# DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang | BERLIN, 7. März 1941 | Heft 6/7




## Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform.

Von Prof. **Ernst Neufert**, Berlin.

Beim Konstruieren leichter Dächer und Decken werden die normalen I-Profile unter Berücksichtigung der zulässigen Durchbiegung meist sehr ungünstig ausgenutzt. Es fehlt deshalb nicht an Versuchen, für solche Zwecke leichte, aufgelöste Träger zu konstruieren. Solche Bauarten fanden aber nur selten den Weg in die Praxis, weil sie durchweg teurer waren als die schweren Normalprofile, im Gegensatz zur allgemeinen Erfahrung, derzufolge die statisch am günstigsten ausgenutzte Konstruktion zumeist auch die wirtschaftlichste ist.

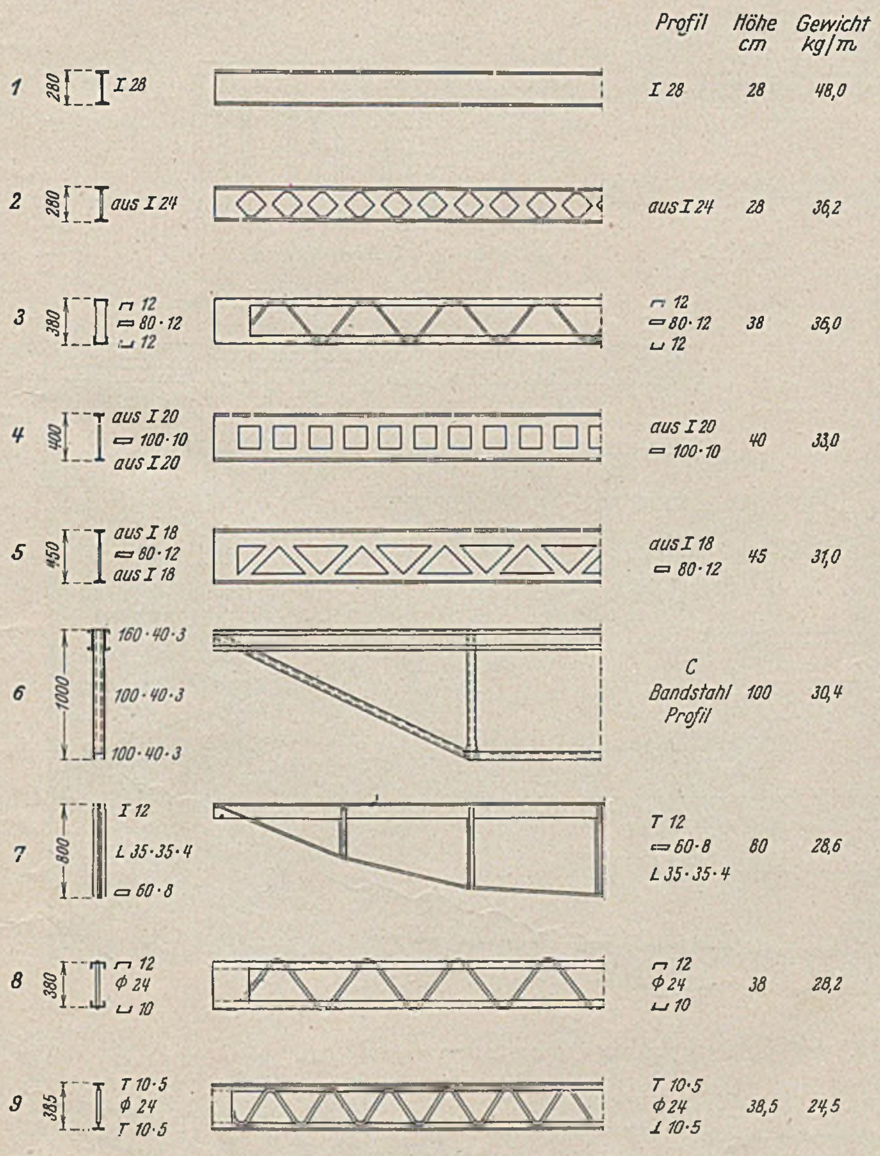



Bild 1.

Um hier weiterzukommen, war es notwendig, daß man zunächst einmal alle bekannten und neuen Konstruktionen solcher Leichtträger mit gleichen statischen Eigenschaften für einen bestimmten Fall, der ein I 28 erforderte, verglich (Bild 1).

### Leichtträgerformen.

1. I 28.
2. Aufgelöster Träger, gebildet aus einem diagonal aufgeschnittenen I 28, der an den Ausschnitten so zusammengeschweißt ist, daß die Kräfte vom Obergurt günstig auf den Untergurt oder umgekehrt übertragen werden.
3. Träger mit Diagonalversteifung aus Flachstählen zwischen Gurten aus ⊏-Stählen.
4. Gitterträger aus ⊤-Gurten mit dazwischen geschweißten Flachstählen.
5. Ungleichmäßige ⊤-Gurte mit diagonal angeschweißten Stäben.
6. Obergurt aus Abkantprofil, hängewerkartig durch Abkantprofile unterstützt.
7. Das gleiche wie vor, unter Verwendung von Normalprofilen bzw. Flachstählen.
8. Eine Rundstahlschlange als Diagonalverstrebung zwischen ⊏-Gurten.
9. Im Prinzip die gleiche Konstruktion mit einer Rundstahlschlange, jedoch zwischen breitfüßigen ⊤-Stählen.

Der letzte Träger 9 hat das günstigste Gewicht gegenüber allen anderen Konstruktionen und wiegt etwa die Hälfte vom I 28. Außerdem ist der Träger verhältnismäßig niedrig und in seiner Erscheinungsform schöner als alle anderen Konstruktionen.

Aus diesen Gründen wurde die Trägerart („R-Träger") eingehend durchkonstruiert und für die verschiedenen Spannweiten berechnet, wobei sich herausstellte, daß die Gewichtsersparnis gegenüber der Verwendung von I-Normalprofilen im ungünstigsten Falle 33,48 %, im günstigsten Falle 68,5 % betrug (Tafel 1).

**Tafel 1. Ersparnisse der R-Träger gegenüber Normalprofilen.**

| Spannweite m | Dacheindeckung | Normalprofilträger | Normalprofilträger Gewicht kg | R-Träger Gewicht kg | Ersparnis an Gewicht kg | Ersparnis in % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10,00 | Bimsdielen | I 30 | 575 | 315 | 260 | 45 |
| 10,00 | Bimsdielen | I 30 | 550 | 318 | 232 | 42,3 |
| 5,00 | Bimsdielen | I 16 | 89,5 | 55,49 | 34,01 | 38 |
| 7,50 | Holzbohlen | I 20 | 197,25 | 112,53 | 84,72 | 43 |
| 10,00 | Bimsdielen | I 30 | 550 | 235,00 | 315 | 57,4 |
| 10,00 | Holzbohlen | I 28 | 480 | 188 | 292 | 61 |
| 10,00 | Bimsdielen | I 30 | 526 | 197 | 329 | 62,6 |
| 10,00 | Holzbohlen | I 28 | 473 | 159 | 314 | 66,5 |
| 12,50 | Bimsdielen | I 34 | 845 | 332 | 513 | 60,5 |
| 12,50 | Holzbohlen | I 32 | 745 | 235 | 510 | 68,5 |
| 10,00 | Bimsdielen | I 30 | 534 | 240 | 294 | 55 |
| 10,00 | Holzbohlen | I 28 | 478 | 191 | 287 | 60 |
| 12,50 | Bimsdielen | I 34 | 845 | 383 | 462 | 54,6 |
| 12,50 | Holzbohlen | I 32 | 745 | 289 | 456 | 61,2 |

Aus dieser Tafel geht eindeutig hervor, daß die Verwendung von R-Trägern vorteilhafter wird, je leichter die Dacheindeckung und je größer die Spannweite ist. So konnte allein bei einer Einflughalle, für die die übliche Bimseindeckung vorgesehen war, durch Verwendung einer Bohlendachhaut von gleicher Wärmedämmung und Anordnung von R-Trägern in der gesamten Dachhaut und Verwendung von R-trägerartigen Stützen eine Herabsetzung des Eigengewichts von 100 kg auf 65 kg/m² erreicht werden.

### Wirtschaftlichkeit.

Wenn auch für den Augenblick noch die Stahlersparnis im Vordergrund steht und die Kostenfrage gegebenenfalls zurückgestellt werden könnte, so ist die Verwendungsfrage andererseits durch ihren Zusammenhang mit dem Arbeitsaufwand auch heute besonders zu beachten. Die gemeinsamen Untersuchungen mit der beauftragten Herstellungsfirma Jucho, Dortmund, und dem Stahlbau-Verband, Berlin, haben ergeben, daß die R-Träger bei den hierfür geeigneten Aufgaben auch wirtschaftlich den Normalträgern überlegen sind. Die eingehende Kostenzergliederung ergab dabei folgende Vergleichswerte:

a) Werkstoffkosten.
Diese Kosten verringerten sich infolge des geringeren Gewichts der R-Träger zwar nicht entsprechend dem Gewichtsunterschied, die Ersparnisse betrugen jedoch noch immer 32%.

b) Werkstattkosten.
Diese Kosten sind naturgemäß beim R-Träger je Tonne teurer als beim Normalprofil, aber infolge der Gewichtseinsparung je Träger gleicher Leistung geringer um 22%.

c) Kosten der Beförderung.
Diese Kosten wurden der Gewichtseinsparung entsprechend geringer um rd. 50%.

d) Kosten der Aufstellung.
Diese Kosten fallen ebenfalls erheblich infolge des geringeren Gewichts, wenn auch nicht im gleichen Umfange wie die Beförderungskosten, da die Aufstellung leichter Träger verhältnismäßig teurer ist als die schwerer Träger. Die Ersparnis betrug aber immer noch 33%.

e) Unterhaltungskosten.
Die Oberfläche der R-Träger ist gegenüber den ersetzten Normalprofilen um 26 bis 38% kleiner. Demgegenüber ist der Anstrich der aufgelösten Leichtträger etwas schwieriger. Die Gesamtanstrichkosten sind deshalb etwa gleich hoch.

f) Gesamtkosten.
Die genaue Erfassung all dieser Ersparnisse ergab im Durchschnitt eine Gesamtersparnis von 35%.

g) Zukünftige Verwendungsmöglichkeit.
Die Herstellung von I-Normalprofilen ist jetzt so rationalisiert, daß mit einer Kostenherabsetzung dieser Träger in der Zukunft nicht gerechnet werden kann.

Die R-Trägerfabrikation steht aber in ihren ersten Anfängen. Bei einer Verwendung von R-Trägern in großem Umfange kann durch zweckmäßige Maschinen und rationelle Arbeitsmethoden in der Zukunft noch eine weitere Verbilligung eintreten, insbesondere, wenn es gelingt, die Normalisierung des Trägers so durchzuführen, daß diese einmal weitestgehend den betrieblichen Erfordernissen der Herstellung gerecht werden und andererseits sich den vielfältigen Erfordernissen der praktischen Bauausführung anpassen.

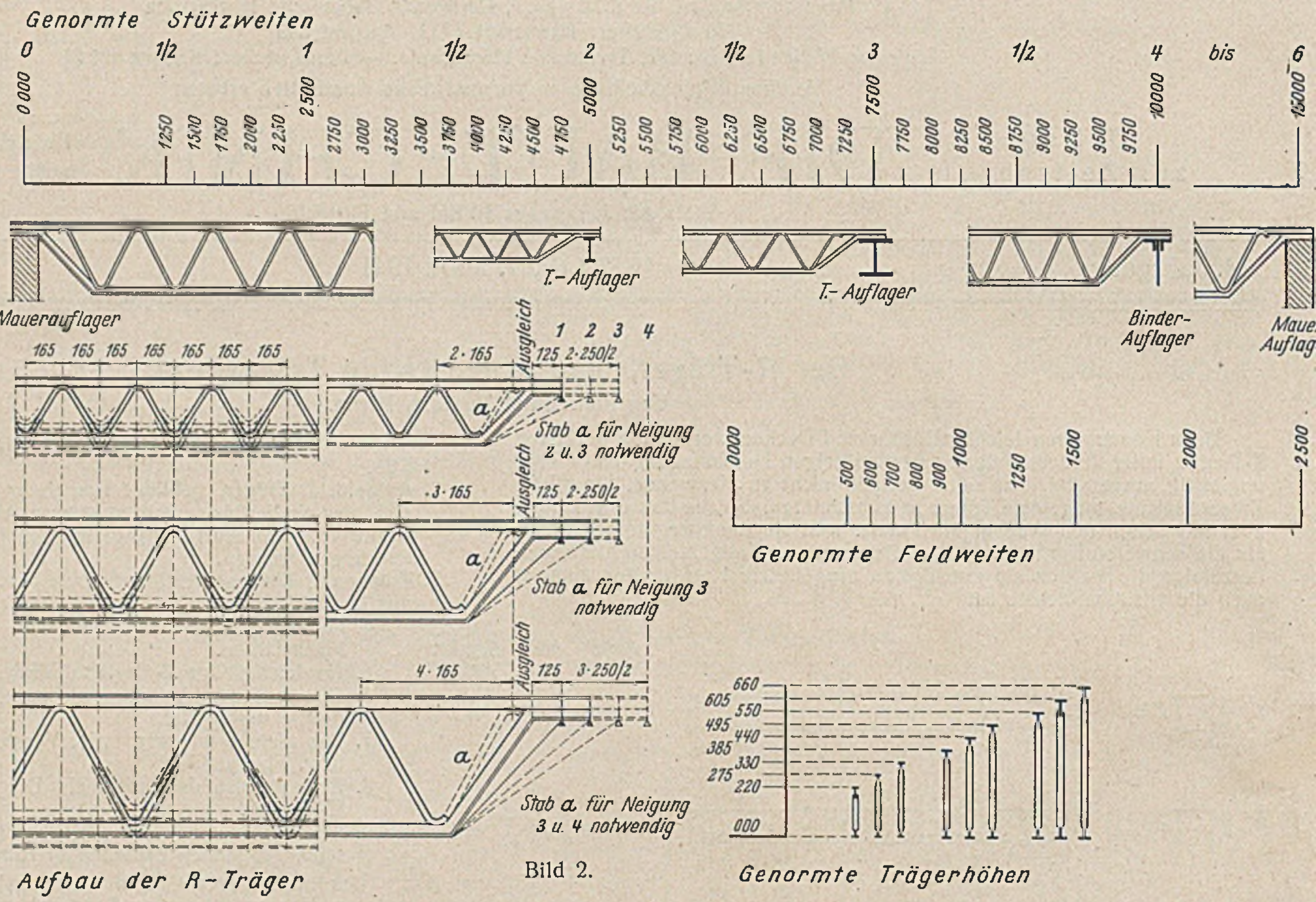


Bild 2.

