DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift DIE BAUTECHNIK Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang | BERLIN, 1. August 1941 | Heft 16/18

Über das Ausknicken statisch unbestimmt gelagerter Kreisbogenträger von veränderlichem Querschnitt.

Von Ernst Chwalla und Friedrich Jokisch in Brünn.

1. Bekannte Lösungen für den Kreisbogenträger von gleichbleibendem Querschnitt.

Die der Verzweigungsstelle des Gleichgewichts zugeordnete ideale Knicklast eines radial gleichmäßig belasteten, auf mittigen Druck[1]) beanspruchten Kreisbogenträgers ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß unter ihrer Einwirkung neben der kreisförmigen Gleichgewichtsfigur (Bild 1a) noch eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur (Bild 1b) zur Ausbildung gelangen kann. Während im ersten Gleichgewichtszustand in allen Querschnitten des Bogenträgers ausschließlich Normalkräfte der Größe

(1) $N_{Ki} = p_{Ki}\, r$

auftreten, kommen im zweiten Gleichgewichtszustand noch infinitesimale Biegemomente und Querkräfte zur Geltung. Ein Achspunkt 0 wird beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur nach 0' verschoben und erfährt hierbei eine unendlich kleine, in der Richtung wachsender s positiv gezählte Tangentialverschiebung v sowie eine unendlich kleine, in der Richtung zum Kreismittelpunkt positiv gezählte Radialverschiebung w (Bild 1c). Beide Verschiebungskomponenten sind durch die Beziehung

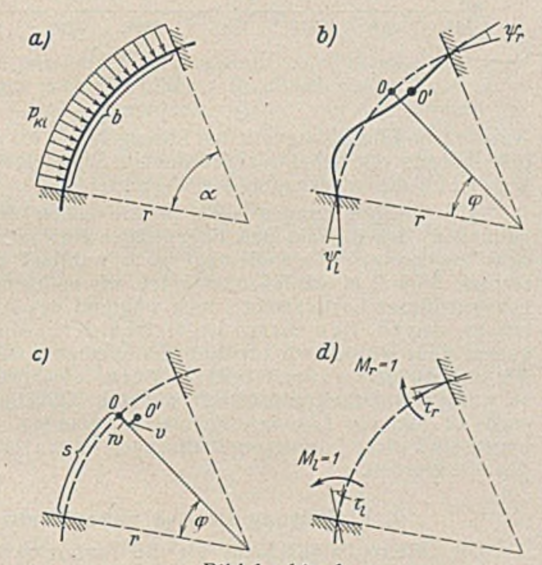

Bild 1a bis d.

$$(2) \qquad w = d\,v / d\,\varphi$$

verknüpft, die der Energiebilanz des Knickvorganges entspringt[2]) und zum Ausdruck bringt, daß die elastische Längenänderung der Bogenachse beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur von höherer Ordnung klein ist als v und w.

Die im Punkt 0 an die Bogenachse gelegte Tangente verdreht sich beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur entgegen dem Uhrzeiger um den unendlich kleinen Betrag

$$(3) \qquad \psi = -\frac{1}{r}\left(\frac{d\,w}{d\,\varphi} + v\right),$$

und die im Punkt 0 vorhandene Krümmung der Bogenachse wird um den unendlich kleinen Betrag

$$(4) \qquad \varkappa = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2 w}{d\,\varphi^2} + w\right)$$

vermindert; $\varkappa$ ist mit der örtlichen Biegesteifigkeit $E J_\varphi$ und dem unendlich kleinen Biegemoment M — das positiv bezeichnet wird, wenn es auf der Innenseite des Bogens Biegezugspannungen hervorruft — durch die Beziehung

$$(5) \qquad \varkappa = \frac{M}{E J_\varphi}$$

verknüpft.

Beschränken wir uns auf die Untersuchung eines Kreisbogenträgers von gleichbleibendem Querschnitt ($J_\varphi = J =$ konst) und nehmen wir an, daß der rechte Winkel, den die auf den Bogenträger einwirkenden Lastelemente mit den zugehörigen Bogenelementen einschließen, auch während des Ausknickens erhalten bleibt, so lautet die Differentialgleichung für die Tangentialverschiebung v nach Federhofer[3])

$$(6) \qquad \frac{d^6 v}{d\,\varphi^6} + (1 + k^2)\,\frac{d^4 v}{d\,\varphi^4} + k^2 \cdot \frac{d^2 v}{d\,\varphi^2} = 0,$$

wobei

$$(7) \qquad k = \sqrt{1 + \frac{p_{Ki}\, r^3}{E J}}$$

bedeutet. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung hat die Form

$$(8) \qquad v = C_1 \cdot \cos k\,\varphi + C_2 \cdot \sin k\,\varphi + C_3 \cdot \sin \varphi + C_4 \cdot \cos \varphi + C_5\,\varphi + C_6$$

und enthält sechs Integrationskonstanten, die durch die sechs Randbedingungen des Problems bestimmt sind. Wenn wir (8) in diese Randbedingungen einsetzen und (2) beachten, gelangen wir zu einem System von sechs in den Integrationskonstanten linearen und homogenen Gleichungen, das nur dann eine von der trivialen Nullösung verschiedene Lösung für diese Integrationskonstanten — also nur dann eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur — zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung

$$(9) \qquad D_K = 0$$

stellt daher die gesuchte Knickbedingung dar; sie dient zur Berechnung des kleinsten positiven und reellen „Knickwertes" k und damit zur Bestimmung der gesuchten kleinsten idealen Knickbelastungsintensität

$$(10) \qquad p_{Ki} = (k^2 - 1)\,\frac{E J}{r^3}.$$

Beziehen wir uns beispielsweise auf den allgemeinen Fall der elastischen Einspannung der Trägerenden und bezeichnen wir die im infinitesimal ausgebogenen Gleichgewichtszustand an der linken und rechten Einspannstelle entstehenden unendlich kleinen Verdrehungen mit ψ_l, ψ_r (Bild 1b) und die an diesen Stellen auftretenden Biegemomente mit M_l, M_r, so erhalten wir

$$(11) \qquad \begin{cases} \psi_l = M_l\,\tau_l \\ \psi_r = -M_r\,\tau_r, \end{cases}$$

wobei die Winkel τ_l, τ_r zur Kennzeichnung des Grades der elastischen

---

[1]) Diese Voraussetzung ist bei Bogenträgern, deren Achse, Lagerung oder Querschnittsgesetz keine Symmetrie zur Scheitelnormalen (Halbierenden der Stützweite) aufweist, für das Auftreten einer Verzweigungsstelle des Gleichgewichts von entscheidender Bedeutung. Bei den statisch unbestimmt gelagerten Bogenträgern, bei denen sich die durch die elastische Achsverkürzung bedingten Biegemomente durch baustatische Maßnahmen nicht ausschalten lassen, darf hier daher — genau genommen — von einer „idealen" Knicklast nicht gesprochen werden; bei Trägern aus elastisch-plastischen Werkstoffen tritt in diesen Fällen an die Stelle der idealen Knicklast eine Traglast von nahezu der gleichen Größe. Bei symmetrisch gebauten Bogenträgern wird die Ausbildung einer Verzweigungsstelle des Gleichgewichts durch das Vorhandensein vorkritischer Biegemomente — sofern diese Biegemomente symmetrisch verteilt sind — nicht gestört; sind die Biegemomente, wie dies bei den durch die elastische Achsverkürzung bedingten Biegemomenten zutrifft, verhältnismäßig klein, dann nehmen sie auch zahlenmäßig keinen nennenswerten Einfluß auf die ideale Knicklast.

[2]) E. Chwalla und C. F. Kollbrunner, Stahlbau 1938, Heft 10, S. 73.

[3]) K. Federhofer, Eisenbau (12) 1921, S. 289.

Einspannung dienen und die Verdrehungen darstellen, die ein an der linken bzw. rechten Einspannstelle angebracht gedachtes starres Trägerstück unter der Einwirkung $M = 1$ erfährt (Bild 1d). Die Beziehungen (11) lauten nach Einführung von (3), (4), (5)

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi = 0 \ldots -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{d w}{d \varphi} + v\right) = -\dfrac{E J \tau_l}{r^2}\left(\dfrac{d^2 w}{d \varphi^2} + w\right) \\ \varphi = \alpha \ldots -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{d w}{d \varphi} + v\right) = +\dfrac{E J \tau_r}{r^2}\left(\dfrac{d^2 w}{d \varphi^2} + w\right) \end{cases}$$

und gehen, wenn wir berücksichtigen, daß an den Einspannstellen sowohl v als auch w verschwindet, in

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi = 0 \ldots \dfrac{d w}{d \varphi} = \dfrac{E J \tau_l}{r} \cdot \dfrac{d^2 w}{d \varphi^2} \\ \varphi = \alpha \ldots \dfrac{d w}{d \varphi} = -\dfrac{E J \tau_r}{r} \cdot \dfrac{d^2 w}{d \varphi^2} \end{cases}$$

über. Die sechs Randbedingungen, denen die infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur eines elastisch eingespannten Kreisbogenträgers unterworfen sind, lassen sich daher nach Beachtung von (2) in der Form

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi = 0 \ldots v = 0, \quad \dfrac{d v}{d \varphi} = 0, \quad \dfrac{d^2 v}{d \varphi^2} - \dfrac{E J \tau_l}{r} \cdot \dfrac{d^3 v}{d \varphi^3} = 0 \\ \varphi = \alpha \ldots v = 0, \quad \dfrac{d v}{d \varphi} = 0, \quad \dfrac{d^2 v}{d \varphi^2} + \dfrac{E J \tau_r}{r} \cdot \dfrac{d^3 v}{d \varphi^3} = 0 \end{cases}$$

anschreiben. Ist der Kreisbogenträger an beiden Enden starr eingespannt, dann ist $\tau_l = \tau_r = 0$, so daß die Randbedingungen (13)

$$(15)\quad \varphi = 0 \text{ und } \varphi = \alpha \ldots \frac{d w}{d \varphi} = 0$$

lauten; ist er an beiden Enden gelenkig gelagert, gilt also $\dfrac{1}{\tau_l} = \dfrac{1}{\tau_r} = 0$, so wird für (13)

$$(16)\quad \varphi = 0 \text{ und } \varphi = \alpha \ldots \frac{d^2 w}{d \varphi^2} = 0$$

erhalten. Bei Kreisbogenträgern, deren Achse nicht durch den Zentriwinkel α und den Kreisradius r, sondern durch die Stützweite l und die Pfeilhöhe f festgelegt ist (Bild 2a), kann α und r mit Hilfe der Beziehungen

$$(17)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\dfrac{l}{4f} + \dfrac{f}{l}} \qquad r = \frac{l}{2 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

bestimmt werden.

Für den radial gleichmäßig belasteten, kreisförmigen Zweigelenkbogen von gleichbleibendem Querschnitt (Bild 2a) ergibt sich — wie

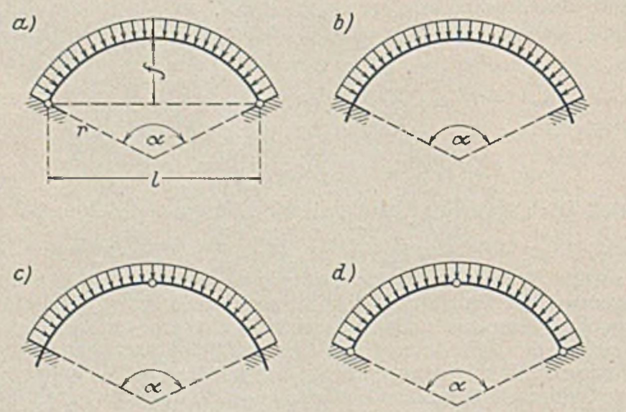

Bild 2a bis d.

schon von Hurlbrink[4]) mit elementaren Hilfsmitteln gewonnen, von Timoshenko[4]) und Mayer[4]) unter Zugrundelegung des experimentell gefundenen Verlaufes der maßgebenden Knickfigur nachgeprüft und von Nicolai[5]) theoretisch abgeleitet worden ist — für den in (10) auftretenden Knickwert k die durch die Kurve a in Bild 3 dargestellte Formel

$$(18)\quad k = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Für die Knickbedingung (9) des radial gleichmäßig belasteten, beiderseits starr eingespannten Kreisbogenträgers (Bild 2b) hat Nicolai[6]) die Gleichung

$$(19)\quad \frac{k\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{k\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = 0$$

erhalten; der Knickwert k, der die kleinste über 1 liegende Wurzel dieser transzendenten Gleichung vorstellt, wird in seiner Abhängigkeit vom Zentriwinkel α durch die Kurve b in Bild 3 bestimmt. Für den Eingelenkbogen (Bild 2c) wurden von Woinowsky-Krieger[7]) die in Bild 3, Kurve c, angegebenen Knickwerte ermittelt, während das ebene Knickproblem des radial gleichmäßig belasteten, kreisförmigen Dreigelenkbogens (Bild 2d) — wie der Vollständigkeit halber noch vermerkt sei — von Nasarow[8]) untersucht wurde und zu der durch die

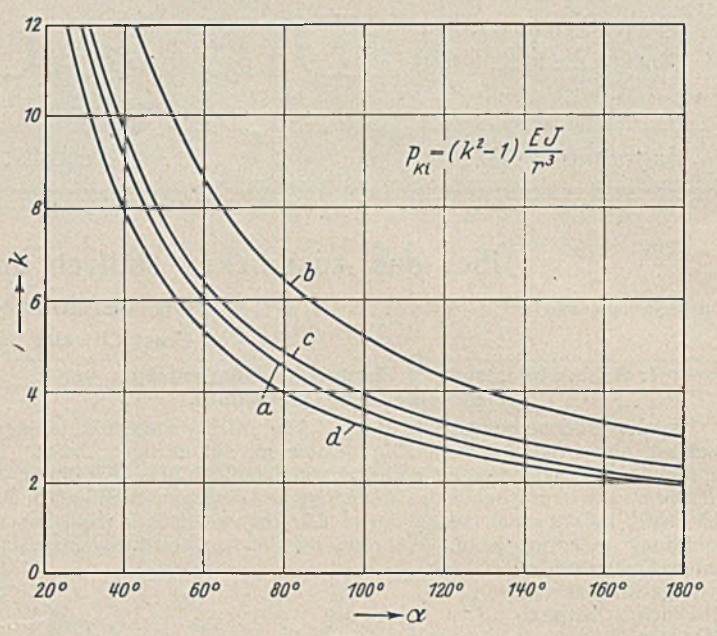

Bild 3.

Kurve d in Bild 3 dargestellten Lösung führt; für den kreisförmigen Dreigelenkbogen mit beliebig angeordnetem Scheitelgelenk hat Woinowsky-Krieger[7]) die Knickbedingung abgeleitet.

Alle diese Lösungen sind an die schon erwähnte Voraussetzung gebunden, daß die auf den Bogenträger einwirkenden Lastelemente mit dem zugehörigen Bogenelement auch während des Ausknickens einen rechten Winkel einschließen. Würden wir annehmen, daß die Wirkungsgeraden dieser Lastelemente auch während des Ausknickens des Bogenträgers durch den ursprünglichen Kreismittelpunkt hindurchgehen, oder würden wir für diese Lastelemente während des Ausknickens des Bogenträgers ausschließlich Parallelverschiebungen zulassen, so würden wir zu grundsätzlich anderen Knickbedingungen und damit auch zu anderen Lösungsergebnissen gelangen. Für den Zweigelenkbogen sind diese Lösungsergebnisse von Chwalla[2]) einander gegenübergestellt worden.

