

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 11. April 1941

Heft 8/9

Alle Rechte vorbehalten.

Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens.

Von Ernst Chwalla und Friedrich Jokisch in Brünn.

1. Einführung.

Wir untersuchen einen Stockwerkrahmen, der aus geraden, axial undeformablen Stäben besteht und in den Knotenpunkten durch ein System von Kräften — die sogenannte „Baubelastung“ — belastet wird. Versehen wir alle diese Kräfte mit einem gemeinsamen Multiplikator ν , so lassen sich — wenn die üblichen idealisierenden Voraussetzungen der Knicktheorie (ideal gerade Stabachsen, ideal mittige Krafteintragung, ideal homogener Werkstoff) erfüllt sind — bestimmte kritische Werte ν_{Ki} angeben, die den idealen Knickbelastungszuständen des Rahmens (den „Verzweigungsstellen“ des Gleichgewichts, das zwischen den inneren und den äußeren Kräften besteht) zugehören. Diese idealen Knickbelastungszustände sind dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedene, unmittelbar benachbarte Gleichgewichtsfiguren — die gegebene, biegemomentenfreie und eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur — zur Ausbildung gelangen können. Die kleinste aller positiven und reellen Zahlen ν_{Ki} stellt die der gegebenen Baubelastung zugeordnete „ideale Knicksicherheitszahl“ dar und bestimmt die für die Stabilitätssicherung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knickbelastung.

Bei Rahmen, die symmetrisch gebaut und symmetrisch belastet sind, brauchen wir die Ausbildung eines idealen Knickbelastungszustandes nicht mehr an die Voraussetzung eines biegemomentenfreien Ausgangszustandes zu binden. Die Gefahr einer Gleichgewichtsverzweigung besteht hier auch in jenen Fällen, in denen die Riegel und Stiele des Rahmens durch Querlasten beansprucht werden und daher schon vor dem Ausknicken des Rahmens Biegemomente und Querkräfte aufweisen. Da die theoretisch strenge Bestimmung von ν_{Ki} bei dieser Art von Instabilitätserscheinungen — die auch bei den Bogenträgern von Bedeutung ist und kurz als „Symmetrieknickung“ bezeichnet werden kann — auf große Schwierigkeiten stößt, wurde vorgeschlagen¹⁾, die Stabilitätsuntersuchung näherungsweise für eine Ersatzbelastung durchzuführen, die dadurch gekennzeichnet ist, daß die unter der gegebenen Belastung wirksamen Axialkräfte als äußere Doppelkräfte an den Stabenden — also in den Knotenpunkten des Rahmens — mittig angreifen und daher die gleiche Normalkraftverteilung wie die gegebene Baubelastung hervorrufen. Das Problem der Ermittlung von ν_{Ki} ist damit auf das früher geschilderte Problem zurückgeführt.

Mit Rücksicht auf die hohe statische Unbestimmtheit der vielzelligen Stockwerkrahmen ist es zweckmäßig, bei der Stabilitätsuntersuchung nicht die „Kräfte methode“, sondern die „Deformationsmethode“ anzuwenden — also aus den verfügbaren Bedingungsgleichungen nicht die Verschiebungsgrößen, sondern die Schnittgrößen zu eliminieren und die Komponenten des Verschiebungszustandes mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen; als Unbekannte treten dann bloß die Verdrehungswinkel der Rahmenknoten und die Axialverschiebungen der Rahmenriegel auf. Da der Rahmen voraussetzungsgemäß nur in den Knotenpunkten belastet ist, sind die Gleichungen, die wir für diese Unbekannten anschreiben können, nicht nur linear, sondern auch homogen: sie besitzen daher nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung $D_K=0$ stellt die gesuchte Knickbedingung dar und dient zur Berechnung von ν_{Ki} ²⁾.

Die Anwendung dieses unter dem Namen „Knotendrehwinkelverfahren“ allgemein bekannten Lösungsverfahrens bietet den großen Vorteil, daß die einzelnen Zeilen der Koeffizientendeterminante D_K unmittelbar

angeschrieben werden können und daß die Zahl der Unbekannten — verglichen mit der Zahl der statisch überzähligen Größen — verhältnismäßig klein ist; das Ausrechnen von D_K und Aufstellen der Knickbedingung bereitet daher nur wenig Mühe. Außerdem entfällt der bei den baustatischen Anwendungen des Knotendrehwinkelverfahrens erforderliche, durch die Notwendigkeit der Rückrechnung der Schnittgrößen aus den gefundenen Verschiebungsgrößen bedingte zusätzliche Aufwand an Rechenarbeit.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die ebene Stabilität von Stockwerkrahmen, deren Querschnitte stabweise konstant und in ihren Abmessungen sehr klein im Vergleich zu den Stablängen sind. Wir setzen, wie wir schon einleitend erwähnten, axial undeformbare Stäbe voraus (vgl. dazu auch den 8. Abschnitt) und vernachlässigen den Einfluß, den die Schubverzerrung auf die Größe von ν_{Ki} nimmt. Ferner verlangen wir, daß die äußeren Lasten ihre Richtungen auch während des Ausknickens des Rahmens beibehalten und daß das Ausknicken innerhalb des Hookeschen Formänderungsbereiches erfolgt.

2. Die Grundbeziehungen.

a) Druckstäbe.

Die der idealen Knickbelastung zugeordnete Verzweigungsstelle des Gleichgewichts ist, wie wir schon feststellten, dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedene Gleichgewichtsfiguren — die biegemomentenfreie und die infinitesimal ausgebogene — gleich gut möglich sind. Wenn wir uns den Rahmen der gesuchten Knickbelastung unterworfen und die erste dieser beiden Gleichgewichtsfiguren in die benachbarte zweite übergeführt denken, werden die einzelnen Stäbe des Rahmens unendlich wenig verbogen. Die Enden eines beliebig herausgegriffenen, die Rahmenknoten a und b verbindenden Stabes (Bild 1) verdrehen sich hierbei gemeinsam mit den anschließenden Rahmenknoten um die unendlich kleinen Knotendrehwinkel φ_a , φ_b , und die Stabsehne \overline{ab} erfährt eine Verdrehung um den infinitesimalen Stabdrehwinkel ψ_{ab} ; außer der endlich großen Druckkraft S_{ab} gelangen noch die unendlich kleinen Endmomente M_{ab} , M_{ba} und die unendlich kleinen Stützkkräfte V_{ab} zur Wirkung.

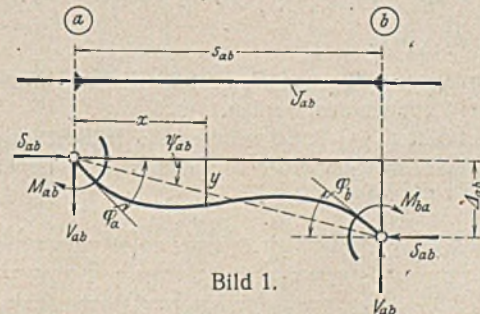


Bild 1.

Die Endmomente, die Knotendrehwinkel und die Stabdrehwinkel werden im Uhrzeigersinn positiv gezählt. Die Reihenfolge der Zeiger a, b ist nur bei den Endmomenten von Bedeutung, da das linke Endmoment M_{ab} vom rechten Endmoment M_{ba} unterschieden werden muß; bei allen übrigen in Bild 1 angegebenen Größen kann statt ab ebensogut auch ba geschrieben werden. Die Druckkraft S_{ab} wird mit ihrem Absolutwert in die Rechnung eingeführt.

Die dem Stab (ab) zugeordnete Differentialgleichung der Biegelinie, die die infinitesimalen Ausbiegungen y mit den infinitesimalen Biegemomenten M_x verknüpft und

¹⁾ E. Chwalla, Bauing. 19, 1938, S. 69; E. Chwalla und C. F. Kolbrunner, Stahlbau 10, 1937, S. 121, und 11, 1938, S. 73.

²⁾ Vgl. dazu auch K. Thälau und A. Teichmann, Aufgaben aus der Flugzeugstatik, IV. Kap., Berlin 1933, sowie E. Chwalla, Anzeiger Akad. d. Wiss. in Wien, 1938, S. 73.