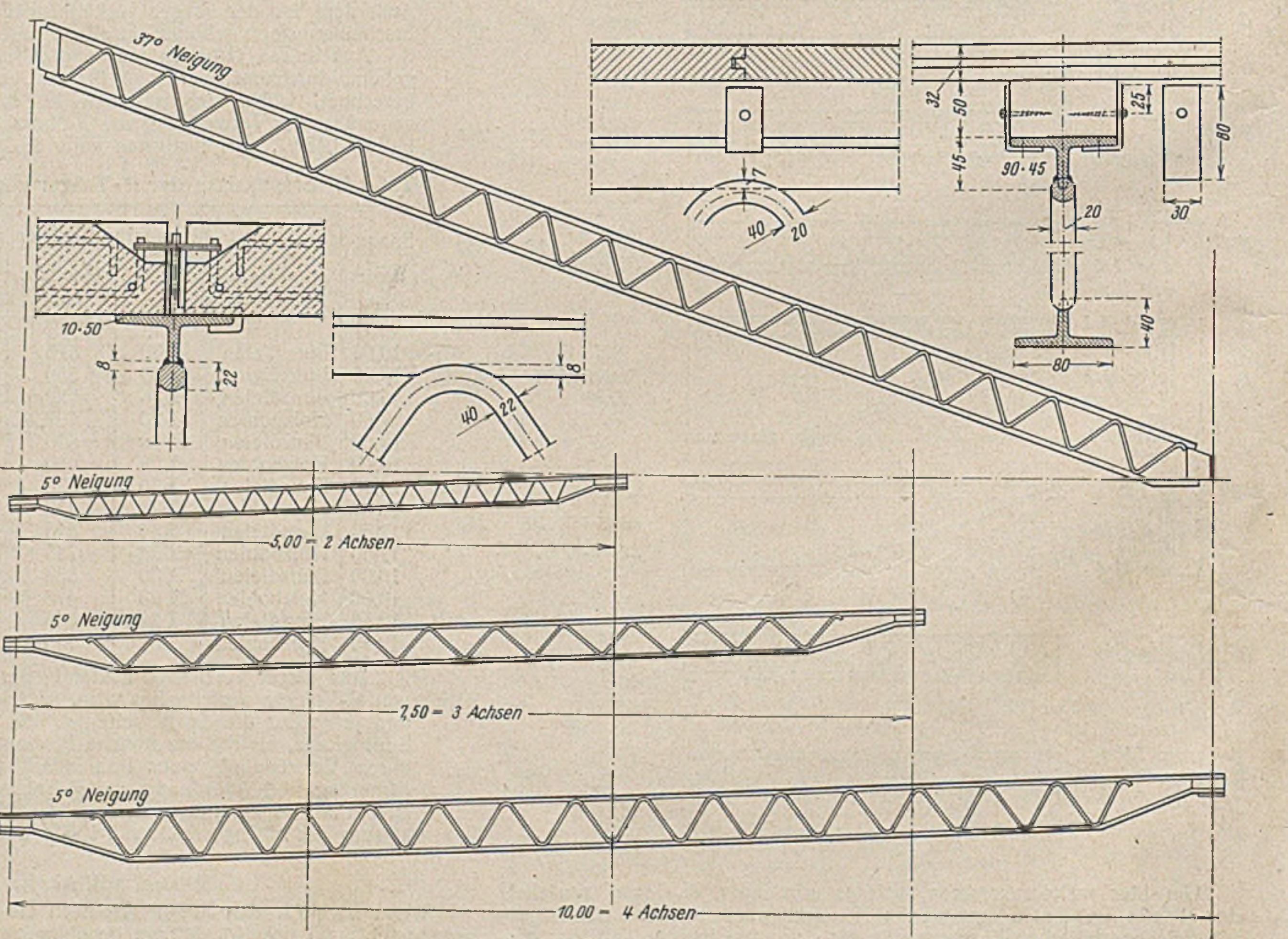


Bild 3.

## Systematik.

Zu diesem Zwecke ist aufbauend auf dem Industrieachsennetz des Generalbauinspektors eine Systematik für die R-Träger-Herstellung entwickelt worden (Bild 2).

Stützweiten sind von 25 zu 25 cm gestaffelt, beginnend mit einer Länge von 1,25 m bis zur Länge von 15,00 m.

Feldweiten beginnen mit 50 cm und sind von hier aus gestaffelt von 10 zu 10 cm bis zur Weite von 1,50 m. Darüber hinaus gibt es noch die Weiten von 2,00 m, und 2,50 m = 1 Achse.

Trägerhöhen. Die geringste Höhe ist 22 cm, die höchste 66 cm, dazwischen liegen die sieben anderen Höhen in Abständen von 5,5 cm.

Es ergaben sich durch die Systematik nur wenig R-Trägerformen, deren vielfältige Verwendungsmöglichkeit durch die in der Praxis anfallenden verschiedenen Längen, Feldweiten und Belastungen erstaunlich groß ist. Um nach Möglichkeit alle Fälle für die Praxis sofort greifbar ermitteln zu können, wurde ein umfangreiches Tabellenwerk ausgearbeitet, das dem Konstrukteur ermöglicht, den für den gegebenen Belastungsfall passenden R-Träger sofort ohne jede Berechnung aus der Tabelle zu entnehmen.

Bisher wurden zwei Dacheindeckungen ausprobiert: einmal eine Eindeckung durch Bimsplatten von 8 cm Dicke und einmal durch Bohlen von 35 mm Dicke, wie aus Bild 3 zu ersehen ist, welches die für die praktischen Bedürfnisse des Generalbauinspektors benötigten R-Träger zeigt.

ausgezeichneten Eindruck macht und mindestens so klar und überzeugend aussieht wie ein ähnlicher Bau gleicher Abmessung, der noch mit Vollwandträgern errichtet wurde.

In Amerika befassen sich mehrere Firmen mit der Herstellung von Leichtträgern, die dem R-Träger ähnlich sind. Es ist bemerkenswert, daß gerade dort diese Träger in unvorstellbaren Ausmaßen, vom Einfamilienhaus bis zum Wolkenkratzer, vor allem aber im Industriebau Verwendung finden, obgleich in Amerika die Arbeitslöhne sehr viel höher und die Materialkosten sehr viel niedriger sind als bei uns; beides Gründe, die die Fertigung von Leichtträgern ungünstig beeinflussen.

Der Vorzug wird diesen Leichtträgern in Amerika daher vor allem gegeben, weil die vielfältigen Installationen eines modernen Baues kreuz und quer durch die Träger verlegt werden können, die meistens unterseitig durch Rabitzdecken abgespannt sind.

So bietet der R-Träger eine Reihe praktischer Vorteile, die allein ihn schon dem Normalprofil überlegen machen, abgesehen von der in Deutschland wichtigen Stahleinsparung und Verbilligung.

## Lieferzeit.

Die Lieferzeit der R-Träger ist im allgemeinen erheblich kürzer als die der dazugehörigen Unterkonstruktion, weil diese meist erst berechnet, gezeichnet und auf dem üblichen Wege der einmaligen Anfertigung langwierig hergestellt werden muß. Der passende R-Träger dagegen wird

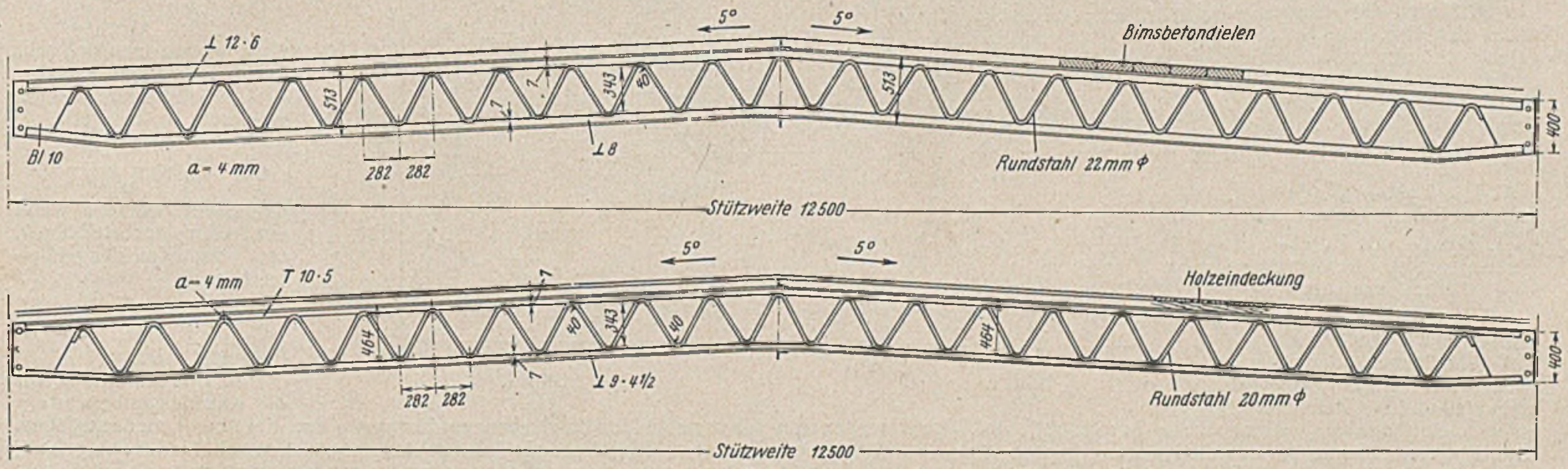



Bild 4.

Inzwischen sind eine Reihe weiterer Träger entwickelt worden. So zeigt Bild 4 beispielsweise einen satteldachartig ausgebildeten R-Träger, der als Binder über eine 12,50 m breite Halle Verwendung findet und in diesem Falle eine ausgezeichnete Formgestaltung aufweist.

Die Fragen der Kräfteübertragung und der Spannungsverhältnisse in den Gurten und Streben sind im Staatlichen Materialprüfungsamt Dahlem

aus der Tabelle abgelesen, die Konstruktionszeichnung hierfür ist fertig und die Herstellung erfolgt auf fabrikatorischem Wege in sehr kurzer Zeit.

Bei den bisher ausgeführten Hallen waren deshalb die R-Träger ausnahmslos mehrere Monate eher auf der Baustelle als die dazugehörige Unterkonstruktion aus Stahl oder Mauerwerk.

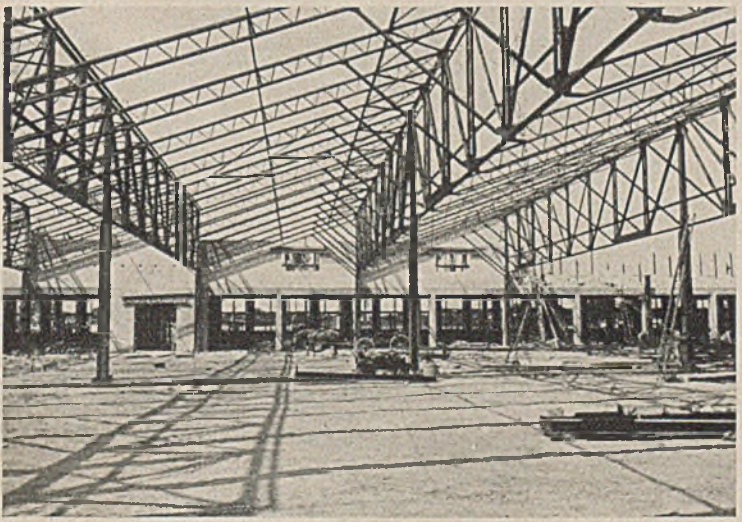


Bild 5.

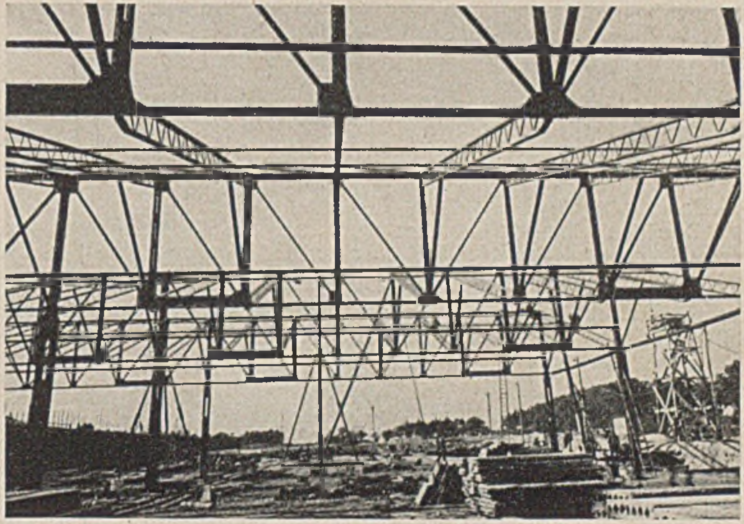


Bild 6.

von Professor Bierett in mehreren Belastungsversuchen eingehend untersucht, auf Grund deren die zweckentsprechendste Auswahl der Profile und die letzte Formgebung erfolgte, so daß der R-Träger in jeder Beziehung allen statischen, material- und herstellungstechnischen Anforderungen entspricht.

## Ausführung.

Diese Art R-Träger ist in Deutschland zum erstenmal bei Bauten ausgeführt worden, die der Generalbauinspektor im Rahmen des von ihm betreuten Rüstungsbaues ausführte. Bilder 5 u. 6 zeigen eine Shedhalle mit solchen R-Trägern nach Entwurf des bekannten Hamburger Architekten Gutschow (Bauleitung: Sprotte), die auch in Wirklichkeit einen ganz

## Zusammenfassung.

Aus dem vorstehenden ist ersichtlich, daß bei Verwendung von Stahlkonstruktionen für Dächer und leichte Decken der R-Träger schneller, leichter und billiger geliefert werden kann als alle sonstigen Konstruktionsteile, und daß er außerdem noch eine Reihe praktischer und ästhetischer Vorteile bietet, so daß seine allgemeine Verwendung in jeder Beziehung angebracht erscheint.

Die Träger, die vom Generalbauinspektor für die Reichshauptstadt unter Schutz gestellt wurden, werden von C. H. Jucho in Dortmund hergestellt. Diesem Werk hat der Generalbauinspektor das alleinige Ausführungsrecht übertragen, um eine wirtschaftliche Massenherstellung zu ermöglichen.

# Die Stabilität der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben und mit Fachwerkriegeln.



Von Dipl.-Ing. Wilh. Bültmann, Hamburg.

## Einleitung.

Bisher ist nur die Stabilität der Rahmentragwerke verfolgt worden, deren Stiele und Riegel direkt biegungssteif miteinander verbunden sind[1]). Neben diesen Rahmen haben aber auch solche Rahmentragwerke, deren Riegel und Stiele durchweg gelenkig miteinander verbunden sind und die Rahmenwirkung bzw. Eckst eifigkeit durch die Anordnung von Eckstreben oder Kopfbändern erzielt wird, baupraktisches Interesse, da durch diese verhältnismäßig einfach herzustellenden Eckstreben einmal die immerhin schwierige Ausbildung von Steifecken umgangen wird und andererseits die Stiele und Riegel nicht unerheblich versteift werden. Offenbar ist auch die Stabilität bei dieser Rahmenausbildung größer als die der Rahmen mit direktem biegungssteifen Übergang der Stiele und Riegel.

Die Stabilität solcher Rahmen mit Eckstreben soll hier für einige Belastungsfälle nachgewiesen werden und die Untersuchungen dann auf Rahmen mit Fachwerkriegeln erweitert werden.

Im Anschluß daran wird noch die Abhängigkeit der Stabilität von ungleichen Lasten, die an den Rahmenecken der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen angreifen, angezeigt und für die Sonderfälle der starren Riegel die Knicklängenbeiwerte ermittelt.

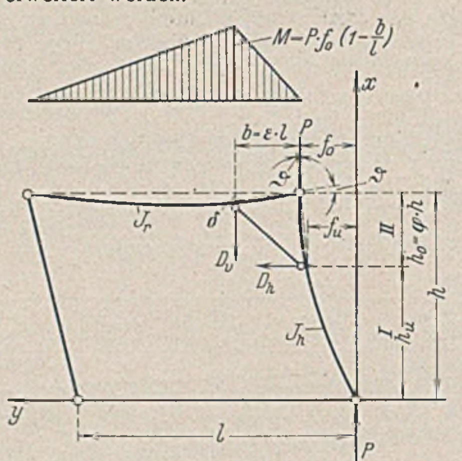


Bild 1.

### A. Die Lasten greifen an den Rahmenecken an.

#### 1. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben.

Bei unseren Betrachtungen setzen wir wieder voraus, daß die Längenänderungen aller Stäbe vernachlässigbar klein sind und die Stabilitätsuntersuchung auf die Rahmenebene beschränkt wird. Letzteres setzt natürlich voraus, daß der Rahmen gegen Knicken aus der Bildebene gesichert ist. Mit den in Bild 1[2]) angedeuteten vereinfachten Annahmen, denen nur kleine seitliche Verschiebungen des Dreigelenkrechteckrahmens mit Eckstrebe zugrunde gelegt sind, liefert die vereinfachte Differentialgleichung der Biegelinie für den Stielbereich I die Neigung der Biegelinie des Rahmenstieles zu

$$\text{(1')} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha f_u}{\operatorname{tg} \alpha h_u}$$

bei $x = h_u$, während die des Stielbereichs II mit $D_h = \frac{P f_o}{h_o}$ diese Neigung zu

$$\text{(1'')} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha f_u}{\operatorname{tg} \alpha h_o} + \frac{f_o}{h_o}$$

liefert. Aus der Forderung der Stetigkeit der Biegelinie ergeben Gl. (1') u. (1'), die Bedingungsgleichung der Knickkraft

$$\text{(2')} \qquad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha h_u} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha h_o} + \frac{f_o}{\alpha f_u h_o}.$$

Beachten wir noch, daß nach Einführung des Stabdrehwinkels $\vartheta$ die Verschiebungen $f_u$ und $f_o$ miteinander durch die geometrische Beziehung $f_u = f_o - h_o \vartheta$ verbunden sind und dieser Stabdrehwinkel aus der senkrechten Durchbiegung $\delta$ des Riegels am Angriffspunkt des Kopfbandes mittels der Vertikalkomponente der Stabkraft dieses Kopfbandes $D_v = \frac{P f_o}{b}$ aus

$$\vartheta = \frac{\delta}{b} = \frac{P f_o l}{3 E J_r} \left(1 - \frac{b}{l}\right)^2$$

zu errechnen ist, dann ist in Gl. (2') der Summand

$$\text{(2'')} \qquad \frac{f_o}{\alpha f_u h_o} = \frac{1}{\alpha h_o \left[1 - \frac{\alpha^2 h^2 l J_h h_o}{3 h J_r h} \left(1 - \frac{b}{l}\right)^2\right]}.$$

Wird noch zur Abkürzung

$$\text{(3a)} \qquad c = \frac{h J_r}{l J_h} \qquad z_1 = \alpha h \qquad \varphi = \frac{h_o}{h} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{b}{l}$$

gesetzt, dann ergibt sich die Bedingungsgleichung der Grenzkraft aus den Zwischengleichungen (2') u. (2'') zu

$$\text{(3)} \qquad \frac{\varphi^2 z_1^3 [\operatorname{tg} \varphi z_1 + \operatorname{tg} (1 - \varphi) z_1]}{\varphi z_1 [\operatorname{tg} \varphi z_1 + \operatorname{tg} (1 - \varphi) z_1] - \operatorname{tg} \varphi z_1 \cdot \operatorname{tg} (1 - \varphi) z_1} = k$$

mit

$$\text{(3b)} \qquad k = \frac{3c}{(1 - \varepsilon)^2}$$

für den Dreigelenkrechteckrahmen nach Bild 1.

