# DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Dr.: Sng. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule Fernsprecher: C 1 Steinplatz 0011

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. - Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage zur Zeitschrift

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

7. Jahrgang

BERLIN, 5. Januar 1934

Heft 1

# Die Bedeutung der Orthogonalität für die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme.

Von Ernst Kohl in Hannover.

Bei der Entwicklung, die bei weitgehender Spezialisierung die verschiedenen Wissenschaftszweige nehmen, ist es von Wichtigkeit, in der Fülle des Vorhandenen und neu Geschaffenen stets die Beziehungen und Verwandtschaften zu den Grenzgebieten im Interesse einer besseren Ordnung und eines weiteren Überblickes zu erkennen und möglichst in den Vordergrund zu rücken. Diesem Zweck mögen die folgenden Zeilen dienen, die auf die nahe Verwandtschaft zwischen der Orthogonalisierung von Funktionen und der Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme hinweisen sollen. Im Anschluß daran wird eine neue Rechenkontrolle für solche Systeme angegeben.

### 1. Elastizitätsgleichungen.

Jede statische Größe Z in einem n-fach statisch unbestimmten System läßt sich nach dem Superpositionsgesetz in der Form

(1)  $Z = Z_0 - Z_a X_a - Z_b X_b - Z_c X_c - \dots - Z_i X_i - \dots - Z_n X_n$ darstellen, wobel  $X_i$  eine statisch unbestimmte Einzelwirkung oder aber auch eine lineare Kombination mehrerer überzähliger statischer Größen sein kann, wenn  $Z_i$  den Wert der statischen Größe Z im Zustand  $X_i = -1$ und  $Z_0$  denjenigen infolge gegebener Belastung ( $X_i = 0$ ) im statisch bestimmten Hauptsystem angibt. Von Temperaturänderungen und Stützenverschiebungen kann hier, da das keine Einschränkung bedeutet, zur Vereinfachung der Darstellung abgesehen werden.

Aus (1) folgt, wenn man die so dargestellten Stabkräfte mit  $\varDelta s_i$ 

multipliziert und über alle einfachen Stäbe summiert bzw. über alle blegungsfesten Stäbe integriert,

da nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen der Ausdruck

(3) 
$$\sum \frac{S_i S_s}{EF} + \sum \int \frac{M_i M ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_i N ds}{EF} = 0$$

als Arbeit des Selbstspannungszustandes  $X_i = -1$  bei der tatsächlich auftretenden Formänderung des statisch unbestimmten Systems zu Null wird, wenn, wie angenommen, Stützensenkungen nicht auftreten. Man erhält so unter Vernachlässigung der Querkräfte, wenn i von 1 bis n läuft, in den Gl. (2) die bekannten n Elastizitätsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen Xi.

## 2. Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit.

Im allgemeinsten Fall enthält jede der n Gleichungen sämtliche n Unbekannte  $X_a$  bis  $X_n$ ; n Gleichungen mit je einer Unbekannten, wie sie aus verschiedenen Gründen angestrebt werden, werden erhalten, wenn

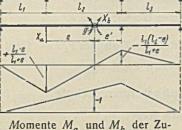
(4) 
$$\sum \frac{S_i S_k s}{EF} + \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_i N_k ds}{EF} = 0; i \pm k,$$

d. h. wenn die statischen Größen des Zustandes  $X_i = -1$  keine Arbeit leisten auf den Wegen, die durch  $X_k = -1$  erzeugt werden oder mathematisch ausgedrückt, wenn die durch  $X_i = -1$  und  $X_k = -1$  dargestellten Gleichgewichts- und Formänderungszustände  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$  und  $\Delta s_k$ ,  $\Delta d \varphi_k$ ,  $\Delta ds_k$  oder  $S_k$ ,  $M_k$ ,  $N_k$  und  $\Delta s_i$ ,  $\Delta d\varphi_i$ ,  $\Delta ds_i$  zueinander orthogonal<sup>1</sup>) sind. Im allgemeinen ist die Orthogonalität nicht vorhanden und läßt sich auch nicht allgemein erreichen, wenn sämtliche  $X_i$  Einzelwirkungen darstellen; abgesehen von gewissen Ausnahmen, bei denen die Ortho-gonalität durch geschickte Wahl der statisch unbestimmten Größen erreicht werden kann, worauf zuerst von Krohn2), Mohr8) und Müller-Breslau4) hingewiesen wurde.

Zum Beispiel beim durchlaufenden Balken auf vier Stützen lassen sich zwei Elastizitätsgleichungen mit je einer Unbekannten stets dadurch erreichen, daß als statisch unbestimmte Größen etwa der Stützdruck (Xa) in b und das Moment  $(X_b)$  an der Stelle g eingeführt werden (s. Abb). dle Lage des Gelenkes g (Abstand e) wird so bestimmt, daß das Intregral

 $\frac{M_a M_b ds}{EJ}$ , über den ganzen Balken erstreckt, zu Null wird. Bei 3fach statisch unbestimmten Systemen führt häufig die Verlegung der

d statisch unbestimmten Größen in den elastischen Schwerpunkt zu Elastizitätsgleichungen mit je einer Unbekannten, wodurch in vielen Fällen eine zweckmäßige Lösung erzielt wird. Die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme in der angedeuteten Weise kann jedoch nicht schematisch durchgeführt werden und setzt bezüglich der Wahl des Hauptsystems und der Überzähligen stets eine gewisse Geschicklichkeit



Momente Ma und Mb der Zustände  $X_a = -1$  und  $X_b = -1$ .

sagt werden, daß nicht bei jedem anderen Verfahren durch geschickte Wahl der statisch unbestimmten Größen auch noch wesentlich zur Vereinfachung der Rechnung beigetragen werden kann. Eine weitere Möglichkeit, zur Berechnung statisch unbestimmter

voraus. Damit soll jedoch nicht ge-

Systeme Elastizitätsgleichungen mit je einer Unbekannten zu erhalten, liegt darin, daß man von einem statisch bestimmten System ausgehend schrittweise das 1 fach, 2 fach, 3 fach . . . bis n-fach statisch unbestimmte System berechnet, allgemein also zur Berechnung des r-fach statisch unbestimmten Systems das (r-1)-fach statisch unbestimmte als Hauptsystem zugrunde legt; ein Weg, der immer gangbar ist und sich in seinem Wesen aufs engste berührt mit dem im folgenden angegebenen Verfahren zur

Als Literatur sei verwiesen auf Mises-Frank, Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, I. Teil, S. 294 ff.
 Krohn, Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger. Z. f. Baukunde 1880, S. 21.

Baukunde 1880, S. 21.

3) Mohr, Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks. Z. d. Arch.- u. lng.-Ver. Hannover 1881, Bd. 27, S. 243.

4) Müller-Breslau, Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger. Z. d. Arch.- u. lng.-Ver. Hannover 1884, Bd. 30, S. 57. — Ders., Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger. Z. d. Arch.- u. lng.-Ver. Hannover 1888, Bd. 34, S. 605. Ztribl. d. Bauv. 1889, S. 475.

Erzielung von Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit, dessen Grundgedanke allerdings zunächst ganz anderen Überlegungen entspringt.

Bei Systemen von höherem Grade statischer Unbestimmtheit lassen sich ganz allgemein Elastizitätsgleichungen mit je einer Unbekannten aufstellen dadurch, daß man die statisch unbestimmten Einzelwirkungen in geeigneter Weise zu Kraftgruppen mehrerer Überzähliger zusammenfaßt b), so daß jede der Kraftgruppen, die jetzt mit  $Y_i$  bezeichnet sein mögen, eine lineare Kombination der Einzelwirkungen  $X_a, X_b, X_c \dots X_i \dots X_n$ darstellt und so gebildet wird, daß die Bedingungen

$$\sum_{i} \frac{S_i S_k s}{EF} + \sum_{i} \int_{EJ} \frac{M_i M_k ds}{EJ} + \sum_{i} \int_{EF} \frac{N_i N_k ds}{EF} = 0 \quad \text{für } i \neq k$$

erfüllt werden.  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$  und  $S_k$ ,  $M_k$ ,  $N_k$  sind dabei die in den Zuständen  $Y_i = -1$  bzw.  $Y_k = -1$  auftretenden Stabkräfte, Momente und Normalkräfte. Wie schon bemerkt, läuft die Auswahl bzw. Konstruktion dieser Kraftgruppen, und zwar der Gleichgewichtszustände  $Y_i = -1$ , unmittelbar auf die Bildung eines Systems orthogonaler Funktionen hinaus, da jeder Gleichgewichtszustand  $Y_k=-1$  zu jedem Formänderungszustand  $Y_i=-1$  orthogonal sein muß. Der Begriff der Orthogonalität erhält hier eine sehr sinnfällige Erklärung im Verschwinden der Arbeit der Kräfte

des Zustandes  $Y_k=-1$  auf den Wegen infolge  $Y_i=-1$ . Ohne auf die Grundlagen zur Gewinnung von Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit und das Wesen des Verfahrens vom Standpunkt des Statikers hier noch näher einzugehen, möge nur der Rechnungsgang, soweit er zum Vergleich notwendig, kurz angegeben werden. Der kürzeren Darstellung wegen handele es sich um ein Fachwerk, in dem nur einfache Stäbe vorkommen.

