

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 7. Februar 1941

Heft 4/5

Alle Rechte vorbehalten.

Die Biegespannungen querschwingender, achsrecht belasteter Stäbe.

Von Dr.-Ing. Max Georg Puwein, Wien.

Inhaltsangabe. Für die als Folge harmonischer Querbewegungen der Auflager in achsrecht belasteten Stäben auftretenden Biegemomente wird eine strenge Beziehung abgeleitet. Zwischen Erregerfrequenz und den bezüglich Resonanz kritischen Achslasten wird der Zusammenhang nachgewiesen und anschaulich dargestellt. Für eine Belastung unterhalb des ersten Resonanzbereichs werden Näherungsformeln abgeleitet. Aus den Erkenntnissen werden Folgerungen bezüglich baulicher Ausbildungen gezogen. Die Betrachtung wird auf Fälle veränderlichen Querschnitts und veränderlicher Achskraft erweitert. Die folgenden Untersuchungen dienen vornehmlich der Feststellung der dynamischen Nebenspannungen, welche in den Stäben von Fachwerksbrücken durch Fahrzeugstöße und in den Stützen von Skelettbauten durch Bodenschwingungen entstehen.

Harmonische Schwingungen der Auflager achsrecht belasteter Stäbe zwingen diese zu Biegeschwingungen. Im folgenden werden die dabei auftretenden Biegespannungen festgestellt, die sich den Normalspannungen des Stabes überlagern. Solange sich nicht die Achskraft bestimmen, von der Frequenz der Auflagerschwingungen abhängigen, in bezug auf Resonanzerscheinungen kritischen Werten nähert, sind diese Biegespannungen als Nebenspannungen anzusehen, die nicht in den üblichen Standberechnungen, sondern bei der Festsetzung von Spannungen und Knickzahlen beachtet werden müssen.

Wenn eine pulsationsfrei in einem Stabe wirkende Achskraft ihre Größe allmählich ändert, ändern sich mit ihr die Eigenfrequenzen des Stabes. Stimmt eine dieser Eigenfrequenzen mit der gleichbleibend vorausgesetzten Erregerfrequenz überein, so tritt Resonanz ein, wie im folgenden exakt gezeigt wird. Die Auflagerschwingungen können ohne Zusammenhang (z. B. bei Bodenschwingungen) oder im Zusammenhang mit der Belastung (z. B. bei Triebrostößen) auftreten. Die Formänderung des Stabes folgt aus der Anwendung der Zeitweggleichung¹⁾ des stationären Teils der ungedämpften, erzwungenen Schwingung auf die Stabenden:

$$(1) \quad v(x, t) = (A \cdot \cos \varepsilon x + B \cdot \sin \varepsilon x + C \cdot \cos \delta x + D \cdot \sin \delta x) \sin \omega t,$$

wobei

$$(2) \quad \left. \begin{matrix} \varepsilon \\ \delta \end{matrix} \right\} = \sqrt{\mp \frac{P}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}}.$$

Dabei bezeichnen

 $\mu = F \cdot \frac{\gamma}{g}$ = die Stabmaße je Längeneinheit, F = Querschnittsfläche, γ = Einheitsgewicht des Baustoffs, $g = 981 \text{ cm/sek}^2$ = die Schwerebeschleunigung, E = Elastizitätsmodul des Baustoffs, J = Trägheitsmoment des Querschnitts um die zur Zeichenebene senkrechte Schwerachse, $\omega = 2\pi f$ = die Kreisfrequenz der f erzwungenen Schwingungen je Sekunde, P = als Druckkraft positiv bezeichnete Achskraft.

¹⁾ M. G. Puwein, Die Verminderung der Knicklast eines Stabes durch Querschwingungen. Bauing. 1939, Heft 1/2.

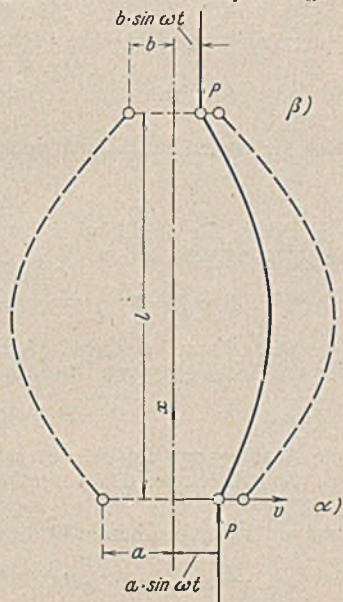


Bild 1.

Aus Gl. (1) folgen die Randbedingungen (Bild 1):

$$(\alpha) \quad x=0 \quad \begin{cases} v(x, t) = a \cdot \sin \omega t = (A + C) \sin \omega t \\ -\frac{M}{EJ} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 = (A \varepsilon^2 - C \delta^2) \sin \omega t \end{cases}$$

$$(3) \quad A = a \cdot \frac{\delta^2}{\varepsilon^2 + \delta^2}$$

$$(4) \quad C = a \cdot \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \delta^2}$$

$$(\beta) \quad x=l \quad \begin{cases} v(x, t) = b \cdot \sin \omega t = (A \cdot \cos \varepsilon l + B \cdot \sin \varepsilon l + C \cdot \cos \delta l + D \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \\ -\frac{M}{EJ} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 = (A \varepsilon^2 \cdot \cos \varepsilon l + B \varepsilon^2 \cdot \sin \varepsilon l - C \delta^2 \cdot \cos \delta l - D \delta^2 \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \end{cases}$$

$$(5) \quad B = \frac{(b - a \cdot \cos \varepsilon l) \delta^2}{\sin \varepsilon l (\varepsilon^2 + \delta^2)}$$

$$(6) \quad D = \frac{(b - a \cdot \cos \delta l) \varepsilon^2}{\sin \delta l (\varepsilon^2 + \delta^2)}$$

Daher lautet die Gleichung der Biegelinie:

$$(7) \quad v(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^2 + \delta^2} \left[a \delta^2 \cdot \cos \varepsilon x + \frac{(b - a \cdot \cos \varepsilon l) \delta^2}{\sin \varepsilon l} \cdot \sin \varepsilon x + a \varepsilon^2 \cdot \cos \delta x + \frac{(b - a \cdot \cos \delta l) \varepsilon^2}{\sin \delta l} \cdot \sin \delta x \right] \sin \omega t.$$

Der Abstand x_m des gefährdetsten Querschnitts vom Auflager α ergibt sich aus

$$(8) \quad Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -EJ \cdot \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = 0.$$

Bei Schwingungen, die langsamer als die niederste Eigenfrequenz unter der Achslast P erfolgen [vgl. Gl. (17)], ist das Maximalmoment nahe der Balkenmitte zu erwarten.

Es tritt, wenn

$$(9) \quad t = \frac{\pi}{2\omega}, \quad 3 \cdot \frac{\pi}{2\omega}, \quad 5 \cdot \frac{\pi}{2\omega} \dots$$

ist, auf und folgt aus

$$(10) \quad M(x, t) = -EJ \cdot \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

mit

$$(11) \quad M_{\max, \max} = \mp EJ \cdot \frac{\delta^2 \varepsilon^2}{\delta^2 + \varepsilon^2} \left[a \cdot \cos \varepsilon x_m + \frac{(b - a \cdot \cos \varepsilon l)}{\sin \varepsilon l} \cdot \sin \varepsilon x_m + a \cdot \cos \delta x_m + \frac{(b - a \cdot \cos \delta l)}{\sin \delta l} \cdot \sin \delta x_m \right].$$

Die größten Randspannungen folgen aus der bekannten Gleichung

$$(12) \quad \sigma_{1,2} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max, \max}}{W_{1,2}}.$$

Die vorliegende Betrachtung setzte einen konstanten Elastizitätsmodul E voraus und gilt daher nur, solange Gl. (12) Spannungen ergibt, für die man bei dem betreffenden Baustoff das Hookesche Gesetz als noch gültig ansehen kann.Wenn sich $\sin \delta l$ dem Werte 0 nähert, müssen die letzten Glieder in den Klammerausdrücken der Gl. (7) u. (11) dem Werte ∞ zustreben.

Setzt man jedoch zur Bestimmung der Eigenfrequenzen

$$(\alpha_E) \quad x=0 \quad \begin{cases} v(x, t) = 0 = (A + C) \sin \omega t \\ -M/EJ = 0 = (A \varepsilon^2 - C \delta^2) \sin \omega t \end{cases} \quad A = C = 0$$

$$(\beta_E) \quad x=l \quad \begin{cases} v(x, t) = 0 = (B \cdot \sin \varepsilon l + D \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \\ -M/EJ = 0 = (B \varepsilon^2 \cdot \sin \varepsilon l - D \delta^2 \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \end{cases} \quad B = 0,$$

so folgt

$$D \neq 0 \text{ für } \sin \delta l = 0.$$

Die Bedingung

$$(13) \quad \sin \delta l = 0$$

bestimmt daher die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ und nach Gl. (2) deren Abhängigkeit von der jeweiligen Achslast.