Die Grenzwerte bei $k = \infty$ werden durch die Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \varphi z_1 [\operatorname{tg} \varphi z_1 + \operatorname{tg} (1 - \varphi) z_1] = \operatorname{tg} \varphi z_1 \cdot \operatorname{tg} (1 - \varphi) z_1$$

erfüllt.

Für den gemäß Bild 2 ausgebildeten und belasteten Zweigelenkrechteckrahmen mit symmetrisch angeordneten Eckstreben gelten ebenfalls Gl. (3) u. (4), jedoch geht in Gl. (3) der Rahmensteifigkeitswert $k$ nunmehr in

$$\text{(3c)} \qquad k = \frac{6c}{(1 - 2\varepsilon)^2}$$

über, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann.

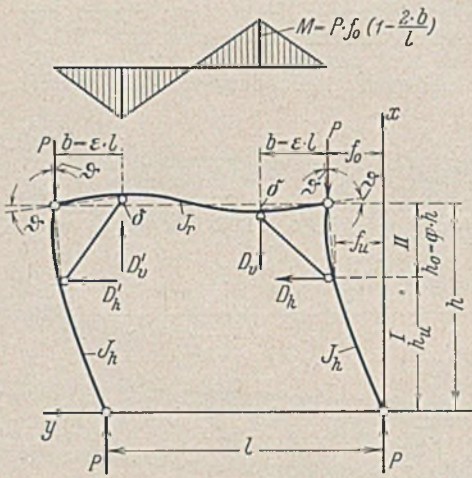


Bild 2.

Die Knickkräfte können wiederum in der Form

$$\text{(5)} \qquad P_k = \frac{E J_h \pi^2}{(\gamma h)^2}$$

dargestellt werden, wenn der Faktor $\gamma$ der Stielhöhe $h$, also der Knicklängenbeiwert, mit

$$\text{(5a)} \qquad \gamma = \frac{\pi}{z_1}$$

festgelegt wird.

In Bild 3a finden wir die Knicklängenbeiwerte $\gamma$ für verschiedene Eckstrebenanordnungen $\varphi$ am Stiel über $k$ wiedergegeben. Diese Kurven gelten, was ja leicht einzusehen ist, sowohl für den Dreigelenkrechteckrahmen als auch für den Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben.

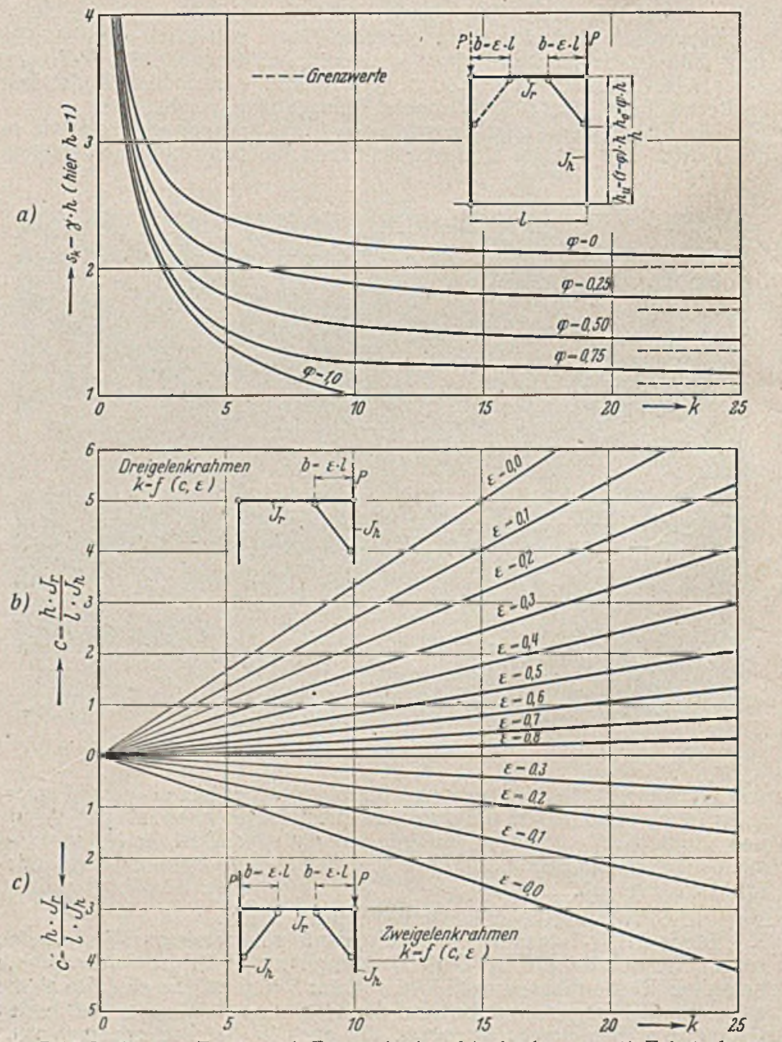



Bild 3a bis c. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben. Die Knicklängen $s_k = \gamma \cdot h$ der Rahmenstiele.

---

1) W. Bültmann, Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens. Stahlbau 1941, Heft 1/3, S. 3. Vgl. auch die dort in den Fußnoten 1, 2 und 3 angegebenen Arbeiten.

2) Ungeachtet des Gleichgewichts sind in Bild 1 u. 2 nur die Kräfte eingeführt worden, die zum Nachweis der Knickbedingungen erforderlich sind, während die Kräfte, die in den Ableitungen mit vernachlässigbaren Produkten der kleinen Formänderungswerte multipliziert erscheinen würden, fortgelassen sind.

Die nähere Bestimmung des Zwischenwertes $k$ erfolgt mittels des Rahmensteifigkeitswertes $c$ und der durch $\varepsilon$ festgelegten Anordnung der Kopfbänder am Riegel durch Gl. (3b) u. (3c). Die Zwischenwerte $k$ sind zum schnellen Ablesen des Knicklängenbeiwertes $\gamma$ mit Bild 3b für den Dreigelenkrechteckrahmen und Bild 3c für den Zweigelenkrechteckrahmen zu Bild 3 zusammengefaßt worden. Mit $\varphi \to 0$ muß notgedrungen auch $\varepsilon \to 0$ werden, d. h. Riegel und Stiel gehen biegungssteif ineinander über, und wir erhalten die schon früher abgeleiteten Beziehungen [1]).

Bei $\varphi = 1{,}0$ und $k > 10$ ist die Knicklänge $\gamma h = h$, also $\gamma = 1$. In Bild 4 sind noch die Knicklängenbeiwerte $\gamma_{k=\infty}$, die sich aus Gl. (4) u. (5a) ergeben, dargestellt worden. Diese Werte finden wir auch in der Tabelle 1 nochmal zusammengefaßt.

**Tabelle 1. Knicklängenbeiwerte $\gamma_{k=\infty}$.**

| $\varphi$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,75 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_{k=\infty}$ | 2 | 1,870 | 1,736 | 1,668 | 1,603 | 1,473 | 1,348 | 1,231 | 1,130 | 1,089 | 1,055 | 1,012 | 1 |

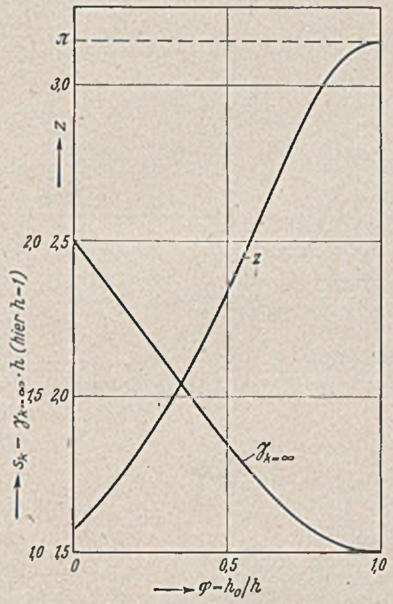


Bild 4. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben. Die Knicklängen $s_k = \gamma_{k=\infty} \cdot h$ der Rahmenstiele bei $J_r = \infty$.

$\varphi = 0$ liefert den I. Eulerfall, während $\varphi = 1{,}0$ den II. Eulerfall anzeigt. Bild 4 und Tabelle 1 gelten selbstverständlich sowohl für den Dreigelenkrechteckrahmen als auch für den Zweigelenkrechteckrahmen. Die $\gamma_{k=\infty}$-Werte lassen sich auch für den nach Bild 5 auf Druck beanspruchten Träger auf zwei starren Stützen mit einem Kragarm anwenden, wobei allerdings vorauszusetzen ist, daß die Kraftrichtungen beim Ausknicken nicht geändert werden, was zumeist der Fall ist. Die von Bleich für den geraden Stab mit Kragarmen angegebene Regel gilt demgemäß nur dann, wenn die Kräfte in die Sehne der Verformungslinie fallen.

Wir wollen die Knicklängenbeiwerte, die nach den obigen Untersuchungen nur durch umständliche Lösung der transzendenten Gleichungen zu erfassen sind, wieder durch Faustformeln zugänglich machen. Wie Bild 4 zeigt, sind im zumeist interessierenden Bereich von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 0{,}5$ die Knicklängenbeiwerte $\gamma_{k=\infty}$ linear von $\varphi$ abhängig wiederzugeben und durch die einfache Näherungsformel

$$(6) \qquad \gamma_{k=\infty} \approx 2\,(1 - 0{,}65\,\varphi)$$

genau genug zu errechnen. Darüber hinaus erhält man mittels dieser

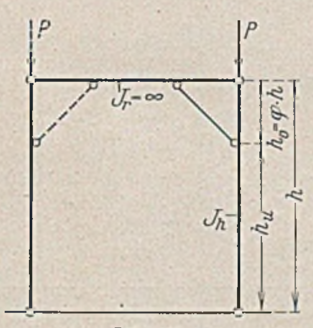


Bild 4a.

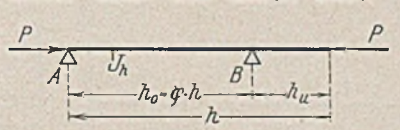


Bild 5.

Näherungsformel die allgemeinen Beiwerte $\gamma$ für beliebige $\varphi$, $c$ und $\varepsilon$, beliebig bis auf die oben getroffenen Einschränkungen durch

$$(7a) \qquad \gamma \approx 2\,(1 - 0{,}65\,\varphi)\sqrt{(1 - 0{,}23\,\varphi) + \frac{2{,}1 + 4{,}4\,\varphi}{k}},$$

wo $k$ den Gl. (3b) u. (3c) zu entnehmen ist. Für $\varphi = 0$ geht die Näherungsgleichung (7a) in

$$(7b) \qquad \gamma \approx 2\sqrt{1 + \frac{2{,}1}{k}}$$

über, die wir schon in [1]) aufgezeichnet haben [3]). Die Anwendung von (7a) wollen wir auf den Bereich $k = 1$ bis $k = 20$ begrenzen und können uns für den Steifigkeitswert $k > 20$ der Faustformel

$$(7c) \qquad \gamma \approx 2\,(1 - 0{,}65\,\varphi)\sqrt{1 + \frac{2{,}1}{k}} \quad \text{bedienen.}$$

Die Faustformeln liefern, von dem Abschnitt $k = 0$ bis $k = 1$ bzw. 2, der ohnehin keine praktische Bedeutung hat, abgesehen, äußerst befriedigende Ergebnisse.

Neben günstigeren statischen Verhältnissen weisen die Rahmen mit Eckstreben auch größere Stabilität als solche mit steifen Ecken auf.

[3]) Zu der auf S. 3 in 1. aufgezeichneten Quellenangabe [4]) ist die auf S. 16 der DIN 4114 angegebene Fußnote [14]), die von mir übersehen wurde, nachzutragen, nach der die Faustformel mit der Aufrundung von 0,4 für den Zweigelenkrechteckrahmen von M. G. Puwein stammt.

2. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Fachwerkriegeln.

Wird der Riegel des Dreigelenkrechteckrahmens nach Bild 6a fachwerkartig ausgebildet, dann haben wir es offenbar mit einem Stabilitätsfall zu tun, der dem im vorigen Abschnitt behandelten gleicht und aus diesem abgeleitet werden kann. Wir können zur Ableitung der Knickbedingung daher auch von der Zwischengleichung (2′) ausgehen und schreiben zur Elimination der horizontalen Verschiebungen $f_u$ und $f_o$ des Rahmens bei $c$ und $d$ wegen $D_h = \frac{P f_o}{h_o}$ bei Vernachlässigung der Längenänderung der Rahmenstiele infolge der Normalkräfte

$$f_o - f_u = \frac{P f_o}{E h_o} \sum S_1^2 \varrho,$$

wo $\delta = \sum S_1^2 \varrho$ die $E$-fache Verschiebung von $c$ gegen $d$ infolge der in Bild 6b angedeuteten Belastung ist. Mit der Beziehung für $f_o - f_u$ geht Gl. (2′) wieder in die Bedingungsgleichung (3) über. Der einzige Unterschied besteht darin, daß nunmehr der Rahmenwert

$$(8a) \qquad k = \frac{\varphi^2 h^3}{J_h \sum S_1^2 \varrho} \quad \text{wird.}$$

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Gl. (4), (5) u. (5a) sowie die Faustformeln (6), (7a), (7b) u. (7c) behalten mithin auch hier ihre Gültigkeit, so daß der Nachweis der Stabilität beim Vorhandensein fachwerkartig ausgebildeter Riegel keine Schwierigkeiten bereitet.

Für den Zweigelenkrahmen des Bildes 7a, dessen Riegel ein symmetrisch ausgebildeter Fachwerkträger ist, gelten unter den gleichen Voraussetzungen wiederum dieselben Gleichungen. Nur Gl. (8a) geht jetzt in

$$(8b) \qquad k = \frac{2\,\varphi^2 h^3}{J_h \sum S_2^2 \varrho}$$

über, wo die Stabkräfte $S_2$ der Antimetrie wegen aus der Belastung gemäß Bild 7b zu bestimmen sind. Damit erklärt sich aber auch die Bedeutung von $\frac{1}{2} \sum S_2^2 \varrho$ als die $E$-fache Verschiebung von $c$ gegen $d$ infolge dieser in Bild 7b eingezeichneten Belastung.

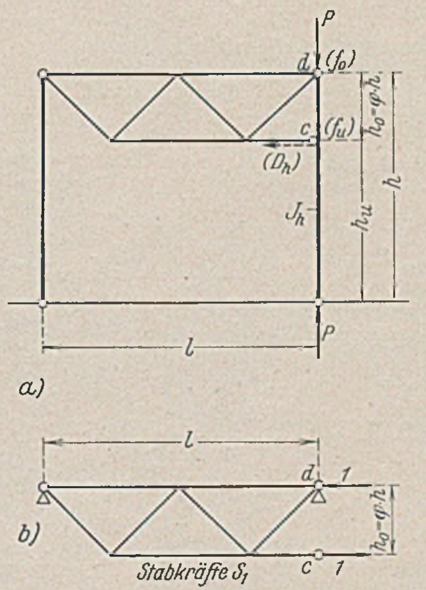


Bild 6a u. b.