Die statisch unbestimmten Einzelwirkungen seien

$$X_a, X_b, X_c, X_d \dots X_i \dots X_n$$

Es wird gewählt

s wird gewählt In der Lastgruppe  $Y_a$ :  $X_a = 1$   $Y_a$ ,  $X_b$  bis  $X_n = 0$ , also im Zustand  $Y_a = -1$ :  $X_a = -1$ , in der Lastgruppe  $Y_b$ :  $X_a = y_{ab}Y_b$ ,  $X_b = 1$   $Y_b$ ,  $X_c$  bis  $X_n = 0$ , also im Zustand  $Y_b = -1$ :  $X_a = -y_{ab}$ ,  $X_b = -1$ , in der Lastgruppe  $Y_c$ :  $X_a = y_{ac}Y_c$ ,  $X_b = y_{bc}Y_c$ ,  $X_c = 1$   $Y_c$ , also im Zustand  $Y_c = -1$ :  $X_a = -y_{ac}$ ,  $X_b = -y_{bc}$ ,  $X_c = -1$ 

Die Lastgruppe in jedem Zustand  $Y_i = -1$  stellt also eine lineare Kombination der Einzelwirkungen Xi dar, wobei in jeder folgenden Gruppe

im allgemeinen stets eine neue Einzelwirkung hinzugenommen wird. Es seien  $S_i'$  die im Zustand  $X_i = -1$  auftretenden,  $S_i$  die im Zustand  $Y_i = -1$  auftretenden Stabkräfte, und es bezeichne 0

$$\delta_{ik} = \sum_{k} \frac{S_i S_k s}{EF}$$
 die Arbeit der Lasten des Zustandes  $Y_k = -1$  auf den durch  $Y_i = -1$  hervorgerufenen Wegen;  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ 

$$\vartheta_{ik} = \sum_{k} \frac{S_i' S_k s}{EF}$$
 die Arbeit der Lasten des Zustandes  $Y_k = -1$  auf den durch  $X_i = -1$  erzeugten Wegen;  $\vartheta_{ik} = \vartheta_{ki}$ 

$$\mu_{lk} = \sum_{i} \frac{S_i' S_k' s}{EF} \text{ die Arbeit der statisch unbestimmten Größe } X_k = -1$$

auf dem durch  $X_i = -1$  erzeugten Wege;  $\mu_{ik} = \mu_{ki}$ .

Dann wird  $y_{a\,b}$  aus der Bedingung  $\vartheta_{b\,a} = y_{a\,b} \, \vartheta_{a\,a} + 1 \, \vartheta_{b\,a} = 0$ 

$$\delta_{ba} = y_{ab} \, \vartheta_{aa} + 1 \, \vartheta_{ba} = 0$$

berechnet zu

$$y_{ab} = -\frac{\vartheta_{ba}}{\vartheta_{aa}} = -\frac{\mu_{ba}}{\mu_{aa}}$$

Ferner werden ybc und yac aus den Bedingungen

$$\delta_{cb} = y_{ac} \vartheta_{ab} + y_{bc} \vartheta_{bb} + 1 \vartheta_{cb} = 0$$
  
$$\delta_{ca} = y_{ac} \vartheta_{aa} + y_{bc} \vartheta_{ba} + 1 \vartheta_{ca}$$

(6) 
$$y_{bc} = -\frac{y_{cb}}{y_{bb}} = -\frac{\mu_{cb} + y_{ab} \mu_{ca}}{\mu_{bb} + y_{ab} \mu_{ba}}$$

(7) 
$$y_{ac} = -\frac{y_{ca}}{y_{aa}} - y_{bc} \cdot \frac{y_{ba}}{y_{aa}} = -\frac{\mu_{ca}}{\mu_{aa}} + y_{bc} y_{ab}$$

 $\delta_{cb} = y_{ac} \, \vartheta_{ab} + y_{bc} \, \vartheta_{bb} + 1 \, \vartheta_{cb} = 0$   $\delta_{ca} = y_{ac} \, \vartheta_{aa} + y_{bc} \, \vartheta_{ba} + 1 \, \vartheta_{ca} = 0$ ermittelt zu (da  $\delta_{ab} = 1 \, \vartheta_{ab} = 0$ )

(6)  $y_{bc} = -\frac{\vartheta_{cb}}{\vartheta_{bb}} = -\frac{\mu_{cb} + y_{ab} \, \mu_{ca}}{\mu_{bb} + y_{ab} \, \mu_{ba}}$ (7)  $y_{ac} = -\frac{\vartheta_{ca}}{\vartheta_{aa}} - y_{bc} \cdot \frac{\vartheta_{ba}}{\vartheta_{aa}} = -\frac{\mu_{ca}}{\mu_{aa}} + y_{bc} y_{ab}$ Die Lasten  $y_{ad}$ ,  $y_{bd}$ ,  $y_{cd}$  der Gruppe  $Y_d$  werden in gleicher Weise aus den Bedingungen  $\delta_{dc} = 0$ ,  $\delta_{db} = 0$ ,  $\delta_{da} = 0$  berechnet usw. aus den Bedingungen  $\delta_{dc=0}$ ,  $\delta_{db=0}$ ,  $\delta_{da=0}$  berechnet usw.

### 3. Orthogonalisierung.

Nach dem dem Mathematiker geläufigen Verfahren zum Aufbau eines Systems orthogonaler Funktionen ist folgender Weg zu gehen, wie von S. Müller in der obigen Arbeit angegeben ist.

Ein erster Gleichgewichtszustand ist zu wählen  $X_a = -1$  mit den

Stabkräften  $S_a{}'=S_a{}.$  Die Stabkräfte  $S_b{}$ , die zu  $S_a{}$  oder genauer zu  $\mathcal{L}s_a{}$  orthogonal sein sollen, werden gebildet durch

$$S_b = S_{b'} + k_{ab} S_a,$$

und die Bedingung der Orthogonalität lautet

woraus unmittelbar 
$$\frac{S_b S_a s}{EF} = 0 = \sum \frac{S_b' S_a s}{EF} + k_{ab} \sum \frac{S_a^2 s}{EF}$$
,

$$k_{ab} = -\frac{\sum \frac{S_b' S_a s}{EF}}{\sum \frac{S_a^2 s}{EF}} = -\frac{\mu_{ba}}{\mu_{aa}}$$

sich in Übereinstimmung mit dem vorher berechneten Wert  $y_{ab}$  (Gl. 5) ergibt als Wert der statischen Größe  $X_a$  am 1-fach statisch unbestimmten System infolge  $X_b = 1$  als Belastung. Beim nächsten Schritt tritt der Unterschied gegenüber dem in der Statik üblichen Rechnungsgang in die Erscheinung.

 $S_c$  wird gebildet durch lineare Kombination der Stabkräfte  $S_c'$  des Zustandes  $X_c = -1$  (Einzelwirkung) und der bereits orthogonalisierten Funktionen  $S_b$  und  $S_a$ :

$$S_c = S_c' + k_{hc} S_h + k_{ac} S_a.$$

Funktionen 
$$S_b$$
 und  $S_a$ :
$$S_c = S_c' + k_{bc} S_b + k_{ac} S_a.$$
Die Bedingungen der Orthogonalität
$$\sum \frac{S_c S_b s}{EF} = 0 = \sum \frac{S_c' S_b s}{EF} + k_{bc} \sum \frac{S_b^2 s}{EF} + k_{ac} \sum \frac{S_a S_b s}{EF}$$

$$\sum \frac{S_c S_a s}{EF} = 0 = \sum \frac{S_c' S_a s}{EF} + k_{bc} \sum \frac{S_b S_a s}{EF} + k_{ac} \sum \frac{S_a^2 s}{EF}$$
Sübson gu

(8) 
$$k_{bc} = -\frac{\sum \frac{S_c' S_b s}{EF}}{\sum \frac{S_b^2 s}{EF}}$$

$$k_{ac} = -\frac{\sum \frac{S_c' S_a s}{EF}}{\sum \frac{S_a^2 s}{EF}},$$

da infolge der Orthogonalität auf den rechten Seiten auch

$$\sum_{a} \frac{S_a S_b s}{EF} = \delta_{ab} = \vartheta_{ab} = 0.$$

$$\sum \frac{S_b^2 s}{EF} = \sum \frac{S_b' S_b s}{EF} + k_{ab} \sum \frac{S_a S_b s}{EF} = \frac{S_b' S_b s}{EF} = \vartheta_{bb};$$

da infolge der Orthogonalität auf den rechten Seiten auch  $\sum \frac{S_a \, S_b \, s}{E \, F} = \delta_{ab} = \vartheta_{ab} = 0.$  Dabei stimmt  $k_{b\,c}$  überein mit  $y_{b\,c}$  (Gl. 6), denn der Nenner in Gl. (8) ist  $\sum \frac{S_b{}^2 \, s}{E \, F} = \sum \frac{S_b{}' \, S_b \, s}{E \, F} + k_{a\,b} \sum \frac{S_a \, S_b \, s}{E \, F} = \frac{S_b{}' \, S_b \, s}{E \, F} = \vartheta_{b\,b};$   $k_{b\,c} = y_{b\,c}$  stellt den Wert dar, den  $X_b$  im 2-fach statisch unbestimmten System annimmt, in dem die statischen Größen  $X_a$  und  $X_b$  nicht als Überzählige entfernt sind, wenn als Belastung  $X_c = 1$  eingeführt wird.

Hingegen ist  $k_{a\,c}=-\frac{\mu_{c\,a}}{\mu_{a\,a}}$  der Wert von  $X_a$  am 1-fach statisch unbestimmten System ( $X_b=0$ ) infolge  $X_c=1$  als Belastung, und der Wert von  $X_a$  am 2 fach statisch unbestimmten System infolge  $X_c=1$  ist somit

$$k_{ac} + k_{bc} y_{ab} = y_{ac}$$

 $k_{a\,c}+k_{b\,c}\,y_{a\,b}=y_{a\,c}$  in Übereinstimmung mit der früheren Rechnung G1. (7). Die Stabkräfte  $S_c$  sind dieselben wie die im Zustand  $Y_c=-1$  auftretenden, denn es ist

$$S_c = S_c' + k_{bc} (S_b' + k_{ab} S_a) + k_{ac} S_a$$
  
=  $S_c' + y_{bc} S_b' + y_{ac} S_a'$ .

Aus der Orthogonalität folgt

Aus der Ortnogonalität loigt 
$$\frac{\sum \frac{S_a S_c s}{EF}}{EF} = \delta_{ac} = \vartheta_{ac} = 0$$
 
$$\frac{\sum \frac{S_b S_c s}{EF}}{EF} = \delta_{bc} = \frac{\sum \frac{S_b' S_c s}{EF}}{EF} = \vartheta_{bc} = 0,$$
 eine Bestätigung dafür, daß der Zustand  $Y_c = -1$  einen Gleichgewichts-

zustand am 2-fach statisch unbestimmten System  $(X_a, X_b)$  darstellt.

