung der Längskräfte in den Portalstützen vernachlässigt, dann lautet die Knickgleichung:

$$P = \frac{3}{1 + \frac{J'l}{J'h}} \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

oder für den betrachteten Sonderfall:

$$P = 1,5 \cdot \frac{EJ}{h^2}.$$

Der Fehler ist also + 5%. In Wirklichkeit ist jedoch der Fehler noch geringer, weil die Rahmenstäbe nicht bis an die theoretischen Eckpunkte gleichbleibend steif sind. Ein gewisser Bereich der Stäbe an den Rahmen-ecken kann als starr angenommen werden. Wählen wir als Ausmaß dieser starren Stäbeteile die Strecken $u l$ bzw. $u h$, dann lautet die Gleichung zur Bestimmung von u :

$$u \left(\operatorname{tg} u + \frac{u}{1-u} \cdot u \right) = \frac{3J'h}{(1-u)^2 Jl}$$

Wählen wir z. B. $u = 0,03$, dann finden wir aus $u (\operatorname{tg} u + 0,03093 u) = 3,1884$ den Wert $u = 1,205$. Damit wird

$$P = 1,452 \cdot \frac{EJ}{h^2}.$$

Der Fehler der angenäherten Berechnung ist also nur noch + 3,3%.

Mit Rücksicht auf den großen Gewinn an Rechenarbeit ist daher die vorgenommene Vereinfachung voll gerechtfertigt.

Wie sich bei einer Kontrolle der in meiner Abhandlung gegebenen Formeln gelegentlich einer praktischen Anwendung herausstellte, haben sich infolge des sehr verwickelten Zusammenhanges der Kräfte und Verformungen, welcher durch den Umfang der Formeln zum Ausdruck kommt, einige Auslassungen sowie Unstimmigkeiten einiger Vorzeichen und Kennziffern eingeschlichen. Sie sollen hier richtiggestellt werden. Bei der Wiedergabe der betreffenden Formeln werden, soweit es die Deutlichkeit

Nach den deutschen Bestimmungen für Eisenbeton müssen die Bewehrungsseisen eine geringste Betonüberdeckung von 2 1/2 cm haben. Beim Hohlsteg-Verbundträger ist dies für den Untergurt zur Erzielung der maximalen Verbundwirkung absolut unnötig, da ja die untere Bewehrung mit der oberen steif verbunden ist. Der Versuch 2, bei welchem diese Überdeckung nicht der Fall war, hat dies ja auch voll bestätigt.

Die Notwendigkeit der überdeckten Untergurteisen ist an sich als schwerer Nachteil im Eisenbetonbau bekannt. Das Mißverhältnis der Dehnungsmasse beider Baustoffe (Stahl—Beton) und der Umstand, daß der weniger dehnungsfähige Stoff gerade in der äußersten, am meisten gedehnten (unteren) Zone liegt, führt zu der bekannten nachteiligen Erscheinung der Risse im Beton an der unteren Seite des Trägers, weit früher als die Bewehrungsseisen ihre größte zulässige Beanspruchung erfahren haben.

Beim Hohlsteg-Verbundträger ist die Risselast wesentlich größer, da in der unteren Zone Stahl liegt.

nicht erforderlich, nur die sich ändernden Zeichen ausgeschrieben, während die unveränderten Teile durch Punkte angedeutet sind.

In den vier Momentengleichungen der Gruppe (32) ist überall an Stelle von $3Y$ zu setzen: $\frac{3JY}{s}$. Ferner muß es in der dritten Gleichung der Gruppe (34) heißen $M_{(o)z} + 6[\dots + \dots] + \dots$, während in Gl. (34b) a_1'' zu halbieren ist.

Für die Ersatzlasten zur Berücksichtigung der Wärmeeinflüsse ist es richtiger, eine Gruppe zu wählen, welche P_x nicht enthält. In diesem Falle lauten die Gl. (36) u. 36a):

$$P_{(o)x} = 0 \quad P_{(o)y} = \frac{\dots}{l_1^3 \cdot \cos^2 \gamma_1} \dots \quad M_{(o)z} = \frac{\dots}{l_1^2 \cdot \cos \gamma_1} \dots$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß in den untersten Rippenstäben Anfangsmomente vorhanden sind, denen sich die aus der Rechnung mit den Ersatzlasten ergebenden Momente überlagern. Diese Anfangsmomente sind an den oberen Stabenden gleich $M_{(o)z}$ und bei den eingespannten Füßen $-M_{(o)z}$.

Die Vorzeichen in der Gleichungsgruppe (37) sind:

$$\frac{P_z}{6E} + 2[+] + [-] - [\dots + \dots - \dots] = 0$$

$$\frac{M_x}{2E} - 3[\dots - \dots - \dots] + [+] + [+] = 0$$

$$\frac{M_y}{2E} + 3[\dots - \dots - \dots] + [+] + [+] = 0$$

und in den zugehörigen Gl. (37a) und (37b):

$$d_j' = (\dots - \dots + \dots) \quad d_j'' = (\dots - \dots - \dots)$$

$$d_1' = (\dots - \dots + \dots) \quad d_1'' = \left(\dots - \frac{\dots}{2} - \dots \right)$$

$$e_j' = \left(\frac{\dots + \dots}{\dots} + \frac{\dots + \dots}{\dots} + \dots \right) \quad e_1' = \left(\frac{\dots + \dots}{\dots} + \dots + \dots \right)$$

$$e_1'' = \left[(\dots - \dots) \frac{\dots}{4 \dots} - \dots + \dots \right] \quad f_1' = [(\dots - \dots) \dots - \dots + \dots]$$

In der letzten Gleichung der Gruppe (38), und zwar in der die y enthaltenden ersten Klammer sind nur das erste und dritte Glied positiv. Damit ist bei den Werten a_1, a_1' und a_1'' in Gl. (38a) statt $\operatorname{tg} \gamma_1$ der Faktor $(\operatorname{tg} \gamma_{11} - \operatorname{tg} \gamma_1)$ zu setzen, wie es bei den entsprechenden Werten A_1, A_1' und A_1'' in Gl. (39a) geschehen ist. Hier sind noch bei A_j'' die Trägheitsmomente J'' durch J' zu ersetzen. Es muß ferner darauf geachtet werden, daß in Gl. (38a), (39a) und (42) bei allen Gliedern die Größen a, A oder $P_{(k)x}$, welche mit der Differenz der Stabneigungstangenten behaftet sind, die Kennziffern der Trägheitsmomente J_w, J_{vw} , der Stablängen s und der Stabkräfte \bar{S} ohne Rücksicht auf den Index des zugehörigen y stets J sein müssen.

In der letzten Gleichung der Gruppe (39) ist das Glied mit C'' negativ und in der folgenden Klammer das Glied mit D_{j-1}'' positiv zu setzen. Außerdem ist in Gl. (39a) und (39b) noch im letzten Glied der Werte D_j'' bzw. D_1'' der Faktor $\sin \frac{\alpha}{2}$ zu streichen.

Schließlich ist das Vorzeichen im rund eingeklammerten Anfangsglied der gleichlautenden Werte B_1' und C_1 der Gl. (39b) negativ, während das zweite Glied des Wertes A_1'' halbiert werden muß.

INHALT: Entlastung bestehender Brückenwiderlager durch Anordnung einhüftiger Rahmen-träger. — Die Stabilität des Dreigelenkrechtckrahmens. — Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP. a., eine bautechnische Neuheit. — Verschiedenes: Nachtrag zum Aufsatz „Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln“.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.