

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule
Fernsprecher: C 1 Steinplatz 0011
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

7. Jahrgang

BERLIN, 16. Februar 1934

Heft 4

Alle Rechte vorbehalten.

Berechnung räumlicher Rahmen nach der Deformationsmethode.

Von Dr.-Ing. A. Rudakow, Assistent an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg.

Eine genaue Berechnung der räumlichen Rahmen ist im allgemeinen nur für die stern-symmetrischen (zyklisch-symmetrischen) Vieleckrahmen praktisch durchführbar. Bei der Untersuchung nach der Kraftmethode bereiten besonders räumliche Rahmen mit Fußgelenken große Schwierigkeiten, obwohl sie bei eingeschossiger Anordnung nur halb so vielfach statisch unbestimmt sind wie Rahmen mit eingespannten Füßen. Sehr umständlich ist hier die Ermittlung der virtuellen Verschiebungen, weil die Momentenflächen infolge $X = -1$ sich über das ganze System erstrecken¹⁾.

Im folgenden wird nun ein Verfahren zur genauen Berechnung der räumlichen symmetrischen Rahmen mit beliebiger Stützenszahl p , anwendbar für jede Belastung, dargelegt, in dem die Formänderungsgrößen als Unbekannte auftreten (Deformationsmethode²⁾). Nach diesem Verfahren werden einerseits die Schwierigkeiten bei Aufstellung der Gleichungen für die Rahmen mit Fußgelenken völlig beseitigt, andererseits wird die Zahl der Gleichungen bei Untersuchung der Rahmen mit eingespannten Stützen von $6p$ auf $4p$ vermindert.

Die im weiteren angegebenen geschlossenen Ausdrücke zur Berechnung der Beiwerte sowie der Lösung der Gleichungen usw. können unmittelbar praktischen Zwecken dienen, ohne daß hierbei neue Überlegungen angestellt werden müssen.

1. Bezeichnungen und Wahl der Unbekannten.

Um die Untersuchung durchsichtiger zu gestalten und dem praktisch wichtigsten Fall anzupassen, wird hier die Berechnung an einem p -Eckrahmen mit lotrechten Stützen vollständig und eingehend dargelegt; von den Rahmen mit geneigten Stielen wird dann zum Schluß die Rede sein.

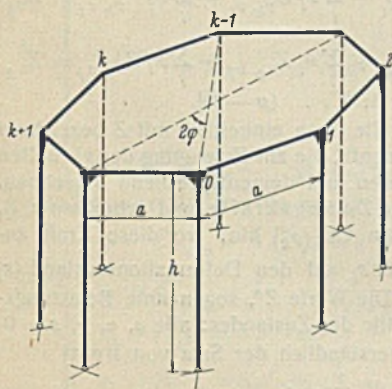


Abb. 1. Räumlicher symmetrischer Vieleckrahmen mit Fußgelenken.

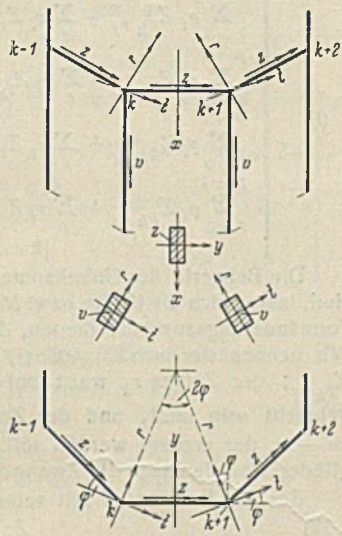


Abb. 2. Riegelachsen: x, y, z ; Stiel- bzw. Knotenachsen: r, t, v .

Das gegebene Tragwerk bildet im Grundriß ein geschlossenes regelmäßiges p -Eck mit den Riegeillängen a und entsprechenden Zentriwinkeln 2φ ; die Höhe des Rahmens sei h (Abb. 1). Die Hauptachsen der Stützen (r, t, v) und Riegel (x, y, z) sowie die Knotenachsen (r, t, v) sind aus Abb. 2 zu ersehen. Alle Stäbe werden mit doppelt symmetrischem (I oder □) Querschnitt vorausgesetzt. In Abb. 2 eingetragene Doppelpfeile stellen Drehvektoren dar, wobei die Biege- und Drillungsmomente ebenso

¹⁾ H. Marcus, Eisenbau 7 (1916), S. 36, 63. — E. Reisinger, Bauing. 5 (1924), S. 5, 28, 57.

²⁾ A. Ostenfeld, Die Deformationsmethode, Berlin 1926 — L. Mann, Theorie der Rahmenwerke, Berlin 1927.

wie die Stabdreh- und Knotendrehwinkel positiv gezählt werden, wenn, in der Richtung der Pfeile gesehen, die Drehung im Uhrzeigersinn erfolgt. Ferner gebrauchen wir noch folgende Bezeichnungen:

M = Moment in dem Endquerschnitt eines Stabes;
 \mathfrak{M} = Moment eines Balkens mit starr eingespannten Enden bzw. mit einseitiger starrer Einspannung;
 μ = Steifigkeitszahl des Balkens; mit einem konstanten Trägheitsmoment J_c und einer Länge l_c erhält man für alle Riegel bzw. Stützen:

$$\mu^x = \frac{J^x l_c}{J_c a}, \quad \mu^y = \frac{J^y l_c}{J_c a}, \quad \mu^z = \frac{G J^z l_c}{E J_c a} \text{ bzw.}$$

$$\mu^r = \frac{J^r l_c}{J_c h}, \quad \mu^t = \frac{J^t l_c}{J_c h}, \quad \mu^v = \frac{G J^v l_c}{E J_c h};$$

$\gamma = \frac{E J_c}{l_c}$ -fache Verdrehung der Balkenenden (Knotendrehwinkel);

$\psi = \frac{E J_c}{l_c}$ -facher Stabdrehwinkel.

Die Größen $M, \mathfrak{M}, \gamma, \psi$ usw. erhalten obere und untere Zeiger; der obere Zeiger deutet die Drehachse, der untere das Balkenende bzw. den Stab an. Die Knotenbezeichnung ist $0, 1, 2, 3, \dots, (p-1)$.

Mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen lauten die bekannten Ausdrücke³⁾ für die Stabmomente folgendermaßen:

Im Riegel k ($k+1$), Abb. 1, am Stabende k ist

$$(1) \begin{cases} M_k^x(k+1) = \mathfrak{M}_k^x(k+1) + 2\mu^x (2\gamma_k^x(k+1) + \gamma_{(k+1)k}^x - 3\psi_k^x(k+1)), \\ M_k^y(k+1) = \mathfrak{M}_k^y(k+1) + 2\mu^y (2\gamma_k^y(k+1) + \gamma_{(k+1)k}^y - 3\psi_k^y(k+1)), \\ M_k^z(k+1) = \mathfrak{M}_k^z(k+1) + \mu^z (\gamma_k^z(k+1) - \gamma_{(k+1)k}^z). \end{cases}$$

Für die Momente am Stabende ($k+1$) gelten dieselben Formeln mit Vertauschung der Zeiger k und ($k+1$).

Bei den Stützen hat man die Momente am Stützenkopf (o = oben) und Fuß (u = unten). Wir unterscheiden weiter die Momente

a) bei Rahmen mit Fußgelenken

$$(2) \begin{cases} M_{ko}^r = \mathfrak{M}_{ko}^r + 3\mu^r (\gamma_k^r - \psi_k^r), \\ M_{ko}^t = \mathfrak{M}_{ko}^t + 3\mu^t (\gamma_k^t - \psi_k^t), \\ M_{ko}^v = \mathfrak{M}_{ko}^v, \end{cases} \quad M_{ku} = 0,$$

b) bei Rahmen mit eingespannten Füßen

$$(2') \begin{cases} M_{ko}^r = \mathfrak{M}_{ko}^r + 2\mu^r (2\gamma_k^r - 3\psi_k^r), & M_{ku}^r = \mathfrak{M}_{ku}^r + 2\mu^r (\gamma_k^r - 3\psi_k^r), \\ M_{ko}^t = \mathfrak{M}_{ko}^t + 2\mu^t (2\gamma_k^t - 3\psi_k^t), & M_{ku}^t = \mathfrak{M}_{ku}^t + 2\mu^t (\gamma_k^t - 3\psi_k^t), \\ M_{ko}^v = \mathfrak{M}_{ko}^v + \mu^v \gamma_k^v, & M_{ku}^v = \mathfrak{M}_{ku}^v - \mu^v \gamma_k^v. \end{cases}$$

Nunmehr wählen wir soviel Formänderungsgrößen als Unbekannte, wie zur eindeutigen Bestimmung der Winkel γ und ψ notwendig sind oder zur Beschreibung des Spannungs-Deformationszustandes bei beliebiger Belastung am gegebenen Tragwerk ausreichen. Als solche Größen sind Knotendrehwinkel ϱ, τ, ν um die Achsen r, t, v und Knotenpunktverschiebungen s angenommen.