Der Unterschied gegenüber dem in der Statik üblichen Verfahren liegt lediglich darin, daß hier jedesmal eine lineare Kombination der bereits orthogonalisierten Funktionen und einer neuen willkürlichen Funktion gebildet wird, während dort stets die Gruppenzustände Yi als lineare Kom-

 <sup>5)</sup> S. Müller, Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. Ztrlbl. d. Bauv. 1907, S. 23. — Müller-Breslau, Graph. Statik 1907, II, 1, S. 162, 4. Aufl.
 6) Die Bezeichnungen sind gewählt in Anlehnung an Grüning: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Springer, Berlin 1925, S. 319 ff.

bination der Einzelwirkungen erscheinen, so daß sich im allgemeinen die Konstanten  $k_{ri}$  von den Konstanten  $y_{ri}$  unterscheiden, daß aber die  $y_{ri}$  aus den  $k_{ri}$  gefunden werden können. Würde man abweichend von dem in der Mathematik üblichen Wege lineare Kombinationen der gegebenen Funktionen  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$  usf. bilden, so würde der Rechnungsgang in beiden Fällen vollkommen übereinstimmen.

Für das 4-fach statisch unbestimmte System wird  $S_d$  dargestellt durch

$$S_d = S_{d}' + k_{cd} S_c + k_{bd} S_b + k_{ad} S_a,$$

und die Konstanten werden unter Beachtung der Orthogonalität von  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  gefunden zu

$$k_{cd} = -\frac{\sum \frac{S_d' S_c s}{EF}}{\sum \frac{S_c^2 s}{EF}} = -\frac{\sum \frac{S_d' S_c s}{EF}}{\sum \frac{S_c' S_c s}{EF}} = -\frac{\vartheta_{dc}}{\vartheta_{cc}}$$

$$k_{bd} = -\frac{\sum \frac{S_d' S_b s}{EF}}{\sum \frac{S_b^2 s}{EF}} = -\frac{\sum \frac{S_d' S_b s}{EF}}{\sum \frac{S_b' S_b s}{EF}} = -\frac{\vartheta_{db}}{\vartheta_{bb}}$$

$$k_{ad} = -\frac{\sum \frac{S_d' S_a s}{EF}}{\sum \frac{S_a^2 s}{EF}} = -\frac{\vartheta_{da}}{\vartheta_{aa}},$$

d. h. dle k-Werte der Gruppe d werden gefunden aus dem Gleichgewichtszustand  $X_d=-1$  einerseits und den Gruppenzuständen  $Y_c=-1$ ,  $Y_b=-1$ ,  $Y_a=-1$  anderseits. Daraus können die y-Werte der Gruppe d berechnet werden, wie übersichtlich aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht, in der auch noch die Gruppe e eingetragen ist, so daß das Bildungsgesetz klar zum Ausdruck kommt.

Drückt man  $S_d$  durch die S'-Werte aus, so erhält man

$$\begin{split} S_d &= S_{d}' + k_{cd} (S_{c}' + y_{bc} S_{b}' + y_{ac} S_{a}') + k_{bd} (S_{b}' + y_{ab} S_{a}') + k_{ad} S_{a}' \\ &= S_{d}' + k_{cd} S_{c}' + (k_{bd} + k_{cd} y_{bc}) S_{b}' + (k_{ad} + k_{bd} y_{ab} + k_{cd} y_{ac}) S_{a}' \\ &= S_{d}' + y_{cd} S_{c}' + y_{bd} S_{b}' + y_{ad} S_{a}'. \end{split}$$

Rein rechnungsmäßig läuft natürlich die Ermittlung der Gruppenwerte bei beiden Verfahren im wesentlichen auf dasselbe hinaus, jedoch ist m. E. auf den Aufbau der Gruppenzustände, wie er aus der Matrix zu erkennen ist, bisher nicht genügend hingewiesen worden, obwohl er auch bei dem in der Statik üblichen Rechnungsgang in die Erscheinung tritt, allerdings in dieser Form unmittelbar nur dann, wenn man die Lasten der Gruppe i in der Weise berechnet $^5$ ), daß man das (i-1)-fach statisch unbestimmte System mit  $y_{ii}=+1$  belastet, für diese Belastung die Werte  $Y_r$   $(r=a,b,c\ldots i-1)$  berechnet, die mit unsern Werten  $k_{ri}$   $(r=a,b,c\ldots i-1)$  übereinstimmen und daraus die in  $a,b,c\ldots i-1$  auftretenden Größen  $X_r$  ermittelt, die dann auch unmittelbar die Gruppenlasten  $Y_{ri}$  in dem in der Matrix angegebenen Aufbau ergeben.

Eine Normierung der Zustände  $Y_i = -1$ , so daß  $\frac{1}{c_i} \sum_{i=1}^{S_i^2 s} \frac{s}{EF} = 1$ , ließe sich offenbar auch durchführen, bietet aber hier keinerlei Vorteile, so daß nicht näher darauf eingegangen werden soll.

#### 5. Eine Rechenkontrolle.

Die Übereinstimmung des "Lastgruppenverfahrens" mit der Orthogonalisierung von Funktionen führt auf eine bemerkenswerte einfache Rechenkontrolle, die mir bisher nicht bekannt ist. Da es sich bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme mit Hilfe von Lastgruppen offenbar um ein "abgeschlossenes Orthogonalsystem" handelt, so muß sich der für diese gültige Satz: "Die Quadratsumme der Fourierkonstanten einer Funktion ist gleich dem Integralquadrat dieser Funktion" sinngemäß übertragen lassen.

Wir gehen dabei von Gl. (10) aus und schreiben dazu die Gleichung für die Längenänderungen

$$\Delta s = \Delta s_o - \Delta s_a Y_a - \Delta s_b Y_b - \Delta s_c Y_c - \dots - \Delta s_i Y_i \dots - \Delta s_n Y_n$$

Die Multiplikation gibt unter Beachtung der Orthogonalität

$$\begin{split} S \, \varDelta \, s &= S_o \, \varDelta \, s_o \, - Y_a \, \big( S_o \, \varDelta \, s_a + S_a \, \varDelta \, s_o \big) \, - Y_b \, \big( S_o \, \varDelta \, s_b + S_b \, \varDelta \, s_o \big) \\ &- \ldots \, - Y_i \big( S_o \, \varDelta \, s_i + S_i \, \varDelta \, s_o \big) \, - \ldots \\ &+ Y_a^2 \, S_a \, \varDelta \, s_a + Y_b^2 \, S_b \, \varDelta \, s_b + \ldots + Y_i^2 \, S_i \, \varDelta \, s_i + \ldots \end{split}$$

oder, wenn die Längenänderungen durch die Stabkräfte ausgedrückt werden,

$$\frac{S^{2}s}{EF} = \frac{S_{o}^{2}s}{EF} - 2Y_{a} \cdot \frac{S_{o}S_{a}s}{EF} - 2Y_{b} \cdot \frac{S_{o}S_{b}s}{EF} - 2Y_{i} \cdot \frac{S_{o}S_{i}s}{EF} - \dots$$

$$-2Y_{n} \cdot \frac{S_{o}S_{n}s}{EF} + Y_{a}^{2} \cdot \frac{S_{a}^{2}s}{EF} + Y_{b}^{2} \cdot \frac{S_{b}^{2}s}{EF} + \dots$$

$$+Y_{i}^{2} \cdot \frac{S_{i}^{2}s}{EF} + \dots + Y_{n}^{2} \cdot \frac{S_{n}^{2}s}{EF}.$$

Wird nun über alle Stäbe summiert, so folgt unter Beachtung der Gl. (11), und wenn wie üblich noch  $\delta_{ii}$  statt  $\sum \frac{S_i^2 s}{EF}$  geschrieben wird,

$$\sum \frac{S^2 s}{EF} = \sum \frac{S_o^2 s}{EF} - Y_a^2 \delta_{aa} - Y_b^2 \delta_{bb} - Y_c^2 \delta_{cc} - \dots - Y_n^2 \delta_{ii} - \dots - Y_n^2 \delta_{nn}.$$

Ersetzt man auf der linken Seite S einmal durch die Reihe Gl. (10), so vereinfacht sich diese für die Ausrechnung noch zu  $\sum \frac{SS_os}{EF}$ , da  $\sum \frac{SS_is}{EF} = 0$ . Zu demselben Ergebnis gelangt man unmittelbar, wenn man Gl. (10) beiderseits mit  $\varDelta s_o$  multipliziert und über alle Stäbe summiert. Man erhält also als Rechenkontrolle für das Fachwerk

(12) 
$$\sum \frac{S^2 s}{EF} = \sum \frac{SS_0 s}{EF} = \sum \frac{S_0^2 s}{EF} - \sum_a^n Y_i^2 \delta_{ik}$$

	Y <sub>a</sub>	$Y_b$	$Y_c$	$Y_d$	$Y_e$
$X_a$ $X_b$ $X_c$ $X_d$ $X_e$	$y_{aa} = 1$ $0$ $0$ $0$ $0$	$y_{ab} = k_{ab}$ $y_{bb} = 1$ $0$ $0$ $0$	$y_{ac} = k_{ac} + k_{bc} y_{ab}$ $y_{bc} = k_{bc}$ $y_{cc} = 1$ $0$	$y_{ad} = k_{ad} + k_{bd}y_{ab} + k_{cd}y_{ac} y_{bd} = k_{bd} + k_{cd}y_{bc} y_{cd} = k_{cd} y_{dd} = 1 0$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

# 4. Bedeutung der Unbekannten $Y_{i^*}$

Nachdem erkannt ist, daß die Ermittlung der Gleichgewichtszustände  $Y_i = -1$  auf die Bildung eines Systems orthogonaler Funktionen hinausläuft, ist nun aus der Gleichung

(10) 
$$S = S_o - S_a Y_a - S_b Y_b - S_c Y_c - \dots - S_i Y_i - \dots - S_n Y_n$$

ohne weiteres ersichtlich, daß die Größen  $Y_i$  die "Fourier-Konstanten" der vorstehenden Entwicklung darstellen und aus

(11) 
$$\sum \frac{S_o S_i s}{EF} = Y_i \sum \frac{S_i^2 s}{EF}$$
 zu berechnen sind.