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{M}_x}{EJ_{ab}} = 0$$

lautet, geht, wenn wir sie zweimal nach x differenzieren und die Hilfsgröße

$$(2) \quad \omega = s_{ab} \sqrt{\frac{S_{ab}}{EJ_{ab}}}$$

einbringen, in die Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + \left(\frac{\omega}{s_{ab}}\right)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

über. Ihre allgemeine Lösung

$$(4) \quad y = C_1 + C_2 \cdot \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_3 \cdot \cos \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_4 \cdot \sin \frac{\omega x}{s_{ab}}$$

enthält vier Integrationskonstante, die durch die vier Randbedingungen

$$(5) \quad \begin{cases} x=0, y=0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \varphi_a \\ x=s_{ab}, y=\psi_{ab} s_{ab} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \varphi_b \end{cases}$$

bestimmt sind und der Reihe nach die Größe

$$(6) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(\omega - \sin \omega) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a)(1 - \cos \omega)}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \\ C_2 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \varphi_a - C_1 \\ C_3 = -C_1 \\ C_4 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(1 - \cos \omega) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a) \sin \omega}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

besitzen. Für die Endmomente M_{ab} und M_{ba} lassen sich die Beziehungen

$$(7) \quad \begin{cases} M_{ab} \equiv \mathfrak{M}_x|_{x=0} = -EJ_{ab} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} \\ M_{ba} \equiv -\mathfrak{M}_x|_{x=s_{ab}} = +EJ_{ab} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=s_{ab}} \end{cases}$$

ansprechen, die nach Beachtung von (4) u. (6) und Einführung der Hilfsgrößen

$$(8) \quad \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{\omega \cdot \sin \omega - \omega^2 \cdot \cos \omega}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \beta, \quad \beta = \frac{\omega^2 - \omega \cdot \sin \omega}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

in die „Grundbeziehungen“

$$(9) \quad \begin{cases} M_{ab} = A_{ab} \varphi_a + B_{ab} \varphi_b - (A_{ab} + B_{ab}) \psi_{ab} \\ M_{ba} = A_{ab} \varphi_b + B_{ab} \varphi_a - (A_{ab} + B_{ab}) \psi_{ab} \end{cases}$$

übergehen. Ist der Stab nur im Endpunkt b mit einem elastisch drehbaren Knoten verbunden, im Endpunkt a hingegen gelenkig gelagert, so nehmen diese Grundbeziehungen die Form

$$(10) \quad \begin{cases} M_{ab} = 0 \\ M_{ba} = \left(1 - \frac{B_{ab}}{A_{ab}}\right) (A_{ab} + B_{ab}) (\varphi_b - \psi_{ab}) \end{cases}$$

an; ist der Stab im Endpunkt b gelenkig gelagert, so gilt

$$(11) \quad \begin{cases} M_{ab} = \left(1 - \frac{B_{ab}}{A_{ab}}\right) (A_{ab} + B_{ab}) (\varphi_a - \psi_{ab}) \\ M_{ba} = 0. \end{cases}$$

Die zur Berechnung von A_{ab} und B_{ab} erforderlichen Hilfswerte α und β können aus Tafel 1 entnommen werden.

Ist die Druckkraft $S_{ab} = 0$, so nehmen die Hilfsgrößen (8), wie wir mit Hilfe der Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen leicht feststellen können, die Grenzwerte

$$(12) \quad \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right) - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{2} + \frac{\omega^6}{24}\right)}{\left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}\right) - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{4EJ_{ab}}{s_{ab}} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\omega^2 - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)}{\left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}\right) - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} \end{cases}$$

an; für die Gln. (9) ergeben sich dann die bekannten, für querlastfreie, axial unbelastete Stäbe geltenden Grundbeziehungen

$$(13) \quad \begin{cases} M_{ab} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} (2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) \\ M_{ba} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} (2\varphi_b + \varphi_a - 3\psi_{ab}). \end{cases}$$

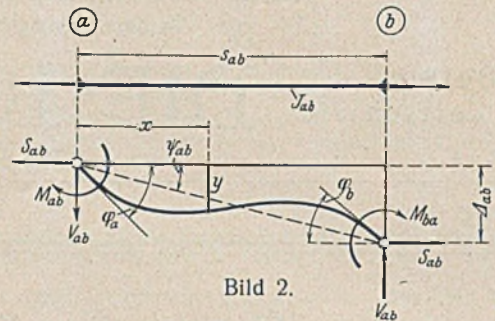


Bild 2.

b) Zugstäbe.

Ist S_{ab} eine Zugkraft (Bild 2), so geht die Differentialgleichung (1), wenn wir sie zweimal nach x differenzieren und die Hilfsgröße (2) einbringen, in die Differentialgleichung

$$(14) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - \left(\frac{\omega}{s_{ab}}\right)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

über, deren allgemeine Lösung

$$(15) \quad y = C_1 + C_2 \cdot \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_3 \cdot \cos \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_4 \cdot \sin \frac{\omega x}{s_{ab}}$$

lautet; die Integrationskonstanten sind wieder durch die Randbedingungen (5) bestimmt und betragen

$$(16) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(\sin \omega - \omega) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a)(\cos \omega - 1)}{2(\cos \omega - 1) - \omega \cdot \sin \omega} \\ C_2 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \varphi_a - C_1 \\ C_3 = -C_1 \\ C_4 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(\cos \omega - 1) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a) \sin \omega}{2(\cos \omega - 1) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

Tafel 1.

ω	α	β
0,00	4,000	2,000
0,10	3,999	2,000
0,20	3,995	2,001
0,30	3,988	2,003
0,40	3,979	2,005
0,60	3,952	2,012
0,80	3,914	2,022
1,00	3,865	2,034
1,20	3,804	2,050
1,40	3,732	2,070
1,60	3,647	2,093
1,80	3,548	2,120
2,00	3,436	2,152
2,20	3,309	2,189
2,40	3,166	2,233
2,60	3,005	2,283
2,80	2,825	2,343
3,00	2,624	2,412
3,20	2,399	2,492
3,40	2,146	2,588
3,60	1,862	2,702
3,80	1,540	2,838
4,00	1,173	3,004
4,20	0,751	3,207
4,40	0,259	3,462
4,60	-0,323	3,787
4,80	-1,029	4,211
5,00	-1,909	4,785
5,20	-3,052	5,592
5,40	-4,625	6,798
5,60	-6,992	8,759
5,80	-11,111	12,428
6,00	-20,637	21,454

Tafel 2.

ω	α	β
0,00	4,000	2,000
0,10	4,001	2,000
0,20	4,005	1,999
0,30	4,012	1,997
0,40	4,021	1,995
0,60	4,048	1,988
0,80	4,085	1,979
1,00	4,132	1,968
1,20	4,189	1,954
1,40	4,255	1,938
1,60	4,330	1,921
1,80	4,415	1,902
2,00	4,508	1,882
2,20	4,608	1,860
2,40	4,716	1,837
2,60	4,831	1,814
2,80	4,953	1,791
3,00	5,081	1,767
3,20	5,214	1,742
3,40	5,353	1,718
3,60	5,497	1,694
3,80	5,645	1,671
4,00	5,788	1,647
4,20	5,953	1,625
4,40	6,112	1,603
4,60	6,275	1,581
4,80	6,440	1,561
5,00	6,608	1,541
5,20	6,779	1,521
5,40	6,952	1,503
5,60	7,121	1,485
5,80	7,331	1,470
6,00	7,446	1,450

Die „Grundbeziehungen“ Gl. (9), (10) u. (11) bleiben unverändert in Geltung, nur müssen an Stelle von (8) die Hilfsgrößen

$$(17) \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \alpha & \alpha = \frac{\omega \cdot \sin \omega - \omega^2 \cdot \cos \omega}{2(\cos \omega - 1) - \omega \cdot \sin \omega} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \beta & \beta = \frac{\omega^2 - \omega \cdot \sin \omega}{2(\cos \omega - 1) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

eingeführt werden; α und β können aus Tafel 2 entnommen werden. Ist die Zugkraft $S_{ab} = 0$, so nehmen die Hilfsgrößen (17), wie wir mit Hilfe der Reihenentwicklung der hyperbolischen Funktionen leicht feststellen können, die schon in (12) angegebenen Grenzwerte

$$(18) \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right) - \left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{2} + \frac{\omega^6}{24}\right)}{\left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}\right) - \left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{4EJ_{ab}}{s_{ab}} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\omega^2 - \left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)}{\left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}\right) - \left(\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} \end{cases}$$

an. Die Gl. (9) gehen dann in die für querlastfreie, axial unbelastete Stäbe geltenden Grundbeziehungen (13) über.

3. Die Knickbedingung.

Fall I: Die Riegel erfahren beim Ausknicken des Rahmens keine axialen Verschiebungen.

Werden die Riegel des Stockwerkrahmens in axialer (waagerechter) Richtung festgehalten, dann werden die Knotenpunkte — wenn wir von der im ersten Abschnitt erwähnten biegemomentenfreien Gleichgewichtslage in die infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtslage übergehen — nur um Beträge höherer Kleinheitsordnung verschoben, so daß die Stabdrehwinkel für sämtliche Stäbe gleich Null gesetzt werden dürfen. Die Grundbeziehungen (9), (10), (11) enthalten dann als Unbekannte bloß die Knotendrehwinkel φ .