Die Verdrehungen der Stabenden γ ergeben sich dann sehr einfach aus den Drehwinkeln der entsprechenden Knoten. So ist im Riegel k ($k+1$) bzw. k ($k-1$) neben dem Knotenpunkt k (Abb. 1 u. 2)

$$\gamma_{k(k\pm 1)}^x = \nu_k, \quad \gamma_{k(k\pm 1)}^y = \varrho_k \cdot \cos \varphi \mp \tau_k \cdot \sin \varphi,$$

$$\gamma_{k(k\pm 1)}^z = \pm \varrho_k \cdot \sin \varphi + \tau_k \cdot \cos \varphi$$

und in den Stützen bei

$$\begin{aligned} \text{a) Rahmen mit Fußgelenken} & \quad \gamma_k^r = \varrho_k, \quad \gamma_k^t = \tau_k, \\ \text{b) Rahmen mit eingespannten Stielen} & \quad \gamma_k^r = \varrho_k, \quad \gamma_k^t = \tau_k, \quad \gamma_k^v = \nu_k. \end{aligned}$$

Die Stabdrehwinkel ψ sind allein von den Knotenverschiebungen abhängig. Vernachlässigt man wie üblich die Stabdehnungen, so genügt es, bei räumlichen Vieleckrahmen nur eine Verschiebungskomponente für jeden freien Knotenpunkt anzugeben, um die Größen ψ eindeutig festzulegen. Es sei nun die Verschiebung s des Knotenpunktes k in der Richtung des Riegels $k(k-1)$ als Unbekannte gewählt, und zwar positiv, wenn sie von k nach $(k-1)$ gerichtet ist. Diese Wahl ist gleichbedeutend mit der Feststellung, daß das gegebene Tragwerk, durch starre Gelenkstäbe in diesen Bewegungsrichtungen gegen feste Punkte gestützt, unver-schieblich bleibt, also p Verschiebungsgrößen als Unbekannte ausreichen.

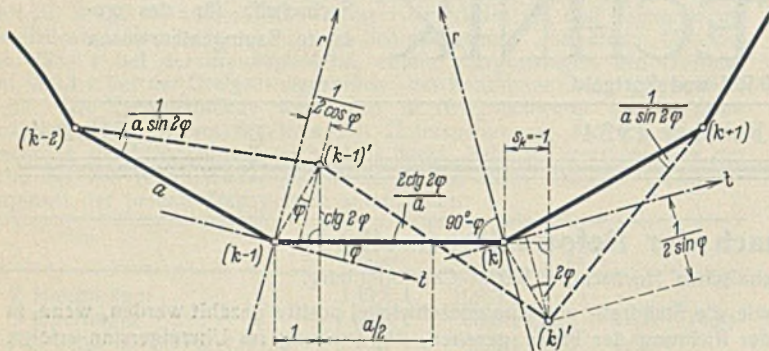


Abb. 3. Verschiebungsplan für $s_k = -1$.

Wir leiten jetzt aus einem Verschiebungszustand $s = -1$ die Beziehungen zwischen ψ und s ab. Da die Längenänderungen der Stäbe vernachlässigt werden, bleiben die Verschiebungen der freien Knotenpunkte bei lotrechten Stützen in der Ringebene. Zeichnet man nun für ein ebenes p -Eck mit starren Stäben den Verschiebungsplan (Abb. 3), so ergeben sich daraus zunächst infolge der Verschiebung eines Knotens k um die Strecke $s = -1$ folgende Stabdrehwinkel:

(Riegel) $\psi_{k(k+1),k}^x = \psi_{(k-2)(k-1),k}^x = -\frac{1}{a \cdot \sin 2\varphi}$,
 $\psi_{k(k-1),k}^x = \frac{2}{a \cdot \tan 2\varphi}$

(Stiele) $\psi_{k,k}^r = \psi_{(k-1),k}^r = \frac{1}{2h \cdot \cos \varphi}$, $\psi_{k,k}^t = -\psi_{(k-1),k}^t = \frac{1}{2h \cdot \sin \varphi}$;
 die übrigen Stäbe erleiden keine Verdrehung. Nach dem Superpositionsprinzip erhält man dann für die gesuchten Winkel

$$(3) \left\{ \begin{aligned} -\psi_{k(k+1)}^x &= \sum_{i=0}^{p-1} s_i \psi_{k(k+1),i}^x = \frac{1}{a \cdot \sin 2\varphi} [2s_{k+1} \cdot \cos 2\varphi - (s_k + s_{k+2})], \\ -\psi_{k(k-1)}^x &= \sum_i s_i \psi_{k(k-1),i}^x = \frac{1}{a \cdot \sin 2\varphi} [2s_k \cdot \cos 2\varphi - (s_{k-1} + s_{k+1})], \\ -\psi_k^r &= \sum_i s_i \psi_{k,i}^r = \frac{1}{2h \cdot \cos \varphi} (s_k + s_{k-1}), \\ -\psi_k^t &= \sum_i s_i \psi_{k,i}^t = \frac{1}{2h \cdot \sin \varphi} (s_k - s_{k-1}). \end{aligned} \right.$$

Das Einsetzen der gefundenen Ausdrücke für γ und ψ in die Gl. (1) und (2) liefert schließlich die Beziehungen, aus denen alle Balkenmomente berechnet werden, sobald die unbekanntes Formänderungsgrößen e_k , τ_k , ν_k und s_k , wo $k=0, 1, 2 \dots (p-1)$ ist, ermittelt sind.

Die Rieglmomente am Knotenpunkt k sind

$$(4) \left\{ \begin{aligned} M_{k(k+1)}^x &= \mathfrak{M}_{k(k+1)}^x + 2\mu^x \left\{ 2\nu_k + \nu_{k+1} + \frac{3}{a \cdot \sin 2\varphi} [2s_{k+1} \cdot \cos 2\varphi - (s_k + s_{k+2})] \right\}, \\ M_{k(k-1)}^x &= \mathfrak{M}_{k(k-1)}^x + 2\mu^x \left\{ 2\nu_k + \nu_{k-1} + \frac{3}{a \cdot \sin 2\varphi} [2s_k \cdot \cos 2\varphi - (s_{k-1} + s_{k+1})] \right\}, \\ M_{k(k \pm 1)}^y &= \mathfrak{M}_{k(k \pm 1)}^y + 2\mu^y [2(e_k \cdot \cos \varphi \mp \tau_k \cdot \sin \varphi) + e_{k \pm 1} \cdot \cos \varphi \pm \tau_{k \pm 1} \cdot \sin \varphi], \\ M_{k(k \pm 1)}^z &= \mathfrak{M}_{k(k \pm 1)}^z + \mu^z (\pm e_k \cdot \sin \varphi + \tau_k \cdot \cos \varphi \pm e_{k \pm 1} \cdot \sin \varphi - \tau_{k \pm 1} \cdot \cos \varphi). \end{aligned} \right.$$

Die Stabmomente der Stütze k sind

a) bei Rahmen mit Fußgelenken

$$(5) \left\{ \begin{aligned} M_{k0}^r &= \mathfrak{M}_{k0}^r + 3\mu^r \left[e_k + \frac{1}{2h \cdot \cos \varphi} (s_k + s_{k-1}) \right], \\ M_{k0}^t &= \mathfrak{M}_{k0}^t + 3\mu^t \left[\tau_k + \frac{1}{2h \cdot \sin \varphi} (s_k - s_{k-1}) \right], \\ M_{k0}^v &= \mathfrak{M}_{k0}^v, \end{aligned} \right.$$

b) bei Rahmen mit eingespannten Stützen

$$(5') \left\{ \begin{aligned} M_{k0}^r &= \mathfrak{M}_{k0}^r + 2\mu^r \left[2e_k + \frac{3}{2h \cdot \cos \varphi} (s_k + s_{k-1}) \right], \\ M_{k0}^t &= \mathfrak{M}_{k0}^t + 2\mu^t \left[2\tau_k + \frac{3}{2h \cdot \sin \varphi} (s_k - s_{k-1}) \right], \\ M_{k0}^v &= \mathfrak{M}_{k0}^v + \mu^v \nu_k, \\ M_{ku}^r &= \mathfrak{M}_{ku}^r + 2\mu^r \left[e_k + \frac{3}{2h \cdot \cos \varphi} (s_k + s_{k-1}) \right], \\ M_{ku}^t &= \mathfrak{M}_{ku}^t + 2\mu^t \left[\tau_k + \frac{3}{2h \cdot \sin \varphi} (s_k - s_{k-1}) \right], \\ M_{ku}^v &= \mathfrak{M}_{ku}^v - \mu^v \nu_k. \end{aligned} \right.$$

2. Aufstellung der Gleichungen. Formeln für die Beiwerte.

Zur Ermittlung der Unbekannten, $3p$ Knotendrehwinkel und p Knotenverschiebungen, sind $4p$ Gleichungen notwendig. Man untersucht zuerst das starre System, bei dem alle $4p$ Deformationen gleich Null sind und die statischen Größen Z^0 und \mathfrak{M} wirken, weiterhin der Reihe nach die Formänderungszustände $e_i = -1$, $\tau_i = -1$ usf. Daraus ergeben sich dann in bekannter Weise²⁾ die Gleichungen nach der Deformationsmethode.