Folglich müssen für

$$(14) \quad \omega = \omega_1, \omega = \omega_2 \dots \omega = \omega_n,$$

d. h. wenn die Frequenz der erzwungenen Schwingung mit einer der von der veränderlichen Achskraft abhängigen Eigenfrequenzen übereinstimmt, große Ausbiegungen und große Biegespannungen entstehen. Aus Gl. (13) folgt

$$(15) \quad \delta l = l \sqrt{\frac{P}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}} = \pi, 2\pi \dots n\pi;$$

daraus können mit $\omega = 2\pi f$ die bei einer gegebenen Erregerfrequenz f für die „n“te Resonanzerscheinung kritischen Achskräfte

$$(16) \quad P_{kfn} = \pi^2 \cdot \frac{EJ}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} - \frac{G}{n} \cdot \left(\frac{l}{n}\right) [2f]^2$$

$G =$ Eigengewicht des Stabes $n = 1, 2 \dots n$

bestimmt werden. Da für $P_{kfn} > 0$, also wenn die kritische Achskraft eine Druckkraft ist, als Folge der Aufschaukelung eine Plastizierung und als weitere Folge ein Gleichgewichtswechsel eintreten muß, kann man auch die Bezeichnung „Schwingknicklast“ gebrauchen. Der Ablauf der „Schwingknickung“ kann jedoch durch die eine harmonische Bewegung voraussetzende Gl. (1) u. (2) nicht verfolgt werden. Bild 2 zeigt den Zusammenhang der Schwingknicklasten mit den zugehörigen Erregerfrequenzen. Dabei ist P_{kfn} auf die Euler-Last $P_E = \pi^2 EJ/l^2$ und

$$(17) \quad f = \frac{n^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{P_{kfn}}{n^2 P_E}}$$

auf die niederste Eigenfrequenz des unbelasteten Balkens

$$(18) \quad f_{1,0} = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

bezogen. Eine Verminderung des Tragvermögens eines Druckstabes durch Resonanzerscheinungen besteht somit nur in den Bereichen

$$\begin{aligned} n=1 & \quad 0 < f < f_{1,0} \\ n=2 & \quad f_{1,0} \sqrt{12} < f < 4f_{1,0} \\ n=3 & \quad f_{1,0} \sqrt{72} < f < 9f_{1,0} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

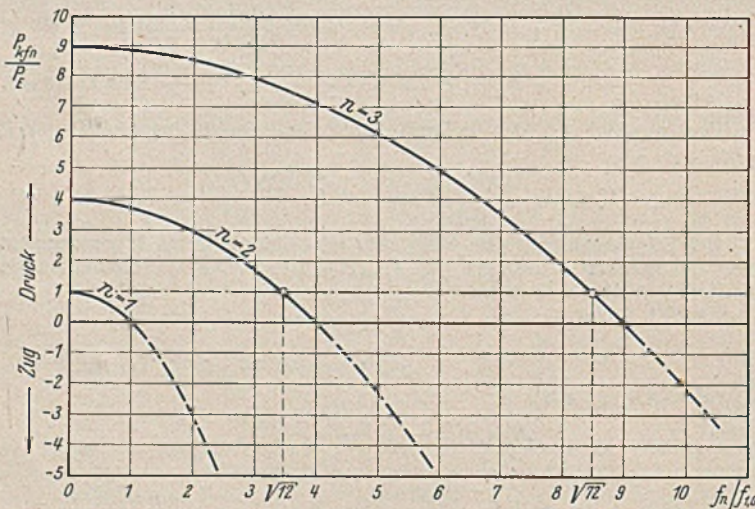


Bild 2.

Eine überschlägige Berechnung²⁾ zeigt, daß für $f \leq 5$ (Triebbradstöße, Verkehrserschütterungen) und $l \leq 10$ m bei Berücksichtigung der Verminderung der statischen Knicklast durch unvermeidliche Endhebelarme eine hinlängliche Sicherheit gegen das Erreichen der niedersten Schwingknicklast besteht, wenn

$$(19) \quad \lambda l \leq 1000$$

ist. $\lambda =$ Stabschlankheit, $l =$ Stablänge in Metern.

Gl. (19) fußt auf den noch geltenden Knickvorschriften DIN 1050 § 11 ($\nu = 3,5$ für $\lambda \geq 100$) und ist bei Haupttragwerken im allgemeinen erfüllt. Bild 3 zeigt einen im Bereiche $n=3$ durch harmonische Bewegung des unteren Endes aufgeschaukelten Stab.

Für $a = -b$ und $\delta l = \pi, 3\pi \dots (2n-1)\pi$
und für $a = +b$ und $\delta l = 2\pi, 4\pi \dots 2n\pi$

wird das letzte Glied in Gl. (7) u. (11) Null. Da die übrigen Glieder nur endliche Werte besitzen können, ist unter diesen Bedingungen eine Resonanz ausgeschlossen. Dies erinnert daran, daß, wie Gl. (11) lehrt, die Biegemomente nicht nur durch Resonanz, sondern auch durch große Endamplituden bedeutende Werte erreichen können.

²⁾ Vgl. Note 1, Gl. (15) bis Gl. (17).

Im Übrigen erhält man mit Hilfe der aus Gl. (2) gewonnenen Beziehungen

$$(20) \quad \varepsilon^2 \delta^2 = \frac{\mu \omega^2}{EJ}$$

$$(21) \quad \varepsilon^2 + \delta^2 = 2 \sqrt{\frac{P^2}{(2EJ)^2} + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}$$

für die Umgebung der ersten Resonanzstelle $\delta l \approx \pi$, mit

$$(22) \quad \sin \delta l \approx \pi - \delta l \quad \cos \delta l \approx -1$$

durch Einsetzen der Gl. (20), (21) u. (22) in Gl. (11) die folgende Näherungsformel

$$(23) \quad M_{\max, \max} = \frac{\mu \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}}$$

$$\frac{\pi - l}{2EJ} + \sqrt{\frac{P^2}{(2EJ)^2} + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}$$

wobei $a = b = m$ angenommen ist.

In entsprechender Entfernung von der obigen Resonanzstelle ($\delta l < \pi$) kann man auf folgendem Wege eine andere Näherungsformel gewinnen:

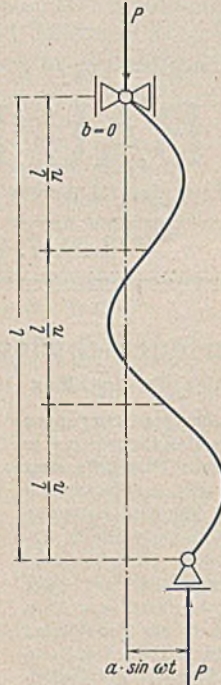


Bild 3.

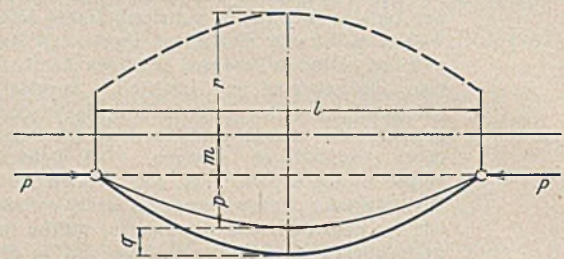


Bild 4.

Denkt man sich den Stab vorerst achskraftfrei ($P = 0$) und gewichtslos ($\mu = 0$), so ist für $a = b = m$ (Bild 4)

$$(24) \quad v(x, t) = m \cdot \sin \omega t;$$

jeder Punkt der Stabachse besitzt dann die Beschleunigung

$$(25) \quad v''(x, t) = -m \omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

so daß der Stab in der Amplitude die gleichmäßige Belastung

$$(26) \quad m \mu \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

und die angenäherte Durchbiegung

$$(27) \quad p = \frac{5}{384} \cdot \frac{m \mu \omega^2 l^4}{EJ} \text{ erhält.}$$

Durch die nachträglich angebrachte Achskraft vergrößert sich die Ausbiegung auf

$$(28) \quad p + q = p \cdot \frac{P_{kf}}{P_{kf} - P} = \frac{5}{384} \cdot \frac{m \mu \omega^2 l^4}{EJ} \cdot \frac{P_{kf}}{P_{kf} - P}.$$

Diese Formel entsteht in Anlehnung an die bekannte Näherungsformel für die Ausbiegung von Druckstäben mit Anfangskrümmung³⁾, da für $n = 1$

$$(16)_1 \quad P = P_{kf} = \pi^2 \cdot \frac{EJ}{l^2} - G \cdot \frac{l}{g} (2f)^2$$

die Ausbiegung $(p + q) = \infty$ sein muß.

So erhält man den vergrößerten Ausschlag in der Stabmitte

$$(29) \quad r = m + (p + q)$$

und unter der Annahme, daß dieser über die ganze Stablänge konstant sei,

$$(30) \quad M_{\max, \max} = \frac{l^2}{8} \cdot \mu \omega^2 r + P(p + q) = \frac{Gl}{8} \cdot \frac{r \omega^2}{g} + P(p + q) \\ = M_g \eta + P(p + q) = m \cdot \frac{Gl}{8} \cdot \frac{(2\pi f)^2}{g} \\ + m \left[\frac{Gl}{8} \cdot \frac{(2\pi f)^2}{g} + P \right] \frac{5}{384} \cdot \frac{G l^3 (2\pi f)^2}{g EJ} \cdot \frac{P_{kf}}{P_{kf} - P}.$$

Der Faktor $Gl/8$ in Gl. (30) ist das Biegemoment durch das Eigengewicht eines waagerechten Stabes; dieser erhält durch den Schwingungsvorgang das Größtmoment

$$(31) \quad M = M_g \left(1 + \eta + \frac{P}{M_g} [p + q] \right).$$

Zur Auswertung der Gl. (11), (23) u. (30) braucht man Angaben über die Größe der Endamplituden a und b bzw. m und der Kreisfrequenz der erzwungenen Schwingungen $\omega = 2\pi f$. Bei den Stützen von Skelettbauten kann man z. B. für sehr starke Erdbebenschwingungen (Bild 5) $m = 0,5$ cm und $f = 1$ Schw./sek annehmen.

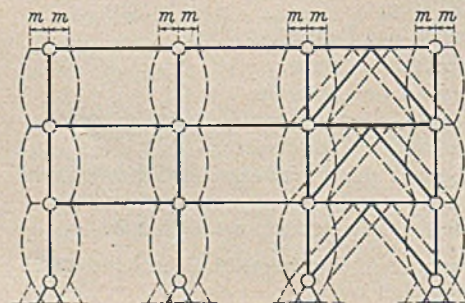


Bild 5.

³⁾ z. B. Stahlbau-Kalender 1939, S. 111.

Für Fachwerkstäbe⁴⁾ folgt aus der willkürlichen Annahme, daß sich eine Schwankung von 10% der Achskräfte ungeändert bis zu den Knoten auswirke (Bild 6), der einfache Vorschlag

$$(32) \quad m = a = b \approx 0,1 \delta \cdot \frac{P}{Q} = 0,1 \cdot \frac{6l}{700} \cdot \frac{P}{Q} \approx \frac{l}{1000} \cdot \frac{P}{Q}$$

$f \approx 5 \text{ Schw./sek.}$

wobei: P = gesamte Verkehrslast,
 Q = Eigengewicht des gesamten Tragwerks + P .

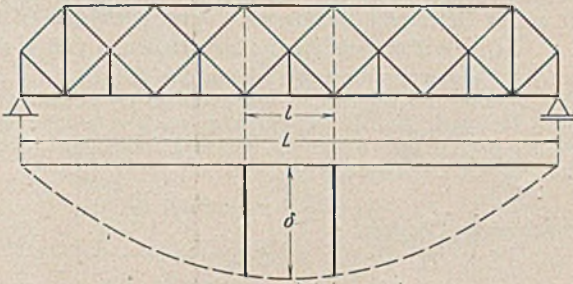


Bild 6.

