DER STAHLBAU

Schriftwaltung:
Professor Dr.=Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang | BERLIN, 26. Dezember 1941 | Heft 25/26

Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele.

Von Professor Dr.=Ing. Karl Kriso, Brünn.

Ende September 1940 habe ich dem Generalsekretariat der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau in Zürich die Abhandlung „Knickberechnung mehrfeldriger, in den Feldgrenzen beliebig gestützter Stäbe" als Beitrag zum Band VI der „Abhandlungen der I. V. B. H." vorgelegt. Da sich die Drucklegung des Bandes VI noch weiterhin verzögert, so bringe ich in diesem Aufsatz das Ergebnis der obengenannten Abhandlung zur Kenntnis.

Dieses Ergebnis besteht in einem einfachen Rechenschema, nach welchem die strenge Knickberechnung, d. h. die Ermittlung der Knickdeterminante eines beliebig gestützten mehrfeldrigen Stabes, in immer gleicher und gleich einfacher Weise erfolgen kann.

Der Berechnung liegen gerade Stäbe zugrunde, die innerhalb eines Feldes konstanten Querschnitt und konstantes Trägheitsmoment aufweisen, an den Feldgrenzen von axial wirkenden Einzelkräften beliebiger Größe ergriffen werden und daselbst nach irgendeiner der sechs in Bild 1 schematisch dargestellten Stützungsarten gelagert sind. Demnach dürfen Durchlaufstäbe der hier betrachteten Art jede beliebige Unsymmetrie hinsichtlich Konstruktion, Belastung und Lagerung aufweisen.

I. Bezeichnungen.

Bild 1a bis 1c stellt eine in der Querrichtung unverschiebliche, Bild 1d bis 1f eine in der Querrichtung federnde Stützung dar. Die über den Stützen liegenden „Stützenquerschnitte" des Durchlaufstabes sind entweder frei drehbar (Bild 1a, 1d), elastisch drehbar (Bild 1b, 1e) oder unverdrehbar (Bild 1c, 1f).

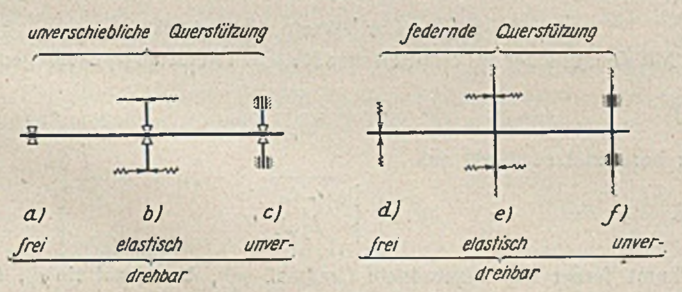


Bild 1.

Die im Stützenquerschnitt gedachte Einspannung des Durchlaufstabes in eine elastische oder starre Stütze (Pfeiler eines Rahmentragwerks, Pfosten eines Fachwerks usw.) wird schematisch nach Bild 1 so dargestellt, daß ein im Stützenquerschnitt mit dem Durchlaufstab biegungssteif verbundener starrer Stab, der sogenannte „Stützenstab", elastisch drehbar bzw. unverdrehbar gelagert ist.

Wird die federnde Querstützung eines Durchlaufstabes (Bild 2a) durch eine unverschiebliche Stützung ersetzt (vorhandene elastische Verdrehbarkeit von Stützenstäben bleibt unverändert erhalten), so wird der nunmehr auf unverschieblichen Stützen lagernde Durchlaufstab aus einem hier nicht näher zu erläuternden Grunde als „Ersatzstab" bezeichnet. Aus ihm erhält man, wie dies beispielsweise in Bild 2 für den dort dargestellten Stab durchgeführt wurde, bei Kenntnis der elastischen Stützungselemente ein statisch bestimmtes System, indem man die Querschnitte an den Enden der Feldstäbe durchschneidet und daselbst nach Bild 2c Gelenke einschaltet. Diese Trennungsquerschnitte im Ersatzstab heißen Gelenkquerschnitte. Liegt zwischen zwei Feldstäben ein Stützenstab, so sind die einzuschaltenden Gelenke unendlich nahe links und rechts vom Stützenstab anzubringen; das zwischen ihnen liegende Stabelement ist mit dem Stützenstab in starrer Verbindung.

Nach Bild 2c sind die Gelenke der Reihe nach mit den fortlaufenden arabischen Ziffern zu bezeichnen, die auch gleichzeitig die Gelenkquerschnitte des Ersatzstabes kennzeichnen. Zwischen je zwei Gelenken $r-1$ und r liegt der ebenfalls mit einer arabischen Ziffer zu benennende Feld- bzw. Stützenstab (r) (Bild 2a).

Die Stützen selbst werden ebenfalls durch arabische Ziffern gekennzeichnet. Eine zwischen zwei Feldstäben liegende Stütze führt die Ordnungsnummer des links von ihr liegenden Feldstabes. Ist der Stützenquerschnitt in einem Stützenstab eingespannt, so wird auch die Stütze mit der Ordnungsnummer des Stützenstabes bezeichnet. Nach dieser Festsetzung weist die Bezifferung der Stützen, falls der Stabzug Stützenstäbe enthält, keine regelmäßige Zahlenfolge auf. Die letzte Stütze eines n-stäbigen Stabzuges, gleichgültig, ob der letzte Stab ein Feld- oder Stützenstab ist, führt stets die Bezeichnung „n", die erste Stütze wird mit „1" bezeichnet, falls der erste Stab des Verbandes ein Stützenstab ist, hingegen mit „0", wenn der Stabzug mit einem Feldstab beginnt (Bild 2 bzw. 6).

In den Stützenquerschnitten sollen die von außen, z. B. von den Füllstäben eines Fachwerks, aufgebrachten Axialkräfte $\varDelta \mathfrak{S}_r$ angreifen. Diese Gebrauchsbelastung erzeugt in den Feldstäben die Druckkräfte $\mathfrak{S}_r$.

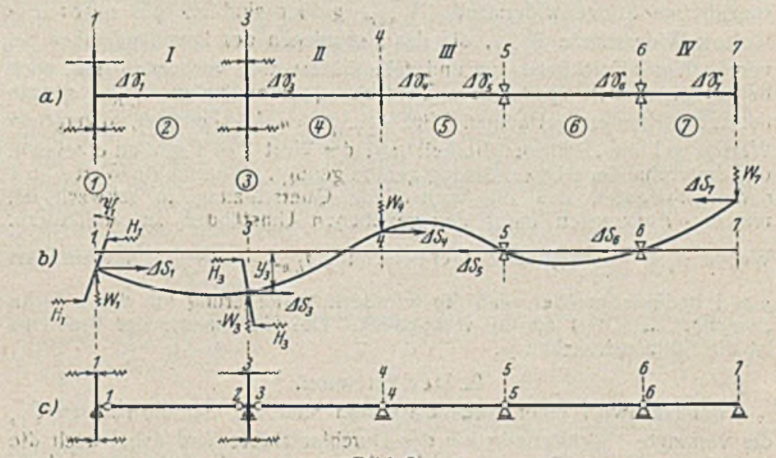


Bild 2.

Der Durchlaufstab besitzt mit Bezug auf ein Ausknicken in der Zeichenebene die Knicksicherheit ν, wenn bei vorgegebener Stützung die ν-fach erhöhte Gebrauchslast $\nu \varDelta \mathfrak{S}_r = \varDelta \mathfrak{S}_{Ki(r)}$ das Ausknicken bewirkt. Im Felde r wirkt dann die Knickkraft $\mathfrak{S}_{Ki(r)}$, die zwecks Vermeidung der Doppelzeiger im weiteren mit S_r bezeichnet werden soll; sie erzeugt die Knickspannung $\sigma_r = \dfrac{S_r}{F_r}$, wobei F_r die Querschnittsfläche des Feldstabes darstellt. T_r sei der der Knickspannung σ_r zugeordnete (Engeßersche) Knickmodul. Das Trägheitsmoment des Querschnitts F_r in bezug auf seine zur Zeichenebene senkrechte Achse sei J_r und c_r die Feldlänge.

II. Die elastische Stützung.

Der elastische an der Stütze i wirkende Stützenwiderstand W_i und ebenso das infolge einer elastischen Einspannung am Stützenstab zur Wirkung kommende Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_i$ gehorchen dem Elastizitätsgesetz. W_i und $\mathfrak{M}_i$ sind demnach den Deformationen proportional. Es sei $W_i = A_i y_i$ und $\mathfrak{M}_i = C_i \psi_i$, wobei y_i die Stützensenkung infolge W_i und ψ_i die Stützenstabverdrehung infolge $\mathfrak{M}_i$ darstellt.