Für das gegebene Tragwerk erhält man 4 Gruppen von je p Gleichungen mit $4p$ Unbekannten e_i , τ_i , ν_i und s_i , wovon hier nur die erste Gruppe vollständig ausgeschrieben sei.

$$\left. \begin{aligned} e_0 Z_{r_0 r_0} + e_1 Z_{r_0 r_1} + e_2 Z_{r_0 r_2} + \dots + e_{p-1} Z_{r_0 r_{p-1}} + \tau_0 Z_{r_0 t_0} + \tau_1 Z_{r_0 t_1} + \dots + \tau_{p-1} Z_{r_0 t_{p-1}} + \nu_0 Z_{r_0 v_0} + \nu_1 Z_{r_0 v_1} + \dots + \nu_{p-1} Z_{r_0 v_{p-1}} + s_0 Z_{r_0 s_0} + s_1 Z_{r_0 s_1} + \dots + s_{p-1} Z_{r_0 s_{p-1}} &= Z_{r_0}^0, \\ e_0 Z_{r_1 r_0} + e_1 Z_{r_1 r_1} + e_2 Z_{r_1 r_2} + \dots + e_{p-1} Z_{r_1 r_{p-1}} + \tau_0 Z_{r_1 t_0} + \tau_1 Z_{r_1 t_1} + \dots + \tau_{p-1} Z_{r_1 t_{p-1}} + \nu_0 Z_{r_1 v_0} + \nu_1 Z_{r_1 v_1} + \dots + \nu_{p-1} Z_{r_1 v_{p-1}} + s_0 Z_{r_1 s_0} + s_1 Z_{r_1 s_1} + \dots + s_{p-1} Z_{r_1 s_{p-1}} &= Z_{r_1}^0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} e_0 Z_{r_{p-1} r_0} + e_1 Z_{r_{p-1} r_1} + \dots + e_{p-1} Z_{r_{p-1} r_{p-1}} + \tau_0 Z_{r_{p-1} t_0} + \tau_1 Z_{r_{p-1} t_1} + \dots + \tau_{p-1} Z_{r_{p-1} t_{p-1}} + \nu_0 Z_{r_{p-1} v_0} + \nu_1 Z_{r_{p-1} v_1} + \dots + \nu_{p-1} Z_{r_{p-1} v_{p-1}} + s_0 Z_{r_{p-1} s_0} + s_1 Z_{r_{p-1} s_1} + \dots + s_{p-1} Z_{r_{p-1} s_{p-1}} &= Z_{r_{p-1}}^0. \end{aligned} \right\}$$

In der Folge verwenden wir die abgekürzte Schreibweise des Systems aus $4p$ Gleichungen:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{p-1} e_i Z_{r_k r_i} + \sum_i \tau_i Z_{r_k t_i} + \sum_i \nu_i Z_{r_k v_i} + \sum_i s_i Z_{r_k s_i} &= Z_{r_k}^0 \\ \sum_{i=0}^{p-1} e_i Z_{t_k r_i} + \sum_i \tau_i Z_{t_k t_i} + \sum_i \nu_i Z_{t_k v_i} + \sum_i s_i Z_{t_k s_i} &= Z_{t_k}^0 \\ \sum_{i=0}^{p-1} e_i Z_{v_k r_i} + \sum_i \tau_i Z_{v_k t_i} + \sum_i \nu_i Z_{v_k v_i} + \sum_i s_i Z_{v_k s_i} &= Z_{v_k}^0 \\ \sum_{i=0}^{p-1} e_i Z_{s_k r_i} + \sum_i \tau_i Z_{s_k t_i} + \sum_i \nu_i Z_{s_k v_i} + \sum_i s_i Z_{s_k s_i} &= Z_{s_k}^0 \end{aligned} \right. [k=0, 1, 2 \dots (p-1)].$$

Die Beiwerte der Unbekannten, die oben einheitlich mit Z bezeichnet sind, lassen sich als Kräfte bzw. Momente, die zur Erzeugung der virtuellen Formänderungszustände dienen, deuten und dementsprechend berechnen. Wir nennen sie nach Engeßer³⁾ die Zwangskräfte und schreiben z. B. $Z_{r_k s_i}$; der Zeiger r_k weist auf den Ort (e_k) hin, wo diese Kraft angebracht sein muß, und der Zeiger s_i auf den Deformationszustand ($s_i = -1$), der erzeugt werden soll. Die Werte Z^0 , sogenannte Belastungsglieder, sind demnach die Zwangskräfte des Zustandes: alle $e, \tau, \nu, s = 0$.

Für die Beiwerte Z gilt selbstverständlich der Satz von Betti

$$(7) \quad Z_{r_k s_i} = Z_{s_i r_k},$$

und wegen der zyklischen Symmetrie des Tragwerkes die Beziehung

$$(8) \quad Z_{r_k s_i} = Z_{r_{k+n} s_{i+n}} = Z_{r_{k-n} s_{i-n}}$$

wobei, falls $k+n$ bzw. $i+n \geq p$ oder $k-n$ bzw. $i-n < 0$, $k \pm n = k \pm n \mp p$ bzw. $i \pm n = i \pm n \mp p$ zu setzen ist.

Solange die Größen Z die Zwangsmomente für einen Zustand $e = -1$ bzw. $\tau = -1$ usf. bedeuten, wie Z_{r_r}, Z_{r_t}, \dots , werden sie ohne Mühe aus den Stabmomenten ermittelt, die ihrerseits nach den Formeln (4) u. (5) gegeben sind, wenn man jetzt darin die betreffende Unbekannte gleich -1 und die übrigen gleich Null setzt. Man erhält somit die Zwangsmomente am Knotenpunkt k , die in Richtung e, τ, ν wirken, also um die Knotenachsen r bzw. t bzw. v drehen müssen, durch

³⁾ Fr. Engeßer, Eisenbau II (1920), S. 81.

Addition der Beiträge zweier Riegel k ($k+1$) und k ($k-1$) sowie eines Stieles k

$$(9) \begin{cases} Z_{r_k} = -(M_{k(k+1)}^r + M_{k(k-1)}^r + M_{k0}^r) \\ \quad = -[(M_{k(k+1)}^y + M_{k(k-1)}^y) \cos \varphi \\ \quad \quad + (M_{k(k+1)}^z - M_{k(k-1)}^z) \sin \varphi + M_{k0}^r], \\ Z_{t_k} = -[(M_{k(k-1)}^y - M_{k(k+1)}^y) \sin \varphi \\ \quad \quad + (M_{k(k+1)}^z + M_{k(k-1)}^z) \cos \varphi + M_{k0}^r], \\ Z_{v_k} = -[M_{k(k+1)}^x + M_{k(k-1)}^x + M_{k0}^v]. \end{cases}$$

Diese Z -Momente werden im Uhrzeigersinn drehend als positiv angesetzt, daher erscheint hier vor den Summen ein negatives Vorzeichen (vgl. Abb. 4).

Die Zwangskräfte $Z_{s_k s_l}$ bestimmt man am einfachsten aus der Arbeitsgleichung für den Verschiebungszustand $s_k = -1$ (Abb. 3), mit den Lasten des Zustandes $s_i = -1$

$$(-1) Z_{s_k s_l} = \sum \psi_{\text{inf. } s_k} \cdot \frac{M_{\text{inf. } s_i}}{a} \cdot a.$$

Die dazugehörigen Stabdrehwinkel ψ infolge $s_k = -1$ und Stabmomente M infolge $s_i = -1$ sind aus Gl. (3) bzw. (4), (5) leicht zu finden.

Alle Größen Z , die bei der Berechnung eines p -Eckrahmens mit lotrechten Stützen zur Aufstellung des Gleichungssystems (6) notwendig sind, werden nun, soweit sie nicht verschwinden, als gebrauchsfertige Formeln angegeben:

a) Beiwerte Z für Rahmen mit Fußgelenken:

$$(10) \begin{cases} z_1 = Z_{r_k r_k} = 8 \mu^y \cdot \cos^2 \varphi + 2 \mu^z \cdot \sin^2 \varphi + 3 \mu^r, \\ z_2 = Z_{r_k r_{k \pm 1}} = 2 \mu^y \cdot \cos^2 \varphi + \mu^z \cdot \sin^2 \varphi, \\ z_3 = Z_{r_k t_{k+1}} = -Z_{r_k t_{k-1}} = \left(\mu^y - \frac{1}{2} \cdot \mu^z\right) \sin 2 \varphi, \\ z_4 = Z_{r_k s_k} = Z_{r_k s_{k+1}} = \frac{3}{2} \cdot \mu^r \cdot \frac{1}{h \cdot \cos \varphi}, \\ z_5 = Z_{t_k t_k} = 8 \mu^y \cdot \sin^2 \varphi + 2 \mu^z \cdot \cos^2 \varphi + 3 \mu^t, \\ z_6 = Z_{t_k t_{k \pm 1}} = -(2 \mu^y \cdot \sin^2 \varphi + \mu^z \cdot \cos^2 \varphi), \\ z_7 = Z_{t_k s_k} = -Z_{t_k s_{k+1}} = \frac{3}{2} \cdot \mu^t \cdot \frac{1}{h \cdot \sin \varphi}, \\ z_8 = Z_{v_k v_k} = 8 \mu^x, \\ z_9 = Z_{v_k v_{k \pm 1}} = 2 \mu^x, \\ z_{10} = Z_{v_k s_k} = Z_{v_k s_{k+1}} = 6 \mu^x \cdot \frac{2 \cdot \cos 2 \varphi - 1}{a \cdot \sin 2 \varphi}, \\ z_{11} = Z_{v_k s_{k-1}} = Z_{v_k s_{k+2}} = -6 \mu^x \cdot \frac{1}{a \cdot \sin 2 \varphi}, \\ z_{12} = Z_{s_k s_k} = \frac{6}{a^2 \cdot \sin^2 2 \varphi} \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 (\mu^r \cdot \sin^2 \varphi + \mu^t \cdot \cos^2 \varphi) \right. \\ \quad \left. + 4 \mu^x (1 + 2 \cdot \cos^2 2 \varphi) \right], \\ z_{13} = Z_{s_k s_{k \pm 1}} = \frac{3}{a^2 \cdot \sin^2 2 \varphi} \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 (\mu^r \cdot \sin^2 \varphi - \mu^t \cdot \cos^2 \varphi) \right. \\ \quad \left. - 16 \mu^x \cdot \cos 2 \varphi \right], \\ z_{14} = Z_{s_k s_{k \pm 2}} = \frac{12}{a^2 \cdot \sin^2 2 \varphi} \cdot \mu^x. \end{cases}$$