Die Schwingung von Fachwerkstäben wird wie diejenige durchlaufender Stützen durch die Durchlaufwirkung der steifen Knotenanschlüsse behindert. Durch Vergleich der Eigenkreisfrequenz des frei aufliegenden Balkens

$$(33) \quad \omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

mit der des beiderseits eingespannten Balkens

$$(34) \quad \omega_{be} = \frac{4,73^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{\pi^2}{l_{s,be}^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

erhält man für dessen niederste Eigenschwingung

$$(35) \quad l_{s,be} \approx \frac{2}{3} \cdot l.$$

Die niederste Eigenkreisfrequenz des einseitig eingespannten, anderseits frei aufliegenden Balkens beträgt:

$$(36) \quad \omega_{ee} = \frac{4,93^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{\pi^2}{l_{s,ee}^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

und man erhält analog zu Gl. (35)

$$(37) \quad l_{s,ee} \approx \frac{4}{5} \cdot l.$$

Diese „Schwinglängen“ können der Einfachheit halber der Berechnung der Schwingungsnebenspannungen zugrunde gelegt werden. Sie haben, im Gegensatz zu den „Knicklängen“ keine geometrische Bedeutung.

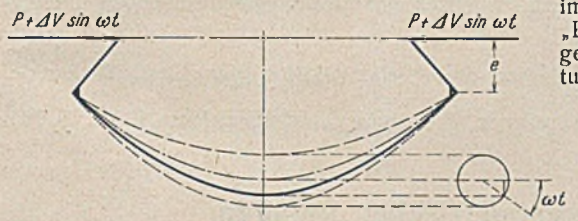


Bild 7.



Bild 8.

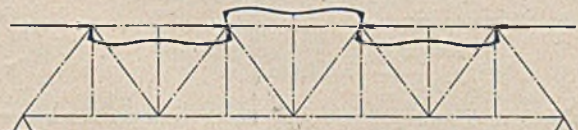


Bild 9.

Die Schwankungen der Verkehrslast haben außer Stabendenschwingungen auch eine Pulsation der Achskraft zur Folge. Diese beträgt daher

$$(38) \quad \bar{P} = (R + V) + \Delta V \cdot \sin \omega t = P + \Delta V \cdot \sin \omega t,$$

R = Anteil der ruhenden Belastung,
 V = Anteil der Verkehrsbelastung.

Da die Pulsation der Achskräfte im selben Takte wie die Endschwingungen erfolgen muß, werden für $\delta l < \pi$ die Ausschläge in der einen Amplitude vergrößert und in der anderen verkleinert. (Eine doppelt so

⁴⁾ Bezüglich im Versuchswege bestimmter Werte dynamischer Durchbiegung siehe: Krabbe, Neuere Ergebnisse der Versuchsforschung auf dem Gebiete der Schwingungsmeßtechnik bei Eisenbahnbrücken. Stahlbau 1937, Heft 26, und H. Kulka, Dynamische Probleme im Brückenbau, Stahlbau 1930, Heft 26.

schnell wie die Endschwingungen erfolgende Pulsation würde für $\delta l < \pi$ beide Amplituden vergrößern⁵⁾; im Bauwesen wird ein solcher Fall wohl selten sein.) Gl. (1) u. (2) setzen eine streng harmonische Bewegung voraus. Daher kann nur näherungsweise zur Spannungsbestimmung an Stelle von P

$$(39) \quad \bar{P}_{\min}^{\max} = P \pm \Delta V$$

gesetzt werden.

Wenn die pulsierenden Achskräfte an Endhebelarmen e angreifen, entstehen harmonisch veränderliche Endmomente. Diese erzwingen ebenfalls Querschwingungen (Bild 7 u. 8), welche bei Fachwerken mit Hilfsstäben von diesen behindert werden (Bild 9). Die Notwendigkeit möglichst achsgenauer Stabanschlüsse gewinnt hiermit weitere Bedeutung. Bild 7 setzt $\Delta V \ll P$ voraus.

Der allgemeinste Fall liegt vor, wenn die Druckkraft $P + \Delta V \cdot \sin \omega t$ an einem Stabe von der Anfangskrümmung $u = f(x)$ mit den Endhebelarmen e_a und e_b angreift und die Stabenden die Bewegungen $a \cdot \sin \omega t$ bzw. $b \cdot \sin \omega t$ ausführen. Die entsprechende Differentialgleichung lautet⁶⁾

$$(4) \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{(P + \Delta V \cdot \sin \omega t)}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\mu}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(P + \Delta V \cdot \sin \omega t)}{EJ} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Diese aus der Betrachtung des Kräftespiels am Balkenelement folgende Beziehung wird durch die Annahme vereinfacht, daß die ruhende Stabachse ein flacher Kreisbogen vom Halbmesser R sei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{R} = \text{konst.}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$(\alpha_A) \quad x = 0 \begin{cases} v = a \cdot \sin \omega t \\ M = -v'' EJ = (P + \Delta V \cdot \sin \omega t) \cdot e_a \end{cases}$$

$$(\beta_B) \quad x = l \begin{cases} v = b \cdot \sin \omega t \\ M = -v'' EJ = (P + \Delta V \cdot \sin \omega t) \cdot e_b \end{cases}$$

In den Gl. (A), (α_A) und (β_B) kann man die partiellen Differentialquotienten von v nach Ort und Zeit durch die Differenzquotienten⁷⁾ ersetzen. Teilt man die Stablänge in n und die Periode $2\pi/\omega$ in σ gleiche Teile, so erhält man $\sigma \cdot (n + 5)$ lineare Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten, die jedoch z. T. paarweise gleich groß sind. Dadurch sind Verformung und Beanspruchung in der Amplitudenlage bestimmbar. Symmetrie der Randbedingungen verursacht eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung.

Für die Gurte sind daher zweifach symmetrische Querschnitte zweckmäßig, da bei diesen der „Achsenprung“ und damit die Endhebelarme von vornherein vermieden sind. Abgesehen von „H“- und „I“-Gurten bedingt diese Ausbildung die Verwendung zweiteiliger Querschnitte auch im Druckgurt, also die Anordnung von Rahmenstäben⁸⁾.

Da Schwingungen des Stabes senkrecht zur Tragwerkebene nicht ausgeschlossen sind, braucht man zur Auswertung der Gl. (16) das ideelle Trägheitsmoment des zweiteiligen Querschnitts. Die Mitten der Bindebleche mehrteiliger Stäbe liegen während des Schwingungsvorganges ebenso auf einer Sinuslinie wie während des statischen Ausknickens.

Daher kann man das ideelle Trägheitsmoment J_{yi} aus der Engeberschen Formel

$$(40) \quad J_{yi} = J_y \cdot \frac{\lambda_y^2}{\lambda_y^2 + \lambda_1^2}$$

berechnen, wobei J_y das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche um ihre stofffreie Achse, λ_y die Schlankheit des Vollstabes und λ_1 die Schlankheit des Teilstabes bedeuten. Damit J_{yi} möglichst groß ist, muß λ_1 möglichst klein sein. Man erkennt, daß auch bei Zugstäben ein starrer, also mindestens zweinietiger Anschluß der Bindebleche notwendig ist und daß deren Entfernung keineswegs beliebig groß sein kann. Im übrigen besitzen, wie Gl. (30) lehrt, Zugstäbe in bezug auf die Schwingungsnebenspannungen ein günstigeres Verhalten als Druckstäbe.

Die bisherigen Erwägungen setzen ein über die Stablänge gleichbleibendes Trägheitsmoment voraus. Gl. (1) u. (2) können auch zur Untersuchung von Stäben mit absatzweise ungleichem Trägheitsmoment und ebensolcher Achskraft verwendet werden (Bild 10). Die Randbedingungen sind in den früheren Gl. (α) u. (β) analog. In jedem Absatzpunkte entstehen vier neue Unbekannte, denen insgesamt vier Gleichungen gegen-

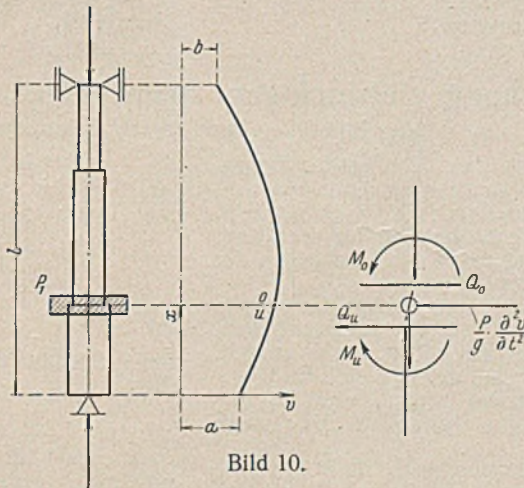


Bild 10.

⁵⁾ Bezüglich des Sonderfalles $a = b = 0$ siehe: E. Mettler, Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achslast. Mitteilungen aus den Forschungsanstalten 1940, Heft 1.

⁶⁾ Vgl. K. Jäger, Die Festigkeit leicht gekrümmter Stäbe aus Stahl bei schwingender Belastung. Stahlbau 1940, Heft 23/24.

⁷⁾ M. G. Puwein, Schwingungen hoher Schornsteine. B. u. E. 1940, Heft 12, S. 162.

⁸⁾ Hütte, 26. Aufl., Bd. III, S. 776, Abb. 83, 1, 2, 4, 5.

überstehen, welche die gemeinsame Ausbiegung, die gemeinsame Tangente und das Gleichgewicht des Balkenelementes im Absatzpunkte bedingen:

$$(41) \quad \begin{aligned} v_o &= v_u \\ v_o' &= v_u' \\ M_o &= M_u \\ (EJv'')_o &= (EJv'')_u \\ Q_o &= Q_u + \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (EJv''')_o &= (EJv''')_u + \frac{P}{g} \cdot \omega^2 v. \end{aligned}$$

Bedacht muß werden, daß eine absatzweise Änderung der Achskräfte nur durch Gewichte erfolgen kann, welche während des Schwingungsvorganges Trägheitskräfte hervorrufen. Das Eigengewicht der Stababschnitte kann man näherungsweise berücksichtigen, indem man bei der Berechnung von ε und δ jeweils das halbe Gewicht eines Abschnitts zur Achskraft hinzuschlägt.