2. Einführung statisch unbestimmter Größen.

Die Differentialgleichung für die Tangentialverschiebung v, zu der wir bei der Untersuchung der unendlich wenig ausgebogenen Gleichgewichtsfigur des Kreisbogenträgers gelangen, ist von sechster Ordnung und in ihrer allgemein gültigen Form zur Aufstellung eines einfachen, praktisch brauchbaren Iterationsverfahrens nicht geeignet. Die Herabsetzung der Ordnungszahl dieser Differentialgleichung gelingt in übersichtlicher Weise durch die Einführung der beim Übergang von der kreisförmigen zur infinitesimal ausgebogenen Gleichgewichtsfigur auftretenden statisch unbestimmten Stützgrößen. Bei einem beiderseits eingespannten Kreisbogenträger, bei dem wir drei solche Stützgrößen — die zusätzliche, unendlich kleine tangentiale Stützkraft X_a, die unendlich kleine radiale Stützkraft X_b und das unendlich kleine Einspannmoment X_c (Bild 4a) — zu unterscheiden haben, lautet dann die Beziehung für das an der Querschnittstelle φ auftretende, unendlich kleine Biegemoment (vgl. Bild 4b u. 4c)

$$(20)\quad M = p_{Ki}\, r\, w + X_a\, r\,(1 - \cos\varphi) + X_b\, r \cdot \sin\varphi + X_c,$$

wobei alle von höherer Ordnung kleinen Glieder — wie etwa die Glieder von der Form $X_a\, w$ oder $X_b\, v$ — weggelassen sind; führen wir (20) in die Beziehung

$$(21)\quad \frac{d^2 w}{d \varphi^2} + w + \frac{M r^2}{E J_\varphi} = 0$$

ein, die aus der Gleichsetzung von (4) und (5) folgt[9]), so gelangen wir zur

[4]) E. Hurlbrink, Schiffbau (9) 1908, S. 640; S. Timoshenko, Stabilität elastischer Systeme, Kiew 1910; R. Mayer, Z. Math. u. Physik (61) 1913, S. 318.

[5]) E. L. Nicolai, Ber. d. Polytechn. Inst. St. Petersburg (27) 1918, S. 323; P. Funk, Z. ang. Math. (4) 1924, S. 143; E. Chwalla, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, IIa, 136, 1927, S. 645.

[6]) E. L. Nicolai, a. a. O. und Z. ang. Math. (3) 1923, S. 227; A. Lokschin, Z. ang. Math. (16) 1936, S. 49; S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, New York und London 1936, S. 227.

[7]) S. Woinowsky-Krieger, Stahlbau 1937, Heft 24, S. 185.

[8]) A. Nasarow, Bautechn. (14) 1936, Heft 7, S. 114.

[9]) Diese Differentialgleichung war schon J. Boussinesq [Compt. rend. (97) 1883, S. 843] bekannt.

Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(22)\qquad \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \left(1 + \frac{p_{Ki}\, r^3}{E J_\varphi}\right) w + \frac{X_a\, r^3}{E J_\varphi}(1 - \cos\varphi) + \frac{X_b\, r^3}{E J_\varphi}\cdot \sin\varphi + \frac{X_c\, r^2}{E J_\varphi} = 0.$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1', C_2', die in der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung auftreten, sind ebenso wie die Integrationskonstante C_3', die in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (2)

$$(23)\qquad v = \int w\, d\varphi + C_3'$$

enthalten ist, durch die drei Randbedingungen bestimmt, denen die unendlich wenig ausgebogene Gleichgewichtsfigur an der rechten Einspannstelle unterworfen ist. Zur Berechnung der drei statisch unbestimmten Stützgrößen X_a, X_b und X_c stehen uns drei Elastizitätsgleichungen zur Verfügung, die für die linke Einspannstelle die Erfüllung der hier vorgeschriebenen Randbedingungen verlangen. Wir haben daher — ebenso wie früher — insgesamt sechs Randbedingungen aufzustellen und können mit Hilfe dieser Randbedingungen die sechs unbekannten Größen — drei Integrationskonstante und drei statisch unbestimmte Stützgrößen — ermitteln. Setzen wir die allgemeinen Lösungen von (22) und (2) in diese sechs Randbedingungen ein, so erhalten wir ein System von sechs in den Unbekannten C_1', C_2', C_3', X_a, X_b und X_c linearen, homogenen Gleichungen, das nur dann eine von der trivialen Nullösung verschiedene Lösung — also nur dann eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur — zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet; die Gleichung

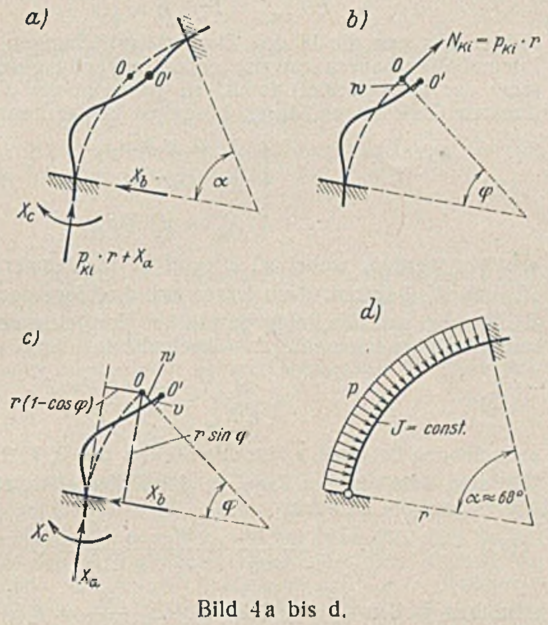

Bild 4a bis d.

$$(24)\qquad D_K = 0$$

stellt somit die gesuchte Knickbedingung dar. Im Sonderfall des gleichbleibenden Querschnitts ($J_\varphi = J =$ konst) lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (22), wenn wir uns wieder der Hilfsgröße

$$(25)\qquad k = \sqrt{1 + \frac{p_{Ki}\, r^3}{E J}}$$

bedienen,

$$(26)\qquad w = C_1' \cdot \sin k\varphi + C_2' \cdot \cos k\varphi + \frac{X_a\, r^3}{(k^2 - 1) E J}\cdot \cos\varphi - \frac{X_b\, r^3}{(k^2-1) E J}\cdot \sin\varphi - \frac{X_a\, r^3 + X_c\, r^2}{k^2 E J},$$

so daß sich aus (23)

$$(27)\qquad v = -\frac{C_1'}{k}\cdot \cos k\varphi + \frac{C_2'}{k}\cdot \sin k\varphi + \frac{X_a\, r^3}{(k^2-1) E J}\cdot \sin\varphi + \frac{X_b\, r^3}{(k^2-1) E J}\cdot \cos\varphi - \frac{X_a\, r^3 + X_c\, r^2}{k^2 E J}\cdot \varphi + C_3'$$

ergibt. Der Vergleich von (27) und (8) läßt den formalen Zusammenhang, der zwischen diesen beiden Lösungsansätzen besteht, deutlich erkennen.

Untersuchen wir beispielsweise einen am linken Ende gelenkig gelagerten und am rechten Ende starr eingespannten Kreisbogenträger von gleichbleibendem Querschnitt (vgl. Bild 4d), so haben wir in (26) und (27)

$$(28)\qquad X_c = 0$$

zu setzen und die zur Festlegung von C_1', C_2', C_3', X_a, X_b dienenden fünf Randbedingungen in der Form

$$(29)\qquad \begin{cases} \varphi = 0 \ldots v = 0 & w = 0 \\ \varphi = \alpha \ldots v = 0 & w = 0 \qquad \dfrac{d w}{d\varphi} = 0 \end{cases}$$

zu schreiben; die Bedingung $\dfrac{d^2 w}{d\varphi^2} = 0$, die wir gemäß (16) für die Stelle $\varphi = 0$ noch aufstellen können, ist mit Rücksicht auf (21) — da an der linken Einspannstelle sowohl w als auch M verschwinden — von selbst erfüllt. Dann haben wir die durch (28) vereinfachten allgemeinen Lösungen (26) und (27) in diese fünf Randbedingungen einzuführen, die Koeffizientendeterminante D_K des so erhaltenen, linearen und homogenen Gleichungssystems zu berechnen und gemäß (24) gleich Null zu setzen. Wir gelangen auf diese Weise zur Knickbedingung

$$(30)\qquad [k\cdot \sin k\alpha - \sin\alpha - (k^2 - 1)\cos k\alpha \cdot \sin\alpha] \cdot \left[k\cdot \sin k\alpha - k^2\cdot \sin\alpha + \frac{k^2-1}{k}(k\alpha - \sin k\alpha)\cos\alpha\right] + [k^2\cdot \cos k\alpha - \cos\alpha - (k^2-1)\cos k\alpha \cdot \cos\alpha] \cdot \left[\cos k\alpha - 1 - k^2(\cos\alpha - 1) - \frac{k^2-1}{k}(k\alpha - \sin k\alpha)\sin\alpha\right] = 0,$$

die, wenn wir uns auf den in Bild 4d gezeichneten Bogenträger mit dem Zentriwinkel

$$(31)\qquad \alpha = 1{,}187 \approx 68°$$

beziehen, für den kleinsten positiven und reellen Knickwert den Wert

$$(32)\qquad k = 6{,}35$$

liefert; die für die Bemessung des Kreisbogenträgers maßgebende „kleinste ideale Knickbelastungsintensität“ beträgt daher mit Rücksicht auf (25)

$$(33)\qquad p_{Ki} = (k^2 - 1)\frac{E J}{r^3} = 39{,}32\cdot \frac{E J}{r^3}.$$

Diese Knickbelastungsintensität ist, wie wir vergleichsweise erwähnen wollen, ein wenig kleiner als das arithmetische Mittel der idealen Knickbelastungsintensitäten

$$(34)\qquad p_{Ki} = 27{,}03\cdot \frac{E J}{r^3}$$

und

$$(35)\qquad p_{Ki} = 57{,}06\cdot \frac{E J}{r^3},$$

die wir mit Hilfe von (18) und (19) in den Grenzfällen beidseitig gelenkiger Lagerung bzw. beidseitig starrer Einspannung des Bogenträgers erhalten.

Wenn wir den Lösungswert (32) in das erwähnte System von fünf linearen, homogenen Gleichungen einsetzen und dieses Gleichungssystem nach den Unbekannten C_1', C_2', C_3', X_a und X_b auflösen, erhalten wir

$$(36)\qquad \begin{cases} C_1' = -13{,}40\,K & C_2' = K & C_3' = -14{,}84\,K \\ X_a = -1585{,}48\cdot \dfrac{K E J}{r^3} & & X_b = 500{,}58\cdot \dfrac{K E J}{r^3}, \end{cases}$$

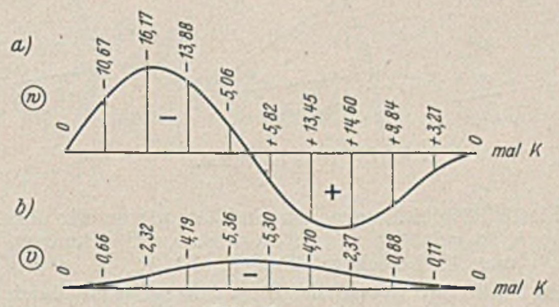

Bild 5a u. b.

wobei K einen unbestimmt bleibenden (im Sinne unserer Voraussetzung unendlich klein zu denkenden) Faktor bedeutet. Die Beziehungen (26) und (27) nehmen nach Berücksichtigung dieser Ergebnisse die Form

$$(37)\qquad \begin{cases} w = K(-13{,}40\cdot \sin 6{,}35\,\varphi + \cos 6{,}35\,\varphi - 12{,}73\cdot \sin\varphi - 40{,}32\cdot \cos\varphi + 39{,}32) \\ v = K(2{,}11\cdot \cos 6{,}35\,\varphi + 0{,}16\cdot \sin 6{,}35\,\varphi + 12{,}73\cdot \cos\varphi - 40{,}32\cdot \sin\varphi + 39{,}32\,\varphi - 14{,}84) \end{cases}$$

an und führen zu den in Bild 5 gezeichneten Verteilungskurven; die durch w und v festgelegte infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur ist in maßstäblicher Verzerrung — als sogenannte „Knickfigur“ — in Bild 6 dargestellt.

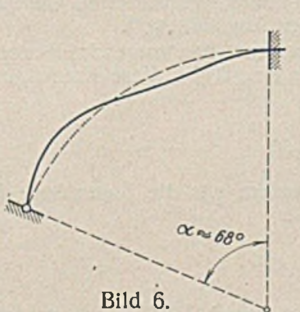

Bild 6.

3. Das Verfahren schrittweiser Annäherung zur Bestimmung von p_{Ki} bei statisch unbestimmter Lagerung und beliebigem stetigen Querschnittsgesetz.

Bei Kreisbogenträgern mit veränderlichem Querschnitt bereitet die Integration der Differentialgleichung (22) erhebliche Schwierigkeiten. Dinnik[10]) und Steuermann[10]) haben einige strenge Sonderlösungen des Problems für einen symmetrisch ausgebildeten, antimetrisch ausknickenden Zweigelenkbogen von stetig veränderlichem Querschnitt angegeben, und andere russische Autoren haben ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der kleinsten idealen Knickbelastungsintensität eines symmetrisch gebauten und symmetrisch knickenden Drei-

[10]) A. N. Dinnik, vgl. das Buch von S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability. New York und London 1936, S. 229; J. E. Steuermann, Ber. d. Polytechn. Inst. Kiew, 1929, S. 25, und Ing. Arch (1), 1930, S. 301.

gelenkbogens von veränderlichem Querschnitt entwickelt[11]). Ein bei beliebiger statisch unbestimmter Lagerung und beliebigem stetigen Querschnittsgesetz verwendbares Verfahren schrittweiser Annäherung läßt sich im Anschluß an die im 2. Abschnitt angestellten Überlegungen in folgender Weise entwickeln:

Wird an Stelle von φ die Größe

$$s = r\varphi \tag{38}$$

als unabhängige Veränderliche eingeführt (Bild 1c) und für die unendlich kleine Radialverschiebung ein den Randbedingungen entsprechendes Gesetz $w = f(s)$ plausibel angenommen, so lassen sich die diesem Gesetz zugeordneten, in (20) auftretenden statisch unbestimmten Größen X_a, X_b, X_c mit Hilfe der schon erwähnten drei Elastizitätsgleichungen eindeutig berechnen. Wenn wir uns beispielsweise auf einen beiderseits starr eingespannten Kreisbogenträger mit den in Bild 4a eingetragenen Überzähligen X_a, X_b, X_c beziehen, bringen diese Elastizitätsgleichungen zum Ausdruck, daß an der linken Einspannstelle sowohl die Verschiebungen v und w als auch die Verdrehung φ verschwinden müssen; sie lauten daher

$$\left.\begin{aligned} &\int_b \mathfrak{M}_a \cdot \frac{M}{EJ_s} \cdot ds = 0 \\ &\int_b \mathfrak{M}_b \cdot \frac{M}{EJ_s} \cdot ds = 0 \\ &\int_b \mathfrak{M}_c \cdot \frac{M}{EJ_s} \cdot ds = 0, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

wobei J_s das an der Stelle s vorhandene Querschnittsträgheitsmoment bedeutet und $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{M}_c$ die Biegemomente darstellen, die im statisch bestimmten Grundsystem (dem Freiträger, Bild 7a) unter den Hilfsangriffen $X_a = 1$ bzw. $X_b = 1$ bzw. $X_c = 1$ entstehen. Setzen wir (20)

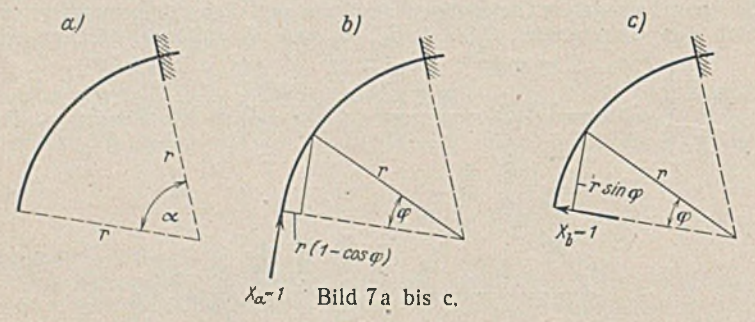

Bild 7a bis c.

in diese Elastizitätsgleichungen ein und integrieren wir über die ganze Bogenlänge b, so gelangen wir zu drei linearen Gleichungen, aus denen wir X_a, X_b und X_c berechnen können. Ist X_a, X_b und X_c bekannt, dann läßt sich mit Hilfe von (20) das Biegemoment M und durch Integration von (21) ein neues Gesetz für w bestimmen, das dem zu Beginn der Rechnung gewählten Gesetz gegenübergestellt werden kann und mit ihm bis auf einen gemeinsamen Faktor übereinstimmen würde, wenn unsere Annahme zufällig die „richtige" gewesen wäre. Praktisch wird diese Übereinstimmung beim ersten Lösungsschritt noch nicht erzielt sein, so daß wir die Rechnung mit dem neuen, verbesserten Gesetz wiederholen müssen („Verfahren schrittweiser Annäherung").