b) Beiwerte Z für Rahmen mit eingespannten Füßen:

$$(10) \begin{cases} z_1 = Z_{r_k r_k} = 8 \mu^y \cdot \cos^2 \varphi + 2 \mu^z \cdot \sin^2 \varphi + 4 \mu^r, \\ z_4 = Z_{r_k s_k} = 3 \mu^r \cdot \frac{1}{h \cdot \cos \varphi}, \\ z_5 = Z_{t_k t_k} = 8 \mu^y \cdot \sin^2 \varphi + 2 \mu^z \cdot \cos^2 \varphi + 4 \mu^t, \\ z_7 = Z_{t_k s_k} = 3 \mu^t \cdot \frac{1}{h \cdot \sin \varphi}, \\ z_8 = Z_{v_k v_k} = 8 \mu^x + \mu^v, \\ z_{12} = Z_{s_k s_k} = \frac{24}{a^2 \cdot \sin^2 2 \varphi} \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 (\mu^r \cdot \sin^2 \varphi + \mu^t \cdot \cos^2 \varphi) \right. \\ \quad \left. + \mu^x (1 + 2 \cdot \cos^2 2 \varphi) \right], \\ z_{13} = Z_{s_k s_{k \pm 1}} = \frac{12}{a^2 \cdot \sin^2 2 \varphi} \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 (\mu^r \cdot \sin^2 \varphi - \mu^t \cdot \cos^2 \varphi) \right. \\ \quad \left. - 4 \mu^x \cdot \cos 2 \varphi \right], \\ z_2, z_3, z_6, z_9, z_{10}, z_{11} \text{ und } z_{14} \text{ wie oben im Fall a).} \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Belastungsglieder in den Gl. (6). Die Größen $Z_{r_k}^0, Z_{t_k}^0, Z_{v_k}^0$ werden als Zwangsmomente für einen

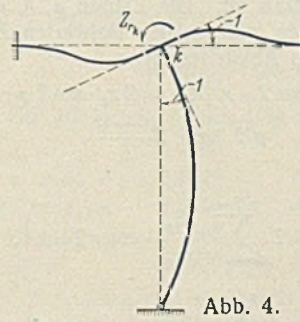


Abb. 4. Zwangsmoment.

Zustand $\varphi, \tau, \nu, s=0$ gedeutet und aus (9), wo jetzt an Stelle von M das \mathfrak{M} zu schreiben ist, berechnet.

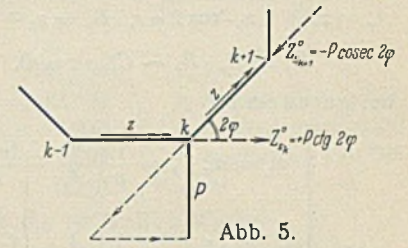


Abb. 5. Bestimmung der Zwangskräfte Z_s^0 .

Greifen jedoch die äußeren Lasten nur in den Knotenpunkten des Tragwerkes an, dann sind alle $\mathfrak{M}=0$ und die Zwangskräfte gleich den Lasten, aber mit umgekehrtem Richtungssinn. Für die Z -Momente wurde vorhin die positive Richtung schon festgelegt, die Z -Kräfte sind positiv zu nehmen, wenn sie am Knoten k nach außen im Sinne des Vektors z (Abb. 2) wirken. Es ergeben sich z. B. für die Belastung P nach Abb. 5 $Z_{s_k}^0 = +P \cdot \cotg 2 \varphi, Z_{s_{k+1}}^0 = -P \cdot \operatorname{cosec} 2 \varphi$.

3. Auflösung der Gleichungen.

Geschlossene Formeln für die Lösungen.

Wir betrachten zunächst nur die ersten beiden Gleichungsgruppen des Systems (6) für sich allein und streichen die Glieder mit den Unbekannten ν , weil bei den Rahmen mit lotrechten Stützen alle $Z_{r_v} = Z_{t_v} = 0$ sind, bringen die Glieder mit den Verschiebungen s auf die rechte Seite der Gleichungen und erhalten, nach Einsetzen der Beiwerte (10) unter Berücksichtigung der Beziehungen (7) u. (8), das nachstehende Gleichungssystem, das vorerst in kurzer, sodann in ausführlicher Schreibweise wiederzugeben sei:

$$(11) \begin{cases} \sum_{i=0}^{p-1} \varrho_i Z_{r_k r_i} + \sum_{i=0}^{p-1} \tau_i Z_{r_k t_i} = Z_{r_k}^0 - \sum_{i=0}^{p-1} s_i Z_{r_k s_i}, \\ \sum_{i=0}^{p-1} \varrho_i Z_{t_k r_i} + \sum_{i=0}^{p-1} \tau_i Z_{t_k t_i} = Z_{t_k}^0 - \sum_{i=0}^{p-1} s_i Z_{t_k s_i}, \\ k = 0, 1, 2 \dots (p-1). \end{cases}$$

ϱ_0	ϱ_1	ϱ_2	...	ϱ_{p-1}	τ_0	τ_1	τ_2	...	τ_{p-1}	
z_1	z_2			z_2		z_3			$-z_3$	$Z_{r_0}^0 - z_4(s_0 + s_1)$
z_2	z_1	z_2			$-z_3$	z_3				$Z_{r_1}^0 - z_4(s_1 + s_2)$
	z_2	z_1	z_2			$-z_3$	z_3			$Z_{r_2}^0 - z_4(s_2 + s_3)$
		z_2	z_1	z_2			$-z_3$	z_3		$Z_{r_3}^0 - z_4(s_3 + s_4)$

z_2				z_2	z_1	z_3			$-z_3$	$Z_{r_{p-1}}^0 - z_4(s_{p-1} + s_0)$
	$-z_3$			z_3	z_5	z_6			z_6	$Z_{t_0}^0 - z_7(s_0 - s_1)$
z_3		$-z_3$			z_6	z_5	z_6			$Z_{t_1}^0 - z_7(s_1 - s_2)$
	z_3		$-z_3$			z_6	z_5	z_6		$Z_{t_2}^0 - z_7(s_2 - s_3)$
		z_3		$-z_3$			z_6	z_5	z_6	$Z_{t_3}^0 - z_7(s_3 - s_4)$

$-z_3$				z_3		z_6			z_6	$Z_{t_{p-1}}^0 - z_7(s_{p-1} - s_0)$

Es ist also ein System mit zweifach-zyklischer Reihe von $2p$ Unbekannten, für das die Lösung aus dem technischen Schrifttum bekannt ist⁴⁾, und zwar lautet dieselbe für die Gl. (11) in allgemeiner Form

$$(12) \begin{cases} \varrho_n = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left[Z_{r_{k+n}}^0 - \sum_{i=0}^{p-1} s_i Z_{r_{k+n} s_i} \right] \\ \quad + \sum_k c_k \left[Z_{t_{k+n}}^0 - \sum_i s_i Z_{t_{k+n} s_i} \right], \\ \tau_n = \sum_{k=0}^{p-1} c_{p-k} \left[Z_{r_{k+n}}^0 - \sum_{i=0}^{p-1} s_i Z_{r_{k+n} s_i} \right] \\ \quad + \sum_k b_k \left[Z_{t_{k+n}}^0 - \sum_i s_i Z_{t_{k+n} s_i} \right], \\ n = 0, 1, 2 \dots (p-1), \end{cases}$$

⁴⁾ Vgl. Literaturnachweis in der Arbeit A. Rudakow, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 528.

Der Verschiebungsplan für $s = -1$ unterscheidet sich im Grundriß nicht von dem in Abb. 3 angegebenen, doch die Knotenpunkte erleiden jetzt noch die Verschiebungen aus der Ringebene, für welche also ein zusätzlicher Plan in anderer Ebene zu zeichnen ist.

Weiterhin bestehen keine grundsätzlichen Abweichungen von dem vorstehend ausführlich beschriebenen Rechnungsgang, so daß alle Erläuterungen und allgemeinen Formeln sowie das Verfahren zur Lösung der Gleichungen, entsprechend erweitert, benutzt werden können. Die hinzukommenden Glieder mit den Unbekannten ν in den ersten beiden Gruppen des Systems (6) bzw. in den Gl. (11) werden zunächst auf die rechte Seite der Gleichungen gebracht. Die weitere Behandlung dieser Glieder geschieht dann gleichzeitig und in derselben Weise wie bei den Gliedern mit den Unbekannten s . Man hat dann noch die Größen ϱ'' , τ'' infolge $\nu_i = -1$ entsprechend den Zahlen ϱ' , τ' (15) und $Z'_{v'v}$, $Z'_{v's}$ bzw. $Z''_{v'v}$ analog den Werten (19) bzw. (20) zu ermitteln.