und entsprechend für das Stabwerk

(13) 
$$\begin{cases} \sum \left( \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \int \frac{N^2 ds}{EF} \right) = \sum \left( \int \frac{MM_0 ds}{EJ} + \int \frac{NN_0 ds}{EF} \right) \\ = \sum \left( \int \frac{M_0^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_0^2 ds}{EF} \right) - \sum_{a}^{n} Y_i^2 \delta_{ii}. \end{cases}$$

Die  $\delta_{i\,i}$ -Werte werden gewöhnlich aus  $\sum \frac{S_i^2 s}{EF} = \sum \frac{S_i S_i' s}{EF}$  (unter Beschränkung auf das Fachwerk) berechnet; setzt man in vorstehende Gl. (12) mit  $y_{i\,i} = +1$  als Belastung  $S_0 = S_i'$  ein, so erhält man

$$\delta_{ii} = \sum_{F} \frac{S_i S_i' s}{EF} = \sum_{F} \frac{S_i'^2 s}{EF} - Y_a^2 \delta_{aa} - Y_b^2 \delta_{bb} - \dots - Y_{l-1}^2 \delta_{l-1, l-1}.$$

Da nun nach dem im Schlußsatz von 3. mitgeteilten Gedankengang die Werte  $Y_a, Y_b \dots Y_{i-1}$  dieser Gleichung die Konstanten  $k_{a\,i}, k_{b\,i}\dots$  $k_{i-1,i}$  sind, so folgt als Kontrolle der  $\delta_{ii}$ -Werte für das Fachwerk

(14) 
$$\delta_{ii} = \sum \frac{S_i S_i' s}{EF} = \sum \frac{S_i'^2 s}{EF} - \sum_{a}^{i-1} k_{ri}^2 \delta_{rr},$$

für das Stabwerl

(15) 
$$\begin{cases} \delta_{ii} = \sum \left( \int \frac{M_i M_i' \, ds}{E J} + \int \frac{N_i N_i' \, ds}{E F} \right) \\ = \sum \left( \int \frac{M_i'^2 \, ds}{E J} + \int \frac{N_i'^2 \, ds}{E F} \right) - \sum_{a}^{i-1} k_{ri}^2 \, \delta_{rr}. \end{cases}$$

Bekanntlich wird das Lastgruppenverfahren besonders vorteilhaft bei Systemen angewandt, bei denen Symmetrie vorllegt; man wählt dann nicht sämtliche Diagonalwerte der Matrix yii = 1 und die darunterliegenden Werte zu Null, sondern erzielt durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften ganz wesentlich einfachere, symmetrische und antisymmetrische Gleichgewichtszustände und damit eine wesentliche Ersparnis an Rechenarbeit. Natürlich läuft auch hier die Ermittlung der Zustände  $Y_i = -1$ auf die Bildung eines Systems orthogonaler Funktionen hinaus, sofern man nur von der gebräuchlichen Konstruktion der Orthogonalsysteme abweichend, entsprechende lineare Kombinationen der Einzelwirkungen bildet. Vielleicht könnte auch bei anderen Aufgaben der Mechanik durch einen spezielleren, etwa vorhandener Symmetrie Rechnung tragenden Aufbau des Orthogonalsystems zu einer Vereinfachung der Rechnung beigetragen

Die oben mitgeteilten Rechenkontrollen Gl. (12) und (13) behalten ihre Gültigkeit, während in den Gl. (14) und (15) die Werte Si, Mi, Ni entsprechend der durch die Symmetrie bedingten Wahl der Matrixkonstanten sinngemäß gedeutet werden müssen.

Da die trigonometrischen Funktionen für das Intervall 0 bis  $2\pi$ orthogonal sind, so ist es nicht verwunderlich, daß das Verfahren der harmonischen Analyse unter Umständen zu einer vorteilhaften Lösung für Aufgaben der Statik führt, wie H. Reißner<sup>7</sup>) zum erstenmal gezeigt hat. Es ist nicht uninteressant, rückblickend noch einmal darauf hinzuweisen, daß in dem Streben nach Elastizitätsgleichungen mit je einer Unbekannten der Gedanke der Orthogonalisierung bereits den Arbeiten von Krohn, Mohr, Müller-Breslau in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts und in vollkommener Form denjenigen von S. Müller, Müller-Breslau und Reißner aus dem Jahre 1907 zugrunde liegt, während von Seiten der Mathematiker diese Fragen Anfang des Jahrhunderts aufgeworfen und gelöst wurden8).

7) H. Reißner, Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie. Arch. d. Math. u. Phys. III. Reihe, XIII, Heft 4, 1907.

8) Erhard Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Diss., Göttingen 1905.

# Fabrikerweiterung Paul Kübler & Co., G. m. b. H., Stuttgart-Ostheim.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dipl.-Ing. Otto Schellhorn, Unterkochen.

Der ungehinderten Raumausnützung im normalen Industriehochbau standen bislang die durch die Konstruktion bedingten Mittelstützen im Wege. Insbesondere bei Eisenbetonbauten sind der Länge der Unterzüge Grenzen gezogen, wenn diese nicht eine zu große Höhe erhalten sollen. Auch die häufig angeordnete Verschiebung der Mittelstützen nach der Seite, um die Mitte für den Gang frei zu bekommen, beseitigte nicht die Nachteile des Vorhandenseins der Stützen überhaupt. Bei einer Bautiefe von mehr als 12 m dürften deshalb Eisenbetonkonstruktionen ohne Mittelstützen wohl kaum in Frage kommen. Dagegen ist hier dem Stahlbau ein bislang noch wenig beschrittenes Gebiet eröffnet. Es sollen daher im nachstehenden diejenigen Stahlkonstruktionen aufgezeigt werden, die bei dem Fabrikhochbau der Großfirma Paul Kübler & Co., G. m. b. H., Strickwarenfabriken, Stuttgart-Ostheim, in diesem Jahre zur Ausführung gelangten. Durch das Zusammenarbeiten der bauleitenden Architekten B.D.A. Maas & Horlacher in Stuttgart-Obertürkheim mit der Eisenbaufirma Gebr. Wöhr, Unterkochen (Württbg.), wurde eine Stahlkonstruktion ohne Zwischenstütze zur Anwendung gebracht, wie sie bei den in Stuttgart ausgeführten Stahlhochbauten bisher noch nicht zur Ausführung gelangte. Daß dies für die Ausnützung der Räume für Fabrikationszwecke

3730 3760 Rlech-3760 3730 IP 24 300 5 5950 42 250

Abb. 1. Grundriß und Trägerlage über dem Erdgeschoß.

und für die uneingeschränkte Aufstellmöglichkeit von Arbeitsmaschinen großem Vorteil ist, braucht wohl nicht weiter betont zu werden.

Die Grundrißanordnung des Gebäudes ist aus Abb. 1 ersichtlich. Im Bundfeld 1 bis 2 befindet sich das Haupttreppenhaus mit beiderseits anschließenden Abortanlagen, Ankleide- und Waschräumen. An das Haupttreppenhaus schließt sich in jedem Stockwerk von Bund 2 bis 8 ein durchgehender Fabriksaal an. Bei Bund 6 ist an der Hofseite ein Nottreppenhaus (Rundtreppe) und die Aufzugsanlage angeordnet. Die Konstruktion der Rundtreppe ist ebenfalls ganz in Stahl durchgeführt, mit entsprechend der Steigung und Krümmung gebogenen Wangenträgern und Unterzügen. Vom Nottreppenhaus aus führt ferner im Erdgeschoß ein Verbindungsgang zu anderen Bauteilen der ausgedehnten Werkanlage. Der Bundabstand, mit Ausnahme am Haupttreppenhaus, beträgt durchweg 5,95 m. Die Erweiterung ist im Anschluß an Bund 8 vorgesehen.

Wie der Querschnitt (Abb. 2) durch ein normales Bundfeld zeigt, besteht das Gebäude aus sieben Stockwerken, nämlich: zwei Untergeschossen, die mit einer Zwischenstütze versehen sind, da es sich hier hauptsächlich

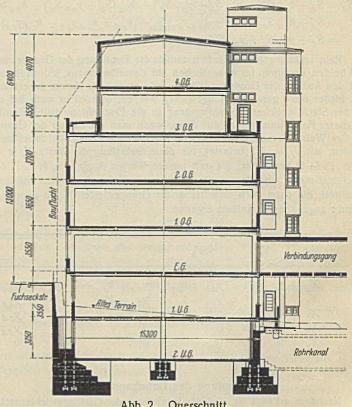
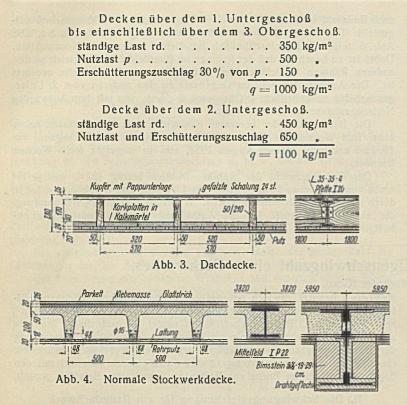


Abb. 2. Querschnitt,

um Keller- und Lagerräume handelt, drei darüber befindlichen Hauptgeschossen ohne Mittelstütze, die als Hauptfabrikationsräume dienen, und als Abschluß das 3. und 4. Obergeschoß, die beide an der Straßen- und Hofseite um 2,27 m zurücktreten.

Die Ausführungsart der Decken zeigen die Skizzen Abb. 3 u. 4. Die Eigengewichte und Nutzlasten der einzelnen Decken sind nachstehend zusammengestellt.

> Dachdecke



Die Hohlstegdecken spannen sich quer zum Bau auf in der Längsrichtung liegenden Deckenträgern (s. Grundriß Abb. 1). Die Umfassungswände mit Ausnahme der beiden zurückgesetzten Geschosse sind in 30 cm starkem Bimsvollsteingemäuer ausgeführt; bei den zurückgesetzten Geschossen wurden die Außenwände 25 cm stark gemauert; die Scheidewände sind 20 cm stark. Sowohl alle Innenflächen als auch die Außenflächen der Wände erhielten einen 2 cm starken Putzauftrag.