Wir gehen von einer plausibel angenommenen, den vorgeschriebenen Randbedingungen entsprechenden Knickfigur aus, legen diese Knickfigur durch

$$\left\{\begin{aligned} v &= f_1(s) \\ w &= r \cdot \frac{dv}{ds} = f_2(s) \end{aligned}\right. \tag{40}$$

fest und stellen (40) ordinatenweise dar, indem wir die Bogenlänge b in m Stück (z. B. $m = 10$ Stück) gleiche Teile

$$\lambda = \frac{b}{m} \tag{41}$$

unterteilen und für die Unterteilungspunkte $n = 0, 1, 2, 3 \ldots m$ der Reihe nach die Ordinatenwerte

$$w_n = c_n K \tag{42}$$

bis auf den gemeinsamen Faktor K (dem wir die Dimension einer Länge zuweisen) zahlenmäßig angeben. Dann setzen wir die den einzelnen Stellen $n = 0, 1, 2, 3 \ldots m$ zugeordneten Werte c_n und $\varphi_n = \frac{n\alpha}{m}$ in (20)

$$M_n = c_n p_{Ki} r K + X_a r \left(1 - \cos\frac{n\alpha}{m}\right) + X_b r \cdot \sin\frac{n\alpha}{m} + X_c \tag{43}$$

ein, berechnen die im statisch bestimmten Grundsystem (dem Freiträger, Bild 7a) unter den Hilfsangriffen $X_a = 1$ bzw. $X_b = 1$ bzw. $X_c = 1$ auftretenden Biegemomente

$$\left|\begin{aligned} \mathfrak{M}_a &= +1\, r(1 - \cos\varphi) = +1\, r\left(1 - \cos\frac{n\alpha}{m}\right) \\ \mathfrak{M}_b &= +1\, r \cdot \sin\varphi = +1\, r \cdot \sin\frac{n\alpha}{m} \\ \mathfrak{M}_c &= +1 \end{aligned}\right. \tag{44}$$

und ermitteln die den einzelnen Stellen $n = 0, 1, 2, 3 \ldots m$ zugeordneten Werte

$$\left(\mathfrak{M}_a \cdot \frac{M}{EJ}\right)_n, \quad \left(\mathfrak{M}_b \cdot \frac{M}{EJ}\right)_n \quad \text{und} \quad \left(\mathfrak{M}_c \cdot \frac{M}{EJ}\right)_n.$$

Führen wir nun die in den Elastizitätsgleichungen (39) vorgeschriebenen Integrationen näherungsweise unter Verwendung der Simpsonschen Regel (oder der Trapezformel) durch, so gelangen wir zu drei in X_a, X_b, X_c linearen Gleichungen, deren Lösungen in der Form

$$\left\{\begin{aligned} X_a &= a' K p_{Ki} \\ X_b &= a'' K p_{Ki} \\ X_c &= a''' K p_{Ki} \end{aligned}\right. \tag{45}$$

erhalten werden, wobei a', a'' und a''' Zahlenwerte darstellen. Ist X_a, X_b und X_c bekannt, dann lassen sich die Biegemomente (43) und — nach Einführung eines beliebig gewählten Vergleichswertes J^* für die Querschnittsträgheitsmomente J — auch die in

$$\left(\frac{M}{EJ}\right)_n = c_n \cdot \frac{K p_{Ki} r}{EJ^*} \tag{46}$$

auftretenden Beiwerte c_n für alle Stellen $n = 0, 1, 2, 3 \ldots m$ berechnen. Wir sind damit in der Lage, in der Differentialgleichung (21) — für die wir wegen (38) nunmehr

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} + \frac{M}{EJ_s} = 0 \tag{47}$$

schreiben wollen — die Ortsfunktion $\frac{M}{EJ_s} = f_3(s)$ ordinatenweise anzugeben. Das zur Integration dieser Differentialgleichung erforderliche, von Stüssi[12]) entwickelte Verfahren baut auf der Näherungsbeziehung

$$\frac{\lambda^2}{12}\left[\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)_{n-1} + 10\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)_n + \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)_{n+1}\right] = \eta_{n-1} - 2\eta_n + \eta_{n+1} \tag{48}$$

auf, die zwischen einer stetigen, an den Stellen $s = n \cdot \lambda$ (λ = Intervalllänge, $n = 0, 1, 2 \ldots m$) festgelegten Funktion $\eta = f(s)$ und ihrer zweiten Ableitung besteht und — wenn wir uns auf die Funktion $w = f_2(s)$ beziehen und für $\left(\frac{d^2 w}{ds^2}\right)_n$ den aus (47) folgenden Ausdruck

$$\left(\frac{d^2 w}{ds^2}\right)_n = -\frac{w_n}{r^2} - \left(\frac{M}{EJ}\right)_n \tag{49}$$

einsetzen — zur Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{12}\Bigg[&-\frac{w_{n-1}}{r^2} - \left(\frac{M}{EJ}\right)_{n-1} - 10 \cdot \frac{w_n}{r^2} - 10\left(\frac{M}{EJ}\right)_n \\ &- \frac{w_{n+1}}{r^2} - \left(\frac{M}{EJ}\right)_{n+1}\Bigg] = w_{n-1} - 2\,w_n + w_{n+1} \end{aligned} \tag{50}$$

führt. Die Gl. (50), die nach Beachtung von (46) und

$$\frac{\lambda^2}{12\,r^2} = \frac{b^2}{12\,m^2 r^2} = \frac{\alpha^2}{12\,m^2} \tag{51}$$

in

$$\begin{aligned} w_{n-1}\left(1 + \frac{\alpha^2}{12\,m^2}\right) - w_n\left(2 - 10 \cdot \frac{\alpha^2}{12\,m^2}\right) + w_{n+1}\left(1 + \frac{\alpha^2}{12\,m^2}\right) \\ = -\frac{\alpha^2}{12\,m^2} \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ^*}\left(c_{n-1} - 10\,c_n + c_{n+1}\right) \end{aligned} \tag{52}$$

übergeht, ist der Reihe nach für alle Stellen $n = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ anzuschreiben; für die an den Stellen $n = 0$ und $n = m$ geltenden Funktionswerte haben wir hierbei mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Randbedingungen

$$w_0 = 0, \quad w_m = 0 \tag{53}$$

zu setzen. Das auf diese Weise erhaltene System von $(m-1)$ linearen, dreigliedrigen Gleichungen ist nach den Unbekannten w_n aufzulösen und liefert diese Unbekannten in der Form

$$w_n = c_n^* \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ^*}, \tag{54}$$

wobei c_n^* einen von $n = 0, 1, 2, 3 \ldots m$ abhängigen Zahlenwert bedeutet.

---

[11]) J. E. Steuermann u. A. A. Pikowski, Grundlagen der Stabilitätstheorie der Baukonstruktionen, § 27. Moskau 1939.

[12]) F. Stüssi, Abhandlungen der IVBH., 3. Band, Zürich 1935, S. 401. Das Verfahren wurde von E. Amstutz, Schweiz. Bauztg. (112) 1938, S. 83, und von E. Chwalla, Forschungsheft Nr. 2 aus dem Gebiete des Stahlbaues, Berlin 1939, S. 53, verwendet; über weitere Anwendungen bei der Winduntersuchung von Hängebrücken und bei der Stabilitätsuntersuchung frei vorgebauter Blechträgerbrücken wird demnächst berichtet werden.

Wir sind bei der Durchführung unseres Lösungsverfahrens von dem angenommenen Gesetz (42) ausgegangen und nach der Integration der Differentialgleichung des Problems zum neuen Gesetz (54) gelangt. Würden wir bei unseren Integrationen weder von der Simpsonschen Regel [bei der Lösung von (39)] noch von der Stüssischen Beziehung [bei der Lösung von (47)] Gebrauch machen und hätten wir mit unserer Annahme (42) zufällig das der gesuchten Lösung entsprechende „richtige" Gesetz getroffen, so würde sich das Gesetz (54) vom angenommenen bloß durch einen konstanten Faktor unterscheiden; der aus den Zahlenwerten c_n und c_n^* gebildete Quotient

$$Q_n = c_n / c_n^* \tag{55}$$

wäre dann an allen Stellen $n = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ der gleiche, so daß wir für eine beliebige Stelle n die Bedingung

$$(w_n)_{\text{erhalten}} = (w_n)_{\text{angenommen}} \tag{56}$$

anschreiben und mit Hilfe dieser Bedingung — nach Beachtung von (42) und (54) — die ideale Knickbelastungsintensität

$$p_{Ki} = Q_n \cdot \frac{EJ^*}{r^3} \tag{57}$$

berechnen könnten. Entspricht die Annahme (42) der genauen Knickfigur — wie wir dies praktisch zu erwarten haben — nur mit mehr oder minder guter Annäherung, dann hat der Quotient (55) an jeder Stelle $n = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ einen etwas anderen Wert; in einem solchen Fall dürfen wir mit mehr oder minder großer Genauigkeit für die Knickbelastungsintensität

$$p_{Ki} = Q_{\text{mittel}} \cdot \frac{EJ^*}{r^3} \tag{58}$$

schreiben, wobei Q_{mittel} das arithmetische Mittel aller dieser Einzelwerte Q_n vorstellt. Unterscheiden sich die Quotienten (55) an den Stellen $n = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ stark voneinander, so beweist dies, daß wir mit unserer Annahme (42) von der genauen Knickfigur stark abgewichen sind; wir müssen dann die ganze Rechnung mit der verbesserten Annahme (42) wiederholen, und zwar so lange, bis die Anwendung von (58) gerechtfertigt ist. Hinsichtlich der Konvergenz dieses durch „schrittweise Annäherung" gekennzeichneten Rechenvorganges gelten ähnliche Überlegungen wie bei dem bekannten Iterationsverfahren von Engeßer-Vianello[13]).

Abschließend sei mit Bezug auf (58) noch erwähnt, daß es naheliegend erscheint, bei der Berechnung von Q_{mittel} die Flächen $(F_w)_{\text{angenommen}}$ und $(F_w)_{\text{erhalten}}$, die die c_n-Kurve bzw. die c_n^*-Kurve mit den Koordinatenachsen einschließen, mit Hilfe der Simpsonschen Regel (oder der Trapezformel) zu bestimmen und Q_{mittel} in der Formel

$$Q_{\text{mittel}} = \frac{(F_w)_{\text{angenommen}}}{(F_w)_{\text{erhalten}}} \tag{59}$$

darzustellen. Diese Art der Mittelbildung hat sich gut bewährt[14]), ist aber nur in jenen Fällen zweckmäßig, in denen alle c_n dasselbe Vorzeichen haben. Im Rahmen unserer Untersuchung treten sowohl positive als auch negative Vorzahlen c_n auf, so daß sowohl der Nenner als auch der Zähler in (59) eine Differenz von Flächeninhalten darstellt. Sind diese Differenzen verhältnismäßig klein, dann ist die Formel (59) zur Mittelbildung ungeeignet. Ihrer Anwendung steht jedoch nichts entgegen, wenn die Vorzahlen c_n und c_n^* mit ihren Absolutwerten in die Simpsonsche Regel (bzw. die Trapezformel) eingeführt werden.

4. Zahlenbeispiel zur Nachprüfung der praktisch erreichbaren Genauigkeit.

Um den Gang der Untersuchung bei Zugrundelegung des im 3. Abschnitt geschilderten Lösungsverfahrens an Hand eines Zahlenbeispiels klarzustellen und die praktisch erzielbare Genauigkeit der Lösung zu beleuchten, wollen wir das Verfahren bei der Bestimmung der kleinsten idealen Knickbelastungsintensität des im 2. Abschnitt behandelten, zweifach statisch unbestimmten Kreisbogenträgers (Bild 4d, Zentriwinkel $\alpha = 1{,}187 \approx 68°$, Querschnittsträgheitsmoment $J =$ konst) anwenden. Wir gehen hierbei von dem in Bild 5 angegebenen, der strengen Problemlösung zugeordneten Verteilungsgesetz (42) aus und dürfen daher erwarten, daß der Quotient (55) schon nach dem ersten Lösungsschritt an allen Stellen $n = 1, 2, 3 \ldots (m-1)$ praktisch derselbe ist und zu einem Wert p_{Ki} führt, der mit dem strengen Lösungswert (33) hinreichend übereinstimmt.

Wir unterteilen die Bogenlänge b in $m = 10$ gleiche Teile der Länge $\lambda = b/10$, stellen die Biegemomente (43) unter Verwendung der in Bild 5a angegebenen Vorzahlen c_n in der Form

$$M_n = c_n p_{Ki} r K + X_a r\left(1 - \cos\frac{n\alpha}{10}\right) + X_b r \cdot \sin\frac{n\alpha}{10}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots m \tag{60}$$

dar und ermitteln die im statisch bestimmten Grundsystem (Freiträger) unter den Hilfsangriffen $X_a = 1$ (Bild 7b) bzw. $X_b = 1$ (Bild 7c) auftretenden, durch (44) festgelegten Werte

$$\begin{cases} \overline{\mathfrak{M}}_a = +1\, r\,(1 - \cos 0{,}1187\, n) \\ \overline{\mathfrak{M}}_b = +1\, r \cdot \sin 0{,}1187\, n, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots 10. \end{cases} \tag{61}$$

Dann berechnen wir für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots 10$ der Reihe nach die Integranden

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\overline{\mathfrak{M}}_a M}{EJ}\right)_0 = 0 \\ \left(\dfrac{\overline{\mathfrak{M}}_a M}{EJ}\right)_1 = \dfrac{r^2}{EJ} \cdot 10^{-3}(-74{,}996\, K p_{Ki} + 0{,}0494\, X_a + 0{,}8324 X_b) \\ \quad \ldots \text{usw.} \end{cases} \tag{62}$$

und

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\overline{\mathfrak{M}}_b M}{EJ}\right)_0 = 0 \\ \left(\dfrac{\overline{\mathfrak{M}}_b M}{EJ}\right)_1 = \dfrac{r^2}{EJ} \cdot 10^{-3}(-1263{,}091\, K p_{Ki} + 0{,}8324\, X_a + 14{,}0185\, X_b) \\ \quad \ldots \text{usw.,} \end{cases} \tag{63}$$

integrieren (39) mit Hilfe der Simpsonschen Regel

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits^b \frac{\overline{\mathfrak{M}}_a M}{EJ} \cdot ds = \frac{\lambda}{3}\left[\left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_a M}{EJ}\right)_0 + 4\left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_a M}{EJ}\right)_1 + 2\left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_a M}{EJ}\right)_2 + \ldots\right] \\ \displaystyle\int\limits_b \frac{\overline{\mathfrak{M}}_b M}{EJ} \cdot ds = \frac{\lambda}{3}\left[\left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_b M}{EJ}\right)_0 + 4\left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_b M}{EJ}\right)_1 + 2\left(\frac{\overline{\mathfrak{M}}_b M}{EJ}\right)_2 + \ldots\right] \end{cases} \tag{64}$$

und gelangen so zu den beiden Elastizitätsgleichungen

$$\begin{cases} 19{,}299\, K p_{Ki} r + 331{,}186\, X_b + 168{,}571\, X_a = 0 \\ 32{,}162\, K p_{Ki} r + 710{,}878\, X_b + 331{,}186\, X_a = 0, \end{cases} \tag{65}$$

deren Lösungen

$$\begin{cases} X_a = -0{,}302\,27\, K p_{Ki} r \\ X_b = +0{,}095\,58\, K p_{Ki} r \end{cases} \tag{66}$$

lauten und nach Einführung in (60) die in Bild 8 angegebenen Werte

$$\begin{cases} \left(\dfrac{M}{EJ}\right)_0 = 0 \\ \left(\dfrac{M}{EJ}\right)_1 = -\ 9{,}437 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r}{EJ} \\ \left(\dfrac{M}{EJ}\right)_2 = -14{,}295 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r}{EJ} \\ \quad \ldots \text{usw.} \end{cases} \tag{67}$$