Bei einer größeren Zahl von Abschnitten, bei stetig veränderlichem Trägheitsmoment und ebensolcher Achskraft (Bild 11) empfiehlt sich die Anwendung der Energiemethode. Für die Formänderung geht man von dem Ansatz

$$(42) \quad v(x, t) = \left(b \cdot \frac{x}{l} + a \cdot \frac{l-x}{l} + C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + C_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) \sin \omega t = v(x) \sin \omega t \text{ aus.}$$

Die auf dem Wege des Stabes von der Mittenlage zur Amplitude aufgewendete Formänderungsarbeit wird von den Lasten, den Trägheitskräften ihrer Massen, den Gewichten der Stabelemente und den Trägheitskräften der Massen dieser Stabelemente geleistet.

Daher gilt

$$(43) \quad A_i = A_a,$$

wenn unter A_i die Formänderungsarbeit und unter A_a die Summe der potentiellen und der kinetischen Energien verstanden wird. Führt man die Ausbiegungen und ihre Ableitungen in Gl. (43) ein, so entsteht

$$(44) \quad \int_0^l \frac{1}{2} \cdot v'^2 EJ dx = \sum_0^x P \int_0^x \frac{1}{2} \cdot v'^2 dx + \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} (v_P \omega)^2 + \int_0^l g \mu dx \int_0^x \frac{1}{2} \cdot v'^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \mu dx (v \omega)^2.$$

Der Widerstand, den die Balkenelemente und die Einzelmassen der Verdrehung um v' entgegensetzen, ist dabei vernachlässigt. Der Umstand, daß die wirkliche Amplitudenlinie aus mehreren in den Angriffspunkten der Einzellasten ineinander übergehenden Ästen besteht, wird mit wachsender Gliederzahl der Gl. (42) bedeutungslos.

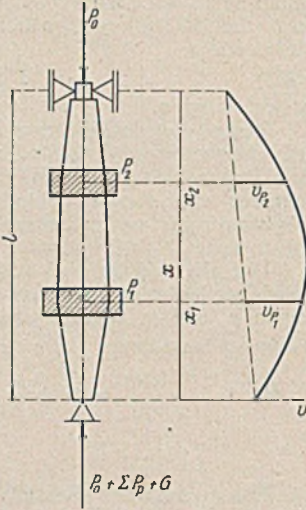


Bild 11.

Die Integrationen werden abschnittsweise entweder strenge oder mit einer Quadraturformel angenähert durchgeführt.

In dem Arbeitsvergleich Gl. (44) sind nur quadratische Glieder der Ausbiegungen und ihrer Ableitungen enthalten. Daher muß

$$(45) \quad A = A_i - A_a = \min$$

sein⁹⁾ was nur durch

$$(46) \quad \frac{\partial A}{\partial C_1} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial C_2} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial C_3} = 0 \dots$$

erreicht werden kann. Setzt man in Gl. (42) $v(x)$ mit n Koeffizienten $C_1 \dots C_n$ an, so liefert die Bedingung (46) n zugehörige Gleichungen, welche $C_1 \dots C_n$ als Funktion der Endamplituden a und b darstellen. Der Verlauf der Biegemomente folgt wieder aus Gl. (10).

Die Bestimmung der Eigenschwingungszahlen ist ebenfalls mit Hilfe der Gl. (44) u. (46) möglich. Die Bedingung $a = b = 0$ liefert zusammen mit der Bedingung Gl. (46) n für die Werte C homogene Gleichungen zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots \omega_n$$

und der zugehörigen Gruppen

$$\left(\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1} \dots \frac{C_n}{C_1} \right)_{1,2 \dots n}$$

Hierdurch wird auch bei veränderlichen Querschnitten die Bestimmung der Resonanz-Achslast möglich.

Teilt man Gl. (44) durch A_i , so erhält man

$$(47) \quad \sum \frac{P_p}{P_{pk}} + \sum \frac{\omega_1^2}{\omega_{pk}^2} + \frac{G}{G_k} + \frac{\omega_1^2}{\omega_G^2} \approx 1,$$

also eine Verallgemeinerung der Formel von Dunkerley¹⁰⁾. Dabei bedeuten: P_{pk} die statisch kritischen Lasten am Angriffspunkte der jeweiligen Last P_p , ω_{pk} die niederste Eigenkreisfrequenz des nur mit der Masse P/g behafteten waagerechten Balkens, G_k das statisch kritische Eigengewicht des Balkens, ω_G die niederste Eigenkreisfrequenz des unbelasteten, waagerechten Balkens und ω_1 die niederste Eigenkreisfrequenz des lotrechten Balkens.

Wenn nur die am Balkenende angreifende Achslast vorhanden ist, gilt bei kleinem Eigengewicht die im Schrifttum bereits vorfindliche Beziehung

$$(48) \quad \frac{P_0}{P_{0k}} + \frac{\omega_1^2}{\omega_G^2} \approx 1.$$

Ein anderer Weg zur Behandlung des Schwingungsproblems lotrechter Stäbe mit veränderlichem Querschnitt besteht in der Auswertung der diesbezüglichen Differentialgleichung mittels der Differenzenrechnung⁷⁾.

Die Bestimmung der Eigenschwingzahl achsrecht belasteter Stäbe hat auch bei rotierenden Stäben Bedeutung, da die in ihnen entstehenden Fliehkräfte unbegrenzt groß werden, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Rotation und die Kreisfrequenzen der Eigenbiegeschwingungen übereinstimmen.

⁹⁾ Th. Pöschl, Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Bauing. 1936, S. 160.

¹⁰⁾ z. B. in L. Zipperer, Technische Schwingungslehre, II. Bd., S. 105. Berlin 1927.

Alle Rechte vorbehalten.

Zur Windberechnung vielstockiger, zweistieliger, symmetrischer Rahmen.

Von Dipl.-Ing. Franz Obert, Saarbrücken.

Die Windlasten greifen in den Steifknoten an. Um bei der Ermittlung der Knotenmomente zeitraubende Berechnungen zu vermeiden, wird sehr häufig von der bekannten Näherungsmethode Gebrauch gemacht, die für die Stiele jeweils in halber Geschoßhöhe und für die Riegel ebenfalls in der Mitte Gelenke annimmt und damit das Anschreiben der Momente aus den Querkräften ohne weiteres gestattet.

Dieses sehr einfache Verfahren gibt aber mitunter für das oberste Rahmenfeld beträchtlich unzutreffende Werte, wie aus nachstehendem, der Praxis entnommenen Beispiel eines fünfstockigen Rahmens hervorgeht.

Wie eine sehr gute Annäherung auf verhältnismäßig einfache Weise erzielt wird, soll an demselben Beispiel gezeigt werden, unabhängig davon, ob die Stützenfüße gelenkig aufgesetzt oder ganz oder teilweise eingespannt sind.

In Bild 1 sind die Abmessungen des Rahmensystems, die Windkräfte, die Querkräfte und die Trägheitsmomente der Stiele und Riegel angegeben. Die Trägheitsmomente sind alle auf das Trägheitsmoment J_c der Stiele h_1 im fünften Geschoß bezogen. Außerdem sind die Momente M der Windkräfte hinsichtlich der einzelnen Steifknoten sowie die Werte $\frac{Q}{2} \cdot h$ für jedes Rahmenfeld aufgeführt und schließlich sind nachstehend noch die für die genaue Berechnung erforderlichen reduzierten Längen aller Stäbe festgelegt:

$$\begin{aligned} h_1' &= \frac{6,1 J_c}{J_c} = 6,10 \text{ m} & h_2' &= \frac{5,3 J_c}{1,65 J_c} = 3,21 \text{ m} \\ h_3' &= \frac{5,1 J_c}{1,85 J_c} = 2,76 \text{ m} & h_4' &= \frac{4,5 J_c}{2 J_c} = 2,25 \text{ m} \\ h_5' &= \frac{5,5 J_c}{2 J_c} = 2,75 \text{ m} \end{aligned}$$

$$l_1' = \frac{10,06 J_c}{16 J_c} = 0,629 \text{ m} \quad l_2' = \frac{10,06 J_c}{2 J_c} = 5,03 \text{ m}$$

$$l_3' = \frac{10,06 J_c}{2,4 J_c} = 4,19 \text{ m} \quad l_4' = \frac{10,06 J_c}{2 J_c} = 5,03 \text{ m}$$

$$l_5' = \frac{10,06 J_c}{2,4 J_c} = 4,19 \text{ m}$$

und bei teilweiser Fußeinspannung

$$l_6' = \frac{10,06 J_c}{2,4 J_c} = 4,19 \text{ m.}$$

In den Bildern 2, 3 u. 4 sind die mit Hilfe des Viermomentensatzes ermittelten, genauen Knotenmomente dargestellt, und zwar in Bild 2 bei teilweiser Einspannung der Stützenfüße, die auch der Ausführung zugrunde gelegt war. Die teilweise Einspannung ist durch Einführen eines Stabes mit dem Trägheitsmoment $2,4 J_c$ berücksichtigt.