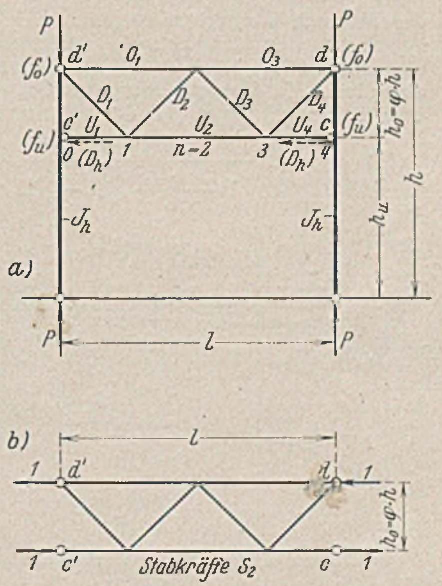


Bild 7a u. b.

## B. Die Lasten greifen an den Rahmenstielen unterhalb der Eckstreben an.

1. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben.

Für die am Rahmenstiel unterhalb der Eckstrebe angreifende Last $P$ des Dreigelenkrechteckrahmens mit Eckstrebe nach Bild 8 erhält man unter Beibehaltung der im Abschnitt A getroffenen Voraussetzungen mittels Integration der vereinfachten Differentialgleichungen

$$\text{I.} \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \alpha^2 y = 0$$

$$\text{II.} \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \alpha^2 f = 0$$

$$\text{III.} \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \alpha^2 f - \frac{\alpha^2 f}{h_o}(x - h_u) = 0$$

der drei Stielabschnitte I. $x = 0$ bis $x = u$, II. $x = u$ bis $x = h_u$ und III. $x = h_u$ bis $x = h$ nach Berücksichtigung der Randwerte und entsprechender Umformung und Vereinfachung die Knickbedingung zu

$$(9) \qquad \frac{z \cdot \operatorname{tg} \psi z}{1 - \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \varphi - \psi\right) z \cdot \operatorname{tg} z} = k.$$

Die Bewertung von $\psi$ und $\varphi$ ist Bild 8 zu entnehmen, während zur Abkürzung $z = \alpha h$ mit $\alpha^2 = \frac{P}{E J_h}$ geschrieben wurde.

Je nach Auslegung des Steifigkeitswertes $k$ kann die Anwendung der transzendenten Gl. (9) sowohl auf die in Bild 8 u. 9 gezeichneten Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen, deren biegungssteife Riegel und Stiele durch Eckstreben verbunden sind, als auch auf die in Bild 10 dargestellten Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit biegungssteifen Stielen und Fachwerkriegeln erweitert werden.

In Bild 10 sind beim Zweigelenkrahmen die gestrichelten Stäbe und Kräfte, die für den Dreigelenkrahmen nicht in Betracht kommen, als vorhanden anzusehen. Außerdem wird vorausgesetzt, daß dessen Fachwerkriegel symmetrisch ausgebildet ist. Der Steifigkeitswert $k$ ist jeweils den Gl. (3b), (3c), (8a) oder (8b) zu entnehmen.

Wird hier die im Abschnitt A für Lasten, die am Rahmeneckpunkt angreifen, errechnete Knicklänge $s_k = \gamma\, h$ eingeführt, dann wird die aus Gl. (9) zu ermittelnde Knickkraft

$$(10)\qquad P_k = \frac{E\, J_h\, \pi^2}{\mu\, (\gamma\, h)^2}$$

mit dem Kraftbeiwert

$$(10\text{a})\qquad \mu = \frac{z_1^{\,2}}{z^2}.$$

Lassen wir $k$ unendlich groß werden, was beim Stabwerk mit $J_r = \infty$ identisch ist, dann geht unsere Gl. (9) in

$$(11)\qquad z \cdot \operatorname{tg} \psi\, z = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \cdot \varphi - \psi}$$

über, aus der wir unter Benutzung der Gl. (10a) die Asymptotenwerte $\mu_{k=\infty}$ der Beiwerte $\mu$ ermitteln können.

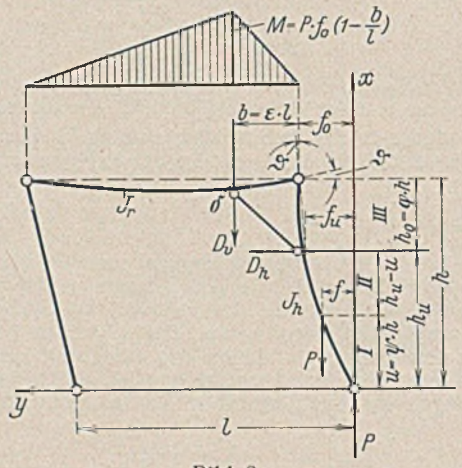


Bild 8.

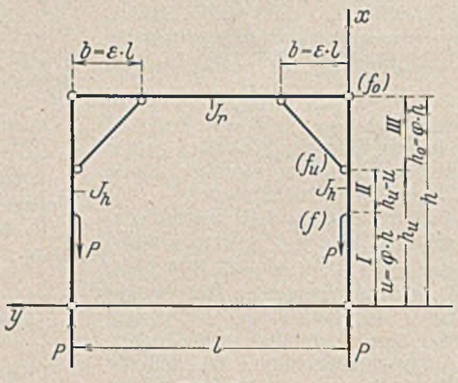


Bild 9.

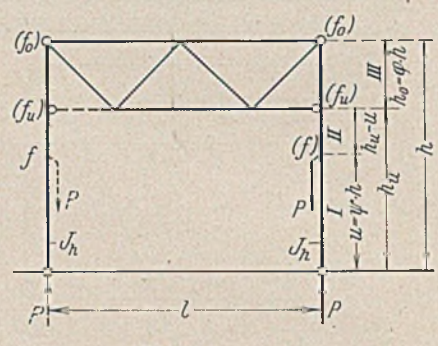


Bild 10.

Wir wollen hier noch die Gleichungen angeben, die entstehen, wenn die Lasten $P$ am Stiel in der Höhe der Anschlußpunkte der Eckstreben angreifen. Zu diesem Zweck lassen wir $\psi$ in $(1 - \varphi)$ übergehen und erhalten aus Gl. (9) u. (11) die Gleichungen

$$(12)\qquad \frac{z \cdot \operatorname{tg}(1-\varphi)\, z}{1 - \frac{\varphi\, z}{3} \cdot \operatorname{tg}(1-\varphi)\, z} = k \quad \text{und}$$

$$(13)\qquad z \cdot \operatorname{tg}(1-\varphi)\, z = \frac{3}{\varphi}.$$

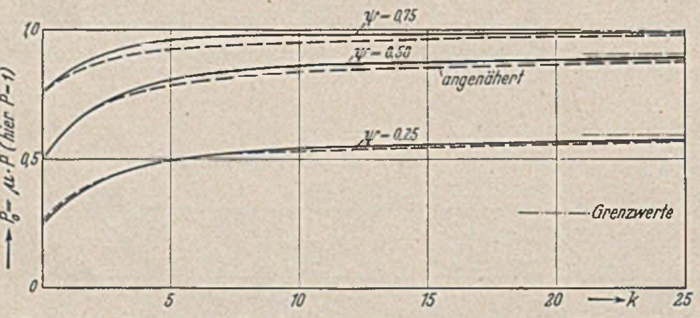


Bild 11. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben. Beiwerte $\mu$ der an den Rahmenstielen angreifenden Kräfte. $P_o = \mu \cdot P$ bei $\varphi = 0{,}25$ und $\gamma$ nach Bild 3a.

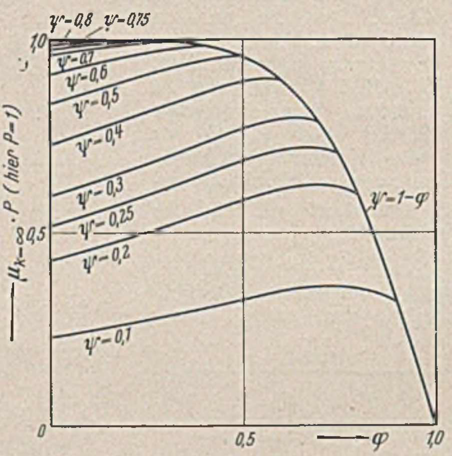


Bild 12. Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben. Beiwerte $\mu_{k=\infty}$ der an den Stielen angreifenden Kräfte bei $J_r = \infty \cdot P_k = \dfrac{E \cdot J_h \cdot \pi^2}{\mu_{k=\infty} \cdot (\gamma_{k=\infty} \cdot h)^2}$.

Die Beiwerte $\mu$ für $\varphi = 0{,}25$ und die Parameter $\psi = 0{,}25$; 0,5 und 0,75 finden wir in Bild 11 in Abhängigkeit von $k$ dargestellt. Sie haben ähnlichen Verlauf wie die in [1]), Bild 4 u. 4a, ermittelten Werte der Rahmen mit steifen Ecken, was auch zu erwarten war. Mit $\mu = \psi$ bei $k = 0$ beginnend, nähern sie sich asymptotisch den in Tabelle 2 und Bild 12 angegebenen Grenzwerten $\mu_{k=\infty}$. Dies gibt uns wieder die Möglichkeit, die Beiwerte näherungsweise durch die Faustformel

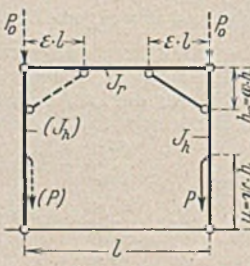


Bild 11a.

$$(14)\qquad \mu \approx \frac{\mu_{k=\infty}\, k + 2{,}1\, \psi}{k + 2{,}1}$$

zu erfassen. In Bild 11 wurden diese angenäherten Beiwerte gestrichelt dargestellt. Die Annäherung ist recht gut.

Die Werte der Diagonalen, der in Tabelle 2 und Bild 12 zusammengefaßten $\mu_{k=\infty}$-Werte, entsprechen $\psi = 1 - \varphi$, da wir aus praktischen Gründen nur die in den Stielbereichen $x = 0$ bis $x = (1 - \varphi)\, h$ angreifenden Lasten verfolgt haben.

Greifen die Lasten nunmehr gleichzeitig an den Rahmenstielen und an den Rahmenecken an, dann lassen sich mit den Ergebnissen der Abschnitte A und B dieser Arbeit die Knickkräfte genau genug ermitteln, wenn nach den Feststellungen in [1]), Abschnitt A 3, das Überlagerungsprinzip angewendet wird.

Die Ausführungen wurden auf die praktisch wichtigen Systeme des Drei- und Zweigelenkrechteckrahmens beschränkt. Die gefundenen Ergebnisse lassen sich jedoch ohne weiteres auf ähnliche Systeme übertragen, wenn nur die Bedeutung des Rahmensteifigkeitswertes $k$ richtig erkannt und entsprechend berücksichtigt wird.

So ist z. B. für den Rahmensteifigkeitswert des in Bild 13 gezeichneten Systems

$$(15)\qquad k = \frac{6\, c}{(1 - \varepsilon)^2}$$

zu setzen, wie leicht einzusehen ist. Die abgeleiteten transzendenten Gleichungen und die Faustformeln bleiben im übrigen unverändert.

## Zahlenbeispiele.

1. Der Zweigelenkrechteckrahmen des Bildes 2 habe folgende Abmessungen und Querschnitte:

die Stiele:

$h = 6{,}00$ m $\quad h_o = 1{,}50$ m $\quad \varphi = \dfrac{1{,}50}{6{,}00} = 0{,}25$

$J_h = 5950\ \text{cm}^4$ und $i_h = 8{,}48$ cm;

der Riegel:

$l = 8{,}00$ m

$b = 1{,}60$ m

$\varepsilon = \dfrac{1{,}60}{8{,}00} = 0{,}20$ und

$J_r = 11\,690\ \text{cm}^4$.

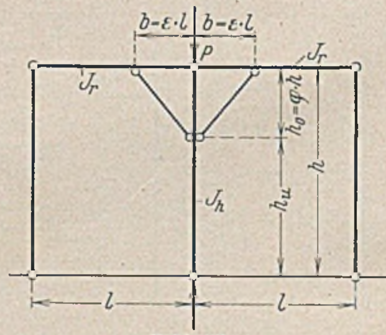


Bild 13.

Die Größe der Knicklast ist zu bestimmen.

**Tabelle 2. Die Lastbeiwerte $\mu_{k=\infty}$.**

| $\psi$ \ $\varphi$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,75 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,230 | 0,245 | 0,263 | 0,272 | 0,282 | 0,304 | 0,326 | 0,348 | 0,361 | 0,361 | 0,355 | 0,322 |
| 0,2 | 0,428 | 0,454 | 0,483 | 0,498 | 0,514 | 0,548 | 0,582 | 0,610 | 0,622 | 0,615 | 0,597 | |
| 0,25 | 0,515 | 0,544 | 0,576 | 0,593 | 0,611 | 0,648 | 0,683 | 0,711 | 0,716 | 0,703 | | |
| 0,3 | 0,594 | 0,625 | 0,660 | 0,677 | 0,696 | 0,734 | 0,768 | 0,792 | 0,788 | | | |
| 0,4 | 0,729 | 0,761 | 0,796 | 0,814 | 0,831 | 0,860 | 0,890 | 0,898 | | | | |
| 0,5 | 0,834 | 0,863 | 0,894 | 0,908 | 0,922 | 0,945 | 0,955 | | | | | |
| 0,6 | 0,910 | 0,934 | 0,956 | 0,966 | 0,973 | 0,983 | | | | | | |
| 0,7 | 0,960 | 0,976 | 0,988 | 0,992 | 0,994 | | | | | | | |
| 0,75 | 0,976 | 0,988 | 0,995 | 0,998 | | | | | | | | |
| 0,8 | 0,988 | 0,995 | 0,999 | | | | | | | | | |
| 0,9 | 0,999 | 0,999 | | | | | | | | | | |
| 1,0 | 1,000 | | | | | | | | | | | |

Es ist nach

(3a) $$c = \frac{6{,}00 \cdot 11\,690}{8{,}00 \cdot 5950} = 1{,}47$$

(3c) $$k = \frac{6 \cdot 1{,}47}{(1 - 2 \cdot 0{,}2)^2} = 24{,}5 > 20, \text{ daher}$$

(7c) $$\gamma \approx 2\,(1 - 0{,}65 \cdot 0{,}25)\sqrt{1 + \frac{2{,}1}{24{,}5}} \approx 1{,}75$$

$$s_k \approx 1{,}75 \cdot 6{,}00 \approx 10{,}50 \text{ m}$$

(5) $$P_k = \frac{21\,000\,000 \cdot 0{,}000\,059\,5\,\pi^2}{10{,}50^2} = 111{,}4 \text{ t.}$$

Fallen bei demselben Rahmen die Eckstreben fort und gehen statt dessen Stiele und Riegel biegungssteif ineinander über, dann werden mit

(7b) $$\gamma \approx 2\sqrt{1 + \frac{2{,}1}{6 \cdot 1{,}47}} \approx 2{,}225$$

$$s_k \approx 2{,}225 \cdot 6{,}00 \approx 13{,}35 \text{ m}$$

die Knickkräfte $P_k \approx 69{,}0$ t.

Die Erhöhung der Knickkräfte durch eingezogene Eckstreben ist also recht bedeutend.

2. Der Zweigelenkrechteckrahmen mit Fachwerkriegel des Bildes 7 habe folgende Abmessungen und Querschnitte:

die Stiele:

$h = 6{,}00$ m; $h_o = 1{,}50$ m; $\varphi = 0{,}25$; $J_h = 5950$ cm⁴ und $i_h = 8{,}48$ cm;

der Riegel:

$l = 8{,}00$ m; $h_o = 1{,}50$ m;

die Querschnitte der Riegelstäbe werden unten angegeben.