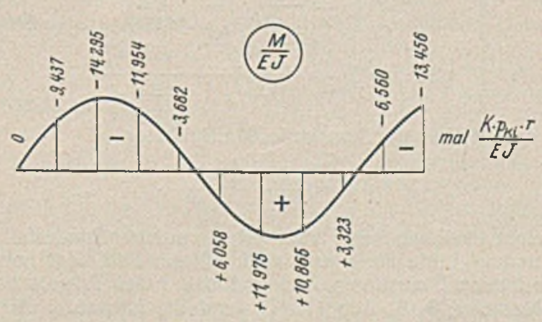

Bild 8.

liefern. Diese Werte setzen wir nun in die für $n = 1, 2, 3 \ldots 9$ angeschriebenen Gl. (52) ein, beachten hierbei (53) sowie

$$\frac{\alpha^2}{12\, m^2} = \frac{1{,}187^2}{12 \cdot 10^2} = 0{,}001\,174 \tag{68}$$

und erhalten so die dreigliedrigen Gleichungen

$$\begin{cases} 0 \qquad\qquad\quad -1{,}988\,26\, w_1 + 1{,}001\,17\, w_2 = 0{,}127\,54 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ 1{,}001\,17\, w_1 - 1{,}988\,26\, w_2 + 1{,}001\,17\, w_3 = 0{,}192\,89 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ \qquad \ldots \text{usw.} \ldots \\ 1{,}001\,17\, w_8 - 1{,}988\,26\, w_9 + 0 \qquad\qquad = 0{,}088\,89 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \end{cases} \tag{69}$$

[13]) Vgl. dazu A. Schleusner, Zur Konvergenz des Engeßer-Vianello-Verfahrens. Leipzig und Berlin 1938.

[14]) K. Karas, Ing. Arch. (1) 1930, S. 177; K. Pohl, Stahlbau (6) 1933, Heft 18, S. 137.

mit der Lösung

$$
(70)\quad \left|\begin{array}{ll}
w_0 = w_{10} = 0 & w_5 = +0{,}150 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\
w_1 = -0{,}271 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_6 = +0{,}344 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\
w_2 = -0{,}411 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_7 = +0{,}373 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\
w_3 = -0{,}352 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_8 = +0{,}251 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\
w_4 = -0{,}127 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_9 = +0{,}082 \cdot \dfrac{K p_{Ki} r^3}{EJ} .
\end{array}\right.
$$

Hätten wir bei der Durchführung der Rechnungen weder von der Simpsonschen Regel noch vom Stüssischen Integrationsverfahren Gebrauch gemacht, dann würden die angenommenen Vorzahlen c_n (Bild 5a) nach Division durch die nach der Integration der Differentialgleichung gewonnenen, in (70) enthaltenen Vorzahlen c_n^* für alle $n = 1, 2, 3 \ldots 9$ denselben Quotienten Q_n ergeben. Mit Rücksicht auf die der Simpsonschen Regel und dem Stüssischen Integrationsverfahren entspringenden Fehler zeigen diese Quotienten geringfügige Schwankungen innerhalb der Grenzen 38,86 und 39,81; das arithmetische Mittel aller dieser Q_n beträgt

$$(71)\qquad Q_{\text{mittel}} = 39{,}30$$

und führt nach Beachtung von (58) zum Lösungswert

$$(72)\qquad p_{Ki} = 39{,}30 \cdot \frac{EJ}{r^3},$$

der mit dem exakten Wert (33) fast vollkommen übereinstimmt. Würden wir die Beziehung (59) verwenden und bei der Ermittlung von $(F_w)_{\text{angenommen}}$ und $(F_w)_{\text{erhalten}}$ die Absolutwerte $|c_n|$ und $|c_n^*|$ in die Simpsonsche Regel einsetzen, so würden wir

$$(73)\qquad Q_{\text{mittel}} = \frac{10{,}602 \cdot 140{,}857}{10{,}602 \cdot 3{,}586} = 39{,}28$$

und damit praktisch das gleiche Lösungsergebnis wie früher gewinnen. Würden wir hingegen die Flächenbestimmung unter Wahrung der Vorzeichen von c_n und c_n^* durchführen, dann würden sich die positiven und negativen Teilflächen (vgl. Bild 5a) nahezu ausgleichen und für Q_{mittel} den fehlerhaften Wert

$$(74)\qquad Q_{\text{mittel}} = \frac{10{,}602 \cdot 0{,}217}{10{,}602 \cdot 0{,}019} = 11{,}39$$

liefern; im Rahmen unserer Untersuchung ist daher diese Art der Mittelbildung, wie schon im 3. Abschnitt erwähnt wurde, unbrauchbar.

Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung.

Einfeldrige und durchlaufende Versteifungsträger mit konstantem und veränderlichem Trägheitsmoment.

Von Dr.-Ing. Kuo-hao Lie, Darmstadt.

(Schluß aus Heft 14/15.)

III. Abschnitt.

Das Annäherungsverfahren zur Berechnung der Hängebrücken mit Versteifungsträgern von veränderlichem Trägheitsmoment J.

I. Entwicklung des Lösungsverfahrens.

Das im II. Abschnitt angewandte Gedankenmodell, eine Hängebrücke statisch durch einen ihrem Versteifungsträger entsprechenden stellvertretenden Träger zu ersetzen, soll auch die Grundlage des vorliegenden Verfahrens bilden. Die Aufgabe ist also im vorliegenden Fall die, den durch die Querlast und den Axialzug H belasteten stellvertretenden Träger von veränderlichem J zu berechnen oder, mathematisch ausgedrückt, die das veränderliche J enthaltende Differentialgleichung (7)

$$(7)\qquad \eta_x'' = -\frac{M_x^0}{EJ_x} + \frac{H\eta_x}{EJ_x}$$

zu lösen[10]). Hierzu wollen wir zunächst zwei Sonderfälle betrachten, wo die Lösung der Differentialgleichung gleich gefunden werden kann.

Sonderfall 1. $M^0 = 0$, d. h. der Träger ist nur durch den Axialzug H belastet. Es ist klar, daß in diesem Fall $\eta = 0$ die einzige Lösung darstellt.

Sonderfall 2. Die Linien η und η^0 sind affin[11]), worin η^0 die Durchbiegung infolge M^0 allein bedeutet. Die Lösung lautet dann $\eta = a\,\eta^0$, und aus

$$
(45)\quad \left|\begin{array}{l}
a\,\eta_x^{0\prime\prime} = -\dfrac{a M_x^0}{EJ_x} \\
\text{und}\quad a\,\eta_x^{0\prime\prime} = -\dfrac{M_x^0}{EJ_x} + \dfrac{a H \eta_x^0}{EJ_x}
\end{array}\right.
$$

ergibt sich unmittelbar der konstante Multiplikator

$$(46)\qquad a = \frac{M_x^0}{M_x^0 + H\eta_x^0}.$$

Wie man leicht einsehen kann, existiert ein solcher Sonderfall nur dann, wenn M^0- und η^0-Linie auch affin sind. Dieser Fall liegt nur dann vor, wenn diese Linien Sinuslinien sind und das J des Trägers konstant ist.

Der allgemeine Fall, den Gl. (7) darstellt, ist weder $M^0 = 0$ noch $\eta = a\,\eta^0$. Aber die vorhergehenden Betrachtungen geben uns schon genug Winke, um die Lösung des allgemeinen Falles zu finden. Wir denken uns die endgültige Biegelinie η zunächst aus zwei Teilen zusammengesetzt:

$$(47)\qquad \eta = a_0\,\eta^0 + \eta_1.$$

Dabei bedeutet η^0 die Durchbiegung infolge M^0 allein:

$$(48)\qquad \eta_x^{0\prime\prime} = -\frac{M_x^0}{EJ_x}.$$

Diese Durchbiegung kann man bei beliebig veränderlichem J_x nach dem Mohrschen Satz leicht ermitteln, indem man zu der $\frac{M^0}{EJ_x}$-Belastung die Momentenlinie berechnet. Der konstante Multiplikator a_0 ist zunächst eine unbekannte Größe, und η_1 ist eine unbekannte Durchbiegung. Es ist klar, daß man über a_0 beliebig verfügen kann. Sobald es aber einmal gewählt ist, liegt die η_1-Linie fest. Die Aufgabe ist nun die, ein geeignetes a_0 zu wählen und dann die η_1-Linie zu bestimmen.

Zu diesem Zweck differentiieren wir Gl. (47) zweimal und kombinieren sie dann mit Gl. (48) u. (7). Daraus ergibt sich

$$(49)\qquad \eta_1'' = -\frac{M_1}{EJ_x} + \frac{H\eta_1}{EJ_x},$$

worin bedeutet

$$(50)\qquad M_1 = M^0(1 - a_0) - H\,a_0\,\eta^0.$$

Wie man leicht einsieht, ist Gl. (49) von demselben Typ wie Gl. (7), und es wird daher $\eta_1 = 0$, wenn $M_1 = 0$ ist (Sonderfall 1). Gl. (50) kann aber nur dann durch eine geeignete Wahl von a_0 über die ganze Trägerlänge gleich Null werden, wenn M^0- und η^0-Linie affin sind. Das ist der vorgehend behandelte Sonderfall 2. Für den allgemeinen Fall sind M_1 und damit auch η_1 nicht gleich Null. Eines ist aber klar, daß η_1 um so geringer wird, je kleiner M_1 ist. Das ist der erste maßgebende Gesichtspunkt, wonach die Wahl von a_0 zu treffen ist.

Der nächste Schritt ist der, die η_1-Linie zu bestimmen. Da Gl. (49) von demselben Typ wie Gl. (7) ist, handelt es sich hier um dieselbe Aufgabe wie die Bestimmung von η. Man kann also genau wie oben vorgehen. Mit

$$(51)\qquad \eta_1 = a_1\,\eta_1^0 + \eta_2,$$

$$(50)'\qquad \eta_1^{0\prime\prime} = -\frac{M_1}{EJ_x},$$

$$(52)\qquad M_2 = M_1(1 - a_1) - H\,a_1\,\eta_1^0$$

ergibt sich

$$\eta_2'' = -\frac{M_2}{EJ_x} + \frac{H\eta_2}{EJ_x}.$$

Die Einführung der Gl. (51) in Gl. (47) liefert dann

$$\eta = a_0\,\eta^0 + a_1\,\eta_1^0 + \eta_2.$$

In obiger Gleichung wird $\eta_2 = 0$, wenn $M_2 = 0$ ist, d. h. wenn M_1- und η_1^0-Linie affin sind. Das hängt aber sehr davon ab, wie man a_0 wählt. Das ist der zweite maßgebende Gesichtspunkt für die Wahl von a_0. Es gilt daher ganz allgemein die Regel:

a_{n-1} ist so zu wählen, daß erstens M_n möglichst klein wird und zweitens die hieraus konstruierte Biegelinie η_n^0 voraussichtlich der M_n-Linie affin oder quasiaffin wird.

Falls M_2 und η_2 nicht verschwinden, so ist der gleiche Vorgang zu wiederholen. Bei n-maliger Wiederholung hat man

$$\eta_n = a_n\,\eta_n^0 + \eta_{n+1},$$

$$(53)\qquad \eta_n^{0\prime\prime} = -\frac{M_n}{EJ_x},$$

$$(54)\qquad M_{n+1} = M_n(1 - a_n) - H\,a_n\,\eta_n^0,$$

$$(55)\qquad \eta_{n+1}'' = -\frac{M_{n+1}}{EJ_x} + \frac{H\eta_{n+1}}{EJ_x}.$$

---

[10]) Das im nachstehenden entwickelte Verfahren ist ebensogut für den Träger mit dem Axialdruck und der Querlast anwendbar. Man braucht nur in den im folgenden abgeleiteten Gleichungen das Vorzeichen von H zu ändern.

[11]) Die η- und η^0-Linie heißen affin oder quasiaffin, wenn die Verhältniszahl $\nu_x = \frac{\eta_x^0}{\eta_x}$ über die ganze Trägerlänge gleich oder annähernd gleich ist.

Die gesuchte Durchbiegung ergibt sich dann zu

(56) $$\eta = a_0\,\eta^0 + a_1\,\eta_1{}^0 + \ldots + a_n\,\eta_n^0 + \eta_{n+1}.$$

In dieser Gleichung sind $a_0, \ldots a_n$ die gewählten konstanten Multiplikatoren und $\eta^0, \ldots \eta_n^0$ die nach dem Mohrschen Satz aus $M^0, \ldots M_n$ ermittelten Biegelinien des Einfachbalkens, der nicht durch H belastet ist. Das Restglied kann man durch Wiederholung der Operation verschwindend klein machen, so daß es vernachlässigt werden kann, ohne die Genauigkeit der Berechnung zu beeinträchtigen. Damit haben wir die Durchbiegung η durch schrittweise Näherung gefunden.

Aus der gewonnenen Durchbiegung folgt das Biegungsmoment

(57) $$M_x = M_x^0 - H\,\eta_x.$$

Durch Differentiation obiger Gleichung ergibt sich die Querkraft

(58) $$Q_x = Q_x^0 - H \cdot \mathrm{tg}\,\tau_x,$$

worin τ_x den Biegewinkel an der Stelle x bedeutet. Wie man sich leicht überzeugen kann, gelten für die Biegewinkel an der Stelle x und an den Trägerenden folgende Beziehungen

(59) $$\begin{cases} \tau_x = a_0\,\tau_x^0 + a_1\,\tau_{1x}^0 + \ldots, \\ \mathfrak{A} = a_0\,\mathfrak{A}^0 + a_1\,\mathfrak{A}_1{}^{0'} + \ldots \end{cases}$$

Es darf nicht vergessen werden, daß in obiger Berechnung der Horizontalzug H noch nicht der richtige ist. Das angenommene H muß nachgerechnet und verbessert werden. Hierzu muß man die Biegefläche F_η kennen. Bezeichnet man mit $F_{\eta_i{}^0}$ die Biegefläche von der Biegelinie $\eta_i{}^0$, so ergibt sich aus Gl. (56)

(60) $$F_\eta = \sum_{i=0}^{n} a_i\,F_{\eta_i{}^0} + F_{\eta_{n+1}},$$

weil a_i ein konstanter Multiplikator für alle Ordinaten von $\eta_i{}^0$ ist und infolgedessen auch für $F_{\eta_i{}^0}$ gilt.

Damit ist die Aufgabe theoretisch gelöst. Zum Zwecke der praktischen Anwendung soll das Verfahren im folgenden Abschnitt näher besprochen werden.

II. Praktische Anwendung des Verfahrens.

A. Die Wahl der Multiplikatoren $a_0, \ldots a_n$.

Wir haben die Hängebrücke auf den Balken mit Axialzug H zurückgeführt und diesen wieder auf den gewöhnlichen Träger ohne H. Die Aufgabe besteht nun darin, die Biegelinien, Winkel und Flächen des entsprechenden Einfachbalkens zu ermitteln und die geeigneten Multiplikatoren zu wählen. Im vorgehenden Abschnitt ist kurz darauf hingewiesen worden, wie die Wahl von a getroffen werden soll. Die Frage möge hier näher auseinandergesetzt werden.