Hinsichtlich der statischen Anordnung der Stahikonstruktion ist wieder zu unterscheiden zwischen dem eigentlichen Fabrikbau und den Treppenhausbauten. Die letzteren bieten in statischer Beziehung nichts besonderes, obgleich über dem Haupttreppenhaus selbst durch den Aufbau der Luftreinigungs- und Klimatisieranlage verhältnismäßig große Lasten abzufangen sind, und obgleich die durch sämtliche Stockwerke durchgehenden senkrechten Luftschächte zum Teil komplizierte Auswechselungen verursachten. Es handelt sich bei diesen Bauteilen statisch um einfache Tragwerke ohne biegungsfeste Eckanschlüsse. Das Haupttragglied von Bund 3 bis 8 hingegen ist ein Stockwerkrahmen, dessen Berechnung sowohl für die vertikal als auch für die horizontal anfallenden Lasten durchgeführt wurde. Der

Rahmen seibst zerfällt in den gelenkig aufgesetzten zweistöckigen Rahmen des 3. und 4. Obergeschosses und in den fünfstöckigen Hauptrahmen mit unten eingespannten Außenstützen. Die Zwischenstützen in den beiden Untergeschossen sind als Pendelstützen ausgebildet. Die statische Untersuchung des Rahmens erfolgte nach einer Annäherungsmethode, welche von Prof. B. Löser, Dresden, im Bauing., Jahrgang 1925, S. 616, beschrieben wurde, und die im wesentlichen auf eine Schätzung der Festpunkte hinausläuft. Diese Art der Berechnung stellt eine große Vereinfachung der Rechenarbeit bei der Untersuchung derartiger vielfach statisch unbestimmter Systeme dar, deren genaue Untersuchung nach der Theorie sehr zeitraubend wäre. Sie ist heute von allen baupolizeilichen Behörden anerkannt. Der Erschütterungszuschlag von 30% der Nutzlast wurde nur bei den

Momenten berücksichtigt, jedoch nicht bei der Zusammenstellung der Normalkräfte in den Stielen.

Bezüglich der Aufnahme der Windkräfte soll noch gesagt werden, daß für den Winddruck auf die Längswände jeder Rahmen den je Bundfeld anfallenden Winddruck aufzunehmen hat; an Stelle des fehlenden Rahmens im Bundfeld 2 ist zwischen den Stützen A 2 und B 2 ein Windbock angeordnet. Der Wind auf die Stirnwände Reihe 1 bzw. 8 wird

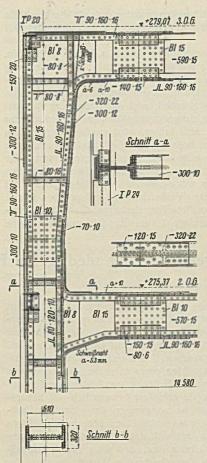


Abb. 5. Ausbildung der Stockwerkrahmen.

aufgenommen einerseits durch die massiven Treppenhauswände, während andererseits durch eine gute Verkeilung des Anschlusses der Randträger an die Außenstützen auch in der Längsrichtung des Gebäudes eine rahmenartige Wirkung gewährleistet wurde.

Abgesehen von den Hauptunterzügen (Rahmenriegel) war die Erreichung einer ebenen Deckenuntersicht mit eine der Hauptforderungen der Architekten. Die Deckenträger wurden daher an ihren Auflagerpunkten oben durch Zuglaschen verbunden und konnten so vermittels der Näherungsformeln für teilweise Einspannung an den Lagerpunkten gerechnet werden. Um ein durchgehend gleichhohes Profil zu erhalten, wurden die Endfelder durch Platten an den Innenseiten der Flansche verstärkt.

Die Durchbiegung der Deckenträger und die der Hauptunterzüge überschreitet in keinem Fall das behördlich vorgeschriebene Maß von ein Fünfhundertstel der Stützweite. Um zu erreichen, daß die Riegel des Hauptrahmens von 14,62 m rechnerischer Stützweite unter der Einwirkung der Eigenlast sich vollständig waagerecht einstellen, erhielten sie einen Stich von 1,4 bzw. 1,2 cm, entsprechend der rechnerischen Durchbiegung infolge Eigenlast.

Über die Art der konstruktiven

Durchbildung des Hauptrahmens selbst sind ebenfalls eingehende Voruntersuchungen angestellt worden. Von ausschlaggebenden Einfluß war hierbei die Forderung der Architekten, wonach die Konstruktionshöhe der Riegel in der Decke über Erdgeschoß und 1. Obergeschoß 600 mm nicht übersteigen durfte. Für den Riegel über 2. Obergeschoß wurde eine Gesamtkonstruktionshöhe von 650 mm zugelassen. Diese Bauhöhe der Riegel durfte am Obergurt nur noch durch die Stärke der Zuglaschen der Deckenträger überschritten werden. Die Nietköpfe für den Anschluß dieser Laschen wurden versenkt. Auch hinsichtlich der Breite

der gesamten Rahmenkonstruktion der Konstrukteur sehr bewar schränkt; sie überschreitet mit des Riegels' über Ausnahme dem 2. Obergeschoß nirgends das Höchstmaß von 335 mm. Zu diesen Abmessungen der Stahlkonstruktion kommt noch bei sämt-Deckenträgern, Rahmenriegeln und Rahmenstützen eine Umhüllung aus Beton im Mischungsverhältnis von 1:2:3 in solcher Stärke, daß alle vorstehenden Niet- und Schraubenköpfe noch mindestens 2 cm Betondeckung haben. Für Flächen ohne Niet- und Schraubenköpfe war baupolizeilich 3 cm Betondeckung verlangt. Die Stützen haben hiernach eine Gesamtbreite von 375 mm einschließlich Ummantelung, wodurch die schlanken Fensterpfeller entstehen, dle einem Stahlhochbau schon äußerlich sein Gepräge verleihen. Die Fensterslächen gehen über

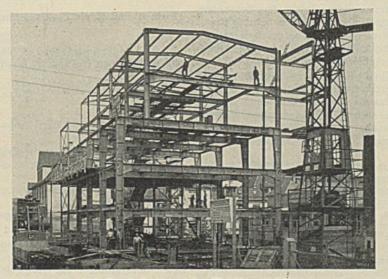


Abb. 6. Aufstellung der Stahlkonstruktion.

ein ganzes Bundfeld durch und reichen bis Unterkante Decke.

Eine Ausführung der Rahmenriegel aus zwei Normalträgern, die seitlich an den Außenstützen vorbeigehen, oder umgekehrt aus einem Pelnerträger, der durch die Stütze durchgeschoben wird, war also nicht möglich, da in solchem Falle entweder die Stütze oder der Riegel zu breit geworden wäre. Auch ein stumpf an eine durchgehende Stütze anstoßender Riegel war bei den auftretenden großen Eckmomenten nicht mehr möglich und so konnte nur noch eine Blechträgerkonstruktion, wie sie die gewählte Ausführungsart zeigt, die Ansprüche der Architekten und des Statikers befriedigen.

Die Einzelheiten der Rahmenkonstruktion sind aus Abb. 5 ersichtlich. Die Ecken wurden vollständig in der Werkstatt hergestellt; die Anordnung der Stöße ist so getroffen worden, daß bei äußerster Ausnutzung des Verladeprofils auch ein möglichst einfacher Zusammenbau an der Baustelle möglich war. Das Mehr an Werkstattarbeit, und damit auch an Arbeitslöhnen, welches eine derartige Blechträgerkonstruktion im Gegensatz zur Verwendung von Walzträgern mit sich bringt, wird wieder ausgeglichen durch die gleichmäßigere und bessere Ausnutzungsmöglichkeit der einzelnen Tragglieder und durch die damit verbundene Gewichtsverminderung der gesamten Stahlkonstruktion. Einem geringeren Materialaufwand steht also ein Mehr an Arbeitslöhnen gegenüber, was der heute für richtig erkannten Art der Wiederbelebung unserer gesamten Volkswirtschaft entsprechen dürfte.

Die Montage am Bau erfolgte mittels Turmdrehkran, der in der Längsachse der Baugrube lief. Begonnen wurde am Bund 1, und der Reihe nach Bundfeld für Bundfeld vom 2. Untergeschoß bis 4. Obergeschoß aufgestellt. Die Einzelteile hatten dabei ein Gesamtgewicht bis zu 5 t. Die Abb. 6 zeigt die bis einschließlich Bundfeld 6 aufgestellte Konstruktion. Dabei ist zu beachten, daß der Rahmen im Bundfeld 6 im Vergleich zu den anderen Rahmen hinsichtlich der Außenstütze an der Hofseite anormal ist. Die Außenstütze geht im Gegensatz zu den anderen vom 2. Untergeschoß bis einschließlich 4. Obergeschoß durch, was mit dem Anbau des Nottreppenhauses zusammenhängt.

Die Bearbeitung der gesamten Konstruktion in der Werkstatt nahm etwa fünf Wochen in Anspruch. Die Montage am Bau begann am 19. Juni und war anfangs August 1933, also in ungefähr sechs Wochen

Das Gesamtgewicht der Stahlkonstruktion betrug 427 t, was je m<sup>3</sup> umbauten Raum etwa 25 kg ergibt. Die Lieferung und Aufstellung erfolgte durch die Firma Eisenwerk Gebr. Wöhr, Unterkochen/Württemberg, die auch die Entwürfe für die Ausbildung der Stahlkonstruktion an-

# Zur Berechnung der niedrigsten Eigenschwingzahl eines Fachwerkes.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Karl Federhofer (Graz).