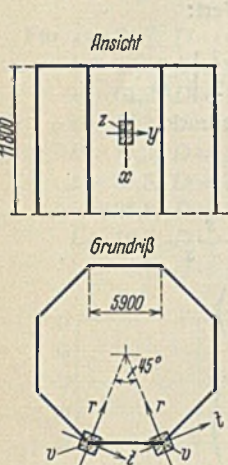


Abb. 6. Räumlicher Achteckrahmen.

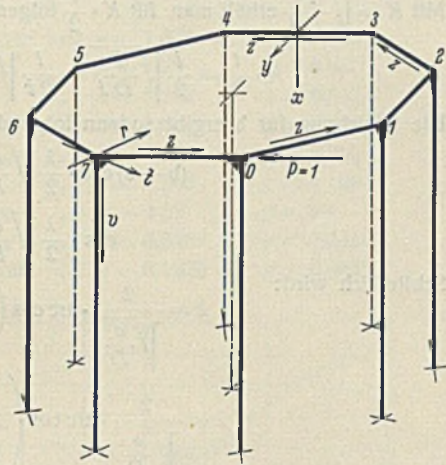


Abb. 7. Räumlicher Rahmen mit der Last $P=1$ in Richtung des Riegels belastet.

5. Zahlenbeispiel.

Die Anwendung des vorstehend entwickelten Verfahrens wird an der Berechnung eines Achteckrahmens mit Fußgelenken gezeigt, dessen System und Abmessungen in der Abb. 6 dargestellt sind.

Mit $J_c = J^r = J^t$, $J^x/J_c = 3/4$, $J^y/J_c = 5/4$, $\frac{GJ^v}{EJ_c} = \frac{2}{3}$, $\frac{GJ^z}{EJ_c} = \frac{5}{8}$ und $l_c = h$, $a = \frac{l_c}{2}$ ergeben sich die Steifigkeitszahlen für die Riegel: $\mu^x = \frac{3}{2}$, $\mu^y = \frac{5}{2}$, $\mu^z = \frac{5}{4}$, für die Stiele: $\mu^r = \mu^t = 1$, $\mu^v = \frac{2}{3}$.

Die $4p = 4 \cdot 8 = 32$ Unbekannte sind

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots, \varrho_7; \quad \tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots, \tau_7;$$

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2 \dots, \nu_7; \quad s_0, s_1, s_2 \dots, s_7.$$

Aus der Zusammenstellung (10) findet man mit den Zahlen μ und

$$2\varphi = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = 22^\circ 30'$$

alle Beiwerte für die $4p = 32$ Gl. (6):

$$z_1 = 20,437\ 20, \quad z_2 = 4,450\ 83, \quad z_3 = 1,325\ 83, \quad z_4 = 0,137\ 592,$$

$$z_5 = 8,062\ 80, \quad z_6 = -1,799\ 17, \quad z_7 = 0,332\ 178, \quad z_8 = 12,000\ 0,$$

$$z_9 = 3,000\ 00, \quad z_{10} = 0,893\ 572, \quad z_{11} = -2,157\ 273, \quad z_{12} = 4,222\ 92,$$

$$z_{13} = -2,955\ 59, \quad z_{14} = 1,034\ 19.$$

Um die Lösung (12) des Gleichungssystems (11) anzuschreiben, berechne man zunächst die Abkürzungen:

$$A_0 = z_1 + 2z_2 = 29,3389 \quad B_0 = 4,464\ 46$$

$$A_1 = z_1 + 2z_2 \cdot \cos 2\varphi = 26,7316 \quad B_1 = 5,518\ 40$$

$$A_2 = z_1 + 2z_2 \cdot \cos 4\varphi = 20,4372 \quad B_2 = 8,062\ 80$$

$$A_3 = z_1 + 2z_2 \cdot \cos 6\varphi = 14,1428 \quad B_3 = 10,607\ 21$$

$$A_4 = z_1 + 2z_2 \cdot \cos 8\varphi = 11,5355 \quad B_4 = 11,661\ 14$$

$$C_1 = 1,875\ 00 \quad D_1 = 144,000$$

$$C_2 = 2,651\ 65 \quad D_2 = 157,750$$

$$C_3 = 1,875\ 00 \quad D_3 = 146,500,$$

darauf die Zahlen (13)

$$a_0 = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_4} + 2 \left(\frac{B_1}{D_1} + \frac{B_2}{D_2} + \frac{B_3}{D_3} \right) \right],$$

$$a_1 = a_7 = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_4} + 2 \left(\frac{B_1}{D_1} \cdot \cos 2\varphi + \frac{B_2}{D_2} \cdot \cos 4\varphi + \frac{B_3}{D_3} \cdot \cos 6\varphi \right) \right],$$

$$a_2 = a_6 = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_4} + 2 \left(\frac{B_1}{D_1} \cdot \cos 4\varphi + \frac{B_2}{D_2} \cdot \cos 8\varphi + \frac{B_3}{D_3} \cdot \cos 12\varphi \right) \right] \text{ usf.}$$

Die 10^3 fachen Zahlen (13) sind:

$a_0 =$	55,5560	$b_0 =$	141,650	$c_0 =$	0
$a_1 = a_7 =$	-12,6004	$b_1 = b_7 =$	33,030	$c_1 = -c_7 =$	-8,7666
$a_2 = a_6 =$	2,3188	$b_2 = b_6 =$	6,330	$c_2 = -c_6 =$	-0,0556
$a_3 = a_5 =$	-0,5506	$b_3 = b_5 =$	1,529	$c_3 = -c_5 =$	-0,3620
$a_4 =$	0,1929	$b_4 =$	0,563	$c_4 =$	0

Somit erhält man nach Gl. (16) die 10^3 fachen Werte:

$\varrho'_{00} = \varrho'_{70} =$	2,998 275	$\tau'_{00} = -\tau'_{70} =$	34,874 960
$\varrho'_{10} = \varrho'_{60} =$	1,478 953	$\tau'_{10} = -\tau'_{60} =$	7,655 296
$\varrho'_{20} = \varrho'_{50} =$	0,141 501	$\tau'_{20} = -\tau'_{50} =$	1,537 338
$\varrho'_{30} = \varrho'_{40} =$	0,071 025	$\tau'_{30} = -\tau'_{40} =$	0,271 078.

Durch das Einsetzen dieser Zahlen in die Ausdrücke (19a) bestimmt man jetzt die neuen Beiwerte:

$$Z'_{s_0 s_0} = 4,198\ 931, \quad Z'_{s_0 s_1} = Z'_{s_0 s_7} = -2,947\ 163, \quad Z'_{s_0 s_2} = Z'_{s_0 s_6} = 1,035\ 995,$$

$$Z'_{s_0 s_3} = Z'_{s_0 s_5} = 0,000\ 391, \quad Z'_{s_0 s_4} = 0,000\ 161.$$

Nun wiederholen sich bei der Berechnung der neuen Zahlen (22) mit neuen Abkürzungen A' , B' usf. die schon einmal gezeigten Operationen, worauf jetzt auch die neuen Belastungsglieder nach Gl. (20) zu ermitteln sind. Man hat dann die Lösung des Systems (18), wobei die Unbekannten nach Gl. (21) als Funktionen der Belastungsglieder erscheinen, z. B.

$$\nu_3 = a_0' Z'_{v_3} + a_1' Z'_{v_4} + a_2' Z'_{v_5} + \dots + a_7' Z'_{v_2}$$

$$+ c_0' Z'_{s_3} + c_1' Z'_{s_4} + \dots + c_7' Z'_{s_2},$$

$$s_7 = c_2' Z'_{v_7} + c_1' Z'_{v_0} + c_0' Z'_{v_1} + \dots + c_3' Z'_{v_5}$$

$$+ b_0' Z'_{s_7} + b_1' Z'_{s_0} + \dots + b_7' Z'_{s_6}.$$

Die Zahlen (22), a' , b' , c' lauten:

$a_0' =$	0,277 406	$b_0' =$	14,256 71	$c_0' = c_1' =$	0,653 713
$a_1' = a_7' =$	0,071 417	$b_1' = b_7' =$	11,308 34	$c_2' = c_7' =$	0,909 866
$a_2' = a_6' =$	0,059 562	$b_2' = b_6' =$	5,091 77	$c_3' = c_6' =$	0,859 811
$a_3' = a_5' =$	0,118 290	$b_3' = b_5' =$	-0,297 59	$c_4' = c_5' =$	0,674 446
$a_4' =$	0,149 552	$b_4' =$	-2,336 54.		

Weiterhin wird nun die Momentenfläche infolge einer Last in Richtung des Riegels 07 (Abb. 7) berechnet.