Es sei z. B. die Biegelinie η für den Lastfall nach Bild 13a gesucht.

Man ermittle zunächst für den Balken ohne H die M^0- und η^0-Linie und weiter die Biegelinie ${}_H\eta^0$ für die Momentenfläche $H\,\eta^0$ (Bild 13c) nach

(61) $${}_H\eta^{0''} = -\frac{H\eta^0}{EJ_x}.$$

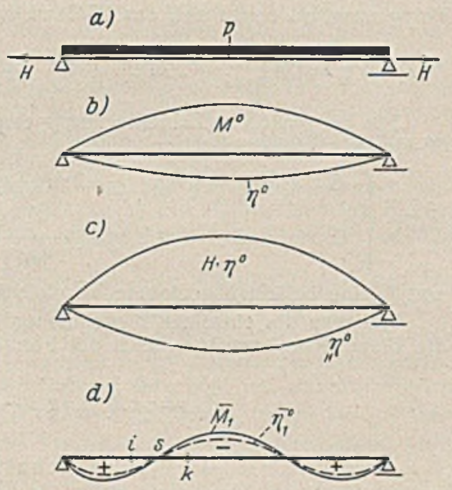

Bild 13a bis d.

Betrachtet man obige Gleichung und Gl. (50) sowie (50'), so hat man

(62a) $$M_1 = M^0(1 - a_0) - a_0\,H\,\eta^0,$$

(62b) $$\eta_1 = \eta^0(1 - a_0) - a_0\,{}_H\eta^0.$$

Mit[12])

(63a) $$1 - a_0 = b_0,$$

(63b) $$\bar M_1 = \frac{M_1}{b_0},$$

(63c) $$\bar\eta_1{}^0 = \frac{\eta_1}{b_0}$$

lassen sich Gl. (62a) u. (62b) umformen in

(63d) $$\bar M_1 = M^0 - \frac{a_0}{b_0}\cdot H\,\eta^0,$$

(63e) $$\bar\eta_1{}^0 = \eta^0 - \frac{a_0}{b_0}\,{}_H\eta^0.$$

Sollen $\bar M_1$ und $\bar\eta_1{}^0$ möglichst klein und affin sein, so ist die notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung die, daß diese Linien zum Teil positiv und zum Teil negativ sein und durch denselben Nullpunkt gehen müssen. Die gewünschten Linien von $\bar M_1$ und $\bar\eta_1{}^0$ sind im Bild 13d dargestellt. Für den Nullpunkt S gilt

(64a) $$M_0 - \frac{a_0}{b_0}\cdot H\,\eta^0 = 0,$$

(64b) $$\eta^0 - \frac{a_0}{b_0}\cdot{}_H\eta^0 = 0.$$

Das sind die Bedingungen, die a_0 erfüllen muß. Damit ist die Wahl von a_0 mathematisch formuliert. Die Lösung der Aufgabe geschieht leicht durch Probieren. Man nimmt schätzungsweise den Punkt i als S an und bestimmt aus Gl. (64a) den Multiplikator a_0, der in Gl. (64b) eingesetzt einen von Null verschiedenen Wert $\bar\eta_{1i}^0$ liefert. Wiederholt man den gleichen Vorgang mit dem Punkt k, so erhält man $\bar\eta_{1k}^0$. Den richtigen Multiplikator a_0 findet man durch Interpolation für $\bar\eta_1{}^0 = 0$.

Mit a_0 sind $\bar M_1$ und $\bar\eta_1{}^0$ nach Gl. (63) bekannt. Um den zweiten Multiplikator a_1 zu bestimmen, kann man auf ähnliche Weise vorgehen, indem $\bar M_1$ und $\bar\eta_1{}^0$ als Anfangszustand betrachtet werden.

Mit

(65a) $$1 - a_1 = b_1,$$

(65b) $$M_2 = b_0\,b_1\,\bar M_2,$$

(65c) $$\eta_2{}^0 = b_0\,b_1\,\bar\eta_2{}^0$$

geht Gl. (52) über in

(65d) $$\bar M_2 = \bar M_1 - \frac{a_1}{b_1}\cdot H\,\bar\eta_1{}^0,$$

und man erhält

(65e) $$\bar\eta_2{}^0 = \bar\eta_1{}^0 - \frac{a_1}{b_1}\cdot{}_H\bar\eta_1{}^0,$$

worin bedeutet

(65f) $${}_H\bar\eta_1{}^{0''} = -\frac{H\,\bar\eta_1{}^0}{EJ_x}.$$

Setzt man diesen Vorgang fort, so hat man

(66a) $$1 - a_n = b_n,$$

(66b) $$M_{n+1} = b_0\ \ldots b_n\,\bar M_{n+1},$$

(66c) $$\eta_{n+1} = b_0 \ldots b_n\,\bar\eta_{n+1}^0,$$

(66d) $$\bar M_{n+1} = \bar M_n - \frac{a_n}{b_n}\cdot H\,\bar\eta_n^0,$$

(66e) $$\bar\eta_{n+1}^0 = \bar\eta_n^0 - \frac{a_n}{b_n}\cdot{}_H\bar\eta_n^0,$$

(66f) $${}_H\bar\eta_n^{0''} = -\frac{H\,\bar\eta_n^0}{EJ_x}.$$

Vorangehende Darlegung gilt nur für den Fall, wo die M^0- und η^0-Linie quasiaffin sind. Im allgemeinen liegt die Affinität zwischen den beiden Linien bei einem Einfachbalken in ausreichendem Maße vor, wenn die Streckenlast p symmetrisch oder gegensymmetrisch angeordnet ist. Daher empfiehlt es sich immer, eine unsymmetrische Belastung in solche Teilzustände umzuordnen (Bild 14).

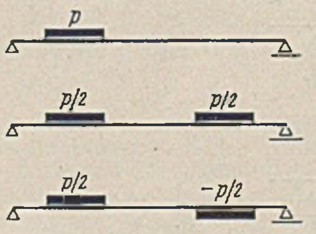

Bild 14.

Es gibt aber Lastfälle, wo zwischen M^0- und η^0-Linie keinerlei Affinität besteht, was man auch nicht durch Lastumordnung ändern kann. Das sind die bei den durchlaufenden Versteifungsträgern vorkommenden Lastfälle in den Bildern 4c, 4d u. 4e. Es handelt sich nur um Stützenmomente an Trägerenden. In solchen Fällen hat es keinen Sinn, a_0 nach Gl. (64a) und (64b) zu bestimmen. Man muß anders vorgehen.

Wir haben an den Multiplikator a_0 die Anforderung gestellt, daß $\bar M_1$ und $\bar\eta_1{}^0$ möglichst klein werden und quasiaffin sein sollen. Der Sinn dieser Anforderung ist der, daß $\bar\eta_2{}^0$ verschwindend klein wird. Um das zu erreichen, kann man die Bedingung auch anders ausdrücken. Betrachtet man Gl. (63e) u. (65e), so kann man die Regel folgendermaßen formulieren:

a_0 ist so zu wählen, daß die Biegelinien $\bar\eta_1{}^0$ und ${}_H\bar\eta_1{}^0$ (das ist die Biegelinie für die Momentenfläche $H\,\bar\eta_1{}^0$) möglichst affin werden.

Für weitere Multiplikatoren gilt die entsprechende Regel. Man braucht sich somit nicht mehr um die Momentenlinien zu kümmern, und diese werden auch im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel gar nicht ermittelt.

Da zwischen η^0 und ${}_H\eta^0$ meistens schon gewisse Affinität besteht, kann man auch einen mathematischen Ausdruck zur Bestimmung von a_0 ableiten. Bezeichnet $({}_H\eta^0)_H$ die Biegelinie für die Momentenfläche $H\,{}_H\eta^0$, so erhält man durch Einsetzen der Gl. (63e) in Gl. (65f)

(67) $${}_H\bar\eta_1{}^0 = {}_H\eta^0 - \frac{a_0}{b_0}\,({}_H\eta^0)_H.$$

Aus ähnlicher Überlegung wie im vorigen Beispiel kann man für den

[12]) Die Einführung der neuen Größen $\bar M_n$ und $\bar\eta_n^0$ statt M_n und η_n^0 ist für das vorliegende Verfahren von größter Wichtigkeit, wie wir später sehen werden.

Nullpunkt S, wo $\bar{\eta}_1{}^0$ und ${}_H\bar{\eta}_1{}^0$ gleichzeitig verschwinden, wie Gl. (64) anschreiben:

$$(68\text{a})\qquad \bar{\eta}_1{}^0 = \eta^0 - \frac{a_0}{b_0}\cdot {}_H\eta^0 = 0,$$

$$(68\text{b})\qquad {}_H\bar{\eta}_1{}^0 = {}_H\eta^0 - \frac{a_0}{b_0}\left({}_H\eta^0\right)_H = 0.$$

Somit läßt sich der Multiplikator a_0 auch in diesem Fall, wo M^0- und η^0-Linie von ganz verschiedenem Verlauf sind, nach bestimmter Regel ermitteln.

Bisher sind $\bar{\eta}_1{}^0, \ldots \bar{\eta}_n^0$ statt $\eta_1{}^0, \ldots \eta_n^0$ ermittelt worden. Durch Einsetzen dieser Werte aus Gl. (63e), (65e) u. (66e) in Gl. (56) ergibt sich dann

$$(69)\qquad \eta = a_0\,\eta^0 + a_1\,b_0\,\bar{\eta}_1{}^0 + \ldots + a_n\,b_0 \ldots b_{n-1}\,\bar{\eta}_n^0$$

und entsprechend:

$$(70)\qquad \begin{cases} \tau = a_0\,\tau^0 + a_1\,b_0\,\bar{\tau}_1{}^0 + \ldots + a_n\,b_0 \ldots b_{n-1}\,\bar{\tau}_n^0, \\ \mathfrak{A} = a_0\,\mathfrak{A}^0 + a_1\,b_0\,\bar{\mathfrak{A}}_1{}^0 + \ldots + a_n\,b_0 \ldots b_{n-1}\,\bar{\mathfrak{A}}_n^0, \end{cases}$$

$$(71)\qquad F_\eta = a_0\,F_{\eta^0} + a_1\,b_0\,F_{\bar{\eta}_1^0} + \ldots + a_n\,b_0 \ldots b_{n-1}\,F_{\bar{\eta}_n^0}.$$

Darin beziehen sich die Größen $\bar{\tau}_n^0$, $\bar{\mathfrak{A}}_n^0$, $F_{\bar{\eta}_n^0}$ jeweils auf die Biegelinie $\bar{\eta}_n^0$. Für $\bar{\tau}_n^0$, $\bar{\mathfrak{A}}_n^0$ und $F_{\bar{\eta}_n^0}$ gelten die den Gl. (63e), (65e) u. (66e) entsprechenden Gleichungen.

Es sollen nun die bisher nicht berücksichtigten Fragen, warum man statt η_n^0, τ_n^0, $F_{\eta_n^0}$ die Werte $\bar{\eta}_n^0$, $\bar{\tau}_n^0$, $F_{\bar{\eta}_n^0}$ berechnet und wie man der Änderung von H Rechnung trägt, erläutert werden. Die beiden Fragen haben einen engen Zusammenhang und können auch nur gemeinsam erörtert werden.

Betrachtet man Gl. (62a) u. (63d), so ist ein wichtiger Unterschied zwischen beiden Gleichungen zu bemerken: $\bar{M}_1$ kann unverändert bleiben, wenn man die Änderung von H und a_0 aufeinander abstimmt, M_1 dagegen nicht. Dementsprechend können $\bar{\eta}_n^0$, $\bar{\tau}_n^0$ und $F_{\bar{\eta}_n^0}$ für beliebiges H konstant bleiben und η_n^0, τ_n^0 und $F_{\eta_n^0}$ nicht. Daraus erklärt sich die erste Frage.

Um die Änderung von H zu berücksichtigen, betrachten wir zunächst Gl. (63d) u. (63e). In diesen Gleichungen sind M^0 und η^0 unabhängig von H. Damit $\bar{M}_1$ und $\bar{\eta}_1{}^0$ immer konstant bleiben, müssen $\frac{a_0}{b_0}\cdot H\,\eta^0$ und $\frac{a_0}{b_0}\cdot {}_H\eta^0$ für jedes H denselben Wert beibehalten. Hat man für H' den Multiplikator a_0' bestimmt, so ergibt sich der neue Multiplikator a_0 für das neue H aus

$$\frac{a_0}{b_0}\cdot H\,\eta^0 = \frac{a_0'}{b_0'}\cdot H'\eta^0$$

oder

$$\frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{H}{H'}\cdot {}_{H'}\eta^0 = \frac{a_0'}{b_0'}\cdot {}_{H'}\eta^0$$

zu

$$(72\text{a})\qquad a_0 = \frac{\dfrac{a_0'}{b_0'}}{\dfrac{H}{H'} + \dfrac{a_0'}{b_0'}}.$$

Ganz allgemein gilt die Beziehung

$$(72\text{b})\qquad a_n = \frac{\dfrac{a_n'}{b_n'}}{\dfrac{H}{H'} + \dfrac{a_n'}{b_n'}}.$$

Damit ist die zweite Frage erledigt. Von der Lösung dieser Frage hängt überhaupt die praktische Anwendbarkeit des vorliegenden Berechnungsverfahrens ab. Denn es würde sehr umständlich sein, wenn man mit einem anderen H alle Biegelinien, Winkel und Flächen von neuem berechnen müßte. Im Zusammenhang mit der Betrachtung über die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens sei darauf hingewiesen, daß die Reihen der Gl. (69) bis (71) sehr rasch konvergieren. In den meisten Fällen lassen sich die Lösungen genau genug in zwei Gliedern darstellen, und zwar ist das zweite Glied sehr klein, so daß der Multiplikator a_1 nach Gutdünken gewählt werden kann, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen. Ausnahmen hiervon bilden die Lastfälle, wo nur Stützenmomente an Trägerenden angreifen. Hierfür muß man nötigenfalls vier Glieder wählen, um die Biegewinkel genau genug zu ermitteln.

B. Die Bestimmungsgleichung für H_p.

Zur Bestimmung von H_p dient im vorliegenden Fall auch die allgemeine Gl. (24). Sie läßt sich umformen, indem man y'' von F_η entfernt und dieses in zwei Teile $F_\eta\,(p)$ und $F_\eta\,(y''\,H_p)$ zerlegt. Bezeichnet $F_{H_p=1}$ die Biegefläche aller am Kabel aufgehängten Trägerteile infolge der Vollast $y''\cdot 1$, d. h. $H_p = 1$, so ergibt sich bei konstantem H

$$F_\eta\,(y''\,H_p) = H_p\,F_{H_p=1}.$$

Das $F_{H_p=1}$ ändert sich mit H. Die Änderung kann man aber leicht durch Berichtigung der Multiplikatoren a berücksichtigen.

Setzt man obigen Ausdruck in Gl. (24) ein und löst sie nach H_p auf so erhält man die Bestimmungsgleichung

$$(73)\qquad H_p = \frac{\Sigma\,\lambda\,F_\eta\,(p) \mp \alpha_t\,t\,\varrho_c\,L_t}{\dfrac{L\,\varrho_c}{E_K\,F_K^0} - F_{H_p=1}}.$$

In obiger Gleichung gilt die Summe im Zähler für die mit p belasteten Träger. Beim durchlaufenden Versteifungsträger muß man noch die Biegefläche infolge der Stützenmomente berücksichtigen, und zwar erstreckt sich diese über alle am Kabel aufgehängten Trägerteile[13]. Zur Ermittlung der Biegefläche F_η wird Gl. (71) benutzt. Die darin enthaltenen einzelnen $F_{\bar{\eta}_i^0}$ kann man leicht bestimmen (s. unten).

Ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung H_p anders als der angenommene Wert, so braucht man nur nach Gl. (72) die Multiplikatoren a zu verbessern, während das einzelne $F_{\bar{\eta}_i^0}$ unverändert bleibt. Mit den neuen Multiplikatoren berechnet man das neue F_η, um H_p zu kontrollieren.

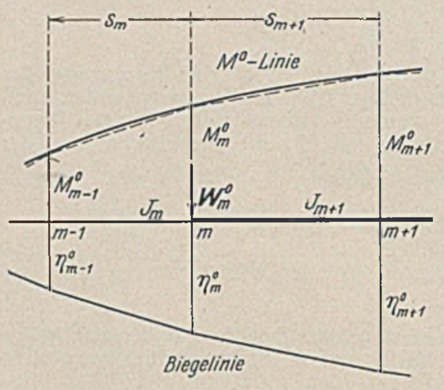

Bild 15.

Nachdem H richtig bestimmt ist, berechnet man dann die Momente und Querkräfte nach Gl. (57) u. (58), wobei zu beachten ist, daß man nicht nur die Verkehrslast p, sondern auch die gedachte Last $y''\,H_p$ und gegebenenfalls noch die Stützenmomente M_s berücksichtigen muß (Bild 2 oder 3). Hinsichtlich der praktischen Anwendung des Verfahrens sei auf die Beispielrechnung in der Dissertation verwiesen.

Im Anschluß soll noch die Ermittlung der Biegelinie und Fläche kurz erläutert werden. Nach dem Mohrschen Satz ist die Biegelinie gleich der Momentenlinie infolge der $\frac{M}{EJ}$-Belastung. Ersetzt man nach Bild 15 die Momentenkurve durch einen Polygonzug, so ergibt sich das W-Gewicht im Punkt m

$$(74\text{a})\qquad W_m^0 = \left(M_{m-1}^0 + 2\,M_m^0\right)\frac{s_m}{6\,E\,J_m} + \left(2\,M_m^0 + M_{m+1}^0\right)\frac{s_{m+1}}{6\,E\,J_{m+1}}.$$

Für die praktische Zahlenrechnung empfiehlt es sich, das $6\,E\,J_c$-fache W-Gewicht zu berechnen:

$$(74)\qquad \begin{cases} 6\,E\,J_c\,W_m^0 = \left(M_{m-1}^0 + 2\,M_m^0\right)s_m' + \left(2\,M_m^0 + M_{m+1}\right)s_{m+1}'. \\ \text{Darin sind}\qquad s_m' = s_m\cdot\dfrac{J_c}{J_m}\qquad s_{m+1}' = s_{m+1}\cdot\dfrac{J_c}{J_{m+1}} \end{cases}$$

und J_c eine beliebige geeignete Vergleichszahl.

Hat man die einzelnen Biegelinienordinaten η^0 ermittelt, so läßt sich die Biegefläche berechnen nach der Formel

$$(75)\qquad F_{\eta^0} = \frac{1}{2}\sum^{l}\eta_m^0\left(s_m + s_{m+1}\right).$$

IV. Abschnitt.

Die beschränkten Einflußlinien und ungünstigsten Laststellungen.

I. Grundlegendes.

In der Theorie I. Ordnung, wo unter Vernachlässigung der Verformung das Superpositionsgesetz seine Gültigkeit besitzt, lassen sich die Einflußlinien für jede statische Größe konstruieren. Die hierfür in der Baustatik übliche Methode ist bekannt. Im folgenden wird aber gezeigt, wie man auf andere Weise auch zum Ziele gelangen kann.

Die für die Theorie I. Ordnung gültige Differentialgleichung der elastischen Linie des Versteifungsträgers lautet:

$$(76)\qquad (E\,J\,\eta'')'' = p + y''\,H_p.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß man, wie es schon in vorhergehenden Abschnitten geschehen ist, die Hängebrücke statisch durch ihren Versteifungsträger mit zwei Teilbelastungen p und $y''\,H_p$ ersetzen kann, wobei die Last $y''\,H_p$ stets als Vollast vorzustellen ist. Dementsprechend bildet sich jede statische Größe aus zwei Teilen. Genau so ist die Einflußlinie.

Es sei z. B. die M_a-Linie einer dreifeldrigen Hängebrücke mit einfachen Versteifungsträgern (Bild 16) gesucht. Diese Aufgabe kann man ganz anschaulich mit Hilfe des stellvertretenden Trägers lösen.

Der erste der Belastung p entsprechende Ast der Einflußlinie ist die M_a^0-Linie des Einfachbalkens, und zwar ist sie in den Seitenöffnungen gleich Null, weil dort P kein Moment im Punkt a hervorrufen kann.

[13]) Die Biegefläche infolge der Stützenmomente läßt sich nach dem im IV. Abschnitt bewiesenen 3. Satz leicht bestimmen.

Den zweiten Ast erhält man, indem man das Moment M_a infolge $y'' H_p$ (Bild 16b) berechnet. Es ist

$$M_a^{0\prime} = \frac{1}{2} \cdot y'' H_p \, a b.$$

Die Einführung von $y'' = -\frac{8f}{l^2}$ für die Mittelöffnung liefert

$$M_a^{0\prime} = -\frac{4f}{l^2} \cdot a b H_p = -y_a H_p. \tag{77}$$

Obige Gleichung besagt, daß der zweite Ast gleich der y_a-fachen H_p-Linie ist. Da eine Last P in der Seitenöffnung auch H_p hervorrufen kann, erstreckt sich dieser Ast über drei Öffnungen. Durch Addition beider Linien ergibt sich dann die gesuchte Einflußlinie für das Moment M_a. Auf gleiche Weise erhält man die Q_a-Linie für die Querkraft im Punkt a aus zwei Ästen, nämlich Q_a^0-Linie und $-\frac{4f}{l^2}(l-2a) H_p$-Linie. Wie man leicht feststellen kann, liefert das Verfahren genau dasselbe Ergebnis wie die gewöhnliche Methode.

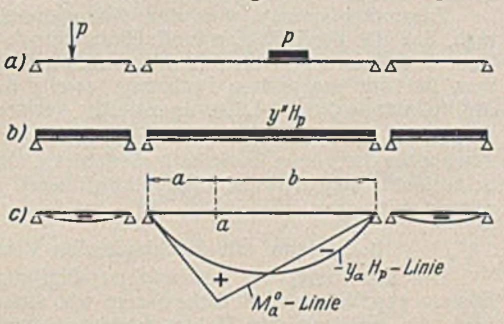

Bild 16a bis c.

Vorstehende Betrachtung soll zur Einführung für die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien nach der Theorie II. Ordnung dienen. Wir haben in der Theorie II. Ordnung die Hängebrücke auch durch ihren Versteifungsträger mit zwei Teilbelastungen p und $y'' H_p$ ersetzt behandelt. Ein Unterschied besteht nur darin, daß hier an beiden Enden des stellvertretenden Trägers noch eine gedachte axiale Zugkraft H angreift, deren Wirkung mit dem Einfluß der Systemverformung identisch ist. Dieser Unterschied ist aber unwesentlich, denn das H wird z. B. nur eine Änderung der M_a^0- und $M_a^{0\prime}$-Linie zur Folge haben. Wichtig dabei ist, daß hier bei konstantem H das Superpositionsgesetz auch gilt, und es folgt daraus, daß man nach der Theorie II. Ordnung die Einflußlinie genau so konstruieren kann wie in der Theorie I. Ordnung. Nur muß man bei der Ermittlung der einzelnen Äste, z. B. M_a^0- und $M_a^{0\prime}$-Linie, den Axialzug H berücksichtigen, und infolgedessen liefert diese Einflußlinie auch nur bei jenem Verkehrslastzustand p einen streng richtigen Wert, wo $H_p + H_g = H$ gerade so groß ist wie das vorher zugrunde gelegte. Die Gültigkeit dieser Einflußlinie ist also beschränkt, und sie wird deshalb als „beschränkte Einflußlinie" bezeichnet.

Aus der vorhergehenden Ausführung kann man schon erkennen, daß die Schwierigkeit nicht darin besteht, eine Einflußlinie zu konstruieren, sondern darin, das H im voraus richtig zu schätzen, damit die richtige Einflußlinie ermittelt werden kann.

Nach H. Neukirch [10] werden für jede statische Größe drei beschränkte Einflußlinien für $H = H_g$, $H = H_g + {}^1/_2 \max H_p$ und $H = H_g + \max H_p$ konstruiert und jede für sich ausgewertet. Zu den maßgebenden Laststellungen sind jeweils noch die zugehörigen beschränkten Einflußlinien von H_p mit auszuwerten. Aus den gewonnenen Werten findet man auf zeichnerischem Wege das richtige H_p (damit auch H) und die richtige Schnittgröße. Dabei kann auch die Temperaturwirkung leicht berücksichtigt werden.

Da die Werte aus drei Einflußlinien nur wenig von einer geraden Linie abweichen, kann man mit Hilfe zweier Einflußlinien für $H = H_g$ und $H = \max H$ schon ausreichend genaue Ergebnisse erzielen. Die geradlinige Interpolation geschieht leicht auf rechnerischem Wege.

Die Ermittlung der Schnittgrößen durch die Auswertung der beschränkten Einflußlinien verdient nur dann den Vorzug, wenn man mit einer ungleichmäßigen Verkehrslast zu tun hat. Im Falle der gleichmäßigen Streckenlast empfiehlt es sich, die ungünstigste Laststellung aus der beschränkten Einflußlinie zu entnehmen und dafür die Schnittgröße zu berechnen. Zu diesem Zweck kann man zur Ermittlung der beschränkten Einflußlinie entweder $H = H_g$ oder $H = \max H$ nehmen, weil ein gewisser Unterschied der H-Werte die Lage der Lastscheidepunkte nicht wesentlich beeinflussen kann.

Nachdem wir die Anwendung der Einflußlinien dargelegt haben, sei zunächst darauf hingewiesen, daß beim Träger mit konstantem Axialzug H infolge der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes auch der Gegenseitigkeitssatz von Betti und Maxwell gilt.

Aus den beiden Gesetzen, dem Superpositionsgesetz und dem Gegenseitigkeitssatz, folgt, daß beim Träger mit konstantem Axialzug H die Einflußlinie irgendeiner statischen Größe auch nach der Gleichung

$$X_1 = -\frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} \tag{78}$$

ermittelt werden kann, worin δ_{m1} die Verschiebung an der Stelle m und δ_{11} an der Stelle 1 infolge $X_1 = +1$ bedeuten.

Im folgenden mögen drei Sätze, die für die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien nutzbar sind, bewiesen werden.

Satz 1. Bei Balken auf zwei Stützen ohne oder mit konstantem Axialzug H gilt für das Biegungsmoment stets die Beziehung

$$M_{ik} = M_{ki}. \tag{79}$$

Für Einfachbalken ohne H (Bild 17) erbringt man den Beweis sofort, wenn man die Gleichung der Momente anschreibt. Beim Balken mit konstantem H kann man den Beweis unmittelbar aus Gl. (11) ablesen, weil in den Gleichungen b und x oder a und x' umtauschbar sind. Dieser Satz gilt aber auch für Träger mit veränderlichem J, denn es ist

$$M_{ik} = M_{ik}^0 - H \eta_{ik},$$
$$M_{ki} = M_{ki}^0 - H \eta_{ki},$$

und darin sind M_{ik}^0 und M_{ki}^0 sowie η_{ik} und η_{ki} für jedes Trägheitsmomentverhältnis einander gleich. Aus dieser Gegenseitigkeitsbeziehung der Biegungsmomente läßt sich ein nutzbarer Satz folgern:

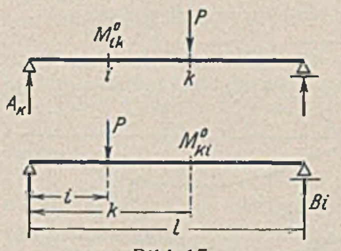

Bild 17.

Die Einflußlinie für das Biegungsmoment M_i im Querschnitt i eines Balkens auf zwei Stützen mit oder ohne Axialzug H ist identisch mit der Momentenlinie des Trägers bei der Belastung $P = 1$ an der betreffenden Stelle i.

Dieser Satz leistet besonders in dem Fall, wo das J des Trägers veränderlich ist, gute Dienste.

Satz 2. Die Biegefläche $F_\eta(P_i)$ eines einfachen oder durchlaufenden Trägers mit oder ohne Axialzug H, hervorgerufen durch eine Last P_i in Tonnen an der Stelle i, ist zahlenmäßig gleich der Durchbiegung $\eta_i(p)$ im Punkt i infolge der Vollast p t/m (zahlenmäßig $P = p$).

Beweis. Es seien

η_{ki} Durchbiegung im Punkt k infolge der Last $P_i = 1$ t,

η_{ik} Durchbiegung im Punkt i infolge der Last $P_k = 1$ t.

Nach dem Superpositionsgesetz hat man

$$F_\eta(P_i) = \int P_i \, \eta_{ki} \, dx,$$
$$\eta_i(p) = \int \eta_{ik} (p \, dx).$$

Aus $p = P$ (Voraussetzung) und $\eta_{ik} = \eta_{ki}$ (Gegenseitigkeitssatz) folgt:

$$F_\eta(P_i) = \eta_i(p). \tag{80a}$$

Der Satz gilt ganz allgemein für Träger mit konstantem oder mit veränderlichem J, und zwar ist er besonders im letzten Fall für die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für H_p, wo man die Biegefläche einer wandernden Einzellast braucht, von Wichtigkeit. Zu beachten ist, daß sich die Vollast p über alle diejenigen Trägerteile erstreckt, für die die Biegefläche gebildet wird.

Satz 3. Die Biegefläche $F_\eta(M_i)$ eines einfachen oder durchlaufenden Trägers mit oder ohne Axialzug H, hervorgerufen durch ein Moment M_i tm an der Stelle i, ist zahlenmäßig gleich dem Biegewinkel $\tau_i(p)$ im Punkt i infolge der Vollast p t/m (zahlenmäßig $p = M_i$):

$$F_\eta(M_i) = \tau_i(p). \tag{80b}$$

Dieser Satz ist nur eine Erweiterung des vorhergehenden. Den Beweis hierfür kann man leicht, wie beim Satz 2, mit Hilfe des Superpositionsgesetzes und des Gegenseitigkeitssatzes $\tau_{ik} = \eta_{ki}$ erbringen. Beim durchlaufenden Versteifungsträger mit veränderlichem J kann dieser Satz mit Vorteil angewendet werden, um die Biegefläche infolge der Stützenmomente zu bestimmen.

III. Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für Systeme mit Versteifungsträgern von öffnungsweise konstantem Trägheitsmoment.

Der allgemeine Vorgang zur Ermittlung der beschränkten Einflußlinien einer beliebigen Hängebrücke nach der Theorie II. Ordnung ist folgender:

1. Ermittlung der Einflußlinie für die betreffende Schnittgröße des stellvertretenden Trägers mit Axialzug H. Dies entspricht der Teilbelastung p.

2. Berechnung dieser Schnittgröße infolge der Vollast $y'' H_p$ unter Berücksichtigung von H. Daraus ergibt sich der zweite Ast der Einflußlinie, der stets gleich ist der H_p-Linie, multipliziert mit einer Konstanten.

3. Addition beider Linien liefert die gesuchte beschränkte Einflußlinie. Es sei aber bemerkt, daß die Auswertung der Einflußlinie nur mit der Verkehrslast p zu erfolgen hat.