Die Stabkräfte $S_2$ infolge der Belastung nach Bild 7b.

| $n$ | $M$ m | $O$ | $U$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $-1{,}50$ | | $-1{,}00$ | |
| 1 | $-0{,}75$ | $+0{,}50$ | | $+0{,}625$ |
| 2 | 0 | | 0 | $-0{,}625$ |
| 3 | $+0{,}75$ | $-0{,}50$ | | $+0{,}625$ |
| 4 | $+1{,}50$ | | $+1{,}00$ | $-0{,}625$ |

Mittels dieser Stabkräfte sind nunmehr die Längenänderungen $S_2^2\,\varrho$ der einzelnen Stäbe zu errechnen, deren Summe bekanntlich in Gl. (8b) eingeht. Die Rechenoperationen sind höchst einfach und bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Es ergibt nunmehr

(8b) $$k = \frac{2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 600^3}{5950 \cdot 69{,}2} = 65{,}6$$

(7b) $$\gamma \approx 1{,}688\sqrt{1 + \frac{2{,}1}{69{,}2}} \approx 1{,}70$$

$$s_k \approx 1{,}70 \cdot 6{,}00 \approx 10{,}20 \text{ m}$$

$$P_k \approx 118{,}0 \text{ t.}$$

Die Längenänderung $S_2^2\,\varrho$ infolge der Belastung nach Bild 7b.

| Stab | $s$ cm | $F$ cm² | $\varrho$ 1/cm | $S_2$ | $S_2^2\,\varrho$ 1/cm |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 400 | 20 | 20 | $+0{,}50$ | 5 |
| $O_3$ | 400 | 20 | 20 | $-0{,}50$ | 5 |
| $U_0$ | 200 | 20 | 10 | $-1{,}00$ | 10 |
| $U_2$ | 400 | 20 | 20 | 0 | — |
| $U_4$ | 200 | 20 | 10 | $+1{,}00$ | 10 |
| $D_1$ | 250 | 10 | 25 | $+0{,}625$ | 9,8 |
| $D_2$ | 250 | 10 | 25 | $-0{,}625$ | 9,8 |
| $D_3$ | 250 | 10 | 25 | $+0{,}625$ | 9,8 |
| $D_4$ | 250 | 10 | 25 | $-0{,}625$ | 9,8 |
| | | | | $\sum S_2^2\,\varrho = 69{,}2$ | |

In beiden Beispielen erfolgt das Knicken im elastischen Bereich, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Die Berücksichtigung von Fachwerkriegeln bereitet demnach keine Schwierigkeiten. Das Ansteigen der Stabilität infolge Eckstreben bzw. Fachwerkriegel ist immerhin so erheblich, daß der Einfluß der letzteren auf keinen Fall vernachlässigt werden kann.

### C. Ungleiche Lasten greifen an den Rahmenecken an.

Vielfach wird heute bei der Bemessung von Zweigelenkrahmen schlechthin die Einführung der Knicklänge mit $s_k \geqq 2\,h$ gefordert. Bei symmetrisch ausgebildeten und belasteten Zweigelenkrahmen ist diese Forderung zweifelsohne berechtigt. Sie kann jedoch zu einer unnützen Materialvergeudung bei symmetrisch ausgebildeten, aber unsymmetrisch belasteten Zweigelenkrahmen führen. Mit solchen Bindern haben wir es sehr oft bei Hallenbauten zu tun. Die Berücksichtigung der von diesen Rahmen aufzunehmenden Kranlasten, Seitenkräfte, Winddrücke usw. führt zumeist zu unsymmetrischen Lastzuständen, aus denen die größten Beanspruchungen nachzuweisen sind. Während also der eine Stiel des Rahmens die größte Last erhält, ist derweil die des anderen unter Umständen bedeutend geringer. Dieser weniger belastete Stiel verleiht aber je nach dem Unterschied der beiden einander zugeordneten Stiellasten dem Gesamtrahmen eine mehr oder weniger große Versteifungshilfe, die die Stabilität des Rahmens vergrößert bzw. eine Reduzierung der Knicklängenbeiwerte $\gamma$ gestattet. Natürlich werden jetzt, da die Symmetrie der Belastung fortfällt, der Stabilitätsnachweis bedeutend langwieriger und die anfallenden Knickgleichungen entsprechend umfangreicher.

Um zu einem Überblick der Stabilitätsverhältnisse unsymmetrisch belasteter Rahmen zu gelangen, wollen wir hier nur einige Sonderfälle anzeigen und die Knickgleichungen ohne Zwischenrechnung angeben.

1. Dreigelenkrechteckrahmen.

Für den Dreigelenkrechteckrahmen des Bildes 14 lautet die Gleichung der Knickbedingung mit den bekannten Abkürzungen, wenn $P_1$ und $P_2$ an den Rahmenecken angreifen, $P_2 = m\,P_1$ ist und $P_2$ eine Druckkraft ist:

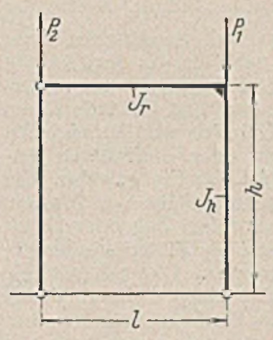



Bild 14.

(16) $$\frac{(1+m)\,z^2 \cdot \operatorname{tg} z}{(1+m)\,z - m \cdot \operatorname{tg} z} = 3\,c \quad \text{mit}$$

(17) $$\operatorname{tg} z = \frac{1+m}{m} \cdot z \quad \text{bei } c = \infty.$$

Mit $P_2$ als Zugkraft ist:

(18) $$\frac{(1-m)\,z^2 \cdot \operatorname{tg} z}{(1-m)\,z + m \cdot \operatorname{tg} z} = 3\,c \quad \text{und}$$

(19) $$\operatorname{tg} z = -\frac{1-m}{m} \cdot z \quad \text{bei } c = \infty.$$

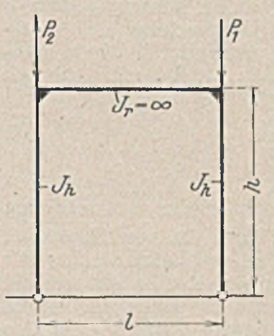



Bild 15.

**Tabelle 3. Knicklängenbeiwerte $\gamma_{c=\infty}$.**

| $m$ | Dreigelenkrahmen $P_2$ Druck | Dreigelenkrahmen $P_2$ Zug | Zweigelenkrahmen $P_2$ Druck | Zweigelenkrahmen $P_2$ Zug |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,000 | 2,000 | 1,426 | 1,426 |
| 0,1 | 2,080 | 1,917 | 1,491 | 1,358 |
| 0,2 | 2,155 | 1,831 | 1,555 | 1,288 |
| 0,25 | 2,194 | 1,786 | 1,586 | 1,252 |
| 0,3 | 2,231 | 1,741 | 1,617 | 1,215 |
| 0,4 | 2,303 | 1,647 | 1,676 | 1,142 |
| 0,5 | 2,373 | 1,549 | 1,734 | 1,068 |
| 0,6 | 2,440 | 1,445 | 1,790 | 0,995 |
| 0,7 | 2,507 | 1,336 | 1,844 | 0,929 |
| 0,75 | 2,539 | 1,279 | 1,871 | 0,899 |
| 0,8 | 2,571 | 1,222 | 1,898 | 0,873 |
| 0,9 | 2,634 | 1,108 | 1,950 | 0,832 |
| 1,0 | 2,695 | 1,000 | 2,000 | 0,800 |

2. Zweigelenkrechteckrahmen.

Die Stabilität des Zweigelenkrechteckrahmens unter unsymmetrischer Eckbelastung wollen wir hier zunächst ebenfalls nur kurz streifen und die Knickgleichungen für $c = \infty$, was bekanntlich mit $J_r = \infty$ identisch ist, angeben. Mit den Daten von Bild 15 und mit $P_2$ als Druckkraft erhalten wir:

(20) $$\operatorname{tg}\sqrt{m}\,z + m\sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} z = (1+m)\sqrt{m}\,z,$$

während $P_2$ als Zugkraft

(21) $$\mathfrak{Tg}\sqrt{m}\,z - m\sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} z = (1-m)\sqrt{m}\,z \quad \text{liefert.}$$

Die Knickkräfte $P_k$ und die Knicklängenbeiwerte $\gamma$ sind den bekannten Gl. (5) u. (5a) zu entnehmen.

Wir wollen uns hier mit dem Nachweis der Knicklängenbeiwerte $\gamma_{c=\infty}$, die wegen $J_r = \infty$ für alle Fälle der Riegelbelastung die zutreffenden Grenzwerte sind, begnügen und lassen uns durch Bild 16 und Tabelle 3 den Verlauf dieser Beiwerte für beide Rahmensysteme veranschaulichen. Eindeutig wird an Hand dieser Beiwerte die Abhängigkeit der Rahmenstabilität von der Belastung dargelegt.

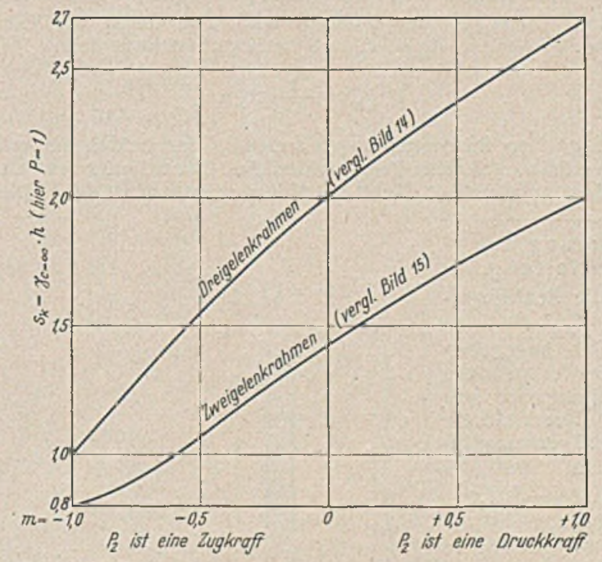



Bild 16. Die von der Belastung abhängen Knicklängen

$$s_k = \gamma_{c=\infty} \cdot h; \quad \frac{P_2}{P_1} = (\mp)\,m.$$

Da wir die Abhängigkeit der Knicklängenbeiwerte $\gamma$ von der Rahmensteifigkeitszahl für einige Belastungsfälle schon kennengelernt haben, können wir uns an Hand der Grenzwerte der Tabelle 3 ein allgemeines Bild über die Größe der Beiwerte machen und kommen zu dem Schluß, daß die Forderung, die Knicklänge mit $s_k \geqq 2\,h$ einzuführen, für den Zweigelenkrahmen unbegründet ist und unter keinen Umständen allgemein aufrechterhalten werden kann.

# Über die Berechnung von Einzelwinkeln auf Biegung.

Von Sergius Woinowsky-Krieger in Berlin.

## Einleitung.

Ein Einzelwinkel ist seiner Querschnittsform nach zur Aufnahme von Biegungsmomenten wenig geeignet; indessen wird er bei Anwendung im Stahlbau nicht selten der Biegung ausgesetzt. Für Bauteile von untergeordneter Bedeutung, so z. B. für Geländerholme und Geländerstiele, auch für Träger unter leichten Bühnen und Galerien werden einzelne Winkelstähle wegen ihres besseren Aussehens oder einfacheren Anschlusses oft an Stelle der sonst üblichen I- und ⊏-Profile gewählt. Die meistenteils aus Einzelwinkeln gebildeten Ausfachungsstäbe von Masten, Türmen und leichteren Verbänden haben außer axialem Zug oder Druck mitunter eine von Biegung begleitete Querbelastung durch Winddruck, Eigengewicht oder zufällige Einzellasten aufzunehmen. Der außermittige Anschluß solcher Stäbe an die Knotenbleche gibt einen weiteren Anlaß zur Entstehung von Biegungsmomenten, die die Randspannungen eines Winkelquerschnitts ganz erheblich beeinflussen können.

In der Regel werden die aus einem Einzelwinkel gebildeten Stäbe durch Momente beansprucht, die um eine der beiden Achsen $X$ oder $Y$ drehen (Bild 1). Da diese Achsen nicht die Hauptachsen des Querschnitts sind, so hat man das gegebene Moment, etwa $M_x$, in die Komponenten $M_\xi$ und $M_\eta$ zu zerlegen und die Biegungsspannung nach der Formel

$$\sigma = \frac{M_\xi e_\xi}{J_\xi} + \frac{M_\eta e_\eta}{J_\eta}$$

zu berechnen, worin unter $e_\xi$ und $e_\eta$ die Abstände der am stärksten beanspruchten Randfaser von den Hauptachsen $\xi$ bzw. $\eta$ zu verstehen sind.

Die Erfahrung zeigt, daß diese grundsätzlich sehr einfache, in der Ausführung aber ziemlich schwerfällige Berechnungsweise so gut wie nie angewendet wird. In der Praxis begnügt man sich meist mit einem Spannungsnachweis nach der Formel $\sigma = M_x/W_x$ bzw. $\sigma = M_y/W_y$, tut also so, als wären $X$ und $Y$ die Hauptachsen des Querschnitts. Wie später gezeigt werden soll, ist diese Berechnungsweise selbst für die Zwecke einer Überschlagsrechnung als kaum brauchbar zu bezeichnen. Sie liefert in der Tat Spannungswerte, die unter Umständen weniger als 50% der wahren Werte ausmachen.

Zweck der folgenden Ausführungen ist es, die Ermittlung der Größtspannungen in einem durch ein Moment $M_x$ oder $M_y$ verbogenen Einzelwinkel auf die Berechnung gewisser Querschnittswerte zurückzuführen, die dann für die üblichen Profile tabellarisch angegeben werden.

## Randspannungen und zugeordnete Widerstandsmomente.

Es sind im einzelnen die folgenden Fälle zu betrachten:

1. Ungleichschenkliger Winkel, Moment $M_x$ (Bild 1).

Dreht das Biegungsmoment um die Achse $X$—$X$, so haben seine Komponenten in bezug auf die Hauptachsen des Querschnitts die Größe

$$M_\xi = M_x \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad M_\eta = M_x \cdot \sin\alpha.$$

Die zugehörigen Spannungen auf der Nullinie $N$—$N$ des Querschnitts sind dann den Werten $M_x \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_x / J_\xi$ bzw. $M_x \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_x / J_\eta$ proportional. Die Lage der Nullinie wird also durch die Gleichung $\cos\alpha \cdot \cos\varphi_x / J_\xi - \sin\alpha \cdot \sin\varphi_x / J_\eta = 0$ bestimmt, woraus dann

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\varphi_x = \frac{J_\eta}{J_\xi} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

folgt. Die größten Beanspruchungen treten in den beiden am weitesten von der Nullinie entfernten Randpunkten des Querschnitts auf. Der eine Punkt $B$ liegt auf dem Lot $DOB$ zu $NN$, der andere ist der Eckpunkt $E$.

Die Gesamtbeanspruchung in $B$ ergibt sich zu

$$\text{(2)} \qquad \sigma_{bx} = \frac{M_x \cdot \cos\alpha}{J_\xi}\left(\eta_b + r_1 \cdot \sin\varphi_x\right) + \frac{M_x \cdot \sin\alpha}{J_\eta}\left(\xi_b + r_1 \cdot \cos\varphi_x\right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich in der einfacheren Gestalt

$$\text{(3)} \qquad \sigma_{bx} = \frac{M_x}{W_{bx}}$$

schreiben. $W_{bx}$ spielt hier die Rolle eines Widerstandsmoments, dessen Größe sich auf Grund von (2) zu

$$\text{(4)} \qquad W_{bx} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi\left(\xi_b + r_1 \cdot \cos\varphi_x\right)\sin\alpha + J_\eta\left(\eta_b + r_1 \cdot \sin\varphi_x\right)\cos\alpha}$$

ergibt. $\xi_b$ und $\eta_b$, d. h. die Koordinaten des Mittelpunktes der Schenkelausrundung bei $B$ im Achsenkreuz $\xi$, $\eta$, lassen sich aus Bild 1 leicht herleiten. Es ist

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \xi_b = \left(b - e_x - r_1\right)\sin\alpha - \left(e_y - d + r_1\right)\cos\alpha \\ \eta_b = \left(b - e_x - r_1\right)\cos\alpha + \left(e_y - d + r_1\right)\sin\alpha. \end{cases}$$

Sämtliche im Ausdruck (4) enthaltenen Größen lassen sich somit entweder aus den Profiltafeln direkt entnehmen oder auf Grund von (1) und (5) rasch berechnen. Für den Punkt $E$ erhält man (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) den Spannungswert

$$\text{(6)} \qquad \sigma_e = \frac{M_x \eta_e \cdot \cos\alpha}{J_\xi} + \frac{M_x \xi_e \cdot \sin\alpha}{J_\eta}.$$

Es folgt in ähnlicher Weise wie vorhin

$$\text{(7)} \qquad \sigma_{ex} = \frac{M_x}{W_{ex}}$$

mit dem Widerstandsmoment

$$\text{(8)} \qquad W_{ex} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi \xi_e \cdot \sin\alpha + J_\eta \eta_e \cdot \cos\alpha},$$

worin für die Koordinaten des Punktes $E$ die Ausdrücke

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \xi_e = e_x \cdot \sin\alpha + e_y \cdot \cos\alpha \\ \eta_e = e_x \cdot \cos\alpha - e_y \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

einzusetzen sind.

2. Ungleichschenkliger Winkel, Moment $M_y$ (Bild 2).

Die Lage der Nullinie ist in diesem Falle durch

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg}\varphi_y = \frac{J_\eta}{J_\xi} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

gegeben, während für die größten Randspannungen die beiden Punkte $A$ und $E$ in Betracht kommen. Unter Bezugnahme auf die Ausführungen in dem vorigen Fall beschränken wir uns hier auf die Wiedergabe der zugehörigen Ausdrücke.