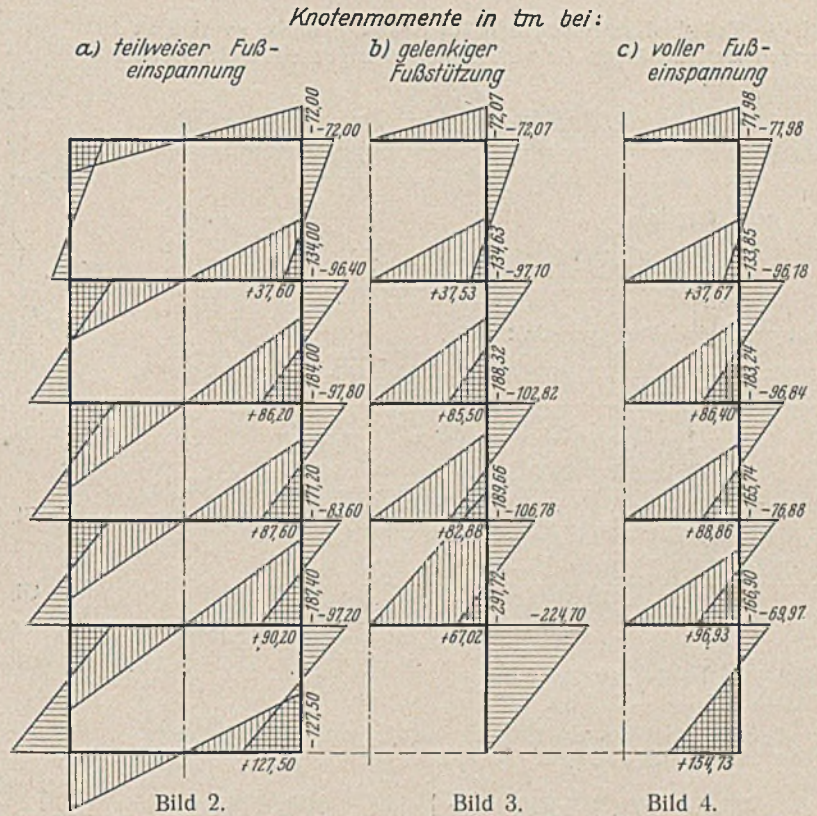
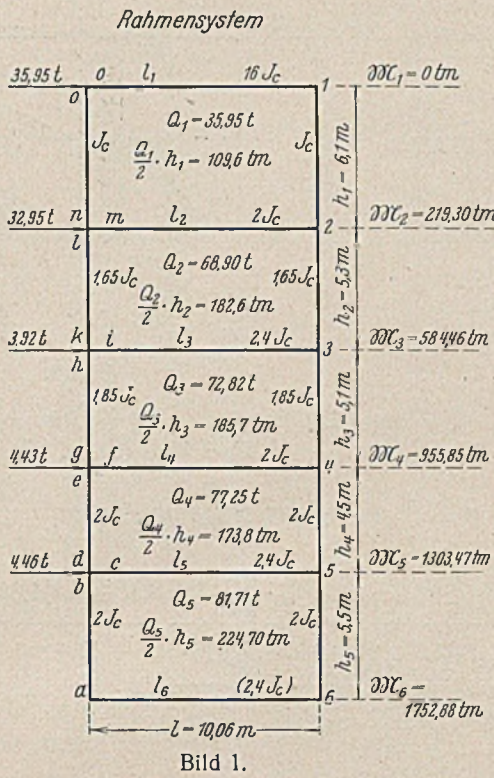
In Bild 3 sind die Momente bei gelenkiger Fußstützung und in Bild 4 bei voller Fußeinspannung eingeschrieben.

Der Vergleich der Bilder 2 bis 4 zeigt, daß die oberen Rahmenfelder von der Art der Fußstützung nur wenig beeinflußt werden.

In Bild 5 sind die Knotenmomente dargestellt, die sich nach der bekannten und eingangs erwähnten Näherungsmethode (Annahme von Gelenken in den Stabmitten) ergeben (vgl. Stahlbau-Kalender 1940, S. 284).

Unabhängig von der Art der Fußstützung können die Momente des obersten Feldes genügend genau nach Bild 2 bis 4 wie folgt angenommen werden:

oberes Eckmoment	$M_o = 72,0 \text{ tm}$
Stielmoment	$M_n = 37,6 \text{ tm}$
Riegelmoment	$M_m = 134,1 \text{ tm.}$



Demgegenüber ergeben sich nach der allgemeinen Näherungsmethode laut Bild 5 die nachstehenden Momente:

- oberes Eckmoment $M_o = 54,8 \text{ tm}$ ($-23,9\%$)
- Stielmoment $M_n = 54,8 \text{ tm}$ ($+45,7\%$)
- Riegelmoment $M_m = 146,1 \text{ tm}$ ($+9,0\%$)

d. h. Abweichungen von den richtigen Werten wie eingeklammert in % angegeben.

Da die Art der Fußstützung auf die Momente der oberen Felder nur geringen Einfluß hat, kommt man zu einer recht guten Annäherung, wenn man die beiden oberen Rahmenfelder für sich als zweistöckigen Rahmen mit elastischer Fußspannung betrachtet und dabei von den Riegelmomenten des dritten Riegels ausgeht, die in Bild 6 mit M_e bezeichnet sind und zu

$$(1) M_e = \frac{Q_2}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \frac{Q_3}{2} \cdot \frac{h_3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h_2 + \frac{Q_3}{2} \cdot h_3 \right)$$

eingesetzt werden.

Für den linken Rahmenstiel ergeben sich dann die Knotenmomente wie folgt:

Das Eckmoment M_5 des obersten Riegels bestimmt sich aus der Gleichung:

$$(2) M_5 = \frac{l_3' M_e + \frac{3}{2} \cdot h_2' (M_3 + M_2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1'}{l_2'} (6h_2' + l_2') (M_2 + M_1)}{l_1' + 6(h_1' + h_2') + 6 \cdot \frac{h_2'}{l_2'} (6h_1' + l_1')}$$

Hierin bezeichnen M_1 bzw. M_2 bzw. M_3 die Momente der über dem Steifknoten 1 bzw. 2 bzw. 3 liegenden Windkräfte in bezug auf diese Knoten.

Entspricht das in die Berechnung eingeführte M_e dem genauen Wert, so ergibt sich auch M_5 genau. Die Formel kann daher auch als Kontrollformel dienen.

Mit M_5 ist auch M_4 bestimmt, da

$$M_5 - M_4 = \frac{Q_1}{2} \cdot h_1 \text{ ist, oder}$$

$$(3) M_4 = M_5 - \frac{Q_1}{2} \cdot h_1.$$

(Die absolute Summe von M_4 und M_5 ist $= \frac{Q_1}{2} \cdot h_1$.)

Weiter folgt M_2 aus der Gleichung

$$(4) M_2 = \frac{l_3' M_e + 3 \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h_2 \right) h_2' + M_4 l_2'}{6h_2' + l_2'}$$

(Vorzeichen von M_4 beachten.)

Das Riegelmoment M_3 folgt aus: $M_2 = M_3 + M_4$ oder:

$$(5) M_3 = M_2 - M_4$$

und endlich folgt aus: $M_2 - M_1 = \frac{Q_2}{2} \cdot h_2$

$$(6) M_1 = M_2 - \frac{Q_2}{2} \cdot h_2.$$

Die Durchrechnung für den vorliegenden Fall ergibt (vgl. Bild 1):

$$M_e = \frac{1}{2} (182,6 + 185,7) = 184,15 \text{ tm}$$

- und mit $M_1 = 0$ $M_2 = 219,30 \text{ tm}$ $M_3 = 584,46 \text{ tm}$
- $M_1 + M_2 = 219,30 \text{ tm}$ $M_2 + M_3 = 803,76 \text{ tm}$
- $l_1' = 0,629 \text{ m}$ $l_2' = 5,03 \text{ m}$ $l_3' = 4,19 \text{ m}$
- $h_1' = 6,1 \text{ m}$ $h_2' = 3,21 \text{ m}$

$$M_5 = \frac{4,19 \cdot 184,15 + \frac{3}{2} \cdot 3,21 \cdot 803,76 + \frac{3}{2} \cdot \frac{6,1}{5,03} (6 \cdot 3,21 + 5,03) 219,30}{0,629 + 6(6,1 + 3,21) + 6 \cdot \frac{3,21}{5,03} (6 \cdot 6,1 + 0,629)}$$

$$M_5 = \frac{772 + 3870 + 9690}{0,63 + 55,86 + 142,55} = \frac{14332}{199,04} = 72,0 \text{ tm}$$

$$M_1 = 72,0 - 109,6 = -37,6 \text{ tm}$$

$$M_2 = \frac{4,19 \cdot 184,15 + 3 \cdot 182,6 \cdot 3,21 - 37,6 \cdot 5,03}{6 \cdot 3,21 + 5,03} = \frac{772 + 1758 - 189}{24,29} = \frac{2341}{24,29} = +96,38 \text{ tm}$$

$M_3 = 96,38 + 37,60 = 133,98 \text{ tm}$
 $M_1 = 96,38 - 182,60 = -86,22 \text{ tm}$,
d. h. nahezu übereinstimmend mit den genauen Werten.

Gl. (2) gibt auch einen schnellen Überblick über den Einfluß der Änderung der Trägheitsverhältnisse.

Hätte beispielsweise der oberste Riegel das Trägheitsmoment $2 J_c$ statt $16 J_c$, so wäre

$$l_1' = \frac{10,06 J_c}{2 J_c} = 5,03 \text{ m (statt } 0,629 \text{ m).}$$

Da l_1' nur im Nenner vorkommt, wird in diesem Fall:

$$M_5 = \frac{14332}{5,03 + 55,86 + 6 \cdot \frac{3,21}{5,03} (6 \cdot 6,1 + 5,03)}$$

$$= \frac{14332}{5,03 + 55,86 + 159,40} = \frac{14332}{220,29} = 65,06 \text{ tm (statt } 72,0 \text{ tm).}$$

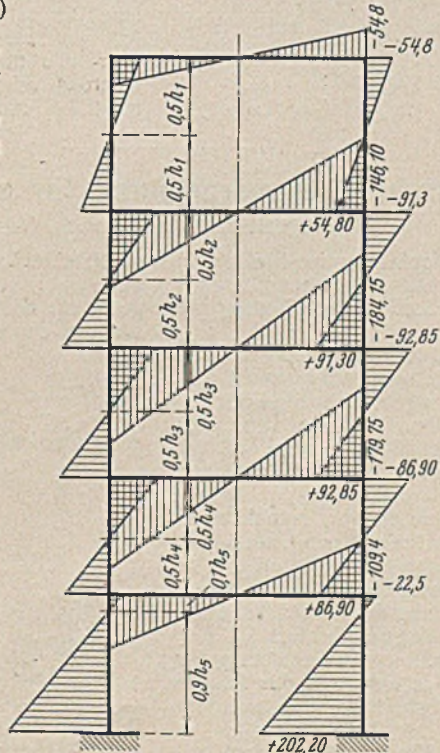


Bild 5.

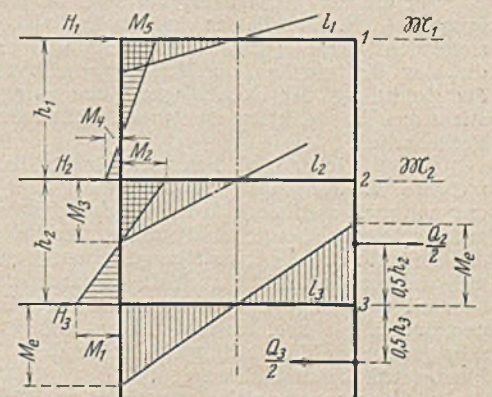


Bild 6.