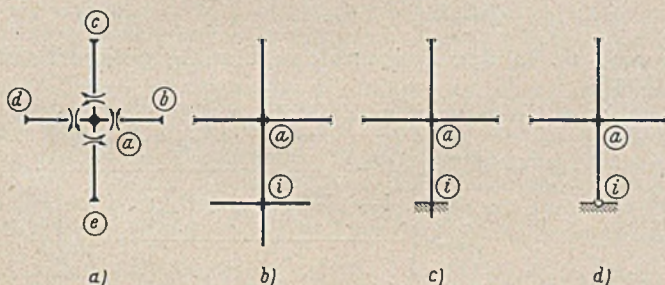


Bild 3a bis d.

Zur Bestimmung dieser Unbekannten werden die Knotengleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = 0$ herangezogen. Denken wir uns beispielsweise den elastisch drehbaren Knoten a , von dem die Stäbe (ab) , (ac) , (ad) und (ae) abzweigen, aus dem infinitesimal ausgeknickten Stockwerkrahmen herausgeschnitten und die Reaktionen der im Uhrzeigersinn positiv gezählten Stabendmomente M_{ab} , M_{ac} , M_{ad} , M_{ae} angebracht (Bild 3a), so lauten diese „Knotengleichgewichtsbedingungen“

$$(19) \quad \Sigma_i M_{ai} = (M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae}) = 0,$$

wobei der Zeiger i der Reihe nach allen Nachbarknoten von a zugeordnet wird. Ist der Nachbarknoten i ebenfalls ein elastisch drehbarer Knoten (Bild 3b), so ist das Stabendmoment M_{ai} durch die Grundbeziehung (9)

$$(20) \quad M_{ai} = A_{ai} \varphi_a + B_{ai} \varphi_i$$

bestimmt; ist der Stab (ai) im Punkt i starr eingespannt (Bild 3c), so gilt $\varphi_i = 0$ und daher

$$(21) \quad M_{ai} = A_{ai} \varphi_a,$$

und ist er im Punkt i gelenkig gelagert (Bild 3d), so wird (20) durch die aus (11) folgende Beziehung

$$(22) \quad M_{ai} = \left(1 - \frac{B_{ai}}{A_{ai}}\right) (A_{ai} + B_{ai}) \varphi_a$$

ersetzt.

Hat der Rahmen k Stück elastisch drehbare Knoten, so lassen sich k Knotengleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = 0$ nach Art von Gl. (19) un-

mittelbar anschreiben. Nach Einführung der Grundbeziehungen (20) [bzw. (21) oder (22)] gehen diese Gleichgewichtsbedingungen in ein System von k linearen, homogenen Gleichungen für die unendlich kleinen Knotendrehwinkel φ über, das nur dann eine von der trivialen Nulllösung (alle $\varphi = 0$) verschiedene Lösung zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung

$$(23) \quad D_K = 0$$

stellt demnach die gesuchte Knickbedingung vor.

Wir gehen bei der Stabilitätsuntersuchung des Rahmens von der einleitend erwähnten, nach Größe und Richtung gegebenen „Baubelastung“ aus, unter der im Stab (ab) des Rahmens eine bestimmte Stabkraft (Zug- oder Druckkraft) entsteht. Den Absolutwert dieser Stabkraft wollen wir mit S_{ab}^* bezeichnen. Werden die einzelnen Baualasten mit dem gemeinsamen Multiplikator ν versehen und wächst ν bis zum gesuchten kritischen Wert ν_{Ki} an, dann geht die Baubelastung in die gesuchte ideale Knickbelastung und die Stabkraft S_{ab}^* in die Stabkraft $S_{ab} = \nu_{Ki} S_{ab}^*$ über, so daß die Beziehung (2) auch in der Form

$$(24) \quad \omega = s_{ab} \sqrt{\frac{\nu_{Ki} S_{ab}^*}{EJ_{ab}}} = \sqrt{\nu_{Ki}} \left(s_{ab} \sqrt{\frac{S_{ab}^*}{EJ_{ab}}} \right)$$

angeschrieben werden kann. Wird der Stab (ab) gedrückt, so ist diese Beziehung in (8) einzusetzen, und wird er gezogen, so muß sie in (17) eingeführt werden; die Hilfsgrößen A und B , die wir für sämtliche Stäbe des Rahmens zu berechnen haben, sind dann bis auf den gemeinsamen Faktor $\sqrt{\nu_{Ki}}$ eindeutig bestimmt. Der Faktor $\sqrt{\nu_{Ki}}$, der in der Knickbedingung $D_K = 0$ als einzige Unbekannte auftritt, dient zur Festlegung der gesuchten idealen Knickbelastung.

Wenn die Baubelastung nicht zahlenmäßig, sondern allgemein durch Kräfte P oder Vielfache von P gegeben ist, können wir alle Stabkräfte des Rahmens durch P ausdrücken und die Knickbedingung nach dem idealen Knicklastwert P_{Ki} auflösen. Außer P werden zweckmäßigerweise auch noch andere Größen — ein beliebig gewähltes Vergleichsträgheitsmoment, eine beliebig gewählte Vergleichslänge und der Elastizitätsmodul E — aus der Rechnung herausgehoben; die Beziehung (2) erhält dann allgemein die Form

$$(25) \quad \omega = x \omega^*,$$

in der x einen für alle Stäbe des Rahmens gemeinsamen Beiwert bedeutet, der die einzige in der Knickbedingung $D_K = 0$ auftretende Unbekannte darstellt.

Die Knickbedingung $D_K = 0$ ist eine transzendente Gleichung und hat im allgemeinen unendlich viele positive und reelle Lösungen. Jeder dieser Lösungen ist eine bestimmte infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur zugeordnet, deren affines Bild als „Knickfigur“ bezeichnet wird. Baupraktisch bedeutungsvoll ist nur die kleinste aller dieser Lösungen; die übrigen („höheren“) Lösungen sind praktisch nur dann von Interesse, wenn die Ausbildung der ihnen zugeordneten Knickfiguren durch besondere konstruktive Maßnahmen erzwingen wird.

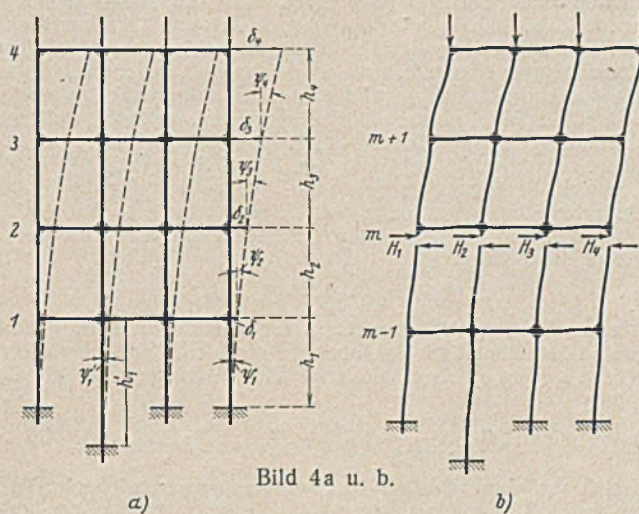


Bild 4a u. b.

Fall II: Die Riegel werden beim Ausknicken des Rahmens in axialer (waagerechter) Richtung verschoben.

Erfahren die Riegel Nr. 1, 2, 3, ... des Stockwerkrahmens — wenn wir die biegemomentenfreie Gleichgewichtslage in die infinitesimal ausgeknickte Lage überführen — axiale (waagerechte) Verschiebungen um die unendlich kleinen Beträge $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, so ergeben sich für die Stiele des Rahmens unendlich kleine Stabdrehwinkel ψ , die mit Bezug auf Bild 4a die Größe

$$(26) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{\Delta_1}{h_1} = \frac{\delta_1}{h_1}, & \psi_1' = \frac{\Delta_1}{h_1'} = \frac{\delta_1}{h_1'}, & \psi_2 = \frac{\Delta_2}{h_2} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2}, \\ \psi_3 = \frac{\Delta_3}{h_3} = \frac{\delta_3 - \delta_2}{h_3}, & \psi_4 = \frac{\Delta_4}{h_4} = \frac{\delta_4 - \delta_3}{h_4} \end{cases}$$

besitzen; die Stabdrehwinkel der Riegel haben wir, da die zugehörigen Knotenverschiebungen von höherer Ordnung klein sind, gleich Null zu setzen. Ebenso wie früher denken wir uns aus dem infinitesimal ausgeknickten Rahmen einen Knoten a herausgeschnitten, mit den Reaktionen der Stabendmomente M_{ab} , M_{ac} , M_{ad} , M_{ae} versehen (Bild 3a) und die Knotengleichgewichtsbedingung

$$(27) \quad \sum_i M_{ai} \equiv (M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae}) = 0$$

aufgestellt, wobei der Zeiger i der Reihe nach allen dem Knoten a benachbarten Knoten zuzuordnen ist. Wenn alle diese Nachbarknoten elastisch drehbar sind, können wir die Beziehungen (9) für die Stabendmomente in der Form (vgl. dazu Bild 5)

$$(28) \quad \begin{cases} M_{ab} = A_{ab} \varphi_a + B_{ab} \psi_b \\ M_{ac} = A_{ac} \varphi_a + B_{ac} \varphi_c - (A_{ac} + B_{ac}) \psi_{ac} \\ M_{ad} = A_{ad} \varphi_a + B_{ad} \varphi_d \\ M_{ae} = A_{ae} \varphi_a + B_{ae} \varphi_e - (A_{ae} + B_{ae}) \psi_{ae} \end{cases}$$