Spannung in $A$:

$$\text{(11)} \qquad \sigma_{ay} = \frac{M_y}{W_{ay}}.$$

Zugeordnetes Widerstandsmoment:

$$\text{(12)} \qquad W_{ay} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi\left(\xi_a + r_1 \cdot \cos\varphi_y\right)\cos\alpha + J_\eta\left(\eta_a + r_1 \cdot \sin\varphi_y\right)\sin\alpha}$$

mit

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \xi_a = \left(a - e_y - r_1\right)\cos\alpha - \left(e_x - d + r_1\right)\sin\alpha \\ \eta_a = \left(a - e_y - r_1\right)\sin\alpha + \left(e_x - d + r_1\right)\cos\alpha. \end{cases}$$

Bemerkung der Schriftleitung.

Wenn die Zentrifugalmomente $J_{xy}$ in den Profiltabellen angegeben wären, könnte man die schiefe Biegung auch nach den für querkraftfreie Biegung allgemeingültigen Formeln

$$\sigma = M_x \frac{J_y\, y - J_{xy}\, x}{J_x J_y - J_{xy}^2}$$

$$\sigma = M_y \frac{J_x\, x - J_{xy}\, y}{J_x J_y - J_{xy}^2}.$$

berechnen. Dazu ist allerdings einschränkend zu bemerken, daß diese Formeln im Falle der Biegung mit Querkraft keine richtigen Werte für solche Querschnitte liefern, bei denen der Schubmittelpunkt nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt; hierzu gehört z. B. der Einzelwinkel. K. Klöppel.

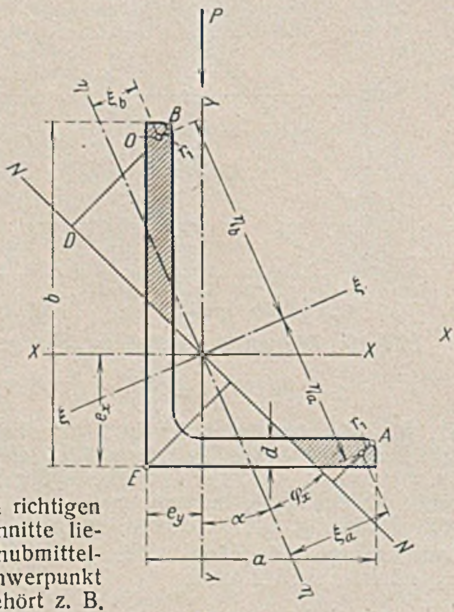


Bild 1.

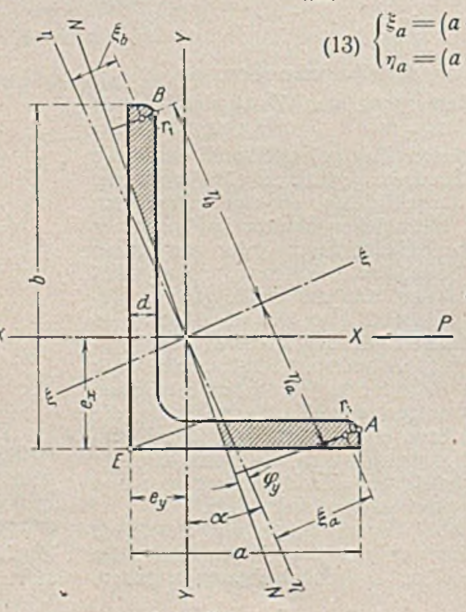


Bild 2.

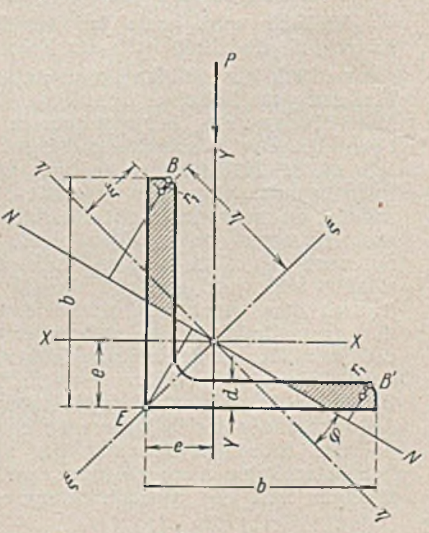


Bild 3.

Spannung in $E$:

(14) $$\sigma_{ey} = \frac{M_y}{W_{ey}}$$

mit dem Widerstandsmoment

(15) $$W_{ey} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi \xi_e \cdot \cos\alpha - J_\eta \eta_e \cdot \sin\alpha},$$

wobei $\xi_e$ und $\eta_e$ nach Gl. (9) zu berechnen sind.

3. Gleichschenkliger Winkel, Moment $M_x$ oder $M_y$ (Bild 3).

Es genügt hier offensichtlich, den Fall der Biegung durch $M_x = M$ zu betrachten. Die entsprechenden Formeln lassen sich auf Grund der Gl. (1) bis (9) ohne weiteres aufschreiben, indem $\alpha = 45°$, ferner $\xi_b = \xi$, $\eta_b = \eta$ und schließlich $e_x = e_y = e$ gesetzt wird. Die Nullinie ist hiernach bestimmt durch

(16) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{J_\eta}{J_\xi}.$$

Die Biegungsbeanspruchung im Punkt $B$ wird

(17) $$\sigma_b = \frac{M}{W_b}.$$

Hierin ist

(18) $$W_b = \frac{J_\xi J_\eta \sqrt{2}}{J_\xi(\xi + r_1 \cdot \cos\varphi) + J_\eta(\eta + r_1 \cdot \sin\varphi)}$$

mit

(19) $$\xi = \frac{b+d}{\sqrt{2}} - (e + r_1)\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b-d}{\sqrt{2}}.$$

Die Ecke $E$ wird beansprucht mit

(20) $$\sigma_e = \frac{M}{W_e},$$

worin ist

(21) $$W_e = \frac{J_\eta}{e}.$$

Letzterer Wert ergibt sich auch unmittelbar aus der Überlegung heraus, daß die Komponente $M_\xi$ von $M$ keinen Beitrag zu $\sigma_e$ liefert, während der Komponente $M_\eta = M/\sqrt{2}$ das Widerstandsmoment $J_\eta/e\sqrt{2}$ entspricht.

4. Gleichzeitige Wirkung der Momente $M_x$ und $M_y$.

Wir beschränken uns auf die einfachste Annahme, daß die größte Gesamtbeanspruchung im Eckpunkt $E$ des Querschnitts entsteht. Dies ist beispielsweise bei Biegung infolge der Exzentrizität der Winkelanschlüsse in ihrer üblichen Ausführung der Fall. Für die gesamte Biegungsspannung in der Ecke gilt dann einfach

(22) $$\sigma_e = \sigma_{ex} + \sigma_{ey},$$

wobei der Anteil $\sigma_{ex}$ nach den Gl. (7) oder (20), der Anteil $\sigma_{ey}$ nach den Gl. (14) oder (20) zu berechnen ist.

Die Widerstandsmomente zur Bemessung der im Stahlbau üblichen Winkelprofile nach DIN 1028/1029 in sämtlichen oben behandelten Fällen von Biegung sind in den Tafeln 1 und 2 zusammengestellt. Es ist nicht uninteressant, die Tafelwerte mit den Werten $W_x = J_x/b - e_x$, $W_x' = J_x/e_x$ usw. zu vergleichen, deren man sich in ähnlichen Fällen öfters in der Praxis bedient. An Hand der Profiltabellen lassen sich die folgenden Durchschnitts- bzw. Grenzwerte für das uns interessierende Verhältnis berechnen[1]).

Gleichschenklige Winkel:

$$\frac{W_x}{W_b} = 1{,}25 \pm 0{,}02 \qquad \frac{W_x'}{W_e} = 2{,}40 \pm 0{,}08.$$

Ungleichschenklige Winkel:

$$\frac{W_x}{W_{bx}} = 1{,}30 \pm 0{,}04 \qquad \frac{W_x'}{W_{ex}} = 2{,}15 \pm 0{,}27$$

$$\frac{W_y}{W_{ay}} = 1{,}20 \pm 0{,}06 \qquad \frac{W_y}{W_{ey}} = 2{,}54 \pm 0{,}16.$$

Aus vorstehenden Verhältniszahlen ersieht man ohne weiteres, wie wenig brauchbar die Widerstandsmomente $W_x$ und $W_y$ sind, sobald es sich um die Bemessung einzelner Winkelstähle auf Biegung handelt.

## Anwendung der Tafeln.

### Bezeichnungen.

Die Bezeichnungsweise sei hier kurz rekapituliert. In Tafel 2 bezieht sich der erste Index bei $W$ auf den Ort der Spannung, der zweite auf ihre Ursache (Bezugsachse des Moments). Die Bezeichnungen der DIN-Tafeln wurden hierbei beibehalten und durch einige weitere nach Bild 1 u. 2 ergänzt. Die Indices haben also die Bedeutung: $a$ — kurzer Schenkel (Punkt $A$), $b$ — langer Schenkel (Punkt $B$), $e$ — Eckpunkt $E$. In Tafel 1 bezieht sich $b$ auf den (am stärksten beanspruchten) Schenkel, $e$ — auf den Eckpunkt $E$ (Bild 3); der zweite Index fällt hier weg.

[1]) Bei dieser Vergleichsrechnung hat sich u. a. herausgestellt, daß für den L 75 · 90 · 11 $W_y = 15{,}1$ cm³, nicht 18,5 cm³ (nach DIN 1029) gelten muß.

**Tafel 1. Widerstandsmomente der gleichschenkligen Winkel nach DIN 1028.**

| L<br>b b d | $W_b$<br>cm³ | $W_e$<br>cm³ |
|---|---|---|
| 45 · 45 · 5 | 1,97 | 2,54 |
| 7 | 2,65 | 3,23 |
| 50 · 50 · 5 | 2,48 | 3,28 |
| 6 | 2,88 | 3,61 |
| 7 | 3,30 | 4,04 |
| 9 | 4,13 | 4,92 |
| 55 · 55 · 6 | 3,57 | 4,64 |
| 8 | 4,60 | 5,70 |
| 10 | 5,55 | 6,57 |
| 60 · 60 · 6 | 4,27 | 5,58 |
| 8 | 5,49 | 6,84 |
| 10 | 6,62 | 7,89 |
| 65 · 65 · 7 | 5,79 | 7,46 |
| 9 | 7,21 | 8,91 |
| 11 | 8,60 | 10,3 |
| 70 · 70 · 7 | 6,81 | 8,93 |
| 9 | 8,51 | 10,7 |
| 11 | 10,1 | 12,2 |
| 75 · 75 · 7 | 7,72 | 10,1 |
| 8 | 8,84 | 11,5 |
| 10 | 10,8 | 13,5 |
| 12 | 12,5 | 15,1 |
| 80 · 80 · 8 | 10,1 | 13,1 |
| 10 | 12,3 | 15,3 |
| 12 | 14,5 | 17,8 |
| 14 | 16,4 | 19,6 |
| 90 · 90 · 9 | 14,4 | 18,8 |
| 11 | 17,2 | 21,8 |
| 13 | 19,9 | 24,4 |
| 100 · 100 · 10 | 19,8 | 26,0 |
| 12 | 23,3 | 29,7 |
| 14 | 26,6 | 33,0 |
| 110 · 110 · 10 | 24,2 | 32,1 |
| 12 | 28,5 | 36,8 |
| 14 | 32,5 | 41,4 |
| 120 · 120 · 11 | 31,6 | 41,7 |
| 13 | 36,6 | 47,1 |
| 15 | 41,8 | 53,0 |
| 130 · 130 · 12 | 40,4 | 53,3 |
| 14 | 46,5 | 59,9 |
| 16 | 52,3 | 66,1 |
| 140 · 140 · 13 | 50,6 | 66,8 |
| 15 | 57,7 | 74,5 |
| 17 | 64,6 | 81,9 |
| 150 · 150 · 14 | 62,7 | 82,4 |
| 16 | 70,7 | 91,1 |
| 18 | 78,8 | 100 |
| 160 · 160 · 15 | 76,7 | 101 |
| 17 | 85,7 | 111 |
| 19 | 94,4 | 120 |
| 180 · 180 · 16 | 103 | 135 |
| 18 | 114 | 148 |
| 20 | 126 | 160 |
| 200 · 200 · 16 | 128 | 171 |
| 18 | 143 | 187 |
| 20 | 157 | 204 |

**Vorzeichen.**

Bei einfacher Biegung ist natürlich das kleinere der beiden Widerstandsmomente maßgebend. Bei „Biegezug" und „Biegedruck" ist jedoch die Spannung unter Umständen sowohl im Schenkel als auch in der Ecke nachzuweisen. Hinsichtlich der Vorzeichen ist an Hand der Bilder 1 bis 3 folgendes zu beachten: eine auf den Winkel als einfachen Balken in der Pfeilrichtung wirkende Feldbelastung erzeugt im schraffierten Querschnittsteil Druck, im übrigen Teil Zug.

**Tafel 2. Widerstandsmomente der ungleichschenkligen Winkel nach DIN 1029.**

| L<br>a b d | $W_{bx}$<br>cm³ | $W_{ex}$<br>cm³ | $W_{ay}$<br>cm³ | $W_{ey}$<br>cm³ |
|---|---|---|---|---|
| 40 · 60 · 5 | 3,33 | 3,90 | 1,66 | 2,44 |
| 6 | 3,90 | 4,48 | 1,95 | 2,79 |
| 7 | 4,47 | 5,04 | 2,25 | 3,11 |
| 40 · 80 · 4 | 4,70 | 5,43 | 1,40 | 2,47 |
| 6 | 6,79 | 7,59 | 2,05 | 3,38 |
| 8 | 8,58 | 9,57 | 2,73 | 4,21 |
| 50 · 65 · 5 | 4,04 | 4,96 | 2,59 | 3,70 |
| 7 | 5,45 | 6,43 | 3,49 | 4,73 |
| 9 | 6,78 | 7,74 | 4,37 | 5,64 |
| 50 · 100 · 6 | 10,9 | 12,4 | 3,25 | 5,59 |
| 8 | 14,1 | 15,5 | 4,25 | 6,83 |
| 10 | 17,1 | 18,6 | 5,26 | 8,09 |
| 55 · 75 · 5 | 5,40 | 6,63 | 3,16 | 4,67 |
| 7 | 7,32 | 8,65 | 4,32 | 6,04 |
| 9 | 9,09 | 10,5 | 5,39 | 7,29 |
| 60 · 90 · 6 | 9,18 | 11,0 | 4,58 | 6,95 |
| 8 | 11,9 | 13,9 | 5,99 | 8,68 |
| 10 | 14,4 | 16,4 | 7,29 | 10,2 |
| 65 · 75 · 6 | 6,55 | 8,32 | 5,12 | 7,06 |
| 8 | 8,52 | 10,4 | 6,68 | 8,82 |
| 10 | 10,3 | 12,3 | 8,14 | 10,4 |
| 65 · 80 · 6 | 7,44 | 9,32 | 5,21 | 7,38 |
| 8 | 9,63 | 11,7 | 6,78 | 9,21 |
| 10 | 11,7 | 13,8 | 8,28 | 10,8 |
| 12 | 13,7 | 15,8 | 9,70 | 12,3 |
| 65 · 100 · 7 | 13,0 | 15,5 | 6,18 | 9,48 |
| 9 | 16,4 | 18,9 | 7,82 | 11,5 |
| 11 | 19,5 | 22,1 | 9,41 | 13,3 |
| 65 · 115 · 6 | 15,0 | 17,7 | 5,59 | 9,38 |
| 8 | 19,4 | 22,4 | 7,33 | 11,7 |
| 10 | 23,5 | 26,6 | 8,95 | 13,7 |
| 65 · 130 · 8 | 24,5 | 27,7 | 7,34 | 12,4 |
| 10 | 29,8 | 33,1 | 9,06 | 14,7 |
| 12 | 34,9 | 38,2 | 10,7 | 16,7 |
| 75 · 90 · 7 | 11,0 | 13,8 | 8,02 | 11,2 |
| 9 | 13,8 | 16,8 | 10,1 | 13,6 |
| 11 | 16,4 | 19,6 | 12,1 | 15,8 |
| 75 · 100 · 7 | 13,4 | 16,6 | 8,15 | 12,0 |
| 9 | 16,9 | 20,2 | 10,3 | 14,5 |
| 11 | 20,1 | 23,6 | 12,3 | 16,8 |
| 75 · 130 · 8 | 25,1 | 29,2 | 9,67 | 15,6 |
| 10 | 30,6 | 34,9 | 11,9 | 18,5 |
| 12 | 35,9 | 40,3 | 14,1 | 21,1 |
| 75 · 150 · 9 | 36,6 | 41,5 | 11,1 | 18,9 |
| 11 | 43,7 | 48,9 | 13,4 | 21,9 |
| 13 | 50,5 | 55,7 | 15,6 | 24,7 |
| 75 · 170 · 10 | 51,1 | 56,9 | 12,5 | 22,3 |
| 12 | 60,2 | 66,2 | 14,9 | 25,5 |
| 14 | 68,7 | 74,7 | 17,2 | 28,4 |
| 16 | 76,9 | 82,8 | 19,5 | 31,0 |
| 80 · 120 · 8 | 21,7 | 26,1 | 10,8 | 16,4 |
| 10 | 26,6 | 31,1 | 13,3 | 19,5 |
| 12 | 31,2 | 35,9 | 15,7 | 22,3 |
| 14 | 35,6 | 40,4 | 18,0 | 24,9 |
| 90 · 110 · 9 | 21,2 | 26,6 | 15,0 | 21,1 |
| 11 | 25,3 | 30,9 | 17,9 | 24,5 |
| 13 | 29,2 | 34,9 | 20,8 | 27,5 |
| 90 · 130 · 10 | 31,8 | 37,7 | 16,9 | 24,9 |
| 12 | 37,3 | 43,7 | 19,9 | 28,5 |
| 14 | 42,6 | 48,9 | 22,8 | 31,7 |
| 90 · 150 · 10 | 41,7 | 48,8 | 17,3 | 27,3 |
| 12 | 49,0 | 56,1 | 20,4 | 31,0 |
| 14 | 56,1 | 63,6 | 23,6 | 35,0 |
| 90 · 250 · 10 | 111 | 122 | 19,0 | 38,9 |
| 12 | 131 | 143 | 22,5 | 44,6 |
| 14 | 150 | 162 | 26,0 | 49,5 |
| 16 | 168 | 181 | 29,6 | 54,7 |
| 100 · 150 · 10 | 42,4 | 50,8 | 21,1 | 32,1 |
| 12 | 50,0 | 58,8 | 25,0 | 36,9 |
| 14 | 57,4 | 66,5 | 28,8 | 41,4 |
| 100 · 200 · 10 | 73,7 | 84,8 | 22,0 | 38,7 |
| 12 | 87,0 | 98,7 | 26,3 | 44,7 |
| 14 | 99,8 | 112 | 30,3 | 50,0 |
| 16 | 112 | 124 | 34,3 | 55,1 |
| 18 | 124 | 136 | 38,4 | 60,1 |