Alle Belastungsglieder, außer $Z'_{s_0} = Z'_{s_0} = 1$, werden in diesem Fall Null. Wenn man dieses in die Lösungen einsetzt, ergeben sich zuerst ohne Zwischenrechnung die Unbekannten

$$\nu_0 = \nu_7 = c_0', \quad \nu_1 = \nu_6 = c_2', \quad \nu_2 = \nu_5 = c_3', \quad \nu_3 = \nu_4 = c_4',$$

$$s_0 = b_0', \quad s_1 = s_7 = b_1', \quad s_2 = s_6 = b_2', \quad s_3 = s_5 = b_3', \quad s_4 = b_4'$$

und dann, nach Gl. (12) bzw. (17) mit den a , b , c bzw. ϱ' -Zahlen, die Unbekannten:

$$\varrho_0 = \varrho_7 = -0,101\ 397 \quad \tau_0 = -\tau_7 = -0,159\ 252$$

$$\varrho_1 = \varrho_6 = -0,071\ 427 \quad \tau_1 = -\tau_6 = -0,350\ 658$$

$$\varrho_2 = \varrho_5 = -0,030\ 783 \quad \tau_2 = -\tau_5 = -0,316\ 470$$

$$\varrho_3 = \varrho_4 = -0,003\ 329 \quad \tau_3 = -\tau_4 = -0,122\ 722.$$

Endlich erhält man aus den Beziehungen (4) u. (5) mit $\mathfrak{M} = 0$ (Knotenbelastung) alle Balkenendmomente, und zwar die Biegemomente M^x , M^y , die Drillungsmomente M^z in den Riegeln bzw. M^r , M^t und M^v in den Stielen. Diese Momente sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Die Momentenfläche infolge einer Belastung nach Abb. 7.

$M_{01}^x = M_{70}^x = -M_{07}^x = -M_{70}^x =$	-0,588 06	$M_{01}^y = M_{70}^y =$	-1,328 26
$M_{12}^x = M_{65}^x = -M_{10}^x = -M_{07}^x =$	-0,180 36	$M_{12}^y = M_{65}^y =$	-0,065 73
$M_{23}^x = M_{54}^x = -M_{21}^x = -M_{58}^x =$	0,330 54	$M_{23}^y = M_{54}^y =$	0,676 48
$M_{34}^x = M_{43}^x = -M_{32}^x = -M_{45}^x =$	0,225 57	$M_{34}^y = M_{43}^y =$	0,658 32
		$M_{45}^y = M_{32}^y =$	-0,037 05
$M_{01}^z = M_{67}^z = -M_{10}^z = -M_{78}^z =$	0,138 37	$M_{06}^y = M_{11}^y =$	-1,154 47
$M_{12}^z = M_{56}^z = -M_{21}^z = -M_{65}^z =$	-0,088 38	$M_{07}^y = M_{10}^y =$	-2,165 49
$M_{23}^z = M_{45}^z = -M_{32}^z = -M_{54}^z =$	-0,240 07	$M_{70}^y = M_{07}^y =$	-2,319 33
$M_{34}^z =$	-0,286 64		
$M_{70}^z =$	-0,270 82		
$M_0^r = M_7^r =$	3,213 35	$M_0^t = -M_7^t =$	0,501 63
$M_1^r = M_6^r =$	2,042 24	$M_1^t = -M_6^t =$	1,013 03
$M_2^r = M_5^r =$	0,567 29	$M_2^t = -M_5^t =$	0,840 82
$M_3^r = M_4^r =$	-0,372 42	$M_3^t = -M_4^t =$	0,309 13.

Knickspannungsgleichungen für den elastischen und unelastischen Bereich mit Hilfe der allgemeinen Knickgleichung.

Von Dr.-Ing. K. Hoost, Danzig.

Alle Rechte vorbehalten.

Eine Theorie für den elastischen Bereich der Knickspannung ist durch die von Euler vor bald 200 Jahren aufgestellte Gleichung eindeutig gegeben. Da aber im unelastischen Gebiet, in dem die Stauchungszahl eine veränderliche Größe ist, die Eulersche Knicktheorie sich als nicht zutreffend erwies, suchte man durch empirische Formeln Berechnungsgrundlagen zu erhalten. So entstanden die Knickgleichungen von Tetmayer, Ostenfeld, Engesser, von Kármán u. a. Aber erst dem Altmeister des Brückenbaues, Krohn, war es vorbehalten, auf theoretischem Gebiet in seiner im Jahre 1923 erschienenen Abhandlung „Knickfestigkeit“ am weitesten dem Ziel einer exakten Lösung näher zu kommen. Leider verlangt die Anwendung seiner Formeln eine umfangreiche Arbeit. Krohn hat deshalb bereits für den Kármánschen und Tetmayerschen Versuchsstoff Näherungslösungen mit einer ganz bedeutenden Genauigkeit errechnet.

Setzt man nun die Wirkung der variablen Stauchungszahl gleich der einer variablen exzentrischen Angriffslinie der Knickkraft, so kann die exakte Krohnsche Knickgleichung auf eine einfache und klare Form gebracht werden. Diese bietet eine Grundlage für die Aufstellung von praktischen Knickspannungsgleichungen, welche durchweg auf die Eulersche Knickgleichung zurückgeführt sind.

Die in der Abhandlung „Knickfestigkeit“ aufgestellte Lösung

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma_k}{D_k}}} \cdot \arccos \frac{\frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k}{1 + \frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k}$$

stellt eine Knickgleichung für den allgemeinen Fall dar unter Berücksichtigung, daß die Stauchungszahl D mit der Spannung veränderlich ist.

Da die Formänderungs- und Spannungsverhältnisse eines Stabes im mittleren, den meist gefährdeten Querschnitt fast stets maßgebend sind, ist in der von Krohn abgeleiteten Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Ps + M}{JK} = \frac{P(s + y)}{JK}$$

folgende Annahme unbedingt zulässig.

Für die beiden Größen s und K , wobei s eine Strecke und K ein mittleres Stauchungsmaß bedeutet, können diejenigen Werte eingesetzt werden, die dem mittleren Querschnitt entsprechen. Ferner sind diese Größen für die ganze Stablänge als unveränderlich anzunehmen.

Unter Berücksichtigung dieser Näherungswerte ist die allgemeine Knickgleichung auf einem anderen Wege ermittelt. Ein Stab, der in der Entfernung s exzentrisch belastet wird, biegt sich um die Größe b aus (s. Abb. 1).

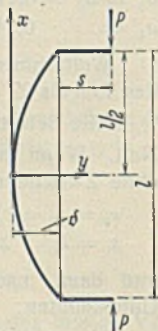


Abb. 1.

Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet dann:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{DJ} = \frac{P}{DJ} (s + b - y).$$

D ist eine mittlere Stauchungszahl. Diese wird näherungsweise für die ganze Stablänge als unveränderlich angenommen. Ein solche Annahme kann als zutreffend bezeichnet werden, da mit wachsendem Biegemoment von den beiden Grenzspannungen in den äußersten Fasern und somit auch von den entsprechenden Stauchungszahlen sich die eine vergrößert, die andere verkleinert.

Führt man nun für $\frac{P}{DJ}$ den Wert K^2 und für $(s + b - y)$ die Größe $-Z$ ein, so wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 Z}{dx^2} = -K^2 Z.$$

Integriert gibt diese Differentialgleichung folgenden Wert:

$$Z = -(s + b - y) = C_1 \cdot \sin(Kx) + C_2 \cdot \cos(Kx).$$

In dieser Gleichung sind C_1 und C_2 Integrationsbeiwerte. Da im Nullpunkt folgende Bedingungen bestehen:

$$x = 0; \quad y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

ergibt sich:

$$C_2 = -(s + b) \text{ und } C_1 = 0.$$

Werden diese Werte in die Gleichung für Z eingesetzt, so erhält man:

$$-(s + b - y) = -(s + b) \cos(Kx) \quad y = (s + b)[1 - \cos(Kx)].$$

Ferner ist für $x = \frac{l}{2}$; $y = b$. Die Ausbiegung des exzentrisch belasteten Stabes errechnet sich sodann zu:

$$b = (s + b) \left[1 - \cos \left(K \cdot \frac{l}{2} \right) \right] = s - b \cdot \cos \left(K \cdot \frac{l}{2} \right) + b - s \cdot \cos \left(K \cdot \frac{l}{2} \right).$$

$$b = s \left[\frac{1}{\cos \left(K \cdot \frac{l}{2} \right)} - 1 \right] = s \cdot \frac{1 - \cos \left(K \cdot \frac{l}{2} \right)}{\cos \left(K \cdot \frac{l}{2} \right)}.$$

Mit $K = \sqrt{\frac{P}{DJ}}$ erhält man für $K \cdot \frac{l}{2}$ folgenden Wert:

$$K \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{DJ}} = \frac{l}{2i} \sqrt{\frac{\sigma}{D}} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{D}}.$$

Die Gleichung für b ergibt sodann folgenden Ausdruck:

$$(b + s) \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{D}} = s$$

$$\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{D}} = \frac{s}{b + s}.$$

Schließlich wird:

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \cdot \arccos \left(\frac{s}{b + s} \right)$$

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \cdot \arccos \left(\frac{s}{1 + \frac{s}{b}} \right).$$

Aus dieser und der exakten Lösung von Krohn ist nunmehr zu folgern:

$$\frac{s}{b} = \frac{\sigma_k}{D_k} \left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k.$$

Setzt man $D = E$ dem Elastizitätsmodul, so wird $\left(\frac{dD}{d\sigma} \right)_k = 0$ und damit $s = 0$.

$$\text{Dann ergibt sich } \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \text{ und } \lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\sigma}{D}}} \text{ oder } \sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Somit erhält man bei konstanter Stauchungszahl $D = E$ oder einem Exzentrizitätsmaß $s = 0$ die Eulersche Gleichung.