Sind die Trägheitsmomente aller Stäbe gleich, so sind an Stelle der reduzierten Längen die wirklichen Stablängen einzusetzen und Gl. (2) lautet dann:

$$(2a) M_5 = \frac{l M_e + \frac{3}{2} \cdot h_2 (\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1}{l} (6 h_2 + l) (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1)}{l + 6 h_1 + 12 h_2 + 36 \cdot \frac{h_1 h_2}{l}}$$

und Gl. (4) geht über in

$$(4a) M_2 = \frac{3 \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h_2 \right) h_2 + l (M_e + M_1)}{6 h_2 + l}$$

Auf obiges Beispiel angewendet:

$$M_5 = \frac{10,06 \cdot 184,15 + \frac{3}{2} \cdot 5,3 \cdot 803,76 + \frac{3}{2} \cdot \frac{6,1}{10,06} (6 \cdot 5,3 + 10,06) 219,30}{10,06 + 6 \cdot 6,1 + 12 \cdot 5,3 + 36 \cdot \frac{6,1 \cdot 5,3}{10,06}} = \frac{1852,5 + 6390 + 8349,5}{225,95} = 73,43 \text{ tm}$$

$$M_4 = 73,43 - 109,60 = -36,17 = -36,2 \text{ tm}$$

$$M_2 = \frac{3 \cdot 182,6 \cdot 5,3 + 10,06 (184,15 - 36,17)}{6 \cdot 5,3 + 10,06} = \frac{2903 + 1489}{41,86} = +104,9 \text{ tm}$$

$$M_3 = 104,9 + 36,2 = 141,1 \text{ tm}$$

$$M_1 = 104,9 - 182,6 = -77,7 \text{ tm}$$

Bei gleichen Stockwerkshöhen und gleichen Trägheitsmomenten für alle Stäbe geht Gl. (2) über in

$$(2b) M_5 = \frac{l M_e + \frac{3}{2} \cdot h (\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{l} (6 h + l) (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1)}{l + 18 h \left(1 + \frac{2 h}{l} \right)}$$

und Gl. (4) in

$$(4b) M_4 = \frac{3 \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h \right) h + l (M_e + M_1)}{6 h + l}$$

Weiteres Beispiel (Bild 7 u. 8):

Einem achtstockigen Rahmen entnommen.

In Bild 7 sind die Knotenmomente eingeschrieben, die sich bei der genauen Berechnung mit eingespannten Stützenfüßen ergeben haben.

In Bild 8 sind die Knotenmomente dargestellt, die sich nach der allgemein bekannten Näherungsmethode (Gelenke in den Stabmitten) ergeben.

Nach Bild 7:

- oberes Eckmoment $M_5 = 0,659 \text{ tm}$
- Stielmoment $M_4 = 0,241 \text{ tm}$
- Rieгельmoment $M_3 = 1,713 \text{ tm}$

Nach Bild 8:

- oberes Eckmoment $M_5 = 0,45 \text{ tm} (-31,8\%)$
- Stielmoment $M_4 = 0,45 \text{ tm} (+87,5\%)$
- Rieгельmoment $M_3 = 1,80 \text{ tm} (+5,3\%)$

d. h. Abweichungen von den richtigen Werten wie eingeklammert in % angegeben.

Nach den vorstehend angegebenen Formeln wird mit:

$$l_1' = l_2' = 13,8 \text{ m} \quad l_3' = 8,95 \text{ m} \quad h_1' = h_2' = 11,5$$

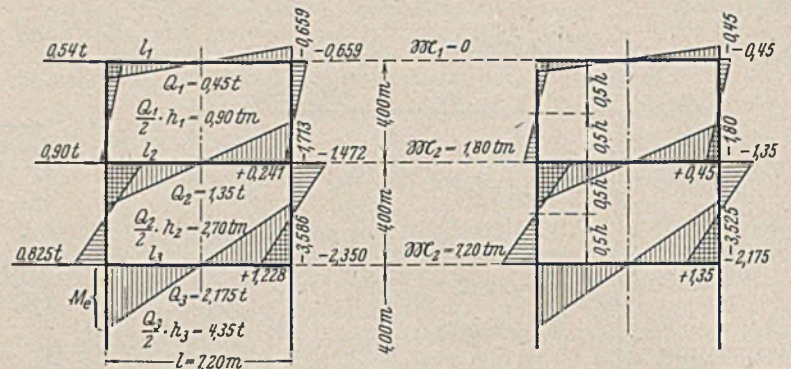


Bild 7. Bild 8.

und $\mathfrak{M}_1 = 0$ $\mathfrak{M}_2 = 1,80 \text{ tm}$ $\mathfrak{M}_3 = 7,2 \text{ tm}$
 $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 1,80 \text{ tm}$ $\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = 9,0 \text{ tm}$,
 nach Gl. (1)
 $M_e = \frac{1}{2} (2,70 + 4,35) = 3,525 \text{ tm}$,
 nach Gl. (2)
 $M_5 = \frac{8,95 \cdot 3,525 + \frac{3}{2} \cdot 11,5 \cdot 9,0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{11,5}{13,8} (6 \cdot 11,5 + 13,8) 1,80}{13,8 + 6(11,5 + 11,5) + 6 \cdot \frac{11,5}{13,8} (6 \cdot 11,5 + 13,8)}$
 $= \frac{31,48 + 155,25 + 186,30}{565,8} = 0,659 \approx 0,66 \text{ tm}$
 $M_4 = 0,66 - 0,90 = -0,24 \text{ tm}$,
 nach Gl. (4)
 $M_2 = \frac{8,95 \cdot 3,525 + 3 \cdot 2,70 \cdot 11,5 - 0,24 \cdot 13,8}{6 \cdot 11,5 + 13,8} = \frac{31,48 + 93,15 - 3,31}{82,8} = \frac{121,32}{82,8} = 1,465 \approx 1,47 \text{ tm}$
 $M_3 = 1,47 + 0,24 = 1,71 \text{ tm}$,
 d. h. mit den genauen Werten gut übereinstimmend.

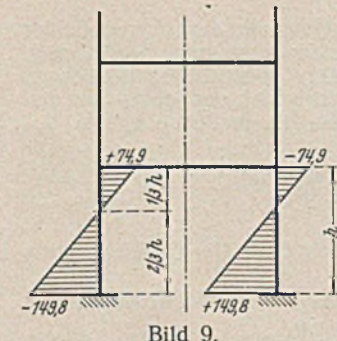


Bild 9 ist beiläufig angedeutet, daß bei Anwendung der allgemeinen Näherungsmethode nach Stahlbau-Kalender 1940, S. 284, die dort für das unterste Rahmenfeld angegebene Gelenklage von $0,9 h_1$ und $0,1 h_1$ natürlich keinen Anspruch auf allgemeine Gültigkeit hat. In Bild 5 wurde diese Annahme zu Vergleichszwecken beibehalten, wobei sich Stielmomente von $+202,2 \text{ tm}$ und $-22,5 \text{ tm}$ ergaben. Die genaue Berechnung ergab aber laut Bild 4 Stielmomente von $+154,73 \text{ tm}$ und $-69,97 \text{ tm}$, was ungefähr der Gelenklage in Bild 9 von $2/3 h_1$ und $1/3 h_1$ entspricht. Hiermit ergäben sich Stielmomente von $+149,8 \text{ tm}$ und $-74,9 \text{ tm}$, die den richtigen Werten erheblich näher liegen. Die Gelenklage $0,9 h_1$ und $0,1 h_1$ wird beispielsweise dann auftreten, wenn das unterste Geschoß wesentlich niedriger ist als die folgenden, während schon bei ungefähr gleichen Geschoßhöhen die Gelenke eher bei $2/3 h_1$ und $1/3 h_1$ entsprechend Bild 9 liegen werden.

Beitrag zur praktischen Durchbiegungsermittlung für einfache und durchlaufende Träger.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Ingenieur Fritz Steinack, München.

Die heute an jeden gestellte höchste Anforderung an Steigerung der Leistung verlangt die Nutzbarmachung jeder nur möglichen Ersparnis bzw. Vereinfachung der Arbeit. Mit nachfolgendem soll ein Beitrag zur Zeiteinsparung gebracht werden.

Für die aus gleichmäßig verteilter Last und aus regelmäßigen Lastgruppen (z. B. Einzellasten in den Drittels-, Viertelpunkten usw.) entstehenden Durchbiegungen gibt es unmittelbar zu gebrauchende Formeln, die den Bedürfnissen der Praxis gerecht werden. Dagegen verursacht die Ermittlung der Durchbiegung aus unregelmäßigen Lasten und vor allem aus Wanderlasten eine meist recht umständliche und zeitraubende Rechenarbeit.

Umständlicher wird dies noch für den Durchlaufträger, zumal, wenn mehrere Wanderlastgruppen (z. B. zwei oder mehrere Krane) vorliegen, die natürlich auch noch in den Nachbarfeldern ihren Einfluß auf das zu untersuchende Feld geltend machen. Erschwerend kommt weiter hinzu, daß die ermittelte Laststellung für die Feststellung der Größtmomente nicht immer gleichzeitig auch die Größtdurchbiegung ergibt.

Mit den beigegebenen Tafeln soll die Durchbiegungsermittlung für den Balken auf zwei bis fünf Stützen und für das Innenfeld des Trägers sehr vieler Felder mit gleichbleibendem Trägheitsmoment auf ein Mindestmaß beschränkt werden.

Die errechneten Werte, welche zu Einflußlinien (Biegelinien) zusammengestellt sind, entsprechen der elastischen Verformung des Trägers

durch eine Last von der Größe 1, angreifend jeweils in Feldmitte. Nach dem Satz von Maxwell von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ist dann diese Biegelinie bekanntlich gleichzeitig Einflußlinie für die Durchbiegung in Feldmitte, welche durch an beliebig anderer Stelle wirkende Lasten hervorgerufen wird. Jede Last erzeugt also in Feldmitte die Durchbiegung, die der unter ihr befindlichen Ordinate η entspricht. Alle in Tafel 1 und 2 enthaltenen Werte der Einflußlinien sind zu multiplizieren mit dem Faktor $\frac{P \beta^3}{EJ}$.