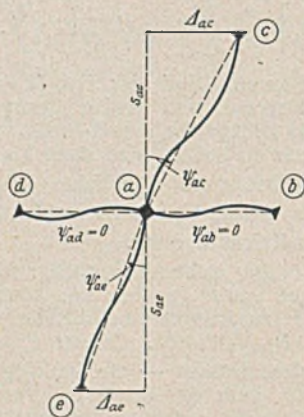


Bild 5.

anschreiben; ist der Stiel (ae) im Fußpunkt e starr eingespannt, so ist in die letzte dieser vier Gleichungszeilen $\varphi_e = 0$ einzuführen, und ist er im Fußpunkt e gelenkig gelagert, so muß diese Gleichungszeile durch

$$(29) \quad M_{ae} = \left(1 - \frac{B_{ae}}{A_{ae}}\right) (A_{ae} + B_{ae}) (\varphi_a - \psi_{ae})$$

ersetzt werden. Die Beiwerte A und B haben bei den einzelnen Stäben im allgemeinen verschiedene Größe; sie sind, wenn der Stab gedrückt wird, durch (8), und wenn er gezogen wird, durch (17) auszudrücken.

Hat der untersuchte Stockwerkrahmen k Stück elastisch drehbare Knoten und r Stück Riegel oder Stockwerke, so lassen sich k Knotengleichgewichtsbedingungen $\sum M = 0$ nach Art von (27) unmittelbar aufstellen. Diese Gleichgewichtsbedingungen bilden nach Einführung der Grundbeziehungen ein System von k Gleichungen, in denen als Unbekannte k Stück Knotendrehwinkel φ und r Stück Stabdrehwinkel ψ vorkommen. Diese Stabdrehwinkel müssen eliminiert werden, wozu wir weitere Gleichgewichtsbedingungen — die r Stück „Riegelgleichgewichtsbedingungen“ — benötigen. Um beispielweise die dem Riegel Nr. m (Bild 4b) zugeordnete Gleichgewichtsbedingung zu gewinnen, denken wir uns den infinitesimal ausgeknickten Stockwerkrahmen unmittelbar unterhalb dieses Riegels durchschnitten und für den abgeschnittenen Oberteil des belasteten Rahmens die Bedingung

$$(30) \quad \sum H \equiv (H_1 + H_2 + H_3 + H_4) = 0$$

aufgestellt. Greifen wir nun einen der durchschnittenen Rahmenstiele heraus und bezeichnen wir den oberen und unteren Endpunkt dieses Stiels mit o bzw. u (Bild 6), so erhalten wir für die waagerechte Stützkraft die Beziehung

$$(31) \quad H_{ou} = \frac{1}{s_{ou}} (M_{ou} + M_{uo} \pm S_{ou} \mathcal{J}_m),$$

wobei sich das obere der beiden übereinander geschriebenen Vorzeichen auf den Fall „ S_{ou} = Absolutwert einer Druckkraft“ und das untere auf den (praktisch bedeutungslosen) Fall „ S_{ou} = Zugkraft“ bezieht; die Größe

$$(32) \quad \mathcal{J}_m \equiv \delta_m - \delta_{m-1} = \psi_{ou} \cdot s_{ou}$$

stellt die waagerechte Relativverschiebung vor, die der Riegel Nr. m gegenüber dem Riegel Nr. $(m-1)$ erfährt.

Die in (31) auftretenden Stabendmomente lassen sich durch die Grundbeziehungen (9) ausdrücken, die nach Beachtung von (32)

$$(33) \quad \begin{cases} M_{ou} = A_{ou} \varphi_o + B_{ou} \varphi_u - (A_{ou} + B_{ou}) \frac{\mathcal{J}_m}{s_{ou}} \\ M_{uo} = A_{ou} \varphi_u + B_{ou} \varphi_o - (A_{ou} + B_{ou}) \frac{\mathcal{J}_m}{s_{ou}} \end{cases}$$

lauten und, wenn wir sie in (31) einführen, die Gleichung

$$(34) \quad H_{ou} = \frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) (\varphi_o + \varphi_u) - \mathcal{J}_m \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} \mp \frac{S_{ou}}{s_{ou}} \right] = \frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) (\varphi_o + \varphi_u) - \mathcal{J}_m \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} \mp \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3} \right]$$

liefern, wobei ω_{ou} durch Gl. (2) bestimmt ist. Wird der Stiel im Fußpunkt u starr eingespannt, so ist in dieser Beziehung $\varphi_u = 0$ zu setzen; wird er im Fußpunkt u gelenkig gelagert, so gilt mit Rücksicht auf (11) an Stelle von (34)

$$(35) \quad \begin{cases} M_{ou} = \left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou}) \left(\varphi_o - \frac{\mathcal{J}_m}{s_{ou}}\right) \\ M_{uo} = 0 \end{cases}$$

und daher

$$(36) \quad H_{ou} = \frac{1}{s_{ou}} \left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou}) \varphi_o - \mathcal{J}_m \left[\frac{\left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} \mp \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3} \right]$$

Die Gln. (34) bzw. (36) sind in die Riegelgleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ einzuführen. Wenn die vom Schnitt getroffenen Stiele in ihren Fußpunkten an elastisch drehbare Knoten angeschlossen sind (vgl. die unterhalb der Riegel Nr. 2, 3 oder 4 liegenden Stiele in Bild 4a), erhalten wir aus dieser Gleichgewichtsbedingung die Beziehung

$$(37) \quad \mathcal{J}_m = \frac{\sum \left[\frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) (\varphi_o + \varphi_u) \right]}{\sum \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} + C_{ou} \right]}$$

wenn sie in den Fußpunkten starr eingespannt sind (vgl. die unterhalb des Riegels Nr. 1 liegenden Stiele in Bild 4a)

$$(38) \quad \mathcal{J}_m = \frac{\sum \left[\frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) \varphi_o \right]}{\sum \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} + C_{ou} \right]}$$

und wenn sie in den Fußpunkten gelenkig gelagert sind, die Beziehung

$$(39) \quad \mathcal{J}_m = \frac{\sum \left[\frac{1}{s_{ou}} \left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou}) \varphi_o \right]}{\sum \left[\frac{\left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} + C_{ou} \right]}$$

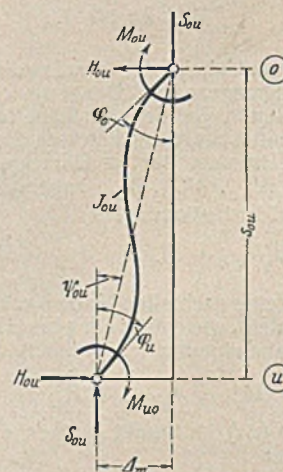


Bild 6.

Die Summen erstrecken sich in diesen Beziehungen über alle vom Schnitt getroffenen Stiele. Wird der Stiel, auf den sich der Summand bezieht, auf Druck beansprucht, so ist

$$(40) \quad C_{ou} = - \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3}$$

zu schreiben und A, B durch (8) festzulegen; wird er auf Zug beansprucht, so ist

$$(41) \quad C_{ou} = + \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3}$$

zu setzen und A und B mit Hilfe von (17) darzustellen.

Durch die Beziehung (37) bzw. (38) oder (39), die für jeden der r Stück Rahmenriegel anzuschreiben ist, werden die waagerechten Relativverschiebungen Δ_m und damit auch die Stabdrehwinkel

$$(42) \quad \psi_{ou} = \frac{\Delta_m}{s_{ou}}$$

Alle Rechte vorbehalten.

Bemerkungen zu DIN E 4114.

Knick- und Beulvorschriften für Stahlbau.

Von Prof. Dr. techn. Josef Fritsche, Prag, Deutsche Techn. Hochschule.