### Nietabzug.

Wie aus den (maßstäblich gezeichneten) Bildern 1 bis 3 hervorgeht, liegen die etwa vorhandenen Niet- oder Schraubenlöcher in der Nähe der Nullinie. Sie können also die Tragfähigkeit eines durch ein Moment $M_x$ oder $M_y$ verbogenen Einzelwinkels nicht wesentlich beeinträchtigen. Im praktisch wichtigen Fall eines exzentrisch angeschlossenen Zug- oder Druckstabes ist der Anteil der Biegung an der Gesamtbeanspruchung ohnehin gering, und es erscheint hierbei zulässig, den Einfluß der Querschnittsschwächung auf die Biegungsspannung ganz zu vernachlässigen. In anderen Fällen, z. B. bei Biegung ohne Längskraft, verfährt man am einfachsten und bleibt auch in der Regel auf der sicheren Seite, indem man näherungsweise $W_n = \frac{W F_n}{F}$ setzt.

### Beispiele.

1. Beispiel. Ein Geländerholm ist für ein Moment $M = 20$ tcm aus waagerechter Querbelastung zu bemessen.

Unter der Voraussetzung $\sigma_{zul} = 1400$ kg/cm² hat man

$$W_{erf} = \frac{20}{1,4} = 14,3 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ∟ 90 · 90 · 9 mit $W_b = 14,4$ cm³ nach Tafel 1 oder ∟ 65 · 100 · 9 (flach gelegt) mit $W_{b\,x} = 16,4$ cm³ nach Tafel 2.

2. Beispiel. Ein ∟ 40 · 80 · 6 (flach liegend) ist als ein 6 m langer Füllungsstab eines waagerechten Verbandes für $S = 7$ t Zugkraft bemessen. Die Querschnittsbeanspruchung in Stabmitte ist unter Berücksichtigung der Biegung durch Eigengewicht $g = 5,41$ kg/m, jedoch unter Außerachtlassung der Endmomente nachzurechnen.

Es ist

$$M_y = \frac{5,41 \cdot 6^2}{8} = 24,4 \text{ kgm} = 2,44 \text{ tcm}, \qquad F = 6,89 \text{ cm}^2;$$

ferner nach Tafel 2: $W_{a\,y} = 2,05$ cm³, $W_{e\,y} = 3,38$ cm³.

Am oberen Rande (Punkt $A$ nach Bild 2) wird

$$\sigma = \frac{S}{F} - \frac{M_y}{W_{a\,y}} = \frac{7}{6,89} - \frac{2,44}{2,05} = 1,02 - 1,19 = -0,17 \text{ t/cm}^2 \text{ (Druck)}.$$

Am unteren Rande (Punkt $E$ nach Bild 2) wird

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M_y}{W_{e\,y}} = 1,02 + \frac{2,44}{3,38} = 1,02 + 0,72 = 1,74 \text{ t/cm}^2 \text{ (Zug)}.$$

Setzt man nun $F_n = 6,89 - 1,7 \cdot 0,6 = 5,87$ cm², so hat man am Anschluß nur $\sigma = 7/5,87 = 1,19$ t/cm². Allerdings ist bei unserem Nachweis der Spannungen in Stabmitte das Gegenmoment infolge der Durchbiegung des Stabes unberücksichtigt geblieben.

3. Beispiel. Ein aus ∟ 90 · 110 · 9 (in Flußstahl St 37) gebildeter Füllungsstab hat eine Druckkraft $S = 5$ t bei einer Knicklänge $s_k = 2,5$ m aufzunehmen. Die Beanspruchung ist unter Berücksichtigung der aus Bild 4 ersichtlichen außermittigen Anschlüsse an 10 mm dicke Knotenbleche nachzuweisen.

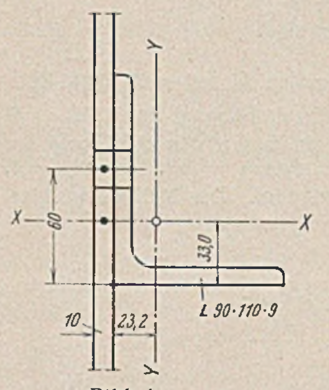


Bild 4.

Es gilt zunächst

$$F = 17,3 \text{ cm}^2, \quad i_\eta = 1,89 \text{ cm}, \quad \lambda = 132, \quad \omega = 4,12.$$

Die maßgebende Beanspruchung sei unter den folgenden beiden Annahmen berechnet:

a) Die Netzlinie des Fachwerks fällt mit der Schwerachse des Querschnitts zusammen.

Die Exzentrizitäten sind in diesem Falle

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0,5 + 2,32 = 2,82 \text{ cm}.$$

Die größte Beanspruchung tritt im Eckpunkte auf. Mit $W_{e\,y} = 21,1$ cm³ nach Tafel 2 wird

$$\sigma = \frac{\omega S}{F} + \frac{M_y}{W_{e\,y}} = \frac{4,12 \cdot 5}{17,3} + \frac{5 \cdot 2,82}{21,1} = 1,19 + 0,67 = 1,86 \text{ t/cm}^2 > \sigma_{zul}.$$

b) Die Netzlinie des Fachwerks fällt mit der Nietrißlinie des Winkels zusammen.

Nach Bild 4 ist

$\varepsilon_x = 6,0 - 3,3 = 2,7$ cm, $\varepsilon_y = 2,82$ cm wie vorhin; $W_{e\,x} = 26,6$ cm³;

$$\sigma = \frac{\omega S}{F} + \frac{M_y}{W_{e\,y}} + \frac{M_x}{W_{e\,x}} = 1,19 + 0,67 - \frac{5 \cdot 2,7}{26,6} = 1,86 - 0,51 = 1,35 \text{ t/cm}^2 < \sigma_{zul}.$$

Aus letzterem Beispiel ist leicht zu ersehen, wie erheblich ein exzentrischer Kraftangriff die maßgebende Beanspruchung eines Einzelwinkels zu beeinflussen vermag.

---



## Die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität.

Von Dr.-Ing. Georg Schmidt, Berlin.

In den Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau (DIN 1050) sind im § 13, Absatz 3, Angaben für die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität enthalten, welche besagen, daß die Endfelder eines Durchlaufträgers für $q \cdot \frac{l^2}{11}$, die Innenfelder für $q \cdot \frac{l^2}{16}$ zu bemessen sind. Dabei darf die kleinste Stützweite oder Belastung nicht weniger als das 0,8 fache der größten betragen.

Wesentlich für die Gültigkeit der angegebenen Momente ist ein gleichbleibendes Trägerprofil über die ganze Trägerlänge. Diese Forderung ist jedoch in dem genannten Absatz nicht enthalten, wodurch man verleitet wird, das Endfeld stärker als die Mittelfelder zu bemessen, wie es in der Praxis dauernd beobachtet werden kann. Dann ist aber die Bruchsicherheit $\nu = 1,71$ für die Endfelder nicht mehr gewährleistet, wie auch die Bemessungsformel $M = \frac{q\,l^2}{11}$ nicht mehr gültig ist. Hierdurch angeregt, wurde der gesamte Fragenkomplex bezüglich des Einflusses verschiedener Stützweiten, Profile und Belastungen untersucht.

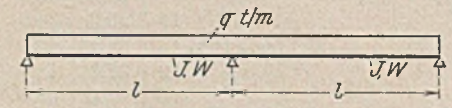



Bild 1.

Bevor jedoch im einzelnen auf jeden Punkt eingegangen wird, sei die bekannte Ableitung für das im Endfeld anzunehmende Moment nochmals in einer anderen Form wiederholt. Wir führen sie am Dreistützträger mit zwei gleichen Öffnungen durch. Die Grundlagen für die Berechnung sind wieder idealplastisches Verhalten des Baustoffs — also bis zur Fließgrenze Verlauf der $\sigma/\varepsilon$-Linie nach der Hookeschen Geraden, dann unbegrenztes Fließen ohne Spannungsänderung — und die Größe des Tragmoments $M_F = W \sigma_F$, bei dem die Tragfähigkeit des Trägerprofils erschöpft ist.

Die gleichmäßig verteilte Belastung, für die der Träger zu berechnen ist, sei $q$ t/m (Gebrauchslast). Gemäß der geforderten Sicherheit $\nu = 1,71$ darf der Träger erst bei einer Belastung $q_2 = 1,71\,q$ t/m zu Bruch gehen. Dazwischen sei ein Wert $q_1$ t/m eingeschaltet, bei dem über der Mittelstütze das Moment gleich dem Tragmoment wird, d. h. im Querschnitt über der Mittelstütze in der Randfaser die Spannung $\sigma_F$ auftritt.

Der Vorgang der Laststeigerung wird also in zwei Abschnitte aufgeteilt: $q$ bis $q_1$, Laststeigerung bis zum Auftreten des Tragmoments (Fließmoments) in einem Querschnitt des statisch unbestimmten Trägers, und $q_1$ bis $q_2$, weitere Laststeigerung bis zum Bruch des Trägers.

Gesucht wird das Moment $\frac{q\,l_2}{Z}$, für das der Träger zu bemessen ist, damit $q_2/q = 1,71$ ist.

Aus den Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \frac{q\,l^2}{Z\,W} = 1,4 \text{ t/cm}^2 \quad \text{und} \quad \frac{q_1\,l^2}{8\,W} = 2,4 \text{ t/cm}^2$$

folgt

$$n = \frac{q}{q_1} = \frac{Z \cdot 1,4}{8 \cdot 2,4} = \frac{Z}{8 \cdot 1,71},$$

der erste Teil der Laststeigerung.

Der zweite Teil ergibt sich aus dem Maximalmoment eines mit der gleichmäßig verteilten Last $q_2$ und dem negativen Endmoment $M_F = -\frac{q_1\,l^2}{8}$ belasteten Trägers. Das Maximalmoment ist gleich $M_F$ zu setzen und tritt an der Stelle

$$X = \frac{l}{2} - \frac{M_F}{l\,q_2} = \frac{l}{2} - \frac{q_1\,l}{q_2 \cdot 8} \text{ auf.}$$

Damit ergibt sich

$$\text{(2)} \qquad \frac{q_1\,l^2}{8} = \frac{q_2}{2}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{q_1^2\,l^2}{q_2^2 \cdot 64}\right) - \frac{q_1\,l^2}{16} + \frac{q_1^2\,l^2}{q_2^2 \cdot 64}.$$

$m = \frac{q_1}{q_2}$ hierin eingesetzt liefert die quadratische Gleichung für $m$

$$m^2 - 24\,m = -16 \text{ oder } m = 4\left(3 - \sqrt{8}\right).$$

Aus der Bedingung

$$\nu = \frac{q_2}{q} = \frac{1}{m\,n} = 1,71$$

findet man

$$1,71 = \frac{8 \cdot 1,71}{Z \cdot 4\left(3 - \sqrt{8}\right)} \quad \text{und} \quad Z = \frac{2}{3 - \sqrt{8}} = 11,63.$$

Diese Zahl ist in den Vorschriften auf 11 abgerundet worden.

Die Steigerung der Gebrauchslast $q$ um

$$\frac{1}{n}=\frac{8\cdot 1{,}71}{11{,}63}=1{,}176 \text{ bis } q_1$$

erzeugt in einem Querschnitt das Fließmoment, eine Steigerung von $q_1$ um

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{4(3-\sqrt{8})}=1{,}453 \text{ bis } q_2$$

bringt den Bruch des Trägers.

### Verschiedene Stützweiten.

Für den Träger nach Bild 2 mit gleichem Trägheitsmoment und gleicher Belastung über die ganze Länge lauten jetzt Gl. (1)

$$(3)\qquad \frac{q\, l_1^2}{Z\, W}=1{,}4 \text{ t/cm}^2 \quad\text{und}\quad \frac{q_1(l_1^3+l_2^3)}{8\,W(l_1+l_2)}=\frac{q_1 L^2}{8\,W}=2{,}4 \text{ t/cm}^2,$$

wenn $L^2=\frac{l_1^3+l_2^3}{l_1+l_2}$ ist.

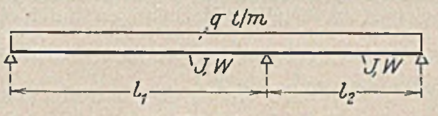



Bild 2.

Sie ergeben

$$n=\frac{q}{q_1}=\frac{Z}{8\cdot 1{,}71}\cdot\frac{L^2}{l_1^2}.$$

Gl. (2) ändert sich mit $M_F=-\frac{q_1 L^2}{8}$ in

$$(4)\qquad \frac{q_1 L^2}{8}=\frac{q_2}{2}\left(\frac{l_1^2}{4}-\frac{q_1^2 L^4}{q_2^2\cdot 64\, l_1^2}\right)-\frac{q_1 L^2}{16}+\frac{q_1^2 L^4}{q_2^2\cdot 64\, l_1^2}$$

und ergibt

$$m^2-24\cdot\frac{l_1^2}{L^2}\cdot m=-16\cdot\frac{l_1^4}{L^4} \quad\text{oder}\quad m=4(3-\sqrt{8})\frac{l_1^2}{L^2},$$

$$\nu=\frac{1}{m\,n}=1{,}71=\frac{8\cdot 1{,}71\, l_1^2}{Z\, L^2}\cdot\frac{L^2}{4(3-\sqrt{8})\, l_1^2}$$

ergibt wieder für

$$Z=\frac{2}{3-\sqrt{8}}=11{,}63.$$

Das Verhältnis der Stützweiten übt also keinerlei Einfluß auf die Sicherheit des Trägers aus. $Z$ behält für den ganzen Bereich $1\leqq\frac{l_2}{l_1}\leqq 0$ den gleichen Wert. Lediglich die Größe der Zwischenlast $q_1$ erfährt eine Änderung. Für $l_1=7{,}0$ m und $l_2=5{,}0$ m wird

$$L^2=\frac{7^3+5^3}{7+5}=39.$$

Jetzt kann also $q$ um

$$\frac{1}{n}=\frac{8\cdot 1{,}71}{11{,}63}\cdot\frac{49}{39}=1{,}478$$

gesteigert werden, ehe das Fließmoment $M_F$ auftritt. Dafür geht der Träger jetzt aber schon nach einer weiteren Steigerung der Last um

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{4(3-\sqrt{8})}\cdot\frac{39}{49}=1{,}157$$

zu Bruch.