Die Konstante A_i ist der spezifische Stützenwiderstand infolge $y_i = 1$, die Konstante C_i ist der spezifische Verdrehungswiderstand infolge $\psi_i = 1$. A_i und C_i — die Federkonstanten — bestimmen die „Stärke“ der elastischen Stützung.

Sinngemäß wird die durch $W_i = 1$ verursachte Stützensenkung $y_i \equiv \delta_i$ spezifische Stützensenkung genannt und die durch $\mathfrak{M}_i = 1$ erzeugte Verdrehung $\psi_i \equiv \varepsilon_i$ als spezifische Stützenstabverdrehung bezeichnet. Mit Einführung dieser Größen folgt $y_i = \delta_i W_i$, $\psi_i = \varepsilon_i \mathfrak{M}_i$ und $1 = A_i \delta_i$ bzw. $1 = C_i \varepsilon_i$, woraus sich die Formeln

$$\text{(1)} \qquad \left| \begin{array}{l} A_i = \dfrac{1}{\delta_i} \quad \text{bzw.} \quad \delta_i = \dfrac{1}{A_i} \\[2ex] C_i = \dfrac{1}{\varepsilon_i} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_i = \dfrac{1}{C_i} \end{array} \right.$$

ergeben.

III. Die beiden Hauptaufgaben.

Zur Lösung jedweder Knickaufgabe steht immer nur eine einzige Gleichung zur Verfügung, die aus der Bedingung „Knickdeterminante $\Delta = 0$“ fließt. Deshalb sind in einem vorliegenden Knickproblem alle von vornherein unbekannten Größen passend anzunehmen bis auf eine einzige, die als unbekannt offen bleibt und aus der Bedingung $\Delta = 0$ zu errechnen ist.

Über die zweckmäßige Annahme dieser Unbekannten gibt der Abschnitt IV/13 nähere Auskunft; hier sollen die beiden Hauptaufgaben der Knickuntersuchung, die Überprüfung einer bestehenden Konstruktion einerseits und der Entwurf einer Neukonstruktion andererseits, näher umschrieben werden.

A. Die Überprüfung.

In diesem Falle sind alle Abmessungen des Durchlaufstabes, die Druckkräfte $\mathfrak{S}_r$ infolge der Gebrauchsbelastung und die spezifischen Stützenwiderstände A_i, C_i bzw. deren Reziprokwerte δ_i, ε_i gegeben. Mit Bezug auf das Ausknicken des Stabes in der Zeichenebene ergeben sich nun zweierlei Fragestellungen: 1. die Frage nach der „Knicksicherheit ν des Durchlaufstabes“ und 2. die Frage nach der „Stützensicherheit μ der federnden Querstützung“.

Die erste Frage lautet: Um wieviel dürfen die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Druckkräfte $\mathfrak{S}_r$ der Feldstäbe von $\mathfrak{S}_r$ auf $S_r = \nu \mathfrak{S}_r$ erhöht werden, damit die vorhandene Stützung ein Ausknicken des Durchlaufstabes gerade noch zu verhindern vermag. Die Unbekannte des Problems ist die Knicksicherheit ν.

Im zweiten Falle wird gefragt, um wieviel die vorhandenen spezifischen Stützenwiderstände $A_{i,\,\text{vorh}}$ größer sind als die erforderlichen Widerstände $A_{i,\,\text{erf}}$, die das Ausknicken des Durchlaufstabes bei vorgegebener Knickbelastung und, falls Stützenstäbe vorhanden sind, auch bei vorgegebenen spezifischen Verdrehungswiderständen $C_{i,\,\text{vorh}}$ gerade noch zu verhindern vermögen. Wird $A_{i,\,\text{vorh}} = \mu\, A_{i,\,\text{erf}}$ gesetzt, so zeigt ein Wert $\mu > 1$ die „Stützensicherheit“ an; der Wert $\mu = 1$ gibt zu erkennen, daß die vorhandene Querstützung gerade genügt, während ein Wert $\mu < 1$ darauf hindeutet, daß die vorhandene Querstützung zu schwach ist, um das Ausknicken unter den gegebenen Umständen zu verhindern. Wegen $A_i = \dfrac{1}{\delta_i}$ folgt aus obiger Gleichung $\delta_{i,\,\text{erf}} = \mu\, \delta_{i,\,\text{vorh}}$, und ein Wert $\mu > 1$ bedeutet wieder, daß die erforderliche Federung um das μ-fache „weicher“ sein darf als die vorhandene. Die Unbekannte des Problems ist die Stützensicherheit μ.

B. Der Entwurf.

Beim Entwurf einer Neukonstruktion sind die Gebrauchslasten $\mathfrak{S}_r$, die verlangte Knicksicherheit ν des Durchlaufstabes und daher auch die Knickkräfte $S_r = \nu\, \mathfrak{S}_r$ gegeben. Die Abmessungen der Feldstäbe und die Stärke der elastischen Stützungen sind nun so zu bestimmen, daß die vorgeschriebene Knicksicherheit des Durchlaufstabes gewährleistet erscheint.

Im vorliegenden Falle existiert eine große Zahl von vornherein unbekannten, frei zu wählenden Bestimmungsstücken. Bei der Festsetzung dieser Bestimmungsstücke wird man stets so vorgehen, daß nur eine einzige, die federnde Querstützung betreffende Größe als Unbekannte des Problems offen bleibt. Nur bei diesem Vorgang liefert, wie im Abschnitt IV/13 näher umschrieben, die Bedingung $\Delta = 0$ eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung der Unbekannten.

Bei Entwurfsaufgaben ist demnach nicht nur über die spezifischen Verdrehungswiderstände C_i, falls sie nicht ohnehin vorgegeben sind, passend zu verfügen, sondern auch über die Abmessungen der Feldstäbe, die ebenfalls passend anzunehmen sind. In dieser Hinsicht sei bemerkt, daß beim Knicken der ganze Stabverband als durchlaufender Stab wirken soll, was z. B. bei einem elastisch gestützten Durchlaufstab ohne Stützenstäbe nur dann zutrifft, wenn die einzelnen Feldstäbe innerhalb der Feldweite c_r knicksicher sind. Dies ist der Fall, wenn ihre „freien Knicklängen $l_r = m_r c_r$“ größer sind als die entsprechenden Feldlängen. Die Abmessungen der Feldstäbe sind daher in solchen Fällen „passend“ gewählt, wenn in dem die Größe m_r bestimmenden Ausdruck

$$m_r = \pi \sqrt{\frac{T_r J_r}{S_r c_r^2}} > 1.$$

Dieser Wert m_r ist eine wichtige Kennziffer für die Stärke eines Feldstabes im Stabverband. Zweckmäßig soll $m_r > 1{,}2$ sein, und sollen sich, wenn möglich, die m_r-Werte aller Feldstäbe nicht allzusehr voneinander unterscheiden, weil oft schon ein einziger, zu den übrigen relativ kleiner m_r-Wert eine unverhältnismäßig starke Querstützung bedingt. Je größer die m_r-Werte sind, um so schwächer ist die erforderliche elastische Querstützung. Bei den Druckgurten offener Fachwerksbrücken sind m_r-Werte in den Grenzen $1{,}2 < m_r < 3$ üblich.

Da die Lösung von Knickaufgaben jeder Art die Kenntnis der Knickdeterminante erfordert, ist es wichtig, dieselbe möglichst rasch in einem einfachen Rechnungsgang ermitteln zu können.

IV. Die Ermittlung der Knickdeterminante.

In den folgenden Abschnitten 1 bis 12 wird nun das Rechenschema zur Ermittlung der Knickdeterminante mitgeteilt. Bezüglich der Herleitung dieses Schemas sei auf die bereits genannte Arbeit im Band VI der Abhandlungen der I. V. B. H. verwiesen.

Die in den Abschnitten 1 bis 12 definierten Größen sind entweder den einzelnen Stäben des Stabverbandes oder den Gelenken bzw. den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes zugeordnet. Sie sollen daher in kurzer Sprechweise einfach als „Stabwerte“ bzw. als „Gelenkwerte“ bezeichnet werden und sind demnach auch mit der dem Stab oder der dem Gelenk zugeordneten Ziffer zu bezeigern. Diese Definitionsgrößen sind durchwegs Absolutwerte, die erst in der Knickdeterminante — sofern sie daselbst auftreten — nach einer festliegenden Regel mit Vorzeichen zu versehen sind. Ihre Berechnung ist in der Reihenfolge der Abschnitte 1 bis 12 durchzuführen.