In einer ansehnlichen Zahl von Arbeiten¹) wurden in den letzten Jahren verschiedene Verfahren und Vorrichtungen zur praktischen Bestimmung der Eigenschwingzahlen von Brücken angegeben, deren Kenntnis wichtig ist, da sie Aufschluß gibt über die zu gefährlichen Resonanzerscheinungen führenden Erschütterungsursachen. Grundsätzlich ist auch die Vorausberechnung der Eigenschwingzahlen eines in seinen Abmessungen festgelegten Fachwerkes nach dem von H. Reissner<sup>2</sup>) stammenden allgemeinen Verfahren möglich, allein sie erfordert bekanntlich bei Berücksichtigung der Dehnungs- und Biegungsschwingungen der einzelnen Fachwerkstäbe schon für einfache ebene Fachwerke einen sehr beträchtlichen Aufwand an Rechenarbeit. Indessen läßt sich das Problem erheblich vereinfachen durch Ausnutzung des Umstandes, daß sich die Fachwerkschwingungen zusammensetzen aus der durch die Verschiebungen der Knotenpunkte gekennzeichneten Schwingung des Fachwerkes als Ganzes
— wobei die Verschiebung des Elementes eines Stabes linear abhängt von den Verschiebungen der Stabendpunkte — und den darüber gelagerten Längs- und Querschwingungen der einzelnen Stäbe. Da die Schwingungsausschläge der letzteren bei wirklichen Fachwerkausführungen klein sind gegenüber den Knotenverschiebungen, so kann die Schwingungsuntersuchung in erster Näherung auf jene des Fachwerkes als Ganzes beschränkt und die Annahme des Geradebleibens der Stäbe während der Schwingung zugelassen werden. Diese Vereinsachung hat zur Folge, daß das ursprüngliche Fachwerk mit unendlich vielen Freiheitsgraden ersetzt wird durch ein benachbartes System mit endlich vielen Freiheitsgraden, deren Zahl übereinstimmt mit der Anzahl der möglichen Knotenpunktverschiebungen. Für dieses Ersatzsystem zeigte E. Pohihausen3) die Bestimmung der Eigenschwingzahlen im Falle des ebenen Fachwerkes auf vorwiegend zeichnerischem Wege durch eine Näherungsfolge (analog dem bekannten Verfahren von Vianeilo4) zur Auffindung der Knicklasten beliebig beanspruchter Stäbe); zwei vollständig nach diesem Verfahren durchgerechnete Beispiele für die Berechnung der Grundschwingzahl von Brückentragwerken enthält das bekannte Buch von F. Bleich 5).

lm folgenden wird zunächst (unter II.) die Erweiterung dieses Verfahrens für die Schwingzahlberechnung von Raumfachwerken kurz dargestellt; eine hinrelchende Annäherung an den genauen Wert der Grundschwingzahl gelingt dabei allerdings in der Regel erst nach zwei- bis dreimaliger Wiederholung des Verfahrens. Es läßt sich aber die Grundschwingzahl eines Fachwerkes weitaus einfacher berechnen, wenn man die Methode von

Rayleigh benutzt, die sich bekanntlich bei der genäherten Schwingzahlberechnung von Stäben, und neuerdings auch bei jener von Rahmenträgern 6) sehr bewährt hat. Die im nachstehenden (unter III.) nach dieser Methode aufgesteilten einfachen Formeln gestatten eine unmittelbare Berechnung der Grundschwingzahl eines beliebigen Fachwerkes mit praktisch genügender Genauigkeit 7); ihr Genauigkeitsgrad wird (in IV.) durch Vergleich mit den Ergebnissen eines im Buche von F. Bleich gerechneten Beispiels geprüft,

#### II. Die Schwingungsgleichungen für ein Raumfachwerk und deren Lösung nach dem Verfahren von Pohlhausen.

Bedeuten  $\xi_h \eta_h \zeta_h$  die Verschlebungen des Knotenpunktes h eines Raumfachwerkes mit n Knotenpunkten in den Richtungen eines rechtwinkligen räumlichen Achsenkreuzes zur Zeit t (die 5-Richtung falle mit der Lotrichtung zusammen),  $g_{hk}$ ,  $l_{hk}$ ,  $F_{hk}$  das Gewicht, die Länge und den Querschnitt des Stabes h-k,  $a_{hk}$ ,  $b_{hk}$ ,  $c_{hk}$  die Richtungskosinusse der Winkel dieses Stabes mit den Achsenrichtungen,  $G_h$  das Gewicht der im Knoten hsitzenden trägen Zusatzmasse (z. B. Masse der Knotenbleche und Anteil der Fahrbahnmasse einer Brücke), dann liefern die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, falls die Eigenschwingungen des Raumfachwerkes mit w als Kreisfrequenz in der Form

 $\xi_h=u_h\cdot\sin\omega t,\ \eta_h=v_h\cdot\sin\omega t,\ \zeta_h=w_h\cdot\sin\omega t$  angesetzt werden, für jeden Knotenpunkt das Gleichungssystem

(1) 
$$\begin{cases} \lambda^2 P_h = -\sum_k \sigma_{hk} a_{hk} \\ \lambda^2 Q_h = -\sum_k \sigma_{hk} b_{hk} \\ \lambda^2 R_h = -\sum_k \sigma_{hk} c_{hk}. \end{cases}$$

Hierin ist mit E als Elastizitätsmodul, g als Erdschwerebeschleunigung

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E g} ,$$

und es bedeuten Ph, Qh, Rh Abkürzungen für die Summen )

(3) 
$$\begin{cases} P_h = u_h \left( \frac{1}{3} \sum_{k} g_{hk} + G_h \right) + \frac{1}{6} \sum_{k} u_k g_{hk} \\ Q_h = v_h \left( \frac{1}{3} \sum_{k} g_{hk} + G_h \right) + \frac{1}{6} \sum_{k} v_k g_{hk} \\ R_h = w_h \left( \frac{1}{3} \sum_{k} g_{hk} + G_h \right) + \frac{1}{6} \sum_{k} w_k g_{hk}, \end{cases}$$

(4) 
$$\sigma_{hk} = \frac{F_{hk}}{I_{hk}} [(u_k - u_h) a_{hk} + (v_k - v_h) b_{hk} + (w_k - w_h) c_{hk}]$$

die Stabkraft im Stabe  $hk$  infolge der Verschiebungen  $(u_h v_h w_h)$ 

die Stabkraft im Stabe h k infolge der Verschlebungen  $(u_h v_h w_h)$  und  $(u_k v_k w_k)$  seiner Endpunkte h und k für  $E = 1 \text{ t/cm}^2$  angibt. Die obigen Summen sind über alle jene Knoten k zu erstrecken, die mit dem betrachteten Knoten h unmittelbar durch einen Stab verbunden sind, hierbei ist k immer größer als h. Auf Reibungen ist keine Rücksicht genommen.

<sup>1)</sup> R. Bernhard, Brücke und Fahrzeug, Bauing. Bd. 11 (1930), S. 481.

— Ders., Beitrag zur Brückenmeßtechnik, Stahlbau Bd. 1 (1928), S. 145.

— Ders. und W. Späth, Rein dynamisches Verfahren zur Untersuchung der Beanspruchungen von Brücken, Ebenda Bd. 2 (1929), S. 61. — H. Kulka, Dynamische Probleme im Brückenbau, Ebenda Bd. 3 (1930), S. 301. — J. Geiger, Dynamische Untersuchungen von Brücken, Bauing. Bd. 5 (1924), S. 606. — N. Streletzky, Grundzüge für ein Verfahren zur dynamischen Untersuchung von Brücken, Bautechn. Bd. 5 (1927), S. 598. — Ders., Ergebnisse der experimentellen Brückenuntersuchungen. Berlin 1928. — W. Hort, Stoßbeanspruchungen und Schwingungen, Bautechn. Bd. 6 (1928), S. 37, 50. — A. Bühler, Der Brückenbelastungswagen der Schweizerischen Bundesbahnen, Schweiz. Bauztg. 1922, Heft 16, 1. Tell. — Ders., Schweizerische Ingenieurbauten in Theorie und Praxis. Zürich 1926. — W. Späth, Resonanzkurve als Unterlage für dynamische Untersuchungen, Ing. Arch. Bd. 2 (1932), S. 651. — C. Inglis, Proc. Inst. Civ. Engs. Bd. 218 (1924), S. 225. Rep. Bridge Stress Committee, Dept. Scient. Ind. Res. London 1928. — A. Hawranek, Schwingungen von Brücken, Eisenbau 1914, V. Jahrg. No. 7.

2) Z. f. Bauw. 1903, S. 135.

3) Z. ang. Math. u. Mech. Bd. 1 (1921), S. 28.

4) Z. d. VdI 1898, S. 1436.

5) Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin 1924, S. 66 bis 77.

<sup>5)</sup> Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin 1924, S. 66 bis 77.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>) Vgl. Th. Pöschl, Ing. Arch, Bd. 1 (1930), S. 469 und das dort angeführte Schrifttum.

<sup>7)</sup> Während des Druckes ist ein für Bauingenieure wichtiges und wertvolles Buch erschienen: "Dynamik der Bauwerke" von K. Hohen-emser und W. Prager, Berlin 1933, vgl. S. 188 bis 190, 215 u. 216.

s) In der entsprechenden Gleichung für  $\overline{P_h}$  bei Pohlhausen [Gl. (33)] fehlt der Wert  $G_h$ , da seine Gl. (14) für die kinetische Energie die Geschwindigkeit des Knotens h nur mit dem Anteil  $\left(\frac{\partial \eta_h}{\partial t}\right)^2$  berücksichtigt.

Ist das Knotengewicht  $G_h$  groß gegenüber dem Stabgewichte, dann kann für Ph, Qh, Rh einfacher geschrieben werden

$$P_h = u_h \otimes_h$$

$$Q_h = v_h \otimes_h$$

$$R_h = w_h \otimes_h$$

worin  $\mathfrak{G}_h = G_h + \frac{1}{2} \sum\limits_k g_{hk}$  das Knotengewicht bei h bedeutet, wenn die

Stabgewichte statisch auf die Knoten aufgeteilt werden<sup>9</sup>).

Hat das freie Raumfachwerk n Knoten, so ergeben sich gemäß Gl. (1) im ganzen 3n homogene lineare Gleichungen von der Form (1) zur Berechnung der 3n Schwingungsausschläge u, v, w, die nur dann endliche Lösungen liefern, wenn die Koeffizientendeterminante der u, v, w verschwindet. Dies liefert eine Frequenzengleichung vom 3nten Grade für  $\lambda^2$ und damit auch für das gesuchte ω2. Ist das Raumfachwerk ein gestütztes, und sei z die Anzahl der überzähligen Stützkräfte, dann hat es 3n-6-zFreiheitsgrade; ebenso groß ist die Anzahl der Wurzeln 22 der Frequenzengleichung.