Die Berechnung der Druckstäbe wird durch die beabsichtigte Neufassung der Knickvorschriften gedanklich auf eine ganz neue Grundlage gestellt, wenn sich auch praktisch an den Werten σ_{dzu} nicht viel ändert. Es ist daher die Frage berechtigt, ob damit ein Fortschritt im Sinn einer besseren Anpassung der Berechnung an die wirklich im Bauwerk vorliegenden Verhältnisse erzielt wird, denn einer Weiterentwicklung der Vorschriften kann ja nur dieses Ziel vorschweben. Während bisher die Berechnung auf den ideal geraden und ideal mittig gedrückten Stab aufgebaut war, wird nun, um zum Ausdruck zu bringen, daß in Wirklichkeit diese Voraussetzungen um so weniger erfüllt sind, je größer das Schlankheitsverhältnis des Stabes ist, das Verhalten des Druckstabes dadurch zu beschreiben versucht, daß man die Druckkraft mit einer veränderlichen, aber an beiden Stabenden gleichen Außermitteigkeit a einwirken läßt. Es ist dabei völlig klar, daß diese Voraussetzungen der Rechnung baupraktisch ebensowenig erfüllt sind wie die früheren. Es wird daher eine Fiktion durch eine andere ersetzt. Wenn man daher von einem Fortschritt sprechen will, muß der Nachweis erbracht werden können, daß die neue Fiktion an die tatsächlich im Bauwerk vorliegenden Verhältnisse besser herankommt als die frühere, denn von einer Vereinfachung des Bemessungsverfahrens kann nicht gesprochen werden, da sich daran ja nicht viel ändert.

Was beim Vergleich der beiden Verfahren zunächst auf einen Fortschritt hinweist, ist die Zugrundelegung einer gleichen Knicksicherheit ν_K für alle Schlankheitsverhältnisse, denn es wird dadurch der Eindruck erweckt, daß es gelungen ist, an die wirklichen Verhältnisse im Bauwerk soweit heranzukommen, daß es sich erübrigt, durch eine veränderliche Sicherheit ν_K den erfahrungsgemäß stärker gefährdeten schlanken Stäben die notwendige Verstärkung zu geben; denn die Einführung einer veränderlichen Sicherheit weist ja immer darauf hin, daß es noch nicht gelungen ist, durch die Rechnung die im Bauwerk tatsächlich vorliegenden Gegebenheiten formelmäßig befriedigend zu erfassen. Dieser erste Eindruck erweist sich bei näherer Betrachtung leider als nicht ganz zutreffend, denn es wird lediglich die mit wachsendem λ benötigte, größere Knicksicherheit ν_K durch ein „baupraktisch unvermeidbares“ Außermitteigkeitsmaß $m_0 = C \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2$ ersetzt, das mit wachsendem λ auch immer größer wird und der vermeintliche Fortschritt schmilzt auf die Einführung einer anderen Größe zusammen, mit der man die vorhandenen Abweichungen von den angenommenen Berechnungsgrundlagen berücksichtigen will.

Nach der Niederschrift dieser Bemerkungen erschien eine 2. Fassung der auf die Bemessung von Druckstäben bezüglichen Vorschläge, deren Kennzeichen darin besteht, daß nun völlig von den Stabilitätsfragen des Druckstabes bzw. von den kritischen Lasten des außermittig beanspruchten Stabes bei elastisch-idealplastischen Verhalten des Werkstoffes abgesehen wurde. An die Stelle des Traglastverfahrens trat eine Beurteilung der Sicherheit nach dem Spannungsmaßstabe; wenn bei einer baupraktisch nicht vermeidbaren Außermitteigkeit des Lastangriffs die elastizitätstheoretisch ermittelte Größtspannung die Fließgrenze σ_F des einachsigen Zugversuchs erreicht, sollte demnach die Tragfähigkeit erschöpft sein und die zugehörige Schwerpunktspannung hätte an Stelle der Knickspannung σ_K zu treten. Daß man nach diesem Verfahren, das sich an die sogenannte Sekantenformel anlehnt, bei passender Wahl der baupraktisch unvermeidbaren Außermitteigkeiten einen durch die Erfahrung gutbestätigten Verlauf der Linie $\sigma_K(\lambda)$ erreichen kann, ist von Prof. Chwalla bereits ausführlich gezeigt worden. Es ist aber auch sehr genau bekannt, daß dieser Weg ganz unabhängig von der der Betrachtung zugrunde gelegten Fließbedingung nur bei biegemäßig richtig ausgebildeten Querschnittsformen zu theoretisch vertretbaren Ergebnissen führt. Querschnitte, bei denen ein maßgebender Teil der Fläche in der Nähe der Stabachse angeordnet ist, werden nach diesen Verfahren im Hinblick auf ihr Tragvermögen immer unterschätzt, und es kann nicht das erstrebenswerte Ziel einer gleichen Sicherheit für alle Stäbe erreicht werden. Diese Verhältnisse liegen nach der neuen Fassung sogar ungünstiger als beim früheren Vorschlag, der sich auf das elastisch-

auf die Knotendrehwinkel des infinitesimal ausgeknickten Stockwerkrahmens zurückgeführt. Die Stabdrehwinkel lassen sich auf diese Weise aus den Grundbeziehungen eliminieren, so daß in den k Stück Knotengleichgewichtsbedingungen (27), die wir für die k elastisch drehbaren Knoten des Rahmens aufstellen können, nur mehr die k Knotendrehwinkel als Unbekannte auftreten. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind in den Unbekannten linear und homogen und besitzen daher nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung

$$(43) \quad D_K = 0$$

stellt die gesuchte Knickbedingung vor; sie ist, wie wir an Hand von (24) und (25) geschildert haben, nach dem kritischen Multiplikator aufzulösen und dient zur Festlegung der idealen Knickbelastung. (Schluß folgt.)

1.

Die Festlegung der Knickspannung σ_K geschieht auf der Grundlage der Tragfähigkeit eines außermittig gedrückten Stabes rechteckigen Querschnitts unter Voraussetzung der sogenannten klassischen Plastizitätstheorie, die ein mit wachsender Belastung sich stetig ausbreitendes plastiziertes Gebiet annimmt. Auf die Erkenntnis, daß die Fließvorgänge beim Baustahl ganz anders verlaufen und nur durch Fließschichtenbildung zu erklären sind, wird dabei nicht Rücksicht genommen, und man stellt sich daher schon aus diesem Grunde im Gegensatz zu einem großen Teil der Werkstoffprüfer, die schon des öfteren darauf hingewiesen haben, daß das elastisch-idealplastische Kontinuum wohl eine für die mathematische Behandlung der Aufgaben geeignete Grundlage bildet, daß es jedoch die wirklich zu beobachtenden Erscheinungen nicht immer in befriedigender Weise wiedergibt¹⁾. Die Gegensätze zwischen klassischer und wirklichkeitstreuer Plastizitätstheorie klaffen und da noch nicht von der Durchsetzung der einen oder der anderen Auffassung gesprochen werden kann, scheint mir die Erwähnung zweckmäßig, daß in die Berechnungsvorschriften Grundlagen und Auffassungen eingeführt worden sind, die noch dem Streit der Meinungen unterliegen. Man kann sich allerdings auf den Standpunkt stellen, diesem Meinungsstreit nur akademische Bedeutung zuzuerkennen, mit um so größerer Berechtigung, als die Rechenergebnisse nach den beiden Auffassungen zahlenmäßig nicht erheblich voneinander abweichen; aber erwähnenswert ist diese Tatsache doch.

Neben diesen grundsätzlichen, vom praktischen Standpunkte jedoch mehr oder weniger belanglosen Bemerkungen entstehen aber durch die Ersetzung eines veränderlichen ν_K durch ein veränderliches m_0 eine Reihe von Querschnittsabhängigkeiten, die in den Erläuterungen nicht besprochen worden sind und die gelegentlich zu Ergebnissen führen, die mit den wahrscheinlich im Druckstabe zu erwartenden Verhältnissen nur schwer in Einklang zu bringen sind.

In dem Ansatz

$$(1) \quad m_0 = C \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2$$

sind m_0 und λ bezogene Größen, die einen Rückschluß auf den Einfluß der wirklichen Größen, der Stablänge s bzw. der Knicklänge s_K , des Fehlerhebels a des Lastangriffs und etwaiger Querschnittsgrößen nicht unmittelbar gestatten. Beschränkt man sich zunächst auf einen Querschnitt mit zwei Symmetrieachsen, dann ist

$$(2) \quad a = C k \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 = \frac{2C}{h} \left(\frac{s_K}{100} \right)^2$$

Das ist eine Form der Gl. (1), die eine Betrachtung auf ihre Übereinstimmung mit den im Stahlbauwerk wirklich vorliegenden Verhältnissen verdient. Beim Vergleich von Stäben mit gleicher Knicklänge ist der berücksichtigte Fehlerhebel a der Querschnittshöhe h in der Richtung des Ausknickens verkehrt verhältnismäßig; schwerbelasteten Stäben, die zu einer breiteren Ausbildung zwingen, wird ein kleinerer

¹⁾ J. Fritsche, Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. Stahlbau 1936, Heft 9. — Derselbe, Die Fließbehinderung bei der Biegung von Balken und Stützen aus Baustahl. Stahlbau 1938, Heft 7/8 u. 9.