A. Systeme mit einfachen Versteifungsträgern.

1. Die Einflußlinie für den Horizontalkabelzug H_p (Bild 18a). Diese Linie muß zu allererst ermittelt werden, weil sie für jede andere Linie unentbehrlich ist. Betrachtet man Gl. (28) u. (29), so erkennt man, daß die H_p-Linie für die Verkehrslast p allein (ohne Temperaturschwankungen) nach der Gleichung

$$H_p = \frac{\lambda H F_\eta}{N^0} \tag{81}$$

berechnet wird, worin N^0 je nach dem System den Nenner in Gl. (28) oder (29) bedeutet. Nachdem H, für das die Einflußlinie konstruiert werden soll, festgelegt ist, bleibt N^0 konstant.

Der Zähler $\lambda H F_\eta$ ergibt sich aus Gl. (13) durch Einsetzen $P=1$, $a=x$ und $b=x'$. Damit erhält man die Gleichung der H_p-Linie für alle Öffnungen

$$(82)\qquad H_p = \frac{\lambda}{N^0}\left[\frac{x\,x'}{2} - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{l}{2}-x\right)\beta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha}\right)\right].$$

Darin beziehen sich die konstanten Werte α, β und λ jeweils auf die betreffende Öffnung. Wie es aus obiger Gleichung ersichtlich ist, gestaltet sich die H_p-Linie in allen Öffnungen stets symmetrisch in bezug auf die Trägermitte, so daß man die Hälfte der Rechenarbeit ersparen kann.

2. Einflußlinie für die Auflagerkraft A des Versteifungsträgers (Bild 18b). Nach dem vorhergehend beschriebenen Vorgang erhält man den ersten Ast der A-Linie aus Gl. (12) durch Einsetzen $P=1$, $x=0$ und $b=x'$

$$(83\text{a})\qquad A_1 = \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta x'}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha}.$$

Die A_1-Linie ist insofern der gewöhnlichen A^0-Linie ähnlich, als sie unter den beiden Auflagerpunkten A und B auch 1 und 0 aufweist. Ihr Verlauf ist aber gleich einer hyperbolischen Sinuslinie.

Der zweite Ast, A_2-Linie, infolge $y'' H_p$ ergibt sich aus Gl. (22b) durch Einsetzen $p = -\frac{8f}{l^2}\cdot H_p$ und $x=0$ zu

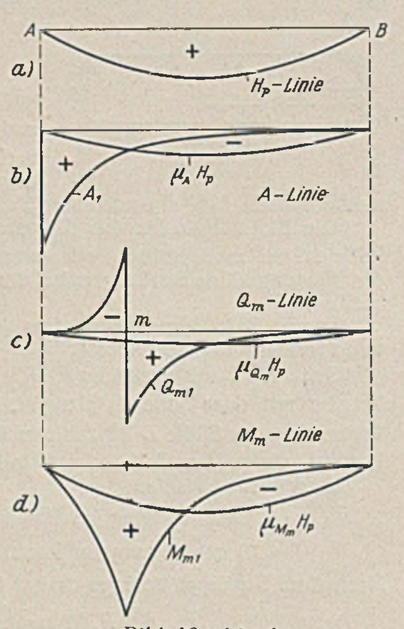

Bild 18a bis d.

$$(83\text{b})\qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{4f}{l}\cdot\dfrac{\mathfrak{Tg}\,\alpha}{\alpha}\cdot H_p \quad\text{oder}\\ A_2 = -\mu_A H_p. \end{cases}$$

Die A_2-Linie ist also gleich der H_p-Linie, multipliziert mit $-\mu_A$, und zwar erstreckt sie sich über alle Öffnungen. Zur Bestimmung von μ_A sind natürlich l, f und α von jener Öffnung zu nehmen, deren A-Linie gesucht ist.

Addiert man die A_1- und A_2-Linie unter Beachtung der Vorzeichen, so erhält man die endgültige A-Linie.

3. Einflußlinien für die Querkraft Q_m im Versteifungsträger (Bild 18c). Wie es aus Gl. (12) leicht ersichtlich ist, zerfällt die Q_{m1}-Linie, wie die gewöhnliche Q^0-Linie, in zwei Abschnitte:

$$(84)\qquad \begin{cases} \text{rechts von } m \quad Q_{m1} = A_1\cdot\mathfrak{Cof}\,\beta m,\\ \text{links von } m \quad Q_{m1} = -B_1\cdot\mathfrak{Cof}\,\beta m'. \end{cases}$$

Die Linien A_1 und $-B_1$ sind gegensymmetrisch und berechnen sich nach Gl. (83a).

Die Q_{m2}-Linie infolge $y'' H_p$ ergibt sich aus Gl. (22b) zu

$$(85)\qquad Q_{m2} = -\mu_{Q_m} H_p,$$

worin ist

$$(85\text{a})\qquad \mu_{Q_m} = \frac{4f}{l}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{l}{2}-m\right)\beta}{\alpha\cdot\mathfrak{Cof}\,\alpha}.$$

Die endgültige Q_m-Linie ergibt sich durch Addition der Q_{m1}- und Q_{m2}-Linie.

4. Einflußlinie für das Biegungsmoment M_m im Versteifungsträger (Bild 18d). Die M_{m1}-Linie berechnet sich nach Gl. (11) für $P=1$. In den Gleichungen kann man entweder x und x' oder a und b variieren lassen. Mit anderen Worten: Man kann die M_{m1}-Linie entweder nach der gewöhnlichen Auffassung ermitteln oder nach dem Satz 1 im vorigen Abschnitt als Momentenlinie des Trägers infolge $P=1$ im Punkt m betrachten. Es ergibt sich:

$$(86)\qquad \begin{cases} \text{rechts von } m \quad M_{m1} = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\beta m}{\beta\cdot\mathfrak{Sin}\,2\alpha}\cdot\mathfrak{Sin}\,\beta x',\\ \text{links von } m \quad M_{m1} = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\beta m'}{\beta\cdot\mathfrak{Sin}\,2\alpha}\cdot\mathfrak{Sin}\,\beta x. \end{cases}$$

Die M_{m2}-Linie erhält man aus Gl. (22a) zu

$$(87)\qquad M_{m2} = -\mu_{M_m} H_p.$$

Darin lautet der Multiplikator

$$(87\text{a})\qquad \mu_{M_m} = \frac{8f}{l^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{l}{2}-m\right)\beta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha}\right).$$

Die endgültige M_m-Linie ergibt sich zu

$$(88)\qquad M_m = M_{m1} - \mu_{M_m} H_p.$$

5. Einflußlinie für die Durchbiegung η_m im Punkt m. Die Einflußlinie für η_{m1} ist nach dem Gegenseitigkeitssatz des vorigen Abschnitts gleich der Biegelinie des Trägers infolge $P=1$ im Punkt m. Sie berechnet sich nach

$$(89\text{a})\qquad H\,\eta_{m1} = M^0_{m1} - M_{m1}.$$

Darin bedeutet M^0_{m1} die Einflußlinie des Einfachbalkens ohne H, während M_{m1} durch Gl. (86) definiert ist.

Der zweite Ast dieser Linie berechnet sich nach Gl. (22c), worin M^0 das Moment infolge $y'' H_p$ im Punkt m des Einfachbalkens ohne H bedeutet. Daraus ergibt sich

$$(89\text{b})\qquad \begin{aligned} H\,\eta_{m2} &= -y_m H_p + \mu_{M_m} H_p\\ &= -\left(y_m - \mu_{M_m}\right) H_p. \end{aligned}$$

Die Addition der Gl. (89a) u. (89b) liefert dann die Gleichung der Einflußlinie für die H-fache Biegelinie. Auf ähnliche Weise läßt sich die Einflußlinie für den Biegewinkel ermitteln.

Zusammenfassung. Aus den vorangehenden Ausführungen erkennt man, daß die beschränkten Einflußlinien für A, Q, M, η und τ, wie in der Theorie I. Ordnung, stets aus zwei Ästen zusammengesetzt sind und daß man bei der praktischen Rechnung jeweils durch die Einführung eines Multiplikators die H_p-Linie unmittelbar verwenden kann. Es sei darauf hingewiesen, daß das Verfahren für Systeme von beliebig vielen Öffnungen anwendbar ist; denn außerhalb derjenigen Öffnungen, wo die gesuchte Schnittgröße liegt, ist die Einflußlinie überall gleich der H_p-Linie, multipliziert mit μ.

B. Systeme mit durchlaufenden Versteifungsträgern.

Die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für das vorliegende System geschieht auf ähnliche Weise wie unter A. Nur muß man jeweils noch die Wirkung der Stützenmomente berücksichtigen. Im folgenden möge ein dreifeldriges symmetrisches System als Beispiel näher besprochen werden.

1. Einflußlinie für H_p. Aus Gl. (38) ergibt sich die Einflußlinie für H_p (ohne Temperaturschwankungen) zu

$$(90)\qquad H_p = \frac{\lambda H F_\eta(p) - \frac{l}{2}\cdot\frac{K}{\varphi}\left(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2\right)}{N},$$

worin die Abkürzung N den Nenner in Gl. (38) bedeutet, der konstant bleibt, wenn H gewählt ist.

Das erste Glied des Zählers $\lambda H F_\eta$ ist gleich demjenigen in Gl. (82), während das zweite den Einfluß der Stützenmomente in dem Teilzustand p (Bild 3c) darstellt. Es ergibt sich aus Gl. (14)

für $P=1$ in der Seitenöffnung

$$(91\text{a})\qquad \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = \frac{x}{l_1} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta_1 x}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha_1},$$

für $P=1$ in der Mittelöffnung

$$(91\text{b})\qquad \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = 1 - \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{l}{2}-x\right)\beta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha}.$$

Der Ausdruck $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ für die Mittelöffnung tritt auch in $H F_\eta$ auf, so daß sich die H_p-Linie in dieser Öffnung ebenso leicht ermitteln läßt wie beim einfeldrigen Versteifungsträger. Wegen der Symmetrie des Tragwerks verläuft die H_p-Linie symmetrisch in bezug auf die Brückenmitte, und infolgedessen vermindert sich die Rechenarbeit noch bis auf die Hälfte.

2. Einflußlinie für die Stützenmomente M_1 und M_2. Sie werden den beiden Belastungszuständen p und $y'' H_p$ entsprechend in zwei Teilen ermittelt. Um den der Teilbelastung p entsprechenden Ast zu ermitteln, werden zur Ausnutzung der Symmetrie des Tragwerks folgende Substitutionen eingeführt:

$$(92\text{a})\qquad X_1 = \frac{M_1' + M_2'}{2},$$

$$(92\text{b})\qquad X_2 = \frac{M_1' - M_2'}{2}.$$

Man berechne die symmetrische X_1- und gegensymmetrische X_2-Linie. Daraus ergibt sich dann

$$(93\text{a})\qquad M_1' = X_1 + X_2,$$

$$(93\text{b})\qquad M_2' = X_1 - X_2.$$

Die M_1'- und M_2'-Linie sind wegen der Symmetrie der Brücke spiegelbildgleich.

Zur Ermittlung der X_1- und X_2-Linie (Bild 19) bedient man sich der Gl. (78)

$$(94\text{a})\qquad X_1 = -\frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}},$$

$$(94\text{b})\qquad X_2 = -\frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}}.$$

Wie bereits erwähnt, ist es zweckmäßig, die Verschiebungen (Durchbiegungen und Tangentendrehwinkel) in H-facher Größe auszudrücken. Betrachtet man Bild 4 und Gl. (6), so erhält man die beiden Verschiebungen im Zustand $X_1 = 1$ und $X_2 = 1$ (Bild 19b u. 19c) zu

(95a) $$\delta_{11} = 2\,\varphi,$$

(95b) $$\delta_{22} = 2\,\bar{\varphi}.$$

Darin berechnet sich der Drehwinkel φ nach Gl. (40), während $\bar{\varphi}$ sich ergibt zu

(96) $$\bar{\varphi} = H\,\tau_{i1} + H\,\bar{\tau} = \left(\frac{\beta_1}{\mathfrak{Tg}\,2\,\alpha_1} - \frac{1}{l_1}\right) + \left(\frac{\beta}{\mathfrak{Tg}\,\alpha} - \frac{2}{l}\right).$$

Die Biegelinien δ_{m1} und δ_{m2} in der Seitenöffnung sind alle von gleichem Verlauf. Aus Gl. (15) erhält man durch Einsetzen von $M_s = 1$ die Gleichung für diese Biegelinien. Sie ist identisch mit der Gl. (91a), was sich aus dem Gegenseitigkeitssatz $\delta_{m1} = \tau_{1m}$ auch ergeben muß. Aus gleichem Grunde stellt Gl. (91b) die Biegelinie δ_{m1} in der Mittelöffnung dar.

Die gegensymmetrische Biegelinie δ_{m2} in der Mittelöffnung ergibt sich, wie man leicht aus Gl. (15) ableiten kann, zu

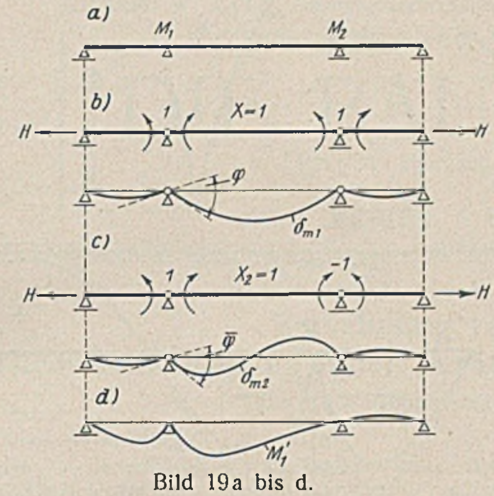

Bild 19a bis d.

(97) $$\delta_{m2} = \left(1 - 2\cdot\frac{x}{l}\right) - \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{l}{2} - x\right)\beta}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}.$$

Damit ist der erste Ast der Einflußlinie für die Stützenmomente (Bild 19d) erledigt.

Es bleibt übrig, den zweiten Ast der Einflußlinie infolge $y''\,H_p$ zu bestimmen. Aus dem in Lastfall (6) der Formelzusammenstellung enthaltenen Ausdruck für M_1 und M_2 ergibt sich

(98) $$M_1'' = M_2'' = \mu_{M_s}\,H_p.$$

Darin ist

(99) $$\mu_{M_s} = \frac{4f}{l}\cdot\frac{K'}{\varphi}.$$

Addiert man nun die M_1'- und M_1''-Linie zusammen, dann erhält man die endgültige beschränkte Einflußlinie für M_1. Die M_2-Linie ist spiegelbildgleich.

3. Einflußlinien für A, Q_m, M_m, η_m und τ_m. Die Einflußlinien für diese Größen kann man sich aus drei Teilen zusammengesetzt denken (Bild 3).

a) Der erste Teil ist die Einflußlinie der betreffenden Größe im entsprechenden Einfachbalken mit dem Axialzug H (Bild 3b). Diese Teilaufgabe ist schon im vorangehenden Unterabschnitt A ausführlich behandelt worden.

b) Der zweite Teil rührt von den Stützenmomenten M_1' und M_2' in dem Teilzustand p her (Bild 3c). Für die Schnittgrößen in der Seitenöffnung gelten die Gleichungen im Lastfall (2). Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß dieser Teil der Einflußlinie stets gleich ist der mit einem Multiplikator μ vervielfachten M_1'-Linie. Den Multiplikator erhält man, indem man in die betreffende Gleichung statt x die Abszisse m der gesuchten Größe einsetzt. Für die Schnittgrößen in der Mittelöffnung muß man sowohl die M_1'- als auch die M_2'-Linie berücksichtigen. Die Multiplikatoren im einzelnen Fall lassen sich leicht aus den für den Lastfall (2) angegebenen Formeln ableiten.

c) Der dritte Teil entspricht der Teilbelastung $y''\,H_p$ (Bild 3d). Dieser Teil der Einflußlinie ist immer gleich der H_p-Linie des Systems, vervielfacht durch einen Multiplikator μ. Für die einzelne Schnittgröße kann man den Multiplikator jeweils aus den Gleichungen im Lastfall (6) der Formelzusammenstellung leicht berechnen.

III. Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für Systeme mit Versteifungsträgern von veränderlichem J.

Der im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Gedankengang zur Ermittlung der beschränkten Einflußlinien ist für vorliegenden Fall ebensogut anwendbar. Ein Unterschied besteht darin, daß hier statt der genauen Methode das Annäherungsverfahren (Abschnitt III) zur Lösung der Aufgabe benutzt wird. Im folgenden sei kurz auf den praktischen Rechnungsgang hingewiesen.

1. H_p-Linie. Aus Gl. (73) ergibt sich die Gleichung der Einflußlinie für H_p zu

$$H_p = \frac{\lambda\,F_\eta\,(P_x = 1)}{\dfrac{L\,\varrho_c}{E_k\,F_k^0} - F_{H_p=1}}.$$

Mit der Annahme der H-Kraft für die Einflußlinie läßt sich der Nenner ermitteln, und er bleibt für jeden Lastzustand von p konstant. Der Zähler $F(P_x = 1)$ ist nach dem Satz 2, Gl. (80a), gleich der Durchbiegung $\eta_x(p = 1)$ an der Stelle x infolge der Vollast $p = 1$. Es gilt also

(100) $$H_p = \frac{\lambda\,\eta_x\,(p = 1)}{\dfrac{L\,\varrho_c}{E_k\,F_k^0} - F_{H_p=1}}.$$

Zur Ermittlung der Biegefläche $F_{H_p=1}$ und der Durchbiegung $\eta_x\,(p = 1)$ kann man die Biegelinien η^0, $\bar{\eta}_1^0$, ... je nach der Bequemlichkeit der Zahlenrechnung zunächst für eine beliebige Vollast p und einen beliebigen Axialzug H berechnen und hieraus dann die gesuchten Größen für die Vollast $p = 1$ und $y''\cdot 1$ (d. h. $H_p = 1$) und für den gewählten Axialzug H bestimmen.

2. Die Einflußlinien für A, Q_m, M_m, η_m und τ_m. Sie setzen sich, wie die Einflußlinien im vorangehenden Abschnitt, auch aus zwei oder drei Teilen zusammen. Die der Teilbelastung p entsprechende Einflußordinate im Punkt x einer Schnittgröße erhält man, indem man für $P_x = 1$ die Biegelinien und Winkel nach Gl. (69) u. (70) ermittelt und das Biegemoment und die Querkraft nach Gl. (57) oder (58) berechnet. Die Linien für M_m, η_m und τ_m lassen sich aber einfacher nach dem Gegenseitigkeitssatz der Momente und der Verschiebungen ermitteln. Der zweite der Belastung $y''\,H_p$ entsprechende Teil der Einflußlinie ist stets gleich der mit einer Konstanten multiplizierten H_p-Linie. Die Konstante ist nichts anderes als die betreffende Größe infolge der Vollast $y''\cdot 1$, d. h. für $H_p = 1$. Die Biegelinien und Winkel für diesen Lastzustand hat man aber schon bei der Bestimmung der Biegefläche $F_{H_p=1}$ berechnet, und daher können die Konstanten für einzelne Schnittgrößen leicht ermittelt werden.

Das Verfahren ist wie das im vorigen Abschnitt beschriebene sowohl für einfache als auch für durchlaufende Versteifungsträger von beliebig vielen Öffnungen anwendbar.

Die Ergebnisse aus den Beispielrechnungen.

Es wurde eine Hängebrücke nach Bild 20 nach dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten genauen und Annäherungsverfahren durchgerechnet, und zwar für folgende vier Fälle:

1. einfacher Versteifungsträger mit konstantem $J = 11{,}0\ \mathrm{m}^4$,
2. durchlaufender Versteifungsträger mit konstantem $J = 11{,}0\ \mathrm{m}^4$,
3. einfacher Versteifungsträger mit veränderlichem J,
4. durchlaufender Versteifungsträger mit veränderlichem J.

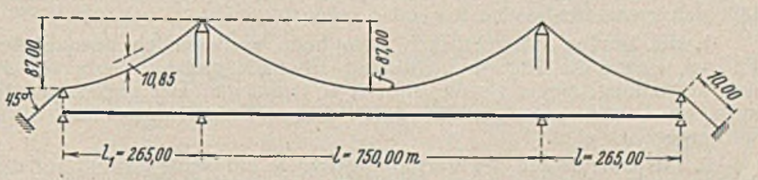

Bild 20.

In den beiden letzten Fällen wurde das Trägheitsmoment des Trägers jeweils der max M-Linie aus der Theorie II. Ordnung (Bild 21) angepaßt gewählt, und dabei ist der über die ganze Öffnung gebildete Mittelwert von J gerade $J_m = 11{,}0\ \mathrm{m}^4$.

Der Berechnung lagen ferner zugrunde:
der Elastizitätsmodul des Versteifungsträgers $E = 2100\ \mathrm{t/cm}^2$,
der E-Modul und Querschnitt des Kabels $E_k = 1550\ \mathrm{t/cm}$, $F_k = 0{,}67\ \mathrm{m}^2$,
die ständige Last je Tragwand $g_1 = g = 26{,}0\ \mathrm{t/m}$
und die Verkehrslast je Tragwand $p = 15{,}0\ \mathrm{t/m}$.

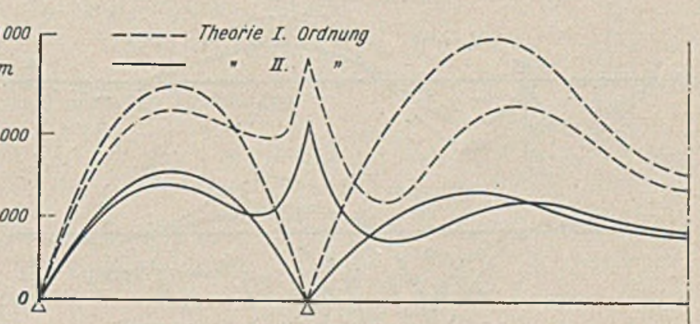

Bild 21.

Im folgenden sollen nur die wichtigsten Rechnungsergebnisse auszugsweise mitgeteilt werden. Die übrigen sowie die Durchführung der Berechnung können in der Dissertation nachgelesen werden.

A. max M (absoluter Wert) im Versteifungsträger des 1. und 2. Falls nach der Theorie I. Ordnung und der Theorie II. Ordnung (Bild 21).

B. Die Einflußlinien für H_p und M_v des 1. Falls nach der Theorie I. Ordnung und der Theorie II. Ordnung (Bild 22).

C. Die Einflußlinien für H_p, M_1 und M_v des 2. Falls nach der Theorie I. Ordnung und der Theorie II. Ordnung (Bild 23).

D. Gegenüberstellung der beschränkten Einflußlinien für M_v des 1. und 3. Falls sowie für M_1 des 2. und 4. Falls (Bild 24).

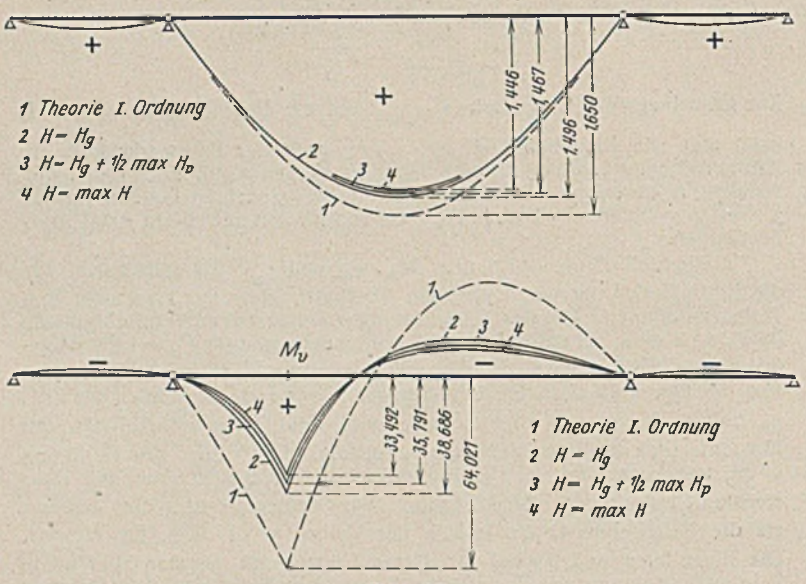

Bild 22.

E. Gegenüberstellung von max H, max η_m, max M_v und min M_1 nach der Theorie II. Ordnung.

Fall	max H		max η_m		max M_v		min M_1	
	t	%	mm	%	tm	%	tm	%
1	32 350	100,0	4518	100,0	63 572	100,0		
2	32 159	99,4	4386	97,1	58 900	92,7	— 106 300	100,0
3	32 365	100,0	4564	101,0	64 485	102,1		
4	32 242	99,7	4356	96,4			— 122 758	115,5

Zusammenfassung. Aus den vorangehenden Gegenüberstellungen läßt sich zusammenfassend folgendes sagen:

1. Bei großen Hängebrücken, was beim vorliegenden Beispiel der Fall ist, liefert die Theorie I. Ordnung erheblich größere Werte von M des Versteifungsträgers als die Theorie II Ordnung. Das gleiche wurde auch bei Q und η festgestellt, deren Gegenüberstellungen hier nicht wiedergegeben sind.

2. Das Durchlaufen des Versteifungsträgers hat wenig Einfluß auf die max H-Kraft. Dagegen vermindert es die Durchbiegung max η_m in der Mitte der Mittelöffnung um etwa 3% und hat eine günstigere Größtmomentenverteilung des Versteifungsträgers zur Folge, abgesehen von den Momentenspitzen über den Innenstützen.

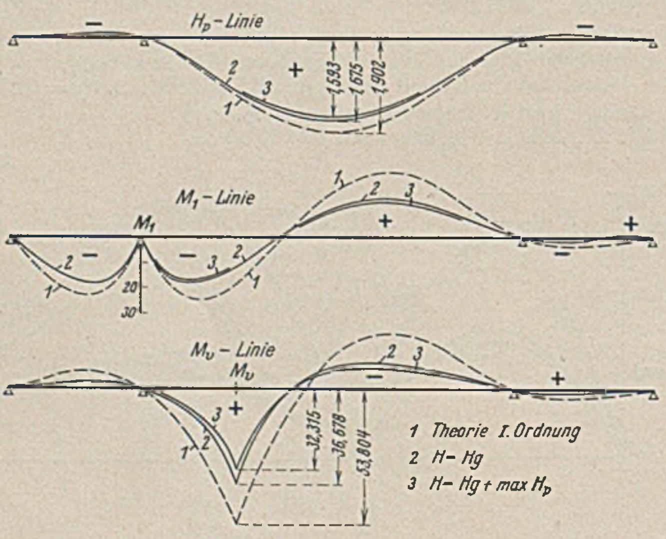

Bild 23.

3. Die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments des Versteifungsträgers beeinflußt die max H-Kraft fast nicht und die Durchbiegung max η_m auch nur in ganz geringem Maße. Ihr Einfluß auf das Biegungsmoment ist beim einfachen Versteifungsträger auch nicht sehr wesentlich. Beim durchlaufenden Versteifungsträger ruft dagegen die Verstärkung des Trägerquerschnitts über den Stützen eine beträchtliche Vergrößerung des Stützenmoments hervor.

Abschließend sei noch mitgeteilt, daß die Grundgedanken der vorliegenden Arbeit weitere Verwertung bei der Behandlung von Hänge-

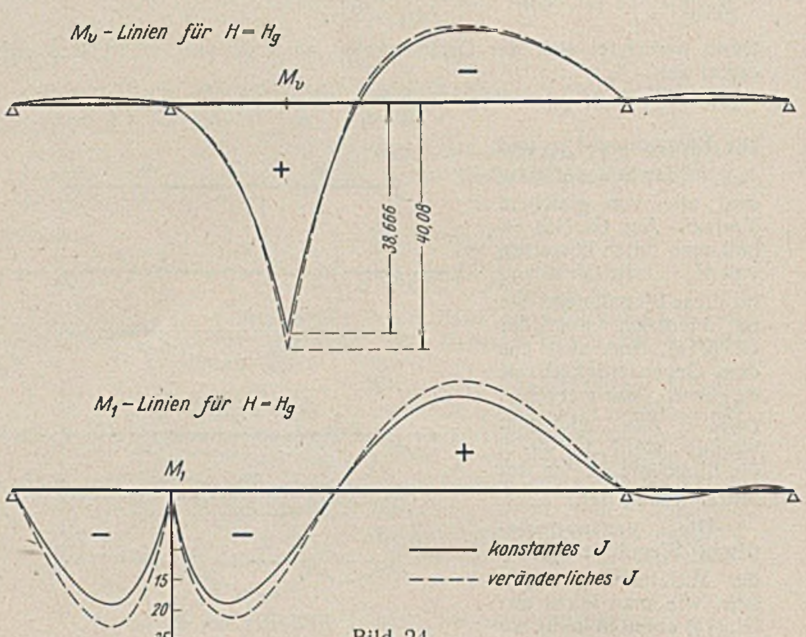

Bild 24.

brücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers (21) gefunden haben. Ferner entstand aus ihnen das vom Ingenieurlaboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt zum Patent angemeldete „Vereinfachte Hängebrückenmodell“.

Schrifttumsverzeichnis.

[1] Melan, J., Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 4. Aufl., 2. Teil, VI. Bd. 1925.

[2] Moisseiff, L. S., The Delaware River Bridge, final report of board of engineers, R. Modjeski, Chairman.

[3] Johnson, Bryan and Turneaure, Modern framed structures, Vol. II.

[4] Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 2. Bd., 2. Abtl.

[5] Timoshenko, S., Steifigkeit von Hängebrücken. Z. ang. Math. 1928, S. 1 bis 10.

[6] Priester, G. C., Applications of trigonometrie series to cable stress analysis in suspension bridge. Engineering Research Bulletin, No. 12, Univ. of Michigan, März 1929.

[7] Fritsche, J., Zur genauen Theorie der Hängebrücken. Bautechn. 1929, Heft 40, S. 631.

[8] Neukirch, H., Angenäherte Berechnung der Hängebrücken unter Berücksichtigung ihrer Verformung. Stahlbau 1936, Heft 9, S. 130.

[9] Blick, W., Der Einfluß der Formänderungen auf die Größe der statischen Funktionen von versteiften Hängebrücken und die wirtschaftliche Auswirkung der Berücksichtigung der Formänderungen. Diss. T. H. Berlin 1932 (Auszug siehe Z. d. VdI 1932, S. 939, und 1933, S. 921).

[10] Neukirch, H., Berechnung der Hängebrücke bei Berücksichtigung der Verformung des Kabels. Ing. Arch. 1936, Heft 7, S. 140 bis 155.

[11] Stüssi, F., Zur Berechnung der verankerten Hängebrücken. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 4. Zürich 1936.

[12] Börner, H., Beitrag zur Berechnung von Hängebrücken mit Berücksichtigung der Formänderuugen. Diss. T. H. Darmstadt 1930.

[13] Grüning, M., Der Eisenbau. Handbibliothek für Bauing., IV. Teil, 4. Bd. Berlin 1929.

[14] Steinman, D. B., Deflection theory for continuous suspension bridges. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 2. Zürich 1934.

[15] Timoshenko, S., Suspension bridges with a continuous stiffening truss. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 2. Zürich 1934.

[16] Hartmann, F., Zur Theorie und Ausführung der Hängebrücken. Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1934, S. 293.

[17] Jakkula, A. A., The theory of the suspension bridge. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 4. Zürich 1936.

[18] Klöppel, K., und Lie, K., Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers. Stahlbau 1940, Heft 21/22, und Berichtigung, Stahlbau 1941, Heft 6/7.

INHALT: Über das Ausknicken statisch unbestimmt gelagerter Kreisbogenträger von veränderlichem Querschnitt. — Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. (Schluß.)

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.