Bei vielgliedrigen Fachwerken kommen zufolge der großen Zahl der Gleichungen für ihre Auflösung nur Näherungsverfahren in Betracht.

Die Berechnung der kleinsten Wurzel 22 und der zugehörigen Werte  $u_h v_h w_h$  kann in sinngemäßer Erweiterung des Verfahrens von E. Pohlhausen durch eine Näherungsfolge in folgender Weise geschehen: Beginnend mit einem geschätzten System von Verschiebungen  $u_h v_h w_h$  werden die diesen nach den Gl. (3) entsprechenden Werte  $P_h Q_h R_h$  berechnet und sodann ein Mittelwert für 12 nach der Formel

(5) 
$$\lambda^{2} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{h} (P_{h}^{2} + Q_{h}^{2} + R_{h}^{2})}}$$

gebildet. Da nun die Gln. (1) das Gleichgewicht des Knotens h ausdrücken, wenn am ruhenden Fachwerke in den Achsenrichtungen die Kräfte  $\lambda^2 P_h$ ,  $\lambda^2\,Q_h,\,\lambda^2\,R_h$  in h angreifen, so können die entsprechenden Stabkräfte  $\sigma_{h\,k}$ entweder zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt werden. Diesen Stabkräften entspricht ein eindeutig bestimmtes System von Knotenpunktverschiebungen  $u_h^{(i)} v_h^{(i)} w_h^{(i)}$ , das sich im Falle eines ebenen Fachwerkes mit Hilfe eines Williotschen Verschiebungsplanes, im Falle eines Raumfachwerkes durch Zeichnung eines räumlichen Verschiebungsplanes mit Benutzung des Abbildungsverfahrens von Mayor und v. Mises 10) darstellen läßt. Mit diesem Verschiebungssystem werden neuerlich die Werte  $P_h$ ,  $Q_h$ ,  $R_h$  berechnet, denen nach Gl. (5) ein verbesserter Wert für  $\lambda^2$  entspricht usf.

Hierbei ergibt sich eine konvergente Folge von Werten  $\lambda^2$ , und die nach diesem Verfahren durchgerechneten Zahlenbeispiele 11) zeigen, daß in der Regel eine zwei- bis dreimalige Wiederholung des Verfahrens den Wert 2 für die Grundschwingung mit praktisch ausreichender Genauigkeit liefert. Die Anzahl  $n_s$  der Schwingungen in der Sekunde beträgt dann

$$n_s = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{Eg}$$
 (Hertz), die Schwingungsdauer (6) 
$$T = \frac{1}{n_s}.$$

#### III. Näherungsformeln für die Grundschwingzahl.

Sei  $w_h \cdot \sin \omega t$  die vektorielle Verschiebung des Knotenpunktes h zur Zeit t, dann beträgt die kinetische Energie des Stabes hk mit gleichförmig verteilter Masse m<sub>hk</sub>:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_{hk}}{3} \left[ w_h^2 + w_k^2 + w_h w_k \right] \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t,$$

und es ist die maximale kinetische Energie des schwingenden Fachwerkes (für  $\cos \omega t = 1$ ) mit Berücksichtigung der in den Knoten sitzenden trägen

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_{h=1}^{h-n-1} \sum_{k} \frac{m_{hk}}{3} \left( w_h^2 + w_k^2 + w_h w_k \right) + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \sum_{h=1}^{h-n} \frac{G_h}{g} \cdot w_h^2.$$

9) Diese Annahme führt dann, wenn  $G_h$  den Anteil der in die Knoten aufgeteilten Stabgewichte nicht erheblich übersteigt, zu fehlerhaften Ergebnissen; die Masse eines homogenen geraden Stabes läßt sich bei dessen gebnissen; die Masse eines homogenen geraden Stabes läßt sich bei dessen allgemeinen Bewegung nicht durch zwei, sondern günstigstenfalls durch drei dynamisch gleichwertige Punktmassen in den beiden Endpunkten und in dem auf ihrer Verbindungslinie liegenden Schwerpunkte ersetzen; je ½ der Masse entfällt dann auf die Endpunkte, ½ in den Schwerpunkt. Durch die statische Aufteilung der Stabmasse in die beiden Knotenpunkte wird demnach die kinetische Energie zu groß angesetzt, die Schwingzahlen ergeben sich daher kleiner als die wirklichen.

10) F. Reinitzhuber, Verschiebungs- und Einflußpläne räumlicher Fachwerke. Dissertation, T. H. Graz, 1933.

11) Vgl. Fußnoten 3 u. 5.

Die größte potentielle Energie (Arbeit der infolge der Knotenverschiebungen entstehenden Stabkräfte  $S_{h\,k}$ ) ergibt sich bei größter Formänderung, also

$$V = \frac{1}{2E} \sum_{k} \frac{S_{hk}^2}{F_{hk}} \cdot l_{hk},$$

wobei die Summe über alle Stäbe s zu erstrecken ist. Werden Reibungseinflüsse vernachlässigt, so müssen beide Energiebeträge gleich groß sein, womit für das Quadrat der Kreisfrequenz folgt

(7) 
$$\omega^{2} = \frac{\frac{1}{E} \sum_{h=1}^{S} \frac{S_{hk}^{2} l_{hk}}{F_{hk}}}{\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k} \frac{m_{hk}}{3} (w_{h}^{2} + w_{k}^{2} + w_{h} w_{k}) + \sum_{h=1}^{n} \frac{G_{h}}{g} \cdot w_{h}^{2}}$$

Man erhält nun nach Rayleigh 12) bereits einen sehr brauchbaren Näherungswert für das ω2 der Grundschwingung, wenn in obiger Formel anstatt der wirklichen Verschiebungen w, die die Gestalt des Fachwerkes während der Schwingung kennzeichnen, Näherungswerte eingesetzt werden, welche die Randbedingungen erfüllen.

Es liegt nahe, für ein Brückenfachwerk die Verschiebungen w einfach durch jene zu ersetzen, die sich für das ruhende Fachwerk unter der Wirkung der Knotengewichte  $G_h$  und Stabgewichte  $g_{hh}$  ergeben. Bei unten eingespannten Turmfachwerken (Funktürme, Freileitungsmaste) werden die waagerechten Schwingungen am leichtesten angeregt, und man wählt daher für w jenen Verschiebungszustand, der den waagerecht wirkend gedachten Gewichten entspricht. Dann ist unter V die Formänderungsarbeit des durch das Eigengewicht verformten Fachwerkes zu verstehen und es ist

$$V = \frac{1}{2E} \sum \frac{S_{hk}^2 l_{hk}}{F_{hk}} = \frac{1}{2} \Sigma \otimes_h v_h,$$

 $V = \frac{1}{2E} \sum \frac{S_{h\,k}^2 l_{h\,k}}{F_{h\,k}} = \frac{1}{2} \, \Sigma \, \mathfrak{G}_h \, v_h \,,$  wenn  $v_h$  die lotrechte (bzw. waagerechte) Komponente der Verschiebung  $w_h$ des Knotens h bedeutet. Damit ergibt sich die einfache Näherungsformel 13)

(8) 
$$\lambda^{2} = \frac{w^{2}}{Eg} = \frac{\sum_{h=1}^{n} \mathcal{G}_{h} v_{h}}{\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k} \frac{g_{hk}}{3} \left( w_{h}^{2} + w_{k}^{2} + w_{h} w_{k} \right) + \sum_{1}^{n} G_{h} w_{h}^{2}},$$

wobei die Vektoren w und deren lotrechte (bzw. waagerechte) Komponenten v aus einem für Eigengewicht (mit E=1 t/cm<sup>2</sup>) entworfenen Verschiebungsplane zu entnehmen sind.

Bei großen Knotengewichten  $G_h$  ist es zulässig, die Stabgewichte  $g_{hk}$ zu den Knotengewichten dazuzuschlagen, so daß

(8a) 
$$\lambda^{2} = \frac{\sum_{1}^{n} \mathfrak{S}_{h} v_{h}}{\sum_{1}^{n} \mathfrak{S}_{h} w_{h}^{2}}.$$

Ersichtlich erfordert die Anwendung dieser Formeln zur Ermittlung der Grundfrequenz eines Fachwerkes nur eine geringe Mehrarbeit gegenüber seiner statischen Berechnung.

Das bekannte Iterationsverfahren zur Berechnung der Grundschwingzahl  $\omega_1$  eines geraden Stabes beruht auf der wiederholten Anwendung der Gleichung

(9) 
$$\omega_1^2 = \frac{\sum m \, y^{(0)} \, y^{(1)}}{\sum m \, y^{(1)} \, 2},$$

worin mit y<sup>0</sup> eine zunächst geschätzte Schwingform des Stabes und mit y<sup>(1)</sup> die zur Belastung  $m y^{(0)}$  ermittelten elastischen Verschiebungen des Stabes (mit m als Stabmasse je Längeneinheit an der Stelle  $y^{(1)}$ ) bezeichnet sind. Benutzt man nach K. Hohenemser<sup>14</sup>) diese Gl. (9) auch zur Berechnung der Grundschwingzahl eines Fachwerkes, wobei die skalaren Verschiebungen y durch die Verschiebungsvektoren w der einzelnen Knoten ersetzt werden, so folgt aus (9) unmittelbar Gl. (8a), falls alle ursprünglichen w<sup>(0)</sup> gleich Eins und lotrecht (bzw. waagerecht) gerichtet gewählt werden, so daß die w(1) den Verschiebungen der Knotenpunkte durch Eigengewicht entsprechen.

12) Theory of Sound, Bd. 1, 2. Aufl., S. 109 bis 111.
 13) Sie ist gleichwertig mit einer anders dargestellten Formel von K. Misé, gestattet aber in der Form (8) eine besonders einfache Auswertung. Memoirs of the College of Engineering, Fukuoka, Bd. III (1923),

<sup>14</sup>) Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 1, Heft 4.) Berlin 1932, S. 84.