1. Die Kennziffer m_r eines Feldstabes (r)

definiert seine freie Knicklänge l_r in der Form $l_r = m_r c_r$, wobei

$$\text{(2)} \qquad m_r = \pi \sqrt{\frac{T_r J_r}{S_r c_r^2}}\,.$$

Beim Entwurf ist S_r in jedem Falle gegeben, J_r und F_r sind, wenn nicht direkt gegeben, so zu bestimmen, daß $m_r > 1$ wird. Hierbei ist zu beachten, daß der Knickmodul T_r, falls die Knickspannung $\sigma_r = \dfrac{S_r}{F_r} > \sigma_{\text{prop}}$, eine Funktion von σ_r ist. Nach Engeßer ist beispielsweise der der Knickspannung σ_r t/cm² zugeordnete Knickmodul

$$\text{(3)} \qquad T_r = \frac{(3{,}1 - \sigma_r)^2\, \sigma_r}{1{,}282\,65} \cdot 10^3 \text{ t/cm}^2,$$

doch kann T_r auch nach irgendeinem anderen Gesetz festgelegt werden. Für $\sigma_r < \sigma_{\text{prop}}$ ist T_r identisch mit dem Elastizitätsmodul E. Die m_r-Werte für sämtliche Feldstäbe sind stets in erster Linie zu berechnen.

2. Die σ_r'- und τ_r'-Werte der Feldstäbe.

Mit Kenntnis der m_r ermittelt man für jeden Feldstab (r) das Bogenmaß

$$\text{(4)} \qquad \widehat{\varphi}_r = \frac{\pi}{m_r}$$

oder berechnet es direkt aus

$$\text{(5)} \qquad \widehat{\varphi}_r = \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}}\,,$$

bestimmt ferner das zugeordnete Gradmaß $\varphi_r°$, berechnet $\sin \varphi_r$, $\operatorname{tg} \varphi_r$ und ermittelt die beiden Werte

$$\text{(6)} \qquad \left| \begin{array}{l} s_r = \dfrac{\widehat{\varphi}_r}{\sin \varphi_r} - 1 \\[2ex] t_r = 1 - \dfrac{\widehat{\varphi}_r}{\operatorname{tg} \varphi_r}\,. \end{array} \right.$$

Nun wählt man einen beliebigen, abgerundeten Vergleichswert S^* von der Größenordnung der Stabkräfte S_r, analog einen Vergleichswert c_r^* von der Größenordnung der Feldlängen c_r, berechnet die dimensionslosen Größen

$$\text{(7)} \qquad S_r' = \frac{S_r}{S^*}\,, \qquad c_r' = \frac{c_r}{c^*}\,, \qquad S_r' c_r' = \ldots$$

und hiermit die ebenfalls dimensionslosen Stabwerte

$$\text{(8)} \qquad \sigma_r' = S^* c^* s_r = \frac{s_r}{S_r' c_r'} \quad \text{und} \quad \tau_r' = S^* c^* t_r = \frac{t_r}{S_r' c_r'}$$

für alle Feldstäbe[1]).

[1]) Die in dieser Abhandlung mit Hilfe der Vergleichswerte S^*, c^* und δ^* gebildeten dimensionslosen Zahlenwerte sind durch Beisetzung eines Striches gekennzeichnet.

3. Die ε_r'-Werte der Stützenstäbe

werden erhalten, indem man die den elastisch drehbaren Stützenstäben (r) zugeordneten ε_r-Werte (Dimension 1/Kraft · Länge), die entweder gegeben oder passend zu wählen sind, mit dem Produkt $S^* c^*$ multipliziert. Man erhält dann die dimensionslosen Stabwerte

$$\varepsilon_r' = S^* c^* \varepsilon_r. \tag{9}$$

Einem fest eingespannten unverdrehbaren Stützenstab entsprechen die Werte $\varepsilon_r = 0$ und $\varepsilon_r' = 0$.

4. Die δ_i'-Werte der Querstützung

werden erhalten, indem man die δ_i-Werte (Dimension 1/Kraft) durch einen frei zu wählenden Vergleichswert δ^* (Dimension 1/Kraft) von der Größenordnung der δ_i dividiert. Man erhält dann die dimensionslosen Stützenwerte δ_i' aus

$$\delta_i' = \frac{\delta_i}{\delta^*}. \tag{10}$$

Einer unverschieblichen Querstützung entsprechen die Werte $\delta_i = 0$ und $\delta_i' = 0$.

Wie bereits in III/B erwähnt, wird bei einer Entwurfsaufgabe zweckmäßig die elastische Querstützung in passender Form als unbekannt offen gehalten und mit Hilfe der Knickbedingung $\Delta = 0$ so bestimmt, daß sie die verlangte Knicksicherheit gewährleistet. Hierbei sind über die Querstützung, d. h. über die sie kennzeichnenden δ_i- bzw. δ_i'-Werte bestimmte, im Abschnitt IV/13 näher umschriebene Annahmen zu treffen.

5. Die Gelenkwerte $\varkappa_i'$ und k_i'.

Schließt ein Gelenk i zwei Feldstäbe zusammen, so ist der $\varkappa_i'$-Wert die Summe aus den τ'-Werten der zusammengeschlossenen Stäbe.

Verbindet das Gelenk i aber einen Feld- und einen Stützenstab, so ist der $\varkappa_i'$-Wert dieses Gelenkes die Summe aus dem τ'-Wert des Feldstabes und dem ε'-Wert des Stützenstabes.

Nach dieser Definition erhält man z. B. für den in Bild 2 dargestellten Stab:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varkappa_1' = \varepsilon_1' + \tau_2' & \varkappa_4' = \tau_4' + \tau_5' \\ \varkappa_2' = \tau_2' + \varepsilon_3' & \varkappa_5' = \tau_5' + \tau_6' \\ \varkappa_3' = \varepsilon_3' + \tau_4' & \varkappa_6' = \tau_6' + \tau_7'. \end{array}\right. \tag{11}$$

Die Gelenkwerte k_i' sind die Reziprokwerte der $\varkappa_i'$, daher die Formel

$$k_i' = \frac{1}{\varkappa_i'}. \tag{12}$$

6. Die Fortleitungszahlen a_r und b_r der Feld- und Stützenstäbe.

Jeder innere Feld- oder Stützenstab wird im Hauptsystem von zwei Gelenken begrenzt, die Randstäbe sind nur durch ein Gelenk an den Stabzug angeschlossen. Der $\varkappa'$-Wert, der dem Gelenk am linken Ende eines Feld- oder Stützenstabes zugeordnet ist, soll kurz als „$\varkappa'_{\text{links}}$" bezeichnet werden, und analog gehört der Wert „$\varkappa'_{\text{rechts}}$" dem am rechten Stabende liegenden Gelenke zu. Mit Beachtung dieser Bezeichnung werden die Fortleitungszahlen a_r und b_r in folgender Weise definiert:

$$\left|\begin{array}{lll} \text{Feldstab } (r) \ldots\ldots & a_r = \dfrac{\sigma_r'}{\varkappa_{\text{links}}}, & b_r = \dfrac{\sigma_r'}{\varkappa_{\text{rechts}}}, \\ \text{Stützenstab } (r) \ldots & a_r = \dfrac{\varepsilon_r'}{\varkappa_{\text{links}}}, & b_r = \dfrac{\varepsilon_r'}{\varkappa_{\text{rechts}}}. \end{array}\right. \tag{13}$$

Da ein linker Randstab (1) kein „$\varkappa'_{\text{links}}$", ein rechter Randstab (n) niemals ein „$\varkappa'_{\text{rechts}}$" besitzt, so ist stets $a_1 = 0$ und $b_n = 0$.