Analog findet man für ein Mittelfeld eines Durchlaufträgers unabhängig von den benachbarten Stützweiten das Gebrauchslastmoment $M=\frac{q\,l^2}{16}$, für das der Träger zu berechnen ist, damit eine Sicherheit $\nu=1{,}71$ gegen Bruch vorhanden ist. Die Ableitung wird der Raumersparnis wegen fortgelassen.

Es sei nur bemerkt, daß die Steigerung der Gebrauchslast bis zur Bruchlast jetzt in drei Abschnitte aufgeteilt werden muß. $q$ ist wieder die Gebrauchslast. Bei $q_1$ tritt über einer Stütze, bei $q_2$ über der anderen das Fließmoment auf — die Stützmomente des elastischen Durchlaufträgers brauchen ja nicht gleich zu sein — und bei $q_3$ geht das Feld zu Bruch.

### Verschiedene Profile in den einzelnen Feldern.

Die Werte für $Z$ von 11,63 bzw. 16 sind jedoch nicht mehr gültig, sobald die Nachbarfelder ein kleineres Profil aufweisen als das betrachtete Feld. Die Ableitung für $Z$ sei deshalb für einen Träger mit verschiedenen

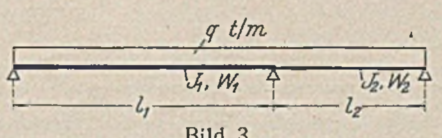



Bild 3.

Profilen in den einzelnen Öffnungen durchgeführt. Um sie allgemein zu halten, seien gleichzeitig verschiedene Stützweiten für die verschiedenen Felder zugrunde gelegt (Bild 3, $J=$ Trägheitsmoment, $W=$ Widerstandsmoment).

Ist $l_1$ die größere Stützweite, $J_1$ das größere Trägheitsmoment und

$$L^2=\frac{l_1^3+l_2^3\cdot\frac{J_1}{J_2}}{l_1+l_2\cdot\frac{J_1}{J_2}},$$

so lauten Gl. (3) jetzt

$$(5)\qquad \frac{q\, l_1^2}{Z\, W_1}=1{,}4 \text{ t/cm}^2 \quad\text{und}\quad \frac{q_1 L^2}{8\, W_2}=2{,}4 \text{ t/cm}^2.$$

Somit ist

$$n=\frac{q}{q_1}=\frac{Z\, L^2}{8\cdot 1{,}71\, l_1^2}\cdot\frac{W_1}{W_2}.$$

In Gl. (4) wird jetzt auf der linken Seite nicht das Fließmoment des Stützquerschnitts, sondern das des Trägers mit der Stützweite $l_1$ eingesetzt. Es ist außerdem die neue Bedeutung von $L^2$ zu beachten.

$$(6)\qquad \frac{q_2\, l_1^2}{Z}=\frac{q_2}{2}\left(\frac{l_1^2}{4}-\frac{q_1^2 L^4}{q_2^2\cdot 64\, l_1^2}\right)-\frac{q_1 L^2}{16}+\frac{q_1^2 L^4}{q_2^2\cdot 64\, l_1^2}.$$

Hieraus erhält man für $m=\frac{q_1}{q_2}$

$$m=\frac{l_1^2}{L^2}\left(4\pm\sqrt{\frac{128}{Z}}\right).$$

$$\nu=\frac{1}{m\,n}=1{,}71$$

$$=\frac{L^2}{l_1^2\left(4\pm\sqrt{\frac{128}{Z}}\right)}\cdot\frac{8\cdot 1{,}71\, l_1^2\, W_2}{Z\, L^2\, W_1}=\frac{8\cdot 1{,}71\, W_2}{(4\,Z\pm\sqrt{128\,Z})\, W_1}$$

liefert für $Z$ die Gleichung

$$4\,Z\pm\sqrt{128\,Z}=8\cdot\frac{W_2}{W_1} \quad\text{und}\quad Z=4+2\cdot\frac{W_2}{W_1}+4\sqrt{1+\frac{W_2}{W_1}}.$$

Die Richtigkeit dieses Wertes kann man leicht durch Einsetzen von $W_2$ nachprüfen.

Für den Balken auf zwei Stützen ist $W_2=0$ und $Z=4+4=8$, für den durchlaufenden Balken mit gleichem Profil in beiden Feldern $W_2=W_1$ und

$$Z=4+2+4\sqrt{2}=2(3+\sqrt{8})=\frac{2}{3-\sqrt{8}}=11{,}63,$$

der gleiche Wert wie oben.

Wäre $W_2>W_1$, dürfte in der Gleichung für $Z$ der Bruch $\frac{W_2}{W_1}$ jedoch nur 1 gesetzt werden, denn es ist offen ersichtlich, daß die Tragfähigkeit eines Endfeldes durch Verstärken des zweiten (Mittelfeldes) nicht größer werden kann, da das Fließmoment über der Stütze den Wert $M_F=\frac{q_1 L^2}{8\, W_1}$ nicht zu überschreiten vermag. An einem Beispiel sei das Ergebnis erläutert. Ein Träger mit den Stützweiten $l_1=7{,}0$ m, $l_2=6{,}0$ m $=l_3=l_4$ sei für die Gebrauchslast $q=0{,}5$ t/m zu bemessen. Dann geschieht das in der Praxis fälschlicherweise immer so:

Endfeld

$$M=0{,}5\cdot\frac{7{,}0^2}{11}=2{,}33 \text{ mt},$$

I 18 $\quad W=161 \text{ cm}^3 \quad \sigma=\frac{223}{161}=1{,}380 \text{ t/cm}^2.$

Mittelfeld

$$M=0{,}5\cdot\frac{6{,}0^2}{16}=1{,}12 \text{ mt},$$

I 14 $\quad W=81{,}9 \text{ cm}^3 \quad \sigma=\frac{112}{81{,}9}=1{,}370 \text{ t/cm}^2.$

Da aber das Fließmoment am eingespannten Ende des Endfeldes nicht $M_F=161\cdot 2{,}4=386{,}4$ t·cm, sondern nur $M_F=81{,}9\cdot 2{,}4=196{,}56$ t·cm, die Entlastung des Endfeldes also bedeutend geringer ist, als bei der Ermittlung von $Z=11$ zugrunde gelegt, ist die Sicherheit natürlich auch nicht $\nu=1{,}71$.

Das Endfeld hätte mit

$$Z=4+2\cdot\frac{81{,}9}{161}+4\sqrt{1+\frac{81{,}9}{161}}=9{,}93$$

für $M=0{,}5\cdot\frac{7{,}0^2}{9{,}93}=2{,}46$ mt berechnet werden müssen. Dafür ist aber die Spannung bei dem Profil I 18

$$\sigma=\frac{246}{161}=1{,}530 \text{ t/cm}^2 \quad\text{und}\quad \nu=\frac{2{,}4}{1{,}53}=1{,}57.$$

Für das Endfeld müßte also I 20 gewählt werden.

Hierfür wäre

$$Z=4+2\cdot\frac{81{,}9}{214}+4\sqrt{1+\frac{81{,}9}{214}}=9{,}63,$$

$$M=0{,}5\cdot\frac{7{,}0^2}{9{,}63}=2{,}55 \text{ mt} \quad\text{und}\quad \sigma=\frac{255}{214}=1{,}195 \text{ t/cm}^2.$$

Für ein Mittelfeld wird auf ähnliche Weise

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 2 \cdot \frac{W_3}{W_1} + 4\sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1} + \frac{W_3}{W_1} + \frac{W_2\, W_3}{W_1^2}}$$

gefunden, wobei $W_1$ das Widerstandsmoment des betrachteten Feldes, $W_2$ und $W_3$ die der Nachbarfelder sind. Die Ableitung ist der Raumersparnis wegen wieder fortgelassen.

Von der Richtigkeit der Formel kann man sich jedoch leicht überzeugen. Ist $W_1 = W_2 = W_3$, so ergibt sich $Z = 4 + 2 + 2 + 4\sqrt{4} = 16$, der Wert für ein Mittelfeld des Durchlaufträgers mit gleichbleibendem Querschnitt.

Setzt man $W_3 = 0$, ist

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 4\sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1}},$$

dies ist der Wert für das Endfeld, wenn das Nachbarfeld ein anderes Profil aufweist.

**Verschiedene gleichmäßig verteilte Belastung in den einzelnen Feldern.**

Wir betrachten wieder den Dreistützträger von Bild 3. Jetzt seien aber die Gebrauchslasten $q$ t/m im Feld $l_1$ und $p$ t/m im Feld $l_2$. Wird die Last $q$ unter Beibehaltung von $p$ vergrößert, so läßt sich wieder ein Wert $q_1$ bestimmen, für den Gl. (5) gelten.

Allerdings ist jetzt

$$L^2 = \frac{l_1^3 + l_2^3 \cdot \frac{p}{q_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}}{l_1 + l_2 \cdot \frac{J_1}{J_2}}.$$

Zwar ist durch die Gleichung

$$n = \frac{q}{q_1} \cdot \frac{Z\,L^2}{8 \cdot 1{,}71\, l_1^2} \cdot \frac{W_1}{W_2}$$

$q_1$ nicht explizit dargestellt, da es noch in $L^2$ enthalten ist, aber dies ist für das Endergebnis unwesentlich.

In Gl. (6), die für den vorliegenden Fall ihre Form beibehält, ist nämlich das gleiche $L^2$ einzuführen, das wir in Gl. (5) einsetzen mußten. Bei der Ermittlung von $\nu$ hebt es sich heraus und wir erhalten für $\nu$ wieder den gleichen Wert

$$\nu = \frac{8 \cdot 1{,}71\, W_2}{(4\,Z \pm \sqrt{128\,Z})\, W_1}$$

und somit

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 4\sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1}}.$$

Es spielt also bei der Berechnung eines Feldes die Belastung des Nachbarfeldes gar keine Rolle, sie könnte auch Null sein. Durch den Unterschied der Belastungen wird lediglich die Lage von $q_1$ zwischen $q$ und $q_2$ verändert, das Endergebnis von $\nu$ jedoch nicht berührt.

**Folgerung.**

Soll ein durchlaufender Balken von verschiedenen Stützweiten und verschiedenen gleichmäßig verteilten Belastungen in den einzelnen Feldern nach der Plastizität berechnet werden, so ist jedes Feld für $M = \frac{q\,l^2}{Z}$ zu bemessen, wobei für $q$ und $l$ die zu dem betreffenden Feld gehörigen Werte und für

$$Z = 4 + \frac{2\,W_2}{W_1} + \frac{2\,W_3}{W_1} + 4\sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1} + \frac{W_3}{W_1} + \frac{W_2\,W_3}{W_1^2}}$$

einzusetzen ist. $W_1$ ist das Widerstandsmoment des betrachteten Feldes, $W_2$ und $W_3$ die der Nachbarfelder. Die Stützweiten und Belastungen der Nachbarfelder sind völlig ohne Belang.

Die Formel für $Z$ ist allgemein gültig, also auch für die Endfelder, für die einfach $W_3 = 0$ zu setzen ist. Sie gilt für

$$0 \leqq \frac{W_2}{W_1} \leqq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \frac{W_3}{W_1} \leqq 1.$$

Für $W_2 > W_1$ und $W_3 > W_1$ sind die Quotienten $\frac{W_2}{W_1}$ und $\frac{W_3}{W_1}$ gleich 1 zu setzen.

## Verschiedenes.

**Ergänzung zu dem Aufsatze „Die Festigkeit leichtgekrümmter Druckstäbe aus Stahl bei schwingender Belastung".** Stahlbau 1940, H. 23/24.

Zunächst sei auf einige sinnstörende Druckfehler verwiesen. In Gl. (8), S. 129, fehlt im Zähler des zweiten Gliedes die abschließende runde Klammer. Gl. (22), S. 130, muß lauten:

$$(22) \qquad \lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\, \pi^2}\right)}.$$

In Gl. (32), S. 131, ist das zweite Glied mit dem Faktor $\left(\frac{u_0}{l}\right)$ zu multiplizieren.

Hinsichtlich der Aufstellung der Gl. (16) u. (31) ist textlich folgendes zu ergänzen. Die angegebene Näherungslösung führt zu einer kritischen Last, die etwas kleiner ist als die wirkliche Tragfähigkeit. Aus diesem Grunde wurde zum Ausgleich bei der Aufstellung der Biegemomente (16) und (31) auf den hier unwesentlichen sekundären Einfluß der die Krümmung verstärkenden Trägheitskräfte bewußt verzichtet (der primäre und maßgebliche Einfluß der Trägheitskräfte ist bereits in der Durchbiegung enthalten). Die genauen Werte für die Biegemomente erhält man am einfachsten aus Gl. (7), S. 129. Es ergibt sich dann gemäß Gl. (19), S. 130, die für die Ermittlung der kritischen Axialspannung im Falle reiner Schwellbeanspruchung maßgebende Gl. (20), S. 130, in der etwas geänderten Form

$$(20)' \qquad \left(1 - \frac{\sigma_{kr}\, \lambda^2}{2\, \pi^2 E}\right)\left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\, \pi^2}\right)\right] - \frac{\sigma_{kr}\, \lambda}{(\sigma_F - \sigma_{kr})}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2\, \pi^2 E}\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\, \pi^2}\right)\right]\left(\frac{u_0}{l}\right) = 0.$$

Die einer reinen Wechselbeanspruchung zugeordnete, der Gl. (32), S. 131, entsprechende genauere Beziehung lautet:

$$(32)' \qquad \left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\, \pi^2}\right)\right] - \frac{\sigma_{kr}\, \lambda}{(\sigma_F - \sigma_{kr})}\left(\frac{u_0}{l}\right) = 0.$$

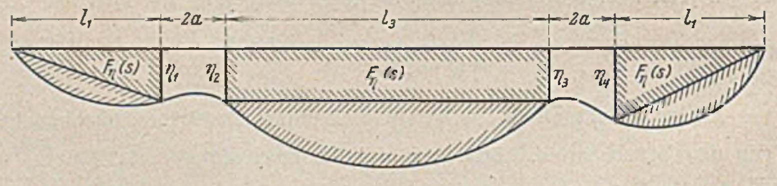
Die Verwendung der Gl. (20)' u. (32)' an Stelle der Gl. (20) u. (32) führt zu ganz unwesentlich kleineren kritischen Spannungen (im Bereiche $\lambda = 200$ wird die kritische Spannung um höchstens 3% kleiner), doch sei nochmals ausdrücklich hervorgehoben, daß hierdurch der Genauigkeitsgrad der gegebenen Näherungslösung nicht verbessert, sondern verschlechtert wird.

Am Schlusse verweise ich noch auf eine mir während der Niederschrift dieser Zeilen bekanntgewordene Arbeit von Herrn Dr. habil. E. Mettler, Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast (Mitteilungen aus den Forschungsanstalten des Gutehoffnungshütte-Konzerns, Bd. 8, Heft 1, Februar 1940), in welcher das Problem des mittig durch eine zeitlich veränderliche Längskraft beanspruchten Stabes einer strengen Lösung zugeführt wird. Dozent Dr. Karl Jäger.

**Berichtigung**

zu dem Aufsatz „Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers" in Stahlbau 1940, Heft 21/22.

Bild 7 auf S. 112 soll folgendermaßen sein:




Und auf der gleichen Seite muß es statt

$$F_\eta(s) = \frac{1}{2}\left[(\eta_1 + \eta_4)\, l_1' + (\eta_2 + \eta_3)\, l_3'\right]$$

heißen:

$$F_\eta(s) = \frac{1}{2}\left[(\eta_1 + \eta_4)\, l_1 + (\eta_2 + \eta_3)\, l_3\right].$$

Infolgedessen sind in Gl. (27a), (28), (29) u. (29)' sowie in die Ausdrücke $\frac{a}{2}(l_1\, C_{\mathrm{I}} + l_3'\, C_{\mathrm{III}})$ und $\frac{a}{2\,\varrho_3}(\lambda\, l_1\, l_1'' + l_3\, l_3'')$ der Gl. (31) und Gl. (31)' statt $l_1$, $l_1''$ und $l_3'$ die Größen $\nu_1\, l_1$, $\nu_1''\, l_1$ und $l_3$ einzusetzen. Die zahlenmäßige Auswirkung dieser Richtigstellung ist belanglos.

K. Klöppel, K. Lie.



Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.