$$\text{Wird } \sigma = \frac{P}{F} \text{ und } \frac{s}{b + s} = \gamma \text{ gesetzt, so ist } P = \frac{4DJ}{l^2} (\arccos \gamma)^2.$$

Löst man den arccos Wert in eine Reihe auf, so ergibt sich:

$$P = \frac{4DJ}{l^2} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{1}{6} \gamma^3 \dots \right)^2.$$

Hierbei wird das erste Reihenglied dieser Gleichung die Kármánsche Formel:

$$P = \frac{\pi^2 DJ}{l^2}.$$

Dieser Näherungsausdruck liefert somit zu große Werte, wie auch ein Vergleich mit den Versuchsergebnissen gezeigt hat. Auch bei der Aufstellung des Knickmoduls in der Abhandlung von Rein „Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle“ ist der Kármánsche Knickmodul erst nach Hinzufügung eines Zusatzgliedes zu gebrauchen.

$$\text{Bezeichnet man nun in der Gleichung } \sigma = \frac{4D}{l^2} (\arccos \frac{s}{b + s})^2$$

den Wert $\arccos \frac{s}{b + s}$ mit dem Ausdrucke α , so wird die Knickspannung allgemein:

$$\sigma = \frac{4D}{l^2} \cdot \alpha^2.$$

Im elastischen Bereich ergibt sich mit $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{s}{b + s}$ für $s = 0$ der Wert $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Mit D dem Stauchungsmaß gleich dem Elastizitätsmodul E erhält man sodann die Eulersche Gleichung

$$\sigma_e = \frac{4E}{l^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{E\pi^2}{l^2}.$$

Nimmt man diese Gleichung als Grundlage der zu bestimmenden Knickspannungswerte, so kann man schreiben:

$$\sigma = \sigma_e \cdot \frac{D}{E} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot 4}{\pi^2} = \sigma_e \cdot 0,4053 \cdot \frac{D}{E} \cdot \alpha^2 = \sigma_e \cdot \beta.$$

Werden aus den Tabellen der Krohnschen Abhandlung „Knickfestigkeit“ die Werte für D

$$\alpha = \arccos \cdot \frac{\frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}}{1 + \frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}}$$

und λ in die Gleichung eingesetzt, so ergeben sich folgende Werte der Knickspannung:

Für $\lambda = 92,6$, $D = E = 2170 \text{ t/cm}^2$ und $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot 1,571$ wird

$$\sigma = \sigma_e \cdot 0,4053 \cdot \frac{2170}{2170} \cdot 1,571^2 = \sigma_e \cdot 1,0.$$

Hierbei ergibt sich $\beta = 1,0$.

Für $\lambda = 85,4$, $D = 2166 \text{ t/cm}^2$ und $\alpha = 1,508$ wird

$$\sigma = \sigma_e \cdot 0,4053 \cdot \frac{2166}{2170} \cdot 1,508^2 = \sigma_e \cdot 0,923; \quad \beta = 0,923.$$

Für $\lambda = 74,7$, $D = 2144 \text{ t/cm}^2$ und $\alpha = 1,374$ wird $\beta = 0,755$

$\lambda = 68,6$, $D = 2122$ „ „ $\alpha = 1,29$ „ $\beta = 0,660$

$\lambda = 61,2$, $D = 2089$ „ „ $\alpha = 1,180$ „ $\beta = 0,543$

$\lambda = 53,1$, $D = 2071$ „ „ $\alpha = 1,034$ „ $\beta = 0,418$

$\lambda = 45,2$, $D = 2056$ „ „ $\alpha = 0,886$ „ $\beta = 0,303$

$\lambda = 35,5$, $D = 2029$ „ „ $\alpha = 0,702$ „ $\beta = 0,1867$

$\lambda = 25,8$, $D = 1973$ „ „ $\alpha = 0,52$ „ $\beta = 0,1$

$\lambda = 16,5$, $D = 1833$ „ „ $\alpha = 0,3462$ „ $\beta = 0,0411$

$\lambda = 3,7$, $D = 1083 \text{ t/cm}$ „ „ $\alpha = 0,1020$ „ $\beta = 0,00211$.

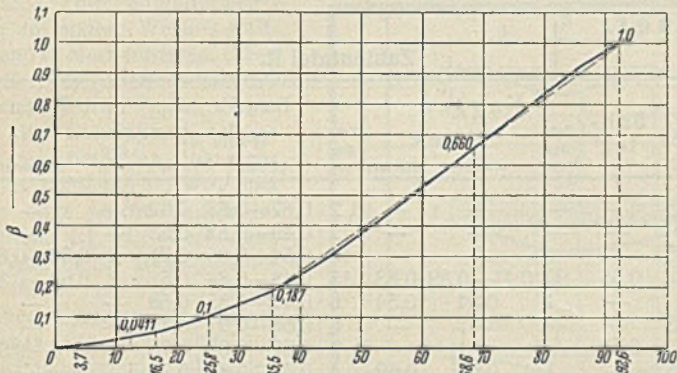


Abb. 2.

Werden die β -Werte als Ordinaten der zugehörigen Abszissen-Werte λ aufgetragen (s. Abb. 2), so erhält man zwischen $\lambda = 35,5$ und $\lambda = 92,6$, d. h. bis zum Anschluß an die Eulerhyperbel angenähert, eine gerade Linie, ebenso zwischen $\lambda = 3,7$ und $\lambda = 16,5$.

Dagegen zwischen $\lambda = 16,5$ und $\lambda = 35,5$ ist die β -Linie eine Kurve vom n^{ten} Grad, wobei n noch ermittelt werden soll.

Mit $\frac{0,813}{57,1} \cdot x = 0,01424 x = y$ und $y = \beta - 0,187$ sowie $x = \lambda - 35,5$ ergibt sich die Gleichung für β zwischen $\lambda = 35,5$ und $\lambda = 92,6$ zu $\beta = 0,187 + \frac{0,813}{57,1} (\lambda - 35,5)$.

Die Gleichung der Knickspannung für $\lambda = 35,5$ bis $\lambda = 92,6$ erhält somit folgenden Wert:

$$\sigma = \sigma_e [0,01424 (\lambda - 35,5) + 0,187] = \sigma_e [0,01424 \lambda - 0,318].$$

Die Gleichung für β zwischen $\lambda = 16,5$ und $\lambda = 35,5$ ergibt sich folgendermaßen:

Aus der graphischen Darstellung der β -Kurve ist für

$$x = 9,3, y = 0,0586$$

und für

$$x = 19,0, y = 0,1456.$$

Aus der Funktion $y = A x^n$ erhält man: $\log y = \log A + n \log x$.

Werden die Werte für x und y eingesetzt, so ergibt sich:

$$\log 0,1456 = \log A + n \log 19,0,$$

$$\log 0,0586 = \log A + n \log 9,3,$$

$$n = \frac{2,485}{2,043} = 1,22$$

und

$$A = 0,00393,$$

somit

$$y = 0,00393 x^{1,22}.$$

Aus der graphischen Darstellung für die β -Kurve ergibt sich mit $y = \beta - 0,0411$ sowie $x = \lambda - 16,5$

$$\beta = 0,00393 (\lambda - 16,5)^{1,22} + 0,0411.$$

Die Gleichung der Knickspannung zwischen $\lambda = 35,5$ bis $\lambda = 16,5$ erhält somit den folgenden Wert:

$$\sigma = \sigma_e [0,00393 (\lambda - 16,5)^{1,22} - 0,0411].$$

Die Gleichung für β zwischen $\lambda = 3,7$ bis $\lambda = 16,5$ ergibt sich mit

$$y = \frac{0,0390 x}{12,8} = 0,00305 x \text{ und } y = \beta - 0,00211 \text{ sowie } x = \lambda - 3,7 \text{ zu}$$

$$\beta = 0,00305 (\lambda - 3,7) + 0,00211.$$

Die Gleichung der Knickspannung für $\lambda = 3,7$ bis $\lambda = 16,5$ erhält dann folgenden Wert:

$$\sigma = \sigma_e [0,00305 (\lambda - 3,7) + 0,00211]$$

$$\sigma = \sigma_e [0,00305 \lambda - 0,00918].$$

Die Knickspannungsgleichungen sind somit für den elastischen und unelastischen Bereich die folgenden:

$$\sigma = \sigma_e = \frac{E \pi^2}{\lambda^2} \quad \text{für } \lambda = > 92,6$$

$$\sigma = \sigma_e [0,0142 \lambda - 0,318] \quad \text{für } \lambda = 92,6 \text{ bis } 35,5$$

$$\sigma = \sigma_e [0,00393 (\lambda - 16,5)^{1,22} - 0,0411] \quad \text{für } \lambda = 35,5 \text{ bis } 16,5$$

$$\sigma = \sigma_e [0,00305 \lambda - 0,00918] \quad \text{für } \lambda = 16,5 \text{ bis } 3,7.$$

Da in der Stahlbautechnik Stabglieder unter einem Schlankheitsgrad von $\lambda = 35,5$ nur sehr selten oder gar nicht vorkommen, kann man den folgenden Wert als eine einfache Knickgleichung im unelastischen Bereich bezeichnen.

$$\sigma = \sigma_e (0,0142 \lambda - 0,318).$$

Hierbei ist das Stahlmaterial der Kármán'schen Knickversuche mit folgenden Festigkeitseigenschaften zugrunde gelegt:

$$\text{Fließgrenze } \sigma_f = 3,25 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{Gleichmaßgrenze } \sigma_g = 2,60 \text{ „}$$

$$\text{Dehnungszahl } E = 21,70 \text{ „}$$

In der Abhandlung „Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle“ von W. Rein (s. Tafel 5 u. 7) sind Versuchsergebnisse der auf Knicken beanspruchten Stäbe St 37 und St Si enthalten. Diese Versuchsreihen lassen sich nur teilweise verwenden, da infolge zu großer Streuung der Knickspannungen nur wenige Werte für die Berechnung in Frage kommen. Die Ergebnisse für St 48 sind vollkommen unberücksichtigt geblieben.