Beispielsweise erhält man nach (13) für den Durchlaufstab nach Bild 2:

$$a_1 = 0,\ b_1 = \frac{\varepsilon_1'}{\varkappa_1'};\ a_2 = \frac{\sigma_2'}{\varkappa_1'},\ b_2 = \frac{\sigma_2'}{\varkappa_2'};\ a_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\varkappa_2'},\ b_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\varkappa_3'}\ \text{usw.}$$

7. Die Fortleitungszahlen p_r, q_r und die Multiplikatoren μ_r der Feld- und Stützenstäbe.

Mit Kenntnis der Fortleitungszahlen a_r und b_r gewinnt man die Fortleitungszahlen p_r und q_r aus den Definitionsgleichungen:

$$\left|\begin{array}{ll} p_r = \dfrac{a_r}{1 - b_{r-1}\, p_{r-1}} & \Big|_{r = 1, 2, 3, \ldots n} \\ q_r = \dfrac{b_r}{1 - a_{r+1}\, q_{r+1}} & \Big|_{r = n, n-1, \ldots 2, 1} \end{array}\right. \tag{14}$$

Bei der Ermittlung der p_r ist mit dem ersten, bei der Ermittlung von q_r mit dem letzten Stab zu beginnen. Weil stets $a_1 = 0$, $b_n = 0$, so ist auch $p_1 = 0$ und $q_n = 0$. Der linke Randstab besitzt demnach keine Fortleitungszahl p, der rechte Randstab keine Fortleitungszahl q.

Die Multiplikatoren μ_r sind aus der Definitionsgleichung

$$\mu_r = \frac{q_r}{p_r}\Big|_{r = 2, 3, \ldots (n-1)} \tag{15}$$

zu errechnen.

Den beiden Randstäben ist kein Multiplikator μ zugeordnet, daher immer $\mu_1 = 0$ und $\mu_n = 0$.

8. Die Einflußzahlen λ'_{ii}

sind den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes zugeordnet. Das erste nach Abschnitt I in den Stabzug einzuschaltende Gelenk und auch der erste Gelenkquerschnitt des n-stäbigen Ersatzstabes führen stets die Bezeichnung „1", das letzte dieser Gelenke bzw. der letzte Gelenkquerschnitt des Ersatzstabes die Bezeichnung „$n - 1$". Daher sind auch die λ'_{ii} von $i = 1$ bis $i = n - 1$ zu berechnen. Es ist:

$$\left|\begin{array}{l} \lambda'_{11} = \dfrac{q_1}{b_1} \cdot k_1' \\ \lambda'_{22} = \mu_2\, \lambda'_{11} \\ \lambda'_{33} = \mu_3\, \lambda'_{22} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda'_{n-1,\, n-1} = \mu_{n-1}\, \lambda'_{n-2,\, n-2} \end{array}\right. \tag{16}$$

Zur Kontrolle kann der letzte λ'-Wert auch aus der Formel

$$\lambda'_{n-1,\, n-1} = \frac{p_n}{a_n} \cdot k'_{n-1} \tag{17}$$

und irgendein Zwischenwert aus

$$\lambda'_{ii} = \frac{1}{b_r} \cdot \frac{q_r}{1 - p_r\, q_r} \cdot k_i'\Big|_{r = i} \tag{18}$$

ermittelt werden.

9. Die A'-, B'-, C'-, D'- . . . Momente in den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes.

Dies sind die Absolutwerte der „bezogenen Biegungsmomente $M_i' = \dfrac{M_i}{S^* c^*}$", wobei die Zähler M_i jene Biegungsmomente in den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes darstellen, die durch besondere Stützenverschiebungen erzeugt werden. Bild 3 zeigt diese Stützenverschiebungen am statisch bestimmten Hauptsystem des dem Durchlaufstab Bild 2 zugeordneten Ersatzstabes. Wie zu ersehen, sind die Stützen so zu verschieben, daß jeweils nur ein Feldstab die „Verdrehung $\nu = +1$" erhält. Hierzu muß bemerkt werden, daß die „Verdrehung $\nu = +1$" nur mit jenen Feldstäben — Stützenstäbe kommen überhaupt nicht in Frage — vorzunehmen ist, die an beiden oder zumindest an einem der beiden Enden federnd quergestützt sind. Deshalb fällt z. B. der Feldstab (6) von Bild 2 aus, da seine beiden Enden seitlich unverschieblich gelagert sind, und in Bild 3 kommen nur die vier Feldstäbe (2), (4), (5) und (7) für die Verdrehung $\nu = +1$ in Betracht. Weil nunmehr die regelmäßige Zahlenfolge in den Ordnungsnummern dieser Stäbe durch den Ausfall der Stützen- und Feldstäbe gestört ist, so müssen sie, wie in Bild 3 angegeben, eine Neubezeichnung durch römische Ziffern in der Folge I bis IV erhalten.

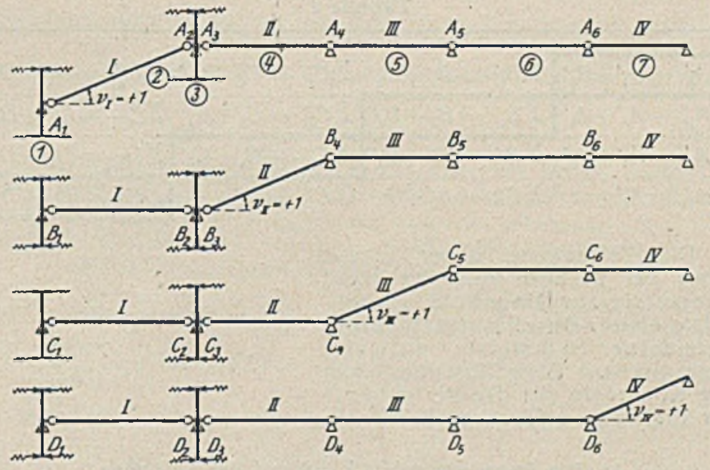


Bild 3.

Diese neuerliche Bezeichnung der federnd gestützten Feldstäbe mit römischen Ziffern, neben welcher die bisherige Bezeichnung gleichzeitig weiterbesteht, wird immer dann erforderlich, wenn 1. Stützenstäbe zwischen zwei Feldstäben eingeschaltet sind, und 2. wenn im Stabzug Feldstäbe vorkommen, die an beiden Enden unverschieblich gelagert sind. Trifft beides nicht zu, so kann diese zweite Bezeichnung mit römischen Ziffern entfallen.

Ein Stabneigungswinkel ν_r soll, falls die Bezeichnung durch römische Ziffern notwendig ist, die dem Stab zugeordnete römische Ziffer als Zeiger erhalten. Das durch die Formänderung $\nu_{\mathrm{I}} = +1$ in irgendeinem Gelenkquerschnitt i des Ersatzstabes hervorgerufene „bezogene Biegungsmoment M_i'" wird, wie in Bild 3 angedeutet, mit A_i' bezeichnet, und analog führen die durch $\nu_{II} = +1$ bzw. $\nu_{III} = +1$, $\nu_{IV} = +1$ ... in den Gelenkquerschnitten i erzeugten „bezogenen Biegungsmomente M_i'" die Bezeichnung B_i', C_i', D_i' ... Der Zeiger i stimmt mit der dem Gelenkquerschnitt zugeordneten arabischen Ziffer überein. Durch diese Erläuterung erklärt sich auch die Bezeichnung „A'-, B'-, C'-, D'- ... Momente" in der Überschrift dieses Absatzes.

Die bezogenen Momente K_{i-1}' und K_i' in den Gelenkquerschnitten $i-1$ und i eines beliebigen, in Bild 4 dargestellten, mit der arabischen Ordnungsziffer (i) [römische Ordnungsziffer (r)] versehenen Feldstabes infolge seiner Verdrehung $\nu_r = +1$ sind aus den Formeln

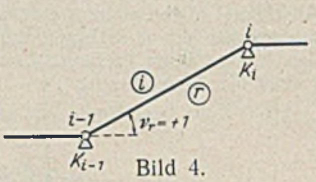


Bild 4.

$$(19)\quad \begin{cases} K_{i-1}' = \lambda_{i-1,i-1}'(1+q_i) \\ K_i' = \lambda_{i,i}'(1+p_i) \end{cases}$$

zu errechnen. Hierin ist der Buchstabe K' durch A', B', C' ... zu ersetzen, wenn die Ordnungsnummer r des Stabes den Wert $r = $ I bzw. II, III ... besitzt. Die Momente in den Gelenkquerschnitten links von $i-1$ und rechts von i werden aus K_{i-1}' bzw. aus K_i', wie aus der untenstehenden, dem Durchlaufstab Bild 2 zugehörigen Tabelle 1 zu ersehen ist, mit Hilfe der Fortleitungszahlen p und q abgeleitet. In der stark umrandeten Hauptdiagonale dieser Tabelle erscheinen die nach (19) zu berechnenden Biegungsmomente; wegen $q_7 = 0$ ist $D_6' \equiv \lambda_{66}$.

Tabelle 1.