Fehlerhebel a zugeordnet als leicht belasteten. Oft ist übrigens die Stabbreite nicht ausschließlich durch die Größe der angreifenden Kräfte, sondern auch durch andere bauliche Umstände bedingt. Wird aus irgendeinem Grunde ein Stab verbreitert, so wird damit für die Berechnung der Tragfähigkeit nach Gl. (2) ein kleineres a bzw. nach Gl. (1) ein kleineres m_0 eingeführt, da sich dadurch bei gleicher Knicklänge s_K das Schlankheitsverhältnis vermindert.

Bei Stäben mit nur einer Symmetrieachse liefert die Annahme (1) ganz verschiedene Außermittigkeiten des Lastangriffs, je nachdem ob dieser oberhalb oder unterhalb des Querschnittsschwerpunkts erfolgt. Unter Bezugnahme auf die Bezeichnungen von Bild 1 ist im ersten Falle

$$(3) \quad a_1 = C k_1 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 = \frac{C}{b_1} \left(\frac{s_K}{100} \right)^2,$$

im zweiten Falle

$$(4) \quad a_2 = C k_2 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 = \frac{C}{b_2} \left(\frac{s_K}{100} \right)^2 = a_1 \cdot \frac{b_1}{b_2}.$$

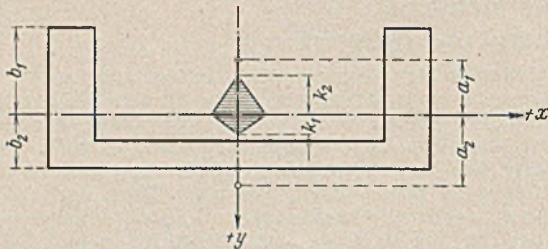


Bild 1.

Eine Begründung dieses Ergebnisses in den tatsächlichen Verhältnissen des gedrückten Stabes wird schwerlich gelingen; da durch den Fehlerhebel a Zufälligkeiten der Bauausführung erfaßt werden sollen, ist nicht recht einzusehen, warum er nach der einen Seite groß, nach der anderen Seite klein angenommen wird. Wahrscheinlicher ist doch, daß er nach beiden Seiten in gleicher Größe auftreten wird und damit bekommt in die Annahme, den Fehlerhebel a von der Kernweite k des Querschnitts abhängig zu machen, eine gewisse Unsicherheit, wenn auch nicht geleugnet werden soll, daß ein Vorschlag, der diese Unsicherheiten völlig beseitigt, nicht so leicht zu finden sein wird.

Um die Richtigkeit der Annahme (1) bzw. (2) zu prüfen, wird man sich die Frage nach der Ursache des Auftretens von Fehlerhebeln des Lastangriffs zu stellen haben. Die Einführung eines außermittigen Lastangriffs soll 1. unvermeidliche Anfangskrümmungen des Stabes berücksichtigen und 2. der Tatsache Rechnung tragen, daß in Wirklichkeit der Druckstab niemals ganz genau in der theoretischen Systemachse des Tragwerks liegen kann.

1. Anfangskrümmungen der Stabachse haben in der Hauptsache zwei Ursachen: mangelhafte Geradrichtung bei der Fertigung des Stabes und nachträgliche Verbiegungen entweder durch kleine Querbelastungen, wie z. B. das Eigengewicht des Druckstabes, das bei der statischen Berechnung nicht gesondert berücksichtigt zu werden braucht, oder zufällige Verbiegungen bei der Aufstellung des Bauwerks. Was die mangelhafte Geradrichtung anbetrifft, so glaube ich, daß es bei einem breiteren Stabe schwieriger ist als bei einem schmäleren, ihn wirklich gerade zu machen; dies steht aber in Gegensatz zu der Annahme (2). Lediglich die nachträglichen Verbiegungen verhalten sich der Annahme (2) entsprechend; je schmaler ein Stab in der Richtung des Ausknickens ist, um so größer muß daher der Hebelarm des Lastangriffs angenommen werden, um diesen Verbiegungen Rechnung zu tragen.

2. Was das Einbauen des Stabes in die theoretische Netzachse des Tragwerks anbetrifft, so ist wohl nicht zu leugnen, daß dies bei einem breiteren Stabe erheblich schwieriger ist, ganz gleichgültig, ob der Einbau durch Nietung oder durch Schweißung erfolgt; die Annahme (2) wird daher den wahrscheinlich zu erwartenden Verhältnissen nicht gerecht. Dasselbe gilt von einer weiteren Ursache des Auftretens von Außermittigkeiten des Lastangriffs, von den Nebenspannungen; es ist bekannt, daß die Nebenspannungen mit der Stabbreite stark anwachsen, sodaß daher bei breiteren Stäben mit einem größeren Werte a gerechnet werden müßte als bei schmäleren Stäben, um gleiche Sicherheit gegen die Erreichung der Tragfähigkeit zu erhalten. Die Wirkung der Nebenspannungen auf den Druckstab wird übrigens nur in den seltensten Fällen der Annahme gleicher Fehlerhebel an beiden Stabenden entsprechen; meistens sind sie verschieden groß und in vielen Fällen werden sie sogar verschiedene Vorzeichen haben, so daß die Druckkraft die theoretische Netzachse schneidet und diesen s-förmig verbiegt. Prof. Chwalla empfiehlt in solchen Fällen mit dem arithmetischen Mittel der Fehlerhebel zu rechnen, das dann sehr stark gegen Null zu liegen kommt, so daß der Stab dann eher wie ein mittig gedrückter zu berechnen wäre. Ich habe bereits gezeigt²⁾, daß man damit die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes oder der Stütze nicht immer richtig beurteilt.

²⁾ J. Fritsche, Der Einfluß einer Ungleichartigkeit der Fehlerhebel auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Stahlbau 1936, Heft 23 u. 24.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Annahme, die den neuen Knickvorschriften zugrunde gelegt worden ist, keine höhere innere Berechtigung hat als die frühere Annahme des mittigen Druckes, daß im Gegenteil in vielen Fällen die wirklichen Umstände eher für die grundsätzliche Beibehaltung der alten Vorschriften sprechen, die allerdings dem derzeitigen Stande der Forschung anzupassen wären³⁾. Eine Entscheidung dieser Frage kann nur aus dem Meinungsaustausch berufener Fachleute hervorgehen.

II.

Stellt man sich auf den Standpunkt des neuen Entwurfs und berücksichtigt die rechnerisch nicht erfassbaren Abweichungen von den theoretischen Forderungen nach (1), so erscheint es mir wünschenswert, die Ergebnisse der neueren, wirklichkeitstreuen Plastizitätstheorie bei der Untersuchung dieser Fragen der Darstellung in den „Erläuterungen zur Begründung des Normblattentwurfs DIN 4114“ gegenüber zu stellen, und zu versuchen, den Einfluß der Querschnittsform einer genaueren Prüfung zu unterziehen. Bezeichnet man mit ν eine Zahl, die die Fähigkeit des Querschnitts kennzeichnet, beim Anlegen eines Spannungsfeldes die P - bzw. F -Grenze an der Spannungsspitze hinaufzusetzen, dann ist für einen elastisch-idealplastischen Körper die erhöhte Fließgrenze σ_F' an der Spannungsspitze⁴⁾

$$(5) \quad \sigma_F' = \sigma_0 + \frac{1}{\nu} (\sigma_F - \sigma_0)$$

(σ_0 bedeutet die Schwerpunktspannung im Querschnitt).