Eine weitere, praktisch kaum mehr nötige Verbesserung des so erhaltenen Wertes λ² liefert nach K. Hohenemser¹⁵) die Gleichung

(10) 
$$\lambda^{2} = \frac{\sum \bigotimes_{h} w_{h}^{(1) 2}}{\sum \frac{S_{h}^{2}}{F_{h}} \cdot l_{h}},$$

worin S jene Stabkräfte bedeuten, die zu den Knotenkräften @  $w^{(1)}$  gehören. Bel Fortsetzung des Iterationsverfahrens ergibt sich die nächste Verbesserung gemäß Gl. (9) aus

(11) 
$$\lambda^{2} = \frac{\sum \mathfrak{G}_{h} \mathfrak{w}_{h}^{(1)} \mathfrak{w}_{h}^{(2)}}{\sum \mathfrak{G}_{h} (\mathfrak{w}_{h}^{(2)})^{2}},$$

worln  $w_h^{(2)}$  die Knotenverschiebungen infolge der Knotenbelastungen  $\mathfrak{G}_h$   $w_h^{(1)}$  bedeuten.

Zu anderen bekannten Näherungsformeln gelangt man schließlich ausgehend von Gl. (7), wenn dort als Verschiebungszustand w der Knotenpunkte jener gewählt wird, der einer in einem Knoten m des ebenen Fachwerkes wirkenden Last Eins entspricht; dann ist

$$V = \frac{1}{2E} \sum \frac{S_{hk}^2}{F_{hk}} \cdot l_{hk} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_m$$

und es geht damit Gl. (7) über in die Formel 16)

(12) 
$$\lambda^{2} = \frac{\omega^{2}}{Eg} = \frac{v_{m}}{\sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k} \frac{g_{hk}}{3} \left( w_{h}^{2} + w_{k}^{2} + w_{h} w_{k} \right) + \sum_{1}^{n} G_{h} w_{h}^{2}}$$

oder bei statischer Aufteilung der Stabgewichte in die Knoten<sup>17</sup>)

(12a) 
$$\lambda^2 = \frac{v_m}{\sum\limits_{1}^{n} \mathfrak{G}_h \, \mathfrak{w}_h^2}.$$

Der Genauigkeitsgrad der Formeln (12) u. (12a) ist in Anbetracht der größeren Willkür in der Annahme des Verschiebungszustandes freilich beträchtlich geringer als jener der Gl. (8) u. (8a), wie aus den Zahlenangaben im Abschnitt IV zu ersehen ist. Auch ergibt sich dabei  $\lambda^2$  wesentlich abhängig von der Lage des mit der Last Eins belasteten Knotens m; so erhält man für das im nächsten Abschnitte behandelte Beispiel eines Brückenfachwerkes der Reihe nach die Werte

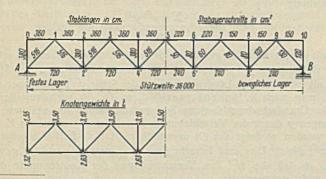
$$\lambda = 0.02390$$
, 0.02334, 0.02408,

wenn die Lasteinheit in den aufeinanderfolgenden Obergurtknoten 4, 5 und 6 wirkt.

Bei den Anwendungen der vorstehenden Formeln zur Berechnung der Grundschwingzahl von vielseldrigen Brückentragwerken zeigt sich der Einsluß der waagerechten Verschiebungen auf die Größe von 12 unbedeutend gegenüber jenem der lotrechten Verschiebungen, so daß die ersteren (und damit bei Anwendung des Verfahrens von Pohlhausen oder der Gl. (10) u. (11) die ihnen zugehörigen waagerechten Knotenkräfte) vernachlässigt werden können; der Verschiebungszustand ist dann einsach aus Biegelinien zu entnehmen.

# IV. Über den Näherungsgrad der vorstehenden Formeln.

Um die Güte der angegebenen Formeln beurteilen zu können, wurden die Werte  $\lambda$  für das von F. Bleich zum Zwecke der Erläuterung des Verfahrens von Pohlhausen behandelte Beispiel berechnet und in der



 $^{15}$ ) Vgl. Fußnote 14, S. 85; in der betreffenden Formel fehlt im Nenner unter dem Summenzeichen der Faktor  $I_i$ .

18) Eine damit gleichwertige Formel findet man bereits bei H. Reissner, Z. f. Bauw. 1899, S. 480, Gl. (4a) und mit anderer Herleitung bei A. Hawranek, Eisenbau Bd. 5 (1914), Gl. (9). Letztere Arbeit enthält auch wertvolles Versuchsmaterial über Schwingungen einer Straßenbrücke und eine Zusammenstellung älterer Schwingungsformeln.

<sup>17</sup>) Vgl. K. Hohenemser, a. a. O. Gl. (64), in der im Zähler der Faktor y<sub>1</sub> fehlt.

#### Zahlentafel.

Zamentatei.								
Gleichung Nr.	Formel für 12		λ	Ab- weichung in <sup>0</sup> / <sub>0</sub> von dem Wert nach OI. (11)				
(5)	$(\lambda^{\mathrm{I}})^{2} = \frac{1}{\left  \left\langle \sum_{h} \left[ \left( P_{h}^{\mathrm{I}} \right)^{2} + \left( Q_{h}^{\mathrm{I}} \right)^{2} \right] \right }$	1. Schritt	0,0369	+67,6				
	$(\lambda^{\mathrm{II}})^2 = \frac{1}{\left  \frac{\sum_{h} \left[ \left( P_h^{\mathrm{II}} \right)^2 + \left( Q_h^{\mathrm{II}} \right)^2 \right]}{\left  \frac{1}{N} \right }}$	0,0223	+ 1,3					
	$(\lambda^{\text{III}})^2 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{h} \left[ \left( P_h^{\text{III}} \right)^2 + \left( Q_h^{\text{III}} \right)^2 \right]}}$	3. Schritt	0,0219	- 0,5				
(12a)	$\lambda^2 = rac{v_m}{\sum \otimes_h w_h^2}$	0,02334	+ 6,1					
(8a)	$\lambda^2 = \frac{\sum \bigotimes_h v_h}{\sum \bigotimes_h \left(w_h^1\right)^2}$	0,022095	+ 0,39					
	Mit Vernachlässigung der waagerecht Verschiebungen	0,022686	+ 3,1					
(10)	$\lambda^2 = \frac{\sum \bigotimes_h \left( \bigotimes_h^1 \right)^2}{\sum \frac{S_h^2}{F_h} \cdot l_h}$	0,022017	+ 0,03					
(11)	$\lambda^2 = \frac{\sum \bigotimes_h  \boldsymbol{w}_h^{(1)} \boldsymbol{w}_h^{(2)}}{\sum \bigotimes_h \left(\boldsymbol{w}_h^{(2)}\right)^2}$	0,0220095	0					
(8)	$\lambda^{2} = \frac{\sum \bigotimes_{h} v_{h}}{\sum \sum \frac{g_{h k}}{3} \left(w_{h}^{2} + w_{k}^{2} + w_{h} w_{k}\right) + }$	0,0222086						
10.5			FORD STREET					

vorstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Dem Beispiel ist eine Eisenbahnbrücke mit Parallelfachwerk-Hauptträgern (Fahrbahn oben) zugrunde gelegt; die Abb. gibt Aufschluß über die Stablängen, Stabquerschnitte und Knotenlasten & für die unbelastete Brücke. Die Brückenabmessungen entsprechen einer Ausführung für Belastung mit dem Lastenzuge A der preußischen Vorschriften.

Als Ausgangssystem für die Knotenverschiebungen beim Verfahren von Pohlhausen wurde jenes gewählt, das einer in Brückenmitte (Knoten 5) wirkenden lotrechten Last 1 t entspricht; bei dreimaliger Anwendung des in (II.) beschriebenen Verfahrens erhält F. Bleich für  $\lambda$  die Näherungsfolge 0,0369, 0,0223, 0,0219.

Die Anwendung der Gi. (8a) liefert bereits nach einem Schritte  $\lambda=0.022\,095$ , welcher Wert durch Benutzung der Gi. (10) verbessert wird zu  $\lambda=0.022\,017$ , während eine zweite Iteration nach Gi. (11) für  $\lambda$  den Wert 0.022 009 5 ergibt. Der durch die bequem auszuwertende Gi. (8a) gewonnene Wert welcht demnach von dem genauen Wert nur um rund  $+0.4\,^{0}/_{0}$  ab, jener nach Gi. (10) nur mehr um  $+0.03\,^{0}/_{0}$ . Selbst bei Anwendung der Gi. (12a) ergibt sich, da hiernach (bei Annahme der Last 1 in Brückenmitte)  $\lambda=0.02334$ , trotz der ziemlich willkürlichen Annahme des Verschiebungszustandes nur eine Abweichung von  $+6\,^{0}/_{0}$ .

Es genûgt also fûr praktische Zwecke die einmalige Anwendung der Gl. (8a), wobei es bei Brückentragwerken mit Rücksicht auf den Näherungscharakter der ganzen Schwingungsuntersuchung zulässig ist, den Einfluß der waagerechten Verschiebungen zu vernachlässigen; im vorliegenden Falle ergibt sich dann  $\lambda=0.022\,686$  mit einer Abweichung von  $+\,3\,^{0}/_{0}$  gegenüber dem genauen Werte.

Rechnet man endlich den Wert  $\lambda$  aus Gi. (8), deren Ableitung von der vereinfachenden Annahme der Stabmassenaufteilung in die Knoten frei ist, so ergibt sich  $\lambda=0.022\,209$ ; der infolge Aufteilung der Stabmassen in die Knoten entstandene Fehler beträgt kaum  $1^{9}/_{0}$ , er ist unbedeutend, da in den Knoten bereits beträchtliche, von der Fahrbahnkonstruktion übertragene tote Lasten sitzen.

INHALT: Die Bedeutung der Orthogonalität für die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. — Fobrikerweiterung Paul Kübler & Co., Q. m. b. H., Stuttgart-Ostheim. — Zur Berechnung der niedrigsten Eigenschwingzahl eines Fachwerkes.

Für die Schriftieitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8.
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.