	Bezogene Biegungsmomente infolge $\nu_I = +1$	$\nu_{II} = +1$	$\nu_{III} = +1$	$\nu_{IV} = +1$	
	$A_1' = \lambda_{11}'(1+q_2)$	$B_1' = p_2 B_2'$	$C_1' = p_2 C_2'$	$D_1' = p_2 D_2'$	
	$A_2' = \lambda_{22}'(1+p_2)$	$B_2' = p_3 B_3'$	$C_2' = p_3 C_3'$	$D_2' = p_3 D_3'$	$p_2 = \ldots$
$q_3 = \ldots$	$A_3' = q_3 A_2'$	$B_3' = \lambda_{33}'(1+q_4)$	$C_3' = p_4 C_4'$	$D_3' = p_4 D_4'$	$p_3 = \ldots$
$q_4 = \ldots$	$A_4' = q_4 A_3'$	$B_4' = \lambda_{44}'(1+p_4)$	$C_4' = \lambda_{44}'(1+q_5)$	$D_4' = p_5 D_5'$	$p_4 = \ldots$
$q_5 = \ldots$	$A_5' = q_5 A_4'$	$B_5' = q_5 B_4'$	$C_5' = \lambda_{55}'(1+p_5)$	$D_5' = p_6 D_6'$	$p_5 = \ldots$
$q_6 = \ldots$	$A_6' = q_6 A_5'$	$B_6' = q_6 B_5'$	$C_6' = q_6 C_5'$	$D_6' = \lambda_{66}'(1+0)$	$p_6 = \ldots$

10. Die Summe der an den Enden der Feldstäbe wirkenden A'-, B'-, C'-, D'- ... Momente

ist nun einfach zu errechnen, indem man die entsprechenden, in der obigen Tafel eingeschriebenen, an den Enden eines Feldstabes wirkenden Momente addiert. Diese sich z. B. über den Feldstab I erstreckende Summe der A'-Momente soll mit $\Sigma A_I'$ angedeutet werden. Ist die Bezeichnung mit römischen Ziffern nicht erforderlich, so wäre die Bezeichnung $\Sigma A_{(1)}'$ oder $(\Sigma A')_1$ zu verwenden. Für den in Bild 2 dargestellten Stab erhält man die in der folgenden Tabelle 2 enthaltenen Summenwerte.

Tabelle 2.

$\Sigma A_I' = A_1' + A_2'$	$\Sigma B_I' = B_1' + B_2'$	$\Sigma C_I' = C_1' + C_2'$	$\Sigma D_I' = D_1' + D_2'$
$\Sigma A_{II}' = A_3' + A_4'$	$\Sigma B_{II}' = B_3' + B_4'$	$\Sigma C_{II}' = C_3' + C_4'$	$\Sigma D_{II}' = D_3' + D_4'$
$\Sigma A_{III}' = A_4' + A_5'$	$\Sigma B_{III}' = B_4' + B_5'$	$\Sigma C_{III}' = C_4' + C_5'$	$\Sigma D_{III}' = D_4' + D_5'$
$\Sigma A_{IV}' = A_6' + 0$	$\Sigma B_{IV}' = B_6' + 0$	$\Sigma C_{IV}' = C_6' + 0$	$\Sigma D_{IV}' = D_6' + 0$

Die Zahlenwerte dieser Tabelle zeigen bei richtiger Rechnung stets Symmetrie zur Diagonale, gleichgültig ob der Durchlaufstab selbst irgendeine Symmetrie aufweist oder nicht. Diese Tatsache bildet eine Kontrolle für die Richtigkeit der bisherigen Rechnung.

11. Die Stabwerte a_r', b_r' und m_r' der Feldstäbe.

Jedem Feldstab (r) wird je ein von der Querstützung der Stabenden abhängiger Stabwert a_r', b_r' und m_r' zugeordnet. Der Wert a_r' gehört gewissermaßen dem linken Stabende, b_r' dem rechten Stabende und m_r' der Stabmitte an. Die Definition dieser Werte ist durch die folgenden Sätze gegeben.

Der a_r'-Wert des Feldstabes (r) ist gleich dem δ'-Wert der linken Querstütze, geteilt durch den c'-Wert des links von dieser Stütze liegenden Feldstabes.

Der b_r'-Wert des Feldstabes (r) ist gleich dem δ'-Wert der rechten Querstütze, geteilt durch den c'-Wert des rechts von dieser Stütze liegenden Feldstabes.

Diesen Definitionen entsprechend wurden die in Bild 5 eingeschriebenen a'- und b'-Werte gebildet. Die Zeiger dieser Werte und auch die der m'-Werte stimmen mit der römischen Ziffer jenes Feldstabes überein, dem sie zugeordnet sind. Ist die Bezeichnung durch römische Ziffern nicht erforderlich, so erfolgt die Bezeigerung mit der arabischen Ziffer des Feldstabes.

Werden die links und rechts von der Querstützung anzuschreibenden $\frac{\delta'}{c'}$-Werte, im Hinblick auf die Feldstäbe, in „innere" und „äußere $\frac{\delta'}{c'}$-Werte" (a_{III}', b_{III}' bzw. b_{II}', a_{IV}') unterschieden, so kann man den m'-Wert eines Feldstabes auch als Summe der äußeren $\frac{\delta'}{c'}$-Werte des Feldes definieren. Demnach ist in Bild 5 $m_{III}' = \frac{\delta_{r-1}'}{c_r'} + \frac{\delta_{r+1}'}{c_r'} = b_{II}' + a_{IV}'$.

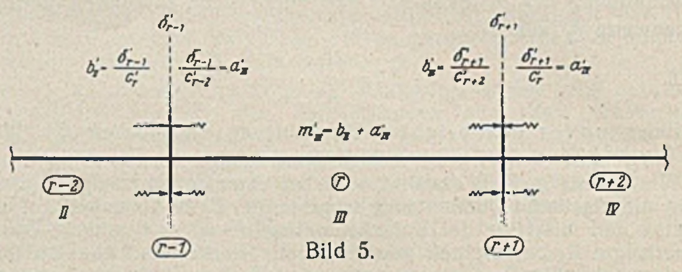


Bild 5.

Der a'-Wert des ersten und der b'-Wert des letzten beiderseitig oder auch nur einseitig elastisch gestützten Feldstabes ist stets Null, da die zur Bildung dieser Werte erforderlichen c'-Werte nicht existieren.

Zu einer unverschieblichen Querstützung i gehören die Werte $\delta_i = 0$ und $\delta_i' = 0$, daher verschwinden auch die links und rechts an einer unverschieblichen Stütze anzuschreibenden $\frac{\delta'}{c'}$-Werte. Ein an beiden Enden seitlich unverschieblich gelagerter Feldstab (r) besitzt demnach die Werte $a_r' = 0$, $b_r' = 0$, und $m_r' = 0$ und überdies ist auch $b_{r-1}' = 0$ und $a_{r+1}' = 0$.

Beispielsweise erhält man nach den gegebenen Definitionen für die elastisch gestützten Feldstäbe des in Bild 2 dargestellten Durchlaufstabes:

$$a_I' = 0; \quad m_I' = \frac{\delta_1'}{c_2'} + \frac{\delta_3'}{c_2'}; \quad b_I' = \frac{\delta_3'}{c_4'};$$

$$a_{II}' = \frac{\delta_3'}{c_2'}; \quad m_{II}' = \frac{\delta_3'}{c_4'} + \frac{\delta_4'}{c_4'}; \quad b_{II}' = \frac{\delta_4'}{c_5'};$$

$$a_{III}' = \frac{\delta_4'}{c_4'}; \quad m_{III}' = \frac{\delta_4'}{c_5'} + 0; \quad b_{III}' = 0;$$

$$a_{IV}' = 0; \quad m_{IV}' = 0 + \frac{\delta_7'}{c_7'}; \quad b_{IV}' = 0.$$

12. Die Knickdeterminante.

Die Zahl der Vertikalkolonnen und der hierdurch bestimmte Grad der Knickdeterminante stimmt immer überein mit der Zahl der elastisch quergestützten Feldstäbe, gleichgültig ob die elastische Stützung dieser Stäbe an beiden Enden oder nur an einem Ende stattfindet. Die erste Kolonne der Determinante baut sich im wesentlichen aus den A'-Momenten, die zweite aus den B'-Momenten usw. auf. Daher wird die erste, zweite, dritte ... Kolonne auch als die „A-Kolonne", „B-Kolonne", „C-Kolonne" ... bezeichnet. Ist in einem Stabverband, der auch Stützenstäbe enthalten kann, die Querstützung durchwegs elastisch, so besitzt die Knickdeterminante die „Normalform", die z. B. für einen Stabverband mit 4 Feldstäben gegeben ist durch

$$(20)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \eta + h_{IA'}' - m_I' S_I' & -h_{IB'}' + a_{II}' S_{II}' & +h_{IC'}' - & -h_{ID'}' \\ -h_{IIA'}' + b_I' S_I' & \eta + h_{IIB'}' - m_{II}' S_{II}' & -h_{IIC'}' + a_{III}' S_{III}' & +h_{IID'}' \\ +h_{IIIA'}' & -h_{IIIB'}' + b_{II}' S_{II}' & \eta + h_{IIIC'}' - m_{III}' S_{III}' & -h_{IIID'}' + a_{IV}' S_{IV}' \\ -h_{IVA'}' & +h_{IVB'}' & -h_{IVC'}' + b_{III}' S_{III}' & \eta + h_{IVD'}' - m_{IV}' S_{IV}' \end{vmatrix} = 0.$$

Das Bildungsgesetz dieser aus lauter dimensionslosen Absolutgliedern aufgebauten Knickdeterminante ist leicht zu erkennen.