Die Tragfähigkeit eines Stabes ist erreicht, wenn die auftretende Größtspannung dieser erhöhten Fließgrenze σ_F' gleich wird; damit erhält man

$$(6) \quad \sigma_F' = \frac{P}{F} + \frac{P a \cdot \sec \frac{x l}{2}}{W} = \sigma_K \left(1 + m_0 \cdot \sec \frac{x l}{2} \right),$$

worin $x^2 = \frac{P}{EJ}$ bzw. $x^2 = \frac{\sigma_K}{E I^2}$ bedeutet. Setzt man für $\sec \frac{x l}{2}$ die

sehr gute Näherung

$$(7) \quad \sec \frac{x l}{2} = \frac{\sigma_E + 0,234 \sigma_K}{\sigma_E - \sigma_K},$$

wobei $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ die Eulerlast des Stabes vorstellt, dann erhält man aus (6)

$$(8) \quad (\sigma_F - \sigma_K)(\sigma_E - \sigma_K) = \frac{m_0}{\nu} (\sigma_E + 0,234 \sigma_K).$$

Aus dieser quadratischen Gleichung kann nun ohne besondere Schwierigkeiten σ_K ausgerechnet werden. Setzt man nach (1) $m_0 = C \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2$, so erhält man mit der Abkürzung

$$(9) \quad \sigma_A = 210 \cdot \frac{C \pi^2}{\nu}$$

$$(10) \quad \sigma_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_E (\sigma_F + \sigma_E + \sigma_A)}{\sigma_E - 0,234 \sigma_A} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \sigma_F (\sigma_E - 0,234 \sigma_A)}{(\sigma_F + \sigma_E + \sigma_A)^2}} \right].$$

Die Quadratwurzel in dem obigen Ausdruck kann nun mit Hilfe der binomischen Reihe entwickelt werden; man erhält

$$\sqrt{1 - A} = 1 - \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} - \frac{A^3}{16} - \dots = 1 - \frac{A}{2} \left[1 + \frac{A}{4} \left(1 + \frac{A}{2} \right) \right]$$

und man wird mit Rücksicht darauf, daß A in der Regel klein ist, immer mit dem 4. Gliede abbrechen dürfen. Damit berechnet sich nun

die Knickzahl $\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_K}$ mit

$$(11) \quad \omega = \left[1 + \frac{\sigma_F}{\sigma_E} + \frac{C}{\nu} \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \right] v_1,$$

worin

$$(12) \quad v_1 = \frac{1}{1 + \frac{A}{4} \left(1 + \frac{A}{2} \right)} \quad \text{und} \quad A = \frac{4 \sigma_F (\sigma_E - 0,234 \sigma_A)}{(\sigma_F + \sigma_E + \sigma_A)^2}$$

bedeutet.

³⁾ J. Fritsche, Das Formänderungsgesetz des Baustahles im bildsamen Bereiche. Stahlbau 1939, Heft 14/15.

⁴⁾ J. Fritsche, Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Stahlbau 1936, Heft 12. — Derselbe, Die neuere Fließbedingung und die Ergebnisse der Werkstoffprüfung. Stahlbau 1939, Heft 3.

Tafel 1.

λ	σ_E in kg/cm ²	$\sigma_E + \sigma_F + \sigma_A$ in kg/cm ²	$\sigma_E - 0,234 \sigma_A$ in kg/cm ²	A	v_{37}	ω_a	ω nach DIN E 4114	$\omega_a - \omega$	ω_b	$\omega_a - \omega_b$
20	51 815	55 272	51 568	0,162	0,956	1,019	1,016	0,003	1,012	0,007
30	23 029	26 486	22 786	0,312	0,916	1,053	1,042	0,011	1,039	0,014
40	12 954	16 411	12 707	0,454	0,877	1,111	1,090	0,021	1,086	0,025
50	8 290	11 747	8 043	0,560	0,848	1,202	1,168	0,034	1,163	0,039
60	5 757	9 240	5 510	0,619	0,832	1,332	1,288	0,044	1,279	0,053
70	4 230	7 687	3 983	0,647	0,822	1,493	1,455	0,038	1,422	0,071
80	3 238	6 695	2 991	0,638	0,827	1,709	1,674	0,035	1,616	0,093
90	2 558	6 015	2 311	0,614	0,832	1,956	1,940	0,016	1,837	0,119
100	2 073	5 530	1 826	0,574	0,843	2,249	2,256	-0,007	2,100	0,149
110	1 713	5 170	1 466	0,528	0,856	2,584	2,612	-0,028	2,401	0,183
120	1 439	4 896	1 192	0,477	0,877	2,983	3,011	-0,028	2,761	0,222
130	1 226	4 683	979	0,429	0,884	3,377	3,453	-0,076	3,113	0,264
140	1 057	4 514	810	0,382	0,898	3,834	3,928	-0,094	3,523	0,311
150	921	4 378	674	0,338	0,909	4,320	4,444	-0,124	3,959	0,361
160	810	4 267	563	0,297	0,920	4,847	5,000	-0,153	4,430	0,417
170	717	4 174	470	0,259	0,931	5,419	5,594	-0,175	4,943	0,476
180	640	4 097	393	0,225	0,940	6,018	6,218	-0,200	5,479	0,539
190	574	4 031	327	0,193	0,947	6,650	6,897	-0,247	6,044	0,606
200	518	3 975	271	0,165	0,956	7,335	7,595	-0,260	6,659	0,676
210	470	3 927	223	0,139	0,962	8,037	8,333	-0,296	7,287	0,750
220	428	3 885	181	0,115	0,969	8,794	9,125	-0,331	7,964	0,830
230	392	3 849	145	0,094	0,974	9,565	9,959	-0,394	8,653	0,912
240	360	3 817	113	0,074	0,980	10,393	10,811	-0,418	9,393	1,000
250	332	3 789	85	0,057	0,985	11,457	11,707	-0,250	10,155	1,302

Erläuterung zur Tafel 1.

Es ist $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_F = 2400 \text{ kg/cm}^2$, $C_{37} = 0,51$, $\nu_a = 1$; damit ergibt sich $\sigma_A = 210 \cdot 9,8696 \cdot 0,51 = 1057 \text{ kg/cm}^2$. v_{37} ändert sich mit σ_A ; da sich diese Änderung aber nur in sehr geringen Grenzen bewegen kann, wurde sie zahlenmäßig nicht berücksichtigt und v_{37} aus Tafel 1 sowohl zur Berechnung von ω_a als auch zur Berechnung von ω_b benutzt.

Tafel 2.

λ	σ_{Ka} in kg/cm ²	σ_{Kb}	$\sigma_{Kb} - \sigma_{Ka}$	$\frac{\sigma_{Kb} - \sigma_{Ka}}{\sigma_{Ka}}$ in % von σ_{Ka}	σ_K nach DIN E 4114	$\sigma_K - \sigma_{Ka}$	$\frac{\sigma_K - \sigma_{Ka}}{\sigma_K}$ in % von σ_K
20	2355	2371	16	0,68	2363	8	0,32
30	2279	2310	31	1,36	2303	24	1,04
40	2160	2209	39	1,80	2202	42	1,90
50	1997	2063	66	3,30	2055	58	2,82
60	1802	1876	74	4,10	1864	62	3,32
70	1607	1688	81	5,03	1650	43	2,62
80	1404	1485	81	5,76	1434	30	2,09
90	1227	1306	79	6,43	1237	10	0,81
100	1067	1142	75	7,04	1064	-3	-0,28
110	929	1000	71	7,65	919	-10	-1,08
120	805	869	64	7,96	797	-12	-1,51
130	711	771	60	8,45	695	-16	-2,31
140	626	681	55	8,81	611	-16	-2,62
150	556	606	50	9,02	540	-16	-2,97
160	495	542	47	9,50	480	-15	-3,13
170	443	485	42	9,68	429	-14	-3,26
180	399	438	39	9,80	386	-13	-3,54
190	361	397	38	10,15	348	-12	-3,46
200	327	360	35	10,28	316	-11	-3,49
210	298	329	31	10,38	288	-10	-3,48
220	273	301	28	10,34	263	-10	-3,82
230	251	277	26	10,64	241	-10	-4,16
240	231	256	25	10,80	222	-9	-4,05
250	209	236	27	11,90	205	-4	-1,95

Gl. (11) läßt noch die folgende Umformung zu:

$$(11a) \quad \omega = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \left(c + \frac{C}{\nu} \right) \right] v_1,$$

worin $c = \frac{\sigma_F}{210 \pi^2}$ bedeutet; damit erhält man für St 37

$$(11b) \quad \omega_{37} = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \left(1,158 + \frac{C_{37}}{\nu} \right) \right] v_{1,37}$$

und schließlich für St 52

$$(11c) \quad \omega_{52} = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \left(1,737 + \frac{C_{52}}{\nu} \right) \right] v_{1,52}.$$

Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit des Stabes kommt in der Hauptsache in der Zahl ν zum Ausdruck, die unter Zugrundelegung bereits erläuterter Vorstellungen über die Auslösung des Fließvorganges längs einer Fließschicht auf bekannte Weise berechnet werden kann⁵⁾. Es erscheint mir nun nicht zweckmäßig, zur Erlangung einer „mittleren Lösung“, von der aus der Einfluß der Querschnittsform nach beiden Seiten ungefähr gleich weit ausschlägt, die weitere Untersuchung an den Rechteckquerschnitt anzuknüpfen, sondern es erscheint mir richtiger, obere und untere Grenzwerte für ν zu suchen. Demnach wäre dann mit zwei Werten von ν zu rechnen, die sich mit guter Näherung je einer großen Gruppe von Querschnittsformen zuordnen