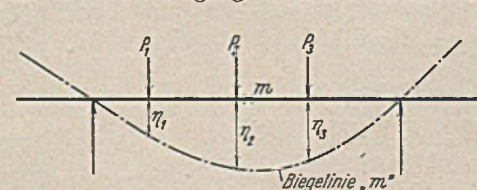


Bild 1.
 Für mehrere Lasten ist also die Durchbiegung in Trägermitte (Bild 1)
 $f = \frac{\beta^3}{EJ} (P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + \dots)$ oder $f = \frac{\beta^3}{EJ} \cdot \Sigma P \eta$.
 Für die Benutzung der regulären Tafelwerte sind alle Werte in kg und cm einzusetzen.
 Will man in bequemeren Zahlen rechnen und setzt man, wie oft gebräuchlich, P in t, l in m, J in cm^4 , ferner für Stahl $E = 2,1$, so gelten

die 1000fachen Tabellenwerte. (Für Eisenbeton müßte entsprechend $E=0,21$, für Holz $E=0,1$ bzw. $0,125$ eingesetzt werden.) Es gilt dann das in Tafel 1 und 2 hochgesetzte Komma; das Ergebnis f erscheint in cm.

Streckenlasten können mit genügender Genauigkeit in Einzellasten unterteilt werden.

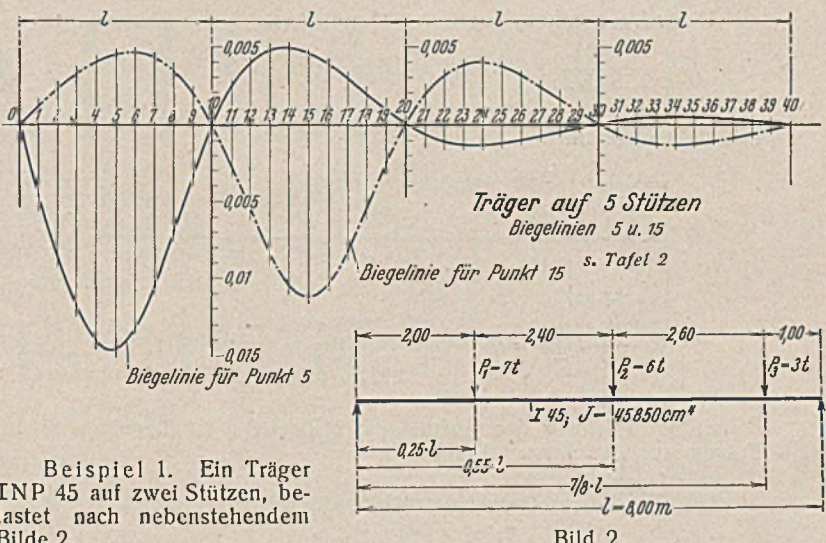
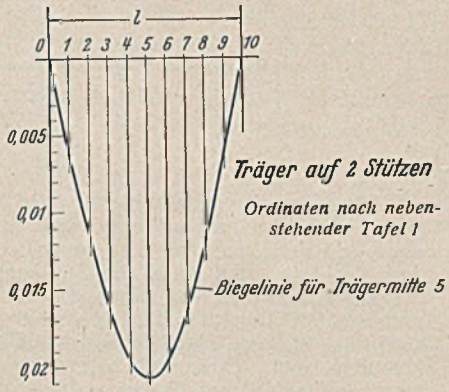
Tafel 1.

Abstand vom linken Auflager	Ordinate der Biegelinie	Abstand vom rechten Auflager
$x:L$	η	$x:L$
0,025	0,00156	0,975
0,05	0,00312	0,95
0,075	0,00468	0,925
1/10 = 0,1	0,00624	0,9
1/8 = 0,125	0,00780	0,875
0,15	0,00936	0,85
1/6 = 0,166...	0,01092	0,833...
0,175	0,01248	0,825
1/5 = 0,2	0,01404	0,8
0,225	0,01560	0,775
0,25	0,01716	0,75
0,275	0,01872	0,725
0,3	0,02028	0,7
0,325	0,02184	0,675
1/3 = 0,333...	0,02340	0,666...
0,35	0,02496	0,65
3/8 = 0,375	0,02652	0,625
2/5 = 0,4	0,02808	0,6
0,425	0,02964	0,575
0,45	0,03120	0,55
0,475	0,03276	0,525
1/2 = 0,5	0,03432	0,5

$$\frac{P \cdot L^3}{E \cdot J}$$

in beiden Fällen aber ohne weiteres als sehr klein zu vernachlässigen.

Für den besonderen Fall des Trägers auf zwei Stützen sind die η -Werte in Tafel 1 in Abständen von $0,025L$ errechnet worden, außerdem sind die Sechstelwerte erfasst. Für die Kurven der Durchlaufträger in Tafel 2 wurden die Ordinatenhöhen im allgemeinen in Zehntelabständen ermittelt. Die mittleren Fünftel der zu untersuchenden Felder sind wegen der stärkeren Krümmung in $\frac{L}{20}$ unterteilt worden.



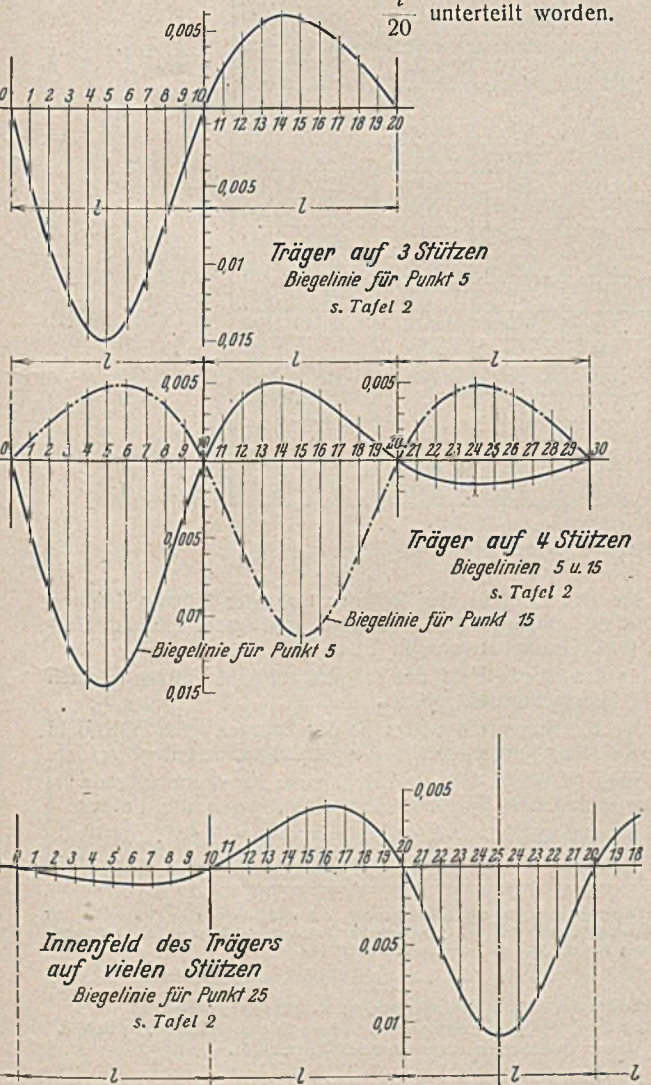
Beispiel 1. Ein Träger INP 45 auf zwei Stützen, belastet nach nebenstehendem Bilde 2.

Bild 2.

Tafel 2. Biegelinien für den Durchlaufträger.

Ordinate Nr.	Träger auf drei Stützen	Träger auf vier Stützen		Träger auf fünf Stützen		Träger auf vielen Stützen	Ordinate Nr.
	Biegelinie 5	Biegelinie 5	Biegelinie 15	Biegelinie 5	Biegelinie 15	Biegelinie 25	
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,004'62	0,004'52	— 0,001'24	0,004'51	— 0,001'21	0,000'19	1
2	8'83	8'63	— 2'40	8'62	— 2'36	0'41	2
3	0,012'23	0,011'95	— 3'41	0,011'93	— 3'35	0'63	3
4	14'41	14'07	— 4'20	14'04	— 4'12	0'83	4
4,5	14'92	14'55	—	14'53	—	—	4,5
5	14'97	14'58	— 4'69	14'56	— 4'60	0'97	5
5,5	14'53	14'14	—	14'11	—	—	5,5
6	13'66	13'27	— 4'80	13'24	— 4'71	1'04	6
7	10'92	10'55	— 4'46	10'53	— 4'38	1'00	7
8	0,007'33	0,007'03	— 3'60	0,007'01	— 3'53	0'84	8
9	3'49	3'32	— 2'14	3'31	— 2'10	0'51	9
10	0	0	0	0	0	0	10
11	— 0,002'67	— 0,002'44	0,002'79	— 0,002'42	0,002'74	— 0,000'70	11
12	— 4'50	— 4'00	5'83	— 3'96	5'73	— 1'52	12
13	— 5'58	— 4'81	8'63	— 4'75	8'47	— 2'34	13
14	— 6'00	— 5'00	0,010'67	— 4'93	0,010'46	— 3'08	14
14,5	—	—	11'25	—	11'02	—	14,5
15	— 5'86	— 4'69	11'46	— 4'60	11'22	— 3'63	15
15,5	—	—	11'25	—	11'00	—	15,5
16	— 5'25	— 4'00	10'67	— 3'91	10'41	— 3'88	16
17	— 4'27	— 3'06	0,008'63	— 2'97	0,008'37	— 3'75	17
18	— 3'00	— 2'00	5'83	— 1'93	5'62	— 3'12	18
19	— 1'55	— 0'94	2'79	— 0'89	2'56	— 1'91	19
20	0	0	0	0	0	0	20
21	—	0,000'71	— 0,002'14	0,000'65	— 0,001'96	0,002'60	21
22	—	1'20	— 3'60	1'07	— 3'21	5'50	22
23	—	1'49	— 4'46	1'29	— 3'86	8'18	23
24	—	1'60	— 4'80	1'34	— 4'01	0,010'16	24
24,5	—	—	—	—	—	10'73	24,5
25	—	1'56	— 4'69	1'26	— 3'76	10'93	25
25,5	—	—	—	—	—	—	25,5
26	—	1'40	— 4'20	1'07	— 3'21	25'5	26
27	—	1'14	— 3'41	0'82	— 2'46	27	27
28	—	0'80	— 2'40	0'54	— 1'61	28	28
29	—	0'41	— 1'24	0'25	— 0'75	29	29
30	—	0	0	0	0	—	30
31	—	—	—	— 0,000'19	0,000'57	—	31
32	—	—	—	— 0'32	0'97	—	32
33	—	—	—	— 0'40	1'20	—	33
34	—	—	—	— 0'43	1'29	—	34
35	—	—	—	— 0'42	1'26	—	35
36	—	—	—	— 0'38	1'13	—	36
37	—	—	—	— 0'31	0'92	—	37
38	—	—	—	— 0'21	0'64	—	38
39	—	—	—	— 0'11	0'33	—	39
40	—	—	—	0	0	—	40

Alle Ordinatenwerte sind zu multiplizieren mit $\frac{P L^3}{E J}$



Unter Verwendung von Tafel 1 ergibt sich die Durchbiegung:

$$f = \frac{8,0^3}{2,1 \cdot 45\,850} (7,0 \cdot 14,32 + 6,0 \cdot 20,53 + 3,0 \cdot 7,65) = 1,31 \text{ cm.}$$

Beispiel 2. Ein Träger INP 24 auf vier Stützen, belastet nach nachstehendem Bilde 3.