Die Summen in der nach rechts fallenden Hauptdiagonale sind stets dreigliedrig. Ihr erstes Glied

$$(21)\quad \eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*} = \frac{A^* c^*}{S^*}$$

ist aus den frei gewählten Vergleichswerten S^*, c^* und δ^* bzw. $A^* = \frac{1}{\delta^*}$ aufgebaut und stets mit einem positiven Vorzeichen zu versehen. Das dritte Glied, das Produkt $m' S'$, erhält immer ein negatives Vorzeichen, in der Zeile darüber und darunter erscheinen die Produkte $a' S'$ bzw. $b' S'$, die stets ein positives Vorzeichen bekommen. Diese

„S'-Produkte" sind in der ersten Spalte dem Feldstab I, in der zweiten Spalte dem Feldstab II usw. zugeordnet und daher dementsprechend zu bezeigern.

Die stets doppelt bezeigerten h'-Glieder der Knickdeterminante (20) werden den elastisch gestützten Feldstäben zugeordnet. Sie sollen ganz allgemein die Bezeichnung $h'_{rK'}$ führen und werden durch die Formel

$$(22) \qquad h_{rK'} = \frac{1}{c_r'}\left[a_r' \Sigma K'_{r-1} + m_r' \Sigma K_r' + b_r' \Sigma K'_{r+1}\right]_{\substack{r = \mathrm{I, II, III} \dots \\ K' = A' B' C' \dots}}$$

bestimmt. Der erste Zeiger „r" zeigt einerseits die Ordnungszahl in der Folge dieser Stäbe an und bezeichnet andererseits auch gleichzeitig die Reihe in der Determinante. Der zweite als Zeiger verwendete Buchstabe „K'" deutet einerseits die Kolonne der Determinante an, gibt aber andererseits auch zu erkennen, daß sich in dieser Kolonne die nach (22) zu errechnenden h'-Glieder aus jenen „bezogenen Biegungsmomenten" aufbauen, die durch den Zeiger K' angezeigt werden. Aus (22) erhält man z. B. für das dritte Glied der vierten Kolonne ($= D$-Kolonne)

$$h'_{\mathrm{III}\,D'} = \frac{1}{c'_{\mathrm{III}}}\left[a'_{\mathrm{III}} \Sigma D'_{\mathrm{II}} + m'_{\mathrm{III}} \Sigma D'_{\mathrm{III}} + b'_{\mathrm{III}} \Sigma D'_{\mathrm{IV}}\right].$$

Aus (22) gewinnt man auch die folgenden Formeln für sämtliche h'-Glieder der Knickdeterminante in

$$(23) \quad \begin{cases} \text{der ersten Reihe} \dots & h'_{\mathrm{I}K'} = \dfrac{1}{c_{\mathrm{I}}'}\left[0 + m_{\mathrm{I}}' \Sigma K_{\mathrm{I}}' + b_{\mathrm{I}}' \Sigma K'_{\mathrm{II}}\right] \\ \text{„ zweiten „} \dots & h'_{\mathrm{II}K'} = \dfrac{1}{c'_{\mathrm{II}}}\left[a'_{\mathrm{II}} \Sigma K_{\mathrm{I}}' + m'_{\mathrm{II}} \Sigma K'_{\mathrm{II}} + b'_{\mathrm{II}} \Sigma K'_{\mathrm{III}}\right] \\ \text{„ dritten „} \dots & h'_{\mathrm{III}K'} = \dfrac{1}{c'_{\mathrm{III}}}\left[a'_{\mathrm{III}} \Sigma K'_{\mathrm{II}} + m'_{\mathrm{III}} \Sigma K'_{\mathrm{III}} + b'_{\mathrm{III}} \Sigma K'_{\mathrm{IV}}\right] \\ \text{„ vierten „} \dots & h'_{\mathrm{IV}K'} = \dfrac{1}{c'_{\mathrm{IV}}}\left[a'_{\mathrm{IV}} \Sigma K'_{\mathrm{III}} + m'_{\mathrm{IV}} \Sigma K'_{\mathrm{IV}} + 0\right] \end{cases} \quad K' = A', B', C'\, D'.$$

Die vier Gl. (23) liefern auch die sämtlichen h'-Glieder in der ersten Kolonne der Knickdeterminante, wenn man den „Kolonnenbuchstaben K'" durch A' ersetzt. Sinngemäß erhält man auch die h'-Glieder der übrigen Kolonnen. Bei der Zahlenrechnung erscheinen die in (23) auftretenden „K'-Summen" in Tabelle 2 bereits ziffernmäßig errechnet.

In der Knickdeterminante (20) und auch in den Knickdeterminanten von anderen nach diesem Verfahren berechneten Knickfällen sind die (+)- und (—)-Vorzeichen der $h'_{rK'}$-Glieder stets schachbrettartig so zu verteilen, daß die $h'_{rK'}$-Glieder in der nach rechts fallenden Hauptdiagonale immer positive Vorzeichen erhalten.

Der Aufbau der in (20) dargestellten Normalform der Knickdeterminante eines 4 feldrigen elastisch gestützten Stabes ist charakteristisch, er wird von einer einfachen Gesetzmäßigkeit beherrscht, nach welcher sich sinngemäß die Knickdeterminanten für Stäbe von mehr oder weniger Feldern leicht anschreiben lassen.

Eine Abweichung von dieser Normalform der Knickdeterminante wird nur durch das Auftreten von unverschieblichen Querstützungen verursacht[2]). Wie schon früher bemerkt, bewirkt eine unverschiebliche Stütze das Nullwerden des links und rechts anliegenden a'- und b'-Wertes und beeinflußt daher auch die hiervon abhängenden m'-Werte. In den $h'_{rK'}$-Summen eines Stabes mit teilweise unverschieblicher Querstützung, sowie in seiner Knickdeterminante entfallen daher jene Glieder, deren a'- und b'-Beiwerte infolge der unverschieblichen Stützung verschwinden. Mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen läßt sich die Knickdeterminante eines jeden beliebig gelagerten mehrfeldrigen Stabes ohne weiteres anschreiben. So geht z. B. die Knickdeterminante des in Bild 2 dargestellten Stabes aus (20) hervor, indem man hierin $b'_{\mathrm{III}} = 0$ und $a'_{\mathrm{IV}} = 0$ setzt. Diese Sonderwerte $b'_{\mathrm{III}} = 0$ und $a'_{\mathrm{IV}} = 0$ sind auch bei den nach (23) zu bildenden $h'_{rK'}$-Gliedern entsprechend zu berücksichtigen.

13. Die Lösung des Knickproblems.

Wie schon im Abschnitt III erwähnt, liefert die Bedingung „Knickdeterminante $\Delta = 0$" die einzige Gleichung zur Lösung eines vorliegenden Knickproblems. Deshalb muß jede Knickaufgabe so gestellt werden, daß nur eine einzige Unbekannte offen bleibt, die mit Hilfe der aus $\Delta = 0$ fließenden Gleichung zu errechnen ist.

Bei Überprüfungsaufgaben ist diese Unbekannte — die Knicksicherheit ν bzw. die Stützensicherheit μ — eindeutig festgelegt.

Anders liegen die Verhältnisse bei einer Entwurfsaufgabe, wo die offen zu haltende Unbekannte aus einer großen Zahl von frei wählbaren Größen entnommen werden kann. Wenn nicht zwingende Gründe dagegen sprechen, so empfiehlt es sich, diese Unbekannte aus den δ-Werten der federnden Querstützung zu entnehmen. Da die in der Knickdeterminante auftretenden Beiwerte a_r', m_r' und b_r' die δ-Werte in linearer Form enthalten, so erkennt man ohne weiteres, daß die Bedingung $\Delta = 0$ eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung des unbekannten δ-Wertes liefert.