⁵⁾ J. Fritsche, Zur Mechanik des Fließvorganges. Stahlbau 1938, Heft 16 u. 17.

lassen müßten. Es ist nun wirklich möglich, die im Stahlbau benutzten Querschnittsformen in Hinblick auf ihr Verhalten bei der Plastizierung in nur zwei große Gruppen zu unterteilen:

- Querschnitte, bei denen der Spannungsgrößtwert, die elastische Spannungsspitze, einen breiten Flansch trifft, bei denen der Werkstoff innerhalb des Querschnitts biegemäßig richtig verteilt ist und dessen Hauptmasse folglich in den Querschnittsrändern liegt. Beispiele dafür bildet der I-Stahl, wenn die Lastebene mit der Stegebene zusammenfällt oder der aus zwei L-Stählen gebildete Querschnitt bei Knickung senkrecht zur Stoffachse.
- Querschnitte, bei denen die Spannungsspitze einen schmalen, von der Hauptmasse desselben abstehenden Stegrand trifft und bei denen daher ein wesentlicher Teil der Querschnittsfläche in der Nähe des Schwerpunktes liegt; der Querschnitt ist also nicht biegemäßig richtig ausgebildet. Beispiele für diese Querschnittsgruppe sind der Γ -Querschnitt in seinen verschiedenen Ausbildungsformen und der Kreuzquerschnitt $\perp\perp$.

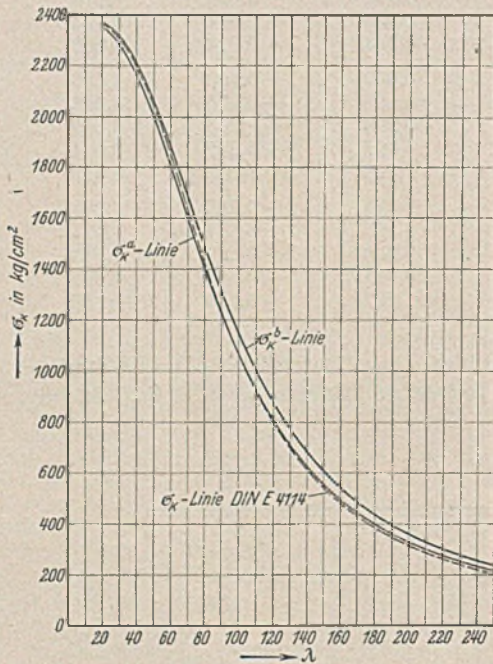


Bild 2.

Beim Querschnitt mit nur einer Symmetrieachse werden die Verhältnisse insofern verwickelter, als derartige Stäbe bei einer plastizitätstheoretischen Untersuchung eine ganz verschiedene Tragfähigkeit ergeben, je nachdem auf welcher Seite des Schwerpunktes sich der Lastangriffspunkt befindet. Der häufigste Vertreter dieser Querschnittsgruppe ist der Γ -Stahl oder der aus zwei Winkeln gebildete $\perp\perp$ -Querschnitt. Die seitliche Ausbiegung einer solchen Stütze kann nach der offenen oder nach der geschlossenen Seite des Querschnitts erfolgen; im ersteren Falle trifft die elastische Spannungsspitze den breiten Steg, im anderen Falle den schmalen abstehenden Flansch. Diese Querschnitte mit nur einer Symmetrieachse ordnen sich daher je nach der Lage der Spannungsspitze (bei gegebener Lage des Lastangriffspunktes) der Gruppe a oder der Gruppe b zu. Ist die Lage des Lastangriffs nicht bekannt, handelt es sich lediglich um eine unvermeidbare Außermittigkeit, mit der verschiedene Unzulänglichkeiten von Theorie und Ausführung erfaßt werden sollen, wird es zweckmäßig sein, den Querschnitt jener Gruppe zuzuschlagen, zu der das größere ω gehört.

Plastizitätstheoretische Untersuchungen auf verschiedenster Grundlage haben nun ergeben, daß man die Tragfähigkeit einer außermittig gedrückten Stütze bei den Querschnittsformen der Gruppe a mit $\nu_a = 1$ befriedigend genau erfassen kann. Bei den Querschnittsformen der Gruppe b wird man mit $\nu_b = \frac{3}{2}$ einen brauchbaren Mittelwert treffen, der in den typischen Fällen die Tragfähigkeit noch immer ein wenig unterschätzt; die theoretischen Untersuchungen⁵⁾ zur Zahl ν , deren Grundlage allerdings noch nicht völlig geklärt ist, liefern für Querschnitte mit beträcht-

lichen Massenanhäufungen in der Nähe des Schwerpunktes bis $\nu_b = 1,65$ und erreichen bei dem auf die Spitze gestellten Quadrate den Wert $\nu = 2$.

Über die Größe C kann man noch frei verfügen und man kann diese Möglichkeit nun dazu benutzen, mit den ω -Werten der ungünstiger wirkenden Querschnittsgruppe a die derzeit in Gültigkeit befindlichen Werte nahezu wiederzugeben, da man mit der damit festgelegten Knicksicherheit immer gute Erfahrungen gemacht hat. Die größere Tragfähigkeit der Querschnittsgruppe b wird nun durch kleinere Werte ω besser ausgenutzt, denn es muß das Ziel aller Rechnung sein, allen Druckstäben die gleiche Sicherheit gegen Ausknicken zu geben.

In den folgenden Tafeln 1 und 2 sind die eben abgeleiteten Formeln für Baustahl 37 mit $\sigma_F = 2400 \text{ kg/cm}^2$ ausgewertet. Um die Stäbe der Querschnittsgruppe a, für die $\nu_a = 1$ gesetzt werden muß, nicht schlechter als bisher zu stellen, mußte mit $C_{37} = 0,51$ gerechnet werden. Aus den Tafeln und der beiliegenden bildlichen Darstellung ihres Inhalts in Bild 2 u. 3 ist zunächst ersichtlich, daß die neuen Werte σ_{Ka} , die ausschließlich mit den Werten σ_K in DIN E 4114 verglichen werden

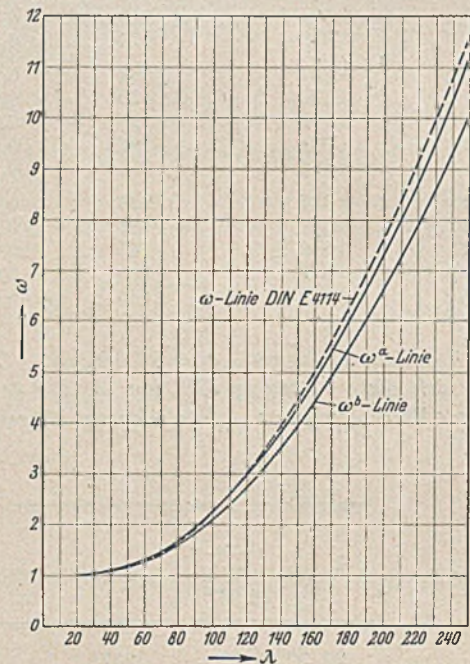


Bild 3.

können, von diesen nur sehr wenig abweichen. Die Abweichung beträgt im Bereich der praktisch wichtigen Schlankheiten höchstens 3%. Beim Vergleich von σ_{Ka} und σ_{Kb} erkennt man zahlenmäßig den wirtschaftlich günstigen Einfluß der vorgeschlagenen Regelung auf die Stäbe der Gruppe b; die biegemäßig ungünstige Massenverteilung im Querschnitt, die sich bei gleicher Fläche gegenüber der Anordnung a in einer starken Vergrößerung des Schlankheitsverhältnisses zum Ausdruck bringt, wird durch die theoretisch und versuchsmäßig gut begründete Einführung verschiedener Zahlen ν zum guten Teile wieder wettgemacht. Es wirkt sich darin die bekannte Tatsache aus, daß auch biegemäßig nicht richtig angeordnete Massen doch die Sicherheit der Konstruktion vergrößern, allerdings zeigt sich dies erst bei einer plastizitätstheoretischen Untersuchung. Jeder, der sich daran erinnert, mit welchem Mehraufwand an Werkstoff die Stützen der Gruppe b knicksicher ausgebildet werden müssen, würde eine Einführung verschiedener ω -Zahlen für die zwei Gruppen von Querschnitten lebhaft begrüßen.

Berichtigung

zu dem Aufsatz von Dr. G. Schmidt „Einfaches Hilfsmittel zur Bemessung von Rahmenquerschnitten für zahlreiche Lastfälle“ in Heft 25/26 vom Dezember 1940.

Der in den Bildern angegebene Maßstab ist versehentlich in den Skizzen mit aufgenommen worden. Der Maßstab sollte nur ein Anhalt für den Verkleinerungsmaßstab sein und hat für das Verständnis der Bilder keine Bedeutung.