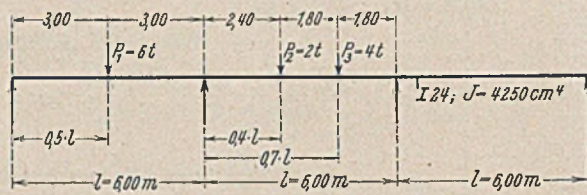


Bild 3.

a) Durchbiegung des innenfeldes: Maßgebend ist Biegelinie 15 des Trägers auf vier Stützen, Tafel 2.

Wir lesen ab:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -4,69 \text{ (Ordinate 5)} \\ \eta_2 &= +10,67 \text{ (" 14)} \\ \eta_3 &= +8,63 \text{ (" 17)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$f = \frac{6,0^3}{2,1 \cdot 4250} (-6,0 \cdot 4,69 + 2,0 \cdot 10,67 + 4,0 \cdot 8,63) = 0,67 \text{ cm.}$$

b) Durchbiegung des linken Endfeldes: Maßgebend ist Biegelinie 5.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= +14,58 \text{ (Ordinate 5)} \\ \eta_2 &= -5,00 \text{ (" 14)} \\ \eta_3 &= -3,06 \text{ (" 17)}. \end{aligned}$$

$$f = \frac{6,0^3}{2,1 \cdot 4250} (+6,0 \cdot 14,58 - 2,0 \cdot 5,0 - 4,0 \cdot 3,06) = 1,58 \text{ cm.}$$

Mit diesen Beispielen dürfte der Tafelgebrauch geläufig sein. Treten mehrere Wanderlastgruppen auf, so müssen die ungünstigsten auf dem zu untersuchenden Feld möglichst nahe nebeneinander gestellt werden; weitere Lastgruppen sind in den zweiten Nachbarfeldern zur Aufstellung zu bringen (vgl. Bild 5). In solchen Fällen wird sich meist erst durch Probieren die ungünstigste Stellung ermitteln lassen.

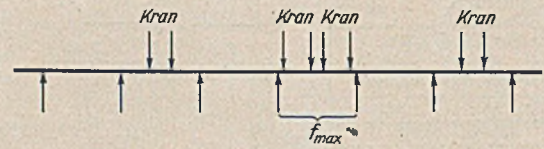


Bild 5.

Für den oft wiederkehrenden Fall, daß zwei gleichgroße Wanderlasten als Belastung auftreten, sind in Tafel 3 die Werte V , abhängig vom Verhältnis $a:l$, für die verschiedenen Träger zusammengestellt. Aus der Tafel sind auch die Stellungen, in welchen die Größtdurchbiegungen auftreten, ersichtlich. Dabei ist beim Träger auf zwei Stützen und bei den Endfeldern der Durchlaufträger zu beachten, ob die Möglichkeit besteht, daß eine Last außerhalb des Trägersystems zu stehen kommen kann. Dies wird beim Träger auf zwei Stützen fast immer, beim kontinuierlichen Träger seltener der Fall sein. Hier gelten dann für $a > 0,65 l$ die gesondert markierten Werte. Alle Tafelwerte sind zu

multiplizieren mit dem Faktor $\frac{P l^3}{E J}$. Also

$$f = V \cdot \frac{P l^3}{E J}$$

Hierin ist

V der Tafel 3 zu entnehmen, J in cm^4 einzusetzen,
 P = Raddruck in t, f ergibt sich in cm,
 l = Spannweite in m, a = Radstand
 $E = 2,1$ (für Stahl), l = Trägerspannweite

Tafel 3. Werte „ V “ für die Durchbiegung aus 2 gleichen Wanderlasten.

$\frac{x}{l}$	$\frac{a}{l}$	Träger auf 2 Stützen		Träger auf 3 Stützen		Endfeld: Träg. auf 4 St.		Innenfeld: Träg. auf 4 St.		2. Feld: Träg. auf 5 St.		Innenfeld: viele Stützen		$\frac{x}{l}$	$\frac{a}{l}$
		$x:l$	V	rd. $x:l$	V	rd. $x:l$	V	$x:l$	V	rd. $x:l$	V	$x:l$	V		
0,0	0,50	47,7	0,48	30,1	0,47	29,2	0,50	22,9	0,5	22,4	0,50	21,9	0,0		
0,05	0,475	41,5	0,45	29,9	0,45	29,1	0,475	22,8	0,47	22,3	0,475	21,8	0,05		
0,10	0,45	41,1	0,43	29,6	0,42	28,8	0,45	22,5	0,45	22,0	0,45	21,5	0,10		
0,15	0,425	40,3	0,40	29,0	0,40	28,2	0,425	22,0	0,42	21,5	0,425	21,0	0,15		
0,20	0,40	39,3	0,38	28,1	0,37	27,4	0,40	21,3	0,40	20,8	0,40	20,3	0,20		
0,25	0,375	38,1	0,35	27,1	0,35	26,4	0,375	20,4	0,37	19,9	0,375	19,4	0,25		
0,30	0,35	36,6	0,32	25,9	0,33	25,2	0,35	19,5	0,35	19,0	0,35	18,5	0,30		
0,35	0,325	34,9	0,30	24,6	0,30	23,9	0,325	18,5	0,32	17,9	0,325	17,5	0,35		
0,40	0,30	33,0	0,28	23,1	0,28	22,5	0,30	17,3	0,30	16,7	0,30	16,4	0,40		
0,45	0,275	30,9	0,26	21,5	0,25	21,0	0,275	16,0	0,27	15,5	0,275	15,1	0,45		
0,50	0,25	28,6	0,23	19,8	0,23	19,3	0,25	14,6	0,25	14,2	0,25	13,8	0,50		
0,55	0,225	26,2	0,20	18,0	0,20	17,5	0,225	13,2	0,22	12,8	0,225	12,4	0,55		
0,60	0,20	23,7	0,20	16,2	0,18	15,7	0,20	11,7	0,20	11,4	0,20	11,0	0,60		
0,65	0,175	21,0	0,20	14,2	0,20	13,8	0,175	10,2	0,18	9,8	0,175	9,6	0,65		
0,70	0,15	18,2	0,20	12,3	0,32	12,0	0,15	8,7	0,37	8,6	rd. 0,375	8,3	0,70		
0,75	0,125	15,3	0,35	10,8	0,35	10,8	rd. 0,425	7,8	0,40	7,9	" 0,425	7,7	0,75		
0,80	0,10	12,3	0,40	9,9	0,40	10,1	" 0,43	7,2	0,45	7,4	" 0,45	7,3	0,80		
0,85	0,075	9,3	0,43	9,4	0,43	9,7	" 0,48	6,8	0,475	7,3	" 0,5	7,1	0,85		
0,90	0,05	6,2	0,47	9,1	0,48	9,6	" 0,48	6,7	0,5	7,2	" 0,5	7,1	0,90		
0,95	0,025	3,1	0,48	9,0	0,50	9,7	" 0,50	6,7	0,5	7,3	" 0,52	7,2	0,95		
1,00	0	0	0,50	9,1	0,50	9,9	" 0,53	6,8	0,52	7,5	" 0,53	7,4	1,00		

Alle Werte „ V “ sind mit: $\frac{P l^3}{E \cdot J}$ zu multiplizieren. P in t, $E_{\text{Stahl}} = 2,1$, l in m, J in cm^4 , f in cm

Beispiel 3. Das Innenfeld eines Trägers über vielen Stützen wird durch nebenstehend angegebene Rad drücke belastet. An Hand der Kurve¹⁾ ermittelt man durch Probieren die ungünstigste Laststellung für die Durchbiegung bei $x = 0,2 l$. (Bild 4.)

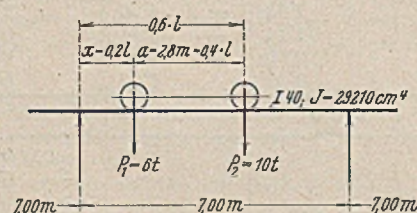


Bild 4.

Die Ordinaten sind dann

$$\eta_1 = 5,5 \quad \eta_2 = 10,16$$

und
$$f = \frac{7,0^3}{2,1 \cdot 29\,210} (6,0 \cdot 5,5 + 10,0 \cdot 10,16) = 0,75 \text{ cm.}$$

¹⁾ Es empfiehlt sich, alle Kurven in größerem Maßstab ($l = 10 \text{ cm}$, die Kurvenwerte in dekadischem Maßstab) auf Millimeterpapier sorgfältig zu zeichnen, womit erfahrungsgemäß ein ausgezeichnetes Hilfsmittel gegeben ist.

Die Werte für das Endfeld des Balkens auf vier Stützen können auch für das Endfeld eines Trägers von fünf und mehr Stützen Verwendung finden (vgl. Ordinatenwerte in Tafel 2).

Die Werte für das zweite Feld des Trägers auf fünf Stützen können auch für Träger größerer Feldzahl gelten.

Die Werte für das Innenfeld vieler Felder können vom Mittelfeld des fünffeldrigen Trägers ab als ausreichend genau zugrunde gelegt werden.

Zu erwähnen ist noch, daß die Tafeln auch für durchlaufende Träger mit verschiedenen Spannweiten gelten, wenn die Felder gleiche Steifigkeiten haben, wenn also: $\frac{l_1}{J_1} = \frac{l_2}{J_2} = \frac{l_3}{J_3}$ usw.

INHALT: Die Biegespannungen querschwingender, achsrecht belasteter Stäbe. — Zur Windberechnung vielstöckiger, zwei- und mehrstöckiger, symmetrischer Rahmen. — Beitrag zur praktischen Durchbiegungsermittlung für einfache und durchlaufende Träger.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
 Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
 Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.