[2]) Über Abweichungen von der „Normalform", die dadurch erzeugt werden, daß im Durchlaufstab auch Feldstäbe vorkommen, die entweder auf Zug oder überhaupt durch keine Normalkraft beansprucht sind, siehe im Band VI der Abhandlungen der J.V.B.H.

Hingegen sind alle auf einen Feldstab (r) bezughabenden Größen im Werte $\varphi_r = \sqrt{\dfrac{S_r\, c_r^2}{T_r\, J_r}}$ vereinigt, der in transzendenter Form ($\sin \varphi_r$, $\operatorname{tg} \varphi_r$) in die Knickrechnung eingeht. Wird daher irgendeine in φ_r auftretende Größe als unbekannt offen gelassen, so ist eine direkte Ermittlung dieser Größe aus der Bedingung $\Delta = 0$ unmöglich. In solchen Fällen ist die Lösung nur mittels eines analytisch-graphischen Verfahrens in folgender Weise zu gewinnen. Sei u die allgemeine Bezeichnung der unbekannten Größe, so nimmt man probeweise einen passenden Wert u_1 an und ermittelt den zugeordneten Wert $\Delta(u_1)$ der Knickdeterminante. Die mehrmalige Wiederholung dieses Vorganges ermöglicht die Konstruktion der Kurve $\Delta = f(u)$. Der dem Punkte $\Delta = 0$ zugeordnete u_0-Wert ist die Lösung des Problems.

In dieser Art ist auch die erste Überprüfungsaufgabe, die Ermittlung der Knicksicherheit ν des Durchlaufstabes, durchzuführen. Man erhöht die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Druckkräfte $\mathfrak{S}_r$ unter der Annahme von passenden ϱ-Werten auf $\varrho\,\mathfrak{S}_r$, berechnet die den jeweiligen Druckkräften $\varrho\,\mathfrak{S}_r$ zugeordneten Knickdeterminanten $\Delta(\varrho)$ und gewinnt nun graphisch, mittels der Kurve $\Delta = f(\varrho)$, aus $\Delta = 0$ die Knicksicherheit $\varrho_0 = \nu$.

Bei der zweiten Überprüfungsaufgabe, der Ermittlung der Stützensicherheit μ, führt die Bedingung $\Delta = 0$ zu einer algebraischen Gleichung nach μ, weil diese Unbekannte ein Element der federnden Querstützung darstellt. Bei einer solchen Aufgabe setzen sich die Stabwerte a_r', m_r' und b_r' aus Gliedern von der allgemeinen Form

$$\frac{\delta'_{i,\mathrm{erf}}}{c'} = \mu \cdot \frac{\delta'_{i,\mathrm{vorh}}}{c'}$$

zusammen. Diese Stabwerte, die den Faktor μ als Multiplikator enthalten, erscheinen, wie der Aufbau der Knickdeterminante, z. B. die Normalform (20), erkennen läßt, in den Beiwerten der Determinantenglieder. Nur der erste Posten η der Diagonalglieder enthält keinen Beiwert μ. Dividiert man daher jede Zeile der Determinante durch μ, so tritt diese Unbekannte nur mehr im η-Wert der Hauptdiagonale, und zwar in der Form $\dfrac{\eta}{\mu} = \dfrac{c^*}{\mu\, \delta^*\, S^*} = \eta'$ auf. Durch diesen Vorgang würde beispielsweise die Knickdeterminante (20) in die Form $\Delta = \mu^4 \Delta'$ übergeführt, und aus $\Delta = 0$ folgt auch $\Delta' = 0$. Die Determinante Δ' stimmt in ihrem Aufbau vollkommen überein mit der Determinante Δ, nur werden in Δ' die Beiwerte a_r', m_r' und b_r' mit den bekannten vorhandenen $\delta'_{i,\mathrm{vorh}}/c'$-Werten gebildet, während in Δ die Werte der unbekannten $\delta'_{i,\mathrm{erf}}/c'$-Werte auftreten. In Δ' ist nun $\eta' = \dfrac{\eta}{\mu}$, wegen des unbekannten μ, die einzige Unbekannte des Problems, während in Δ der Wert $\eta = \dfrac{c^*}{J^*\, S^*}$ bekannt ist. Hiermit erscheint der Vorgang zur Ermittlung der Stützensicherheit μ vollkommen klargestellt. Man bestimmt unter Zugrundelegung der vorhandenen spezifischen Stützenwiderstände $\delta_{i,\mathrm{vorh}}$ die Stabwerte a_r', m_r', b_r' und hiermit die Glieder der Knickdeterminante Δ' des Durchlaufstabes. Aus $\Delta' = 0$ gewinnt man nun eine algebraische Gleichung höheren Grades zur Bestimmung der Unbekannten $\eta' = \dfrac{\eta}{\mu} = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{c^*}{\delta^*\, S^*}$ und der größte aller η'-Werte liefert die vorhandene Stützensicherheit $\mu \equiv \mu_{\min} = \dfrac{1}{\eta'_{\max}} \cdot \dfrac{c^*}{\delta^*\, S^*}$.

Bei einer Entwurfsaufgabe wird man, wie bereits erwähnt, aus der Gruppe der die federnde Querstützung kennzeichnenden δ_i-Werte einen passenden δ-Wert auswählen und als unbekannt offen lassen. In dieser Auswahl bieten sich u. a. die folgenden Möglichkeiten dar.

a) Man läßt den irgendeiner Stütze s zugeordneten δ_s- bzw. δ_s'-Wert offen, während alle übrigen δ-Werte beliebig angenommen werden. Aus $\Delta = 0$ erhält man eine algebraische Gleichung zur Ermittlung des unbekannten δ_s'-Wertes. Aus $\delta_s' = \dfrac{\delta_s}{\delta^*}$ gewinnt man den spezifischen Stützenwiderstand $A_s = \dfrac{1}{\delta_s} = \dfrac{1}{\delta_s'\, \delta^*}$. Wenn es die gegebenen Umstände erlauben, so ist es hinsichtlich der Rechenarbeit von besonderem Vorteil, den Wert $\delta_s = \delta_0$ oder $\delta_s = \delta_n$ als unbekannt offen zu lassen.

b) Man kann auch für sämtliche Querstützen zunächst beliebige Werte δ_i annehmen und hierzu die proportionalen Werte $\delta_{i,\mathrm{erf}} = \mu\, \delta_i$ bestimmen, die erforderlich sind, um die vorgeschriebene Knicksicherheit des Durchlaufstabes zu gewährleisten. In dieser Form erscheint die Entwurfsaufgabe auf die zweite Überprüfungsaufgabe zurückgeführt, die Ermittlung des Proportionalitätsfaktors μ ist in einem der Bestimmung der Stützensicherheit analogen Rechnungsgang durchzuführen.

c) Es ist auch ohne weiteres möglich, aus den zunächst beliebig angenommenen δ_i-Werten eine gewisse Gruppe als unabänderlich feststehend zu betrachten und für die Restgruppe, wie oben unter b, die hierzu proportionalen $\delta_{i,\mathrm{erf}} = \mu\, \delta_i$ so zu bestimmen, daß die vorgeschriebene Knicksicherheit gewährleistet erscheint.

d) Schließlich kann man auch sämtliche Querstützungen als gleich stark voraussetzen und als unbekannt offen lassen. Der diese Querstützung bestimmende δ-Wert ist dann die einzige Unbekannte des Problems. In der Durchführung der Berechnung wird im vorliegenden Falle mit Vorteil als Vergleichswert $\delta^* = \delta$ gewählt, wodurch für sämtliche Querstützen die Werte $\delta' = \frac{\delta}{\delta^*} = 1$ bekannt werden und die Unbekannte $\delta \equiv \delta^*$ nur im Gliede $\eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*} = \frac{c^*}{\delta S^*}$ der Hauptdiagonale erscheint. Die Bedingung $\varDelta = 0$ führt zu einer algebraischen Gleichung höheren Grades nach η. Der größte der η-Werte bestimmt die Lösung des Problems in $\delta_{\min} = \frac{1}{\eta_{\max}} \cdot \frac{c^*}{S^*}$, woraus sich der für die Zwischenstützen erforderliche spezifische Stützenwiderstand $A_{\mathrm{erf}} = \frac{1}{\delta_{\min}} = \eta_{\max} \cdot \frac{S^*}{c^*}$ ergibt.

e) Die Knickberechnung der Druckgurte offener Brücken wird vielfach unter der in d gegebenen Voraussetzung durchgeführt, oft aber werden nur die Zwischenrahmen untereinander gleich stark angenommen und hierzu die Endrahmen so bestimmt, daß die Knicksicherheit des Druckgurtes gewährleistet erscheint. Ist δ die spezifische Stützensenkung der Zwischenrahmen, $\delta_0 = \delta_n$ jene der Endrahmen, so wählt man zweckmäßig als Vergleichswert $\delta^* = \delta$, womit die δ'-Werte aller Zwischenstützen den Wert $\delta' = 1$ annehmen und $\delta_0' = \frac{\delta_0}{\delta} = \delta_n'$ die einzige Unbekannte des Problems bildet, die aus $\varDelta = 0$ zu ermitteln ist.

Diese unter a bis e zusammengestellten Annahmen oder ähnliche andere führen bei der Ausrechnung der Knickdeterminante immer auf eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung der Unbekannten des Knickproblems.

V. Sonderfall: die Knickdeterminante eines mehrfeldrigen elastisch quergestützten Gelenkstabes.

Die durch Gelenke miteinander verbundenen Feldstäbe seien durch die Knickkräfte S_r beansprucht. Alle Stäbe besitzen Kennziffern $m_r > 1$, sie sind daher unter der Belastung S_r knicksicher. Die federnde Querstützung ist nun so zu bestimmen, daß auch der Stabzug als Ganzes die geforderte Knicksicherheit aufweist.

Der vorliegende Knickfall ist ein Sonderfall des bisher behandelten Durchlaufstabes. Der zugeordnete Ersatzstab ist ebenfalls ein Gelenkstab, daher sind alle A'-, B'-, C'- . . . Momente gleich Null. Mit Beachtung dieser Tatsachen erhält man z. B. aus der Determinante (20) die Knickdeterminante eines 4feldrigen Gelenkstabes, indem man hierin die aus den A'-, B'-, C'- . . . Momenten aufgebauten $h'_{rK'}$-Glieder gleich Null setzt. Dies führt zur Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \eta - m_{\mathrm{I}}' S_{\mathrm{I}}' & + a_{\mathrm{II}}' S_{\mathrm{II}}' & 0 & 0 \\ + b_{\mathrm{I}}' S_{\mathrm{I}}' & \eta - m_{\mathrm{II}}' S_{\mathrm{II}}' & + a_{\mathrm{III}}' S_{\mathrm{III}}' & 0 \\ 0 & + b_{\mathrm{II}}' S_{\mathrm{II}}' & \eta - m_{\mathrm{III}}' S_{\mathrm{III}}' & + a_{\mathrm{IV}}' S_{\mathrm{IV}}' \\ 0 & 0 & + b_{\mathrm{III}}' S_{\mathrm{III}}' & \eta - m_{\mathrm{IV}}' S_{\mathrm{IV}}' \end{vmatrix}$$

deren Nullsetzung die Berechnung der erforderlichen Querstützung ermöglicht.

VI. Zahlenbeispiele [3]).

Beispiel 1. In Heft 1 der Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues „Die Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes" von Dr.-Ing. A. Schleusner wird der in Bild 6 dargestellte 6feldrige, elastisch quergestützte, an den Rändern unverschieblich gelagerte Druckgurt bei der neuen Tempelhofer Flugsteighalle (vgl. Stahlbau 1938, Heft 12) einer Knickberechnung unterzogen. An der Hand dieses Beispiels entwickelt Schleusner ein Verfahren zur Knickberechnung solcher hinsichtlich Belastung, Konstruktion und federnder Querstützung beliebig unsymmetrischer Durchlaufstäbe.

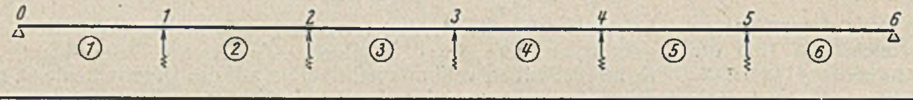
Der Druckgurt der Flugsteighalle ist durch die in das unten folgende Rechenschema eingetragenen Bestimmungsstücke gegeben. Dies sind die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Druckkräfte $\mathfrak{S}_r$, die verlangte Knicksicherheit $\nu = 2$, die Knickkräfte $S_r = \nu\,\mathfrak{S}_r$, die Trägheitsmomente J_r und die durchwegs gleichen Feldlängen c_r. Der Knickmodul T_r ist laut Schleusners Angabe konstant und gleich dem Elastizitätsmodul $E = 2150$ t/cm². Die spezifischen Stützenwiderstände sind ebenfalls gegeben und besitzen in t/cm die Werte: $A_0 = \infty$, $A_1 = 15{,}12$, $A_2 = 10{,}3$, $A_3 = 7{,}55$, $A_4 = 5{,}78$, $A_5 = 17{,}2$, $A_6 = \infty$.

Zu ermitteln ist die Stützensicherheit μ. Dieser von Schleusner untersuchte Druckgurt, ein Sonderfall des in dieser Abhandlung betrachteten Durchlaufstabes, soll nun nach dem hier entwickelten Verfahren nachgerechnet werden, um dessen einfache zahlenmäßige Durchführung an der Hand dieses Beispiels aufzuzeigen. Gleichzeitig bietet sich hierbei die Gelegenheit zu einem Vergleich der beiden Verfahren, die, an ein und demselben Zahlenbeispiel angewendet, zum gleichen Endergebnis führen.

Die vorliegende Aufgabe ist der im Abschnitt III/A bzw. IV/13 als sogenannte „zweite Überprüfungsaufgabe" bezeichnete Knickfall. Seine Lösung wurde in IV/13 eingehend besprochen und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung. Die Berechnung der zum Aufbau der Knickdeterminante benötigten, in den Abschnitten IV/1 bis 12 definierten Größen wird im nachfolgenden Rechenschema auf Grund obiger Angabe in tabellarischer Anordnung durchgeführt. (Schluß folgt.)

1. Fortleitungszahlen a_r und b_r; Gelenkwerte k_i' [Gl. (12), (13)].

Bild 6.



S_r in t	268	524	782	1 024	1 306	1 882
J_r in cm⁴	43 400	43 400	65 100	92 800	92 800	112 200
c_r in cm	600	600	600	600	600	600
T_r in t/cm²	2 150	2 150	2 150	2 150	2 150	2 150
$\widehat{\varphi}_r$ nach (5)	0,9834	0,7033	0,7051	0,7357	0,6514	0,5967
m_r nach (4)	3,09	2,21	2,22	2,31	2,05	1,87
$\varphi_r{}^\circ$	58° 15′ 39″	81° 27′ 57″	81° 15′ 30″	77° 52′ 51″	87° 57′ 12″	96° 01′ 17″
$\sin\varphi_r$	0,8505	0,9889	0,9884	0,9777	0,9994	0,9945
$\mathrm{tg}\,\varphi_r$	1,6167	6,6640	6,5033	4,6570	27,9826	— 9,4803
s_r nach (6)	0,1957	0,4378	0,4349	0,3903	0,5361	0,6852
t_r nach (6)	0,3710	0,7866	0,7819	0,7081	0,9451	1,1768
Frei gewählte Vergleichswerte nach IV/2: $S^* = 1000$ t; $c^* = 600$ cm						
S_r' nach (7)	0,2680	0,5240	0,7820	1,0240	1,3060	1,8820
c_r' nach (7)	1	1	1	1	1	1
$S_r'\,c_r'$ nach (7)	0,2680	0,5240	0,7820	1,0240	1,3060	1,8820
σ_r' nach (8)	0,7300	0,8354	0,5561	0,3811	0,4105	0,3641
τ_r' nach (8)	1,3844	1,5012	0,9999	0,6915	0,7237	0,6253
$\varkappa_i'$ nach IV/5		2,8856	2,5011	1,6914	1,4152	1,3490
k_i' nach (12)		0,3465	0,3998	0,5912	0,7066	0,7413
a_r nach (13)	0	0,2895	0,2224	0,2253	0,2900	0,2699
b_r nach (13)	0,2530	0,3340	0,3288	0,2693	0,3043	0

[3]) Die Zahlenbeispiele wurden von meinem Assistenten, Herrn Dr.-Ing. Erwin Strelsky, gerechnet, dem ich hierfür an dieser Stelle bestens danke.

INHALT: Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt. — Verlag: Wilh. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Ende des Jahrgangs 1941.