Aus Abb. 26 u. 28 der Abhandlung von Rein ersieht man, daß bei St 37 für $\lambda \sim 90$ und bei St Si für $\lambda \sim 70$ die Knickspannungslinie nahezu konstant in der Höhe der Streckgrenze $\sigma_s \sim 2450 \text{ kg/cm}^2$ bzw. $\sigma_s \sim 3740 \text{ kg/cm}^2$ bis $\lambda \sim 23$ verläuft.

Zahlentafel 1 und 2.

Versuch	$\lambda = \frac{l}{i}$	$D \cdot 10^{-3}$ kg/cm ²	σ_k kg/cm ²	$\frac{\sigma}{D} \cdot 100$	$\frac{dD}{d\sigma}$	$\epsilon = \frac{\sigma}{D} \cdot \frac{dD}{d\sigma}$	$\gamma = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}$	$\alpha = \arccos \cdot \gamma$	$\beta = 0,4053 \cdot \frac{D}{E} \cdot \alpha^2$
St 37.									
1	106,5	2100	1825	0,087	0	0	0	1,571	1,0
6	105,3	2100	1895	0,0905	0	0	0	1,571	1,0
9	96,0	2100	2282	0,1085	0	0	0	1,571	1,0
17	70,6	2086	2452	0,117	465	0,545	0,353	1,21	0,59
27	40,4	2107	2454	0,116	2910	3,38	0,772	0,69	0,193
St Si.									
1	120,5	2087 = ~ 2090	1470	0,0705	0	0	0	1,571	1,0
3	106,8	2092 = ~ 2090	1874	0,090	0	0	0	1,571	1,0
7	85,5	2091 = ~ 2090	2888	0,1385	0	0	0	1,571	1,0
9	80,9	2087 = ~ 2090	3278	0,157	0	0	0	1,571	1,0
11	79,3	2091 = ~ 2090	3441	0,1635	0	0	0	1,571	1,0
13	75,2	2089 = ~ 2090	3630	0,174	0	0	0	1,571	1,0
16	69,5	2084	3740	0,179	57,5	0,103	0,093	1,48	0,88
18	65,9	2087	3737	0,179	122	0,218	0,179	1,39	0,785
23	40,7	2101	3722	0,177	1110	1,94	0,66	0,85	0,296

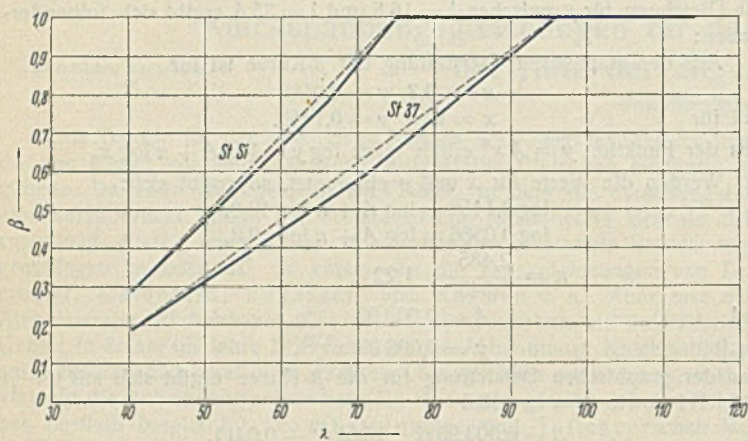


Abb. 3.

Auch Broszko kommt in seiner Abhandlung „Beitrag zur allgemeinen Lösung des Knickproblems“ zu demselben Ergebnis. Bis zur gradlinigen horizontalen Führung der Knickspannungslinie zwischen $\lambda \approx 90$ bzw. $\lambda \approx 70$ und $\lambda = 23$ kann man angenähert die Eulerspannungslinie für $\lambda = > 90$ bzw. > 70 annehmen. Dieses ist auch in der Abhandlung von Rein bereits geschehen. Mit den in der vorstehenden Zusammenstellung

(s. Zahlentafel 1 u. 2, S. 31) rechnerisch ermittelten Größen für α ergeben sich die Minderungsfaktoren β für die Eulerwerte. Diese zeigen, daß die Annahme einer Euler-Kurve und einer Geraden voll berechtigt sind. Da die Ausrechnung mit dem Rechenschieber vorgenommen wurde, ergeben sich Fehler, die sich aber in den zulässigen Grenzen halten.

Die vorliegenden β -Linien für St 37 und St 31 zeigen einen ähnlichen Verlauf (Abb. 3), wie ihn die β -Linie für das Kármánsche Material ergeben hat. Auch hier kann man deshalb die β -Werte bei angenähert geradlinigem Verlauf in eine Gleichung kleiden.

1. Die Gleichung für β zwischen $\lambda = 40,4$ und $\lambda = 70,6$ ergibt:
 $y_0 = \frac{0,807}{30,2} \cdot x_0 = 0,0267 x_0$. Hierbei ist $y_0 = \beta - 0,193$ und $x_0 = \lambda - 40,4$.

Somit wird: $\beta - 0,193 = 0,0267 (\lambda - 40,4)$ und
 $\sigma = \sigma_E [0,0267 (\lambda - 40,4) + 0,193] = \sigma_E [0,0267 \lambda - 0,887]$.

2. Die Gleichung für β zwischen $\lambda = 40,7$ und $\lambda = 69,5$ ergibt:
 $y_0 = \frac{0,704}{28,8} \cdot x_0$; $y_0 = 0,0244 x_0$. Hierbei ist $y_0 = \beta - 0,296$ und $x_0 = \lambda - 40,7$.

Somit wird: $\beta - 0,296 = 0,0244 (\lambda - 40,7)$
 $\sigma = \sigma_E [0,0244 (\lambda - 40,7) + 0,296]$
 $\sigma = \sigma_E [0,0244 \lambda - 0,699]$.

Auf Grund der aufgestellten Knickgleichung soll in einer späteren Abhandlung auch das Gebiet der exzentrischen Knickung im elastischen und unelastischen Bereich entwickelt werden.

Verschiedenes.

Versuche des Komitees für Elektroschweißung der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften, mitgeteilt von Prof. Müllenhoff und Dipl.-Ing. Fröhlich.

V. Paton und Schewernitzky: Verstärkung genietet Verbindungen durch geschweißte Flankennähte.

Nach den russischen Vorschriften sind bei genieteten und geschweißten Verbindungen die Schweißnähte für die ganze auftretende Kraft zu bemessen. Die Versuche sollten feststellen, welchen Teil der Kraft die Niete übernehmen.

Da die Schweißnähte starrer sind als die Nietungen, wurde angenommen, daß beim Bruch die Nähte bis zur Grenze ihrer Tragfähigkeit belastet sind, während die Niete nicht voll ausgenutzt sind und erst nach dem Bruch der Nähte zerstört werden.

Ist also P_S die Tragkraft einer Schweißnaht von der Fläche F_S , P_N und F_N die Tragkraft und Fläche einer Nietverbindung, so ist die Tragkraft der vereinigten gemischten Verbindung

$$P = k P_N + P_S$$

Die Versuchstücke (s. Abb.) bestanden aus zwei □-Profilen und zwei 18 mm starken Platten, die miteinander verbunden wurden

1. durch je vier Niete von 16 mm Durchmesser.
2. durch je zwei Flankennähte ($a = 7$ mm, $L = 60$ bzw. 120 mm),
3. durch je vier Niete und je zwei Flankennähte.

Die Zahlentafel I gibt die Ergebnisse der Versuche. In Zahlentafel II sind sie mit den Ergebnissen von Bühler, Kayser und Bryla gegenübergestellt.

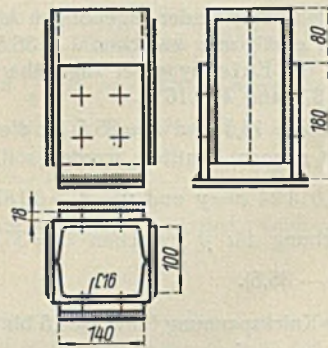
Es ergibt sich also nach Bühler Kayser Bryla Paton
 bei $F_N:F_S = 1$ $k = 0,66$ $0,63$ $0,61$ $0,72$
 bei $F_N:F_S = \frac{1}{2}$ $k = 0,58$ — $0,75$ $0,82$.

Zahlentafel I.

Versuchsstück	Länge der Naht cm	Bruchlast P P in t		P_S	$P - P_S$	$k = \frac{P - P_S}{P_N}$		Art des Bruches
		einzel	Mittel			einzel	Mittel	
Nur genietet 1 ₁ 1 ₂	—	64,46	64,83	—	—	—	—	4 Niete der einen Seite zerstört
	—	65,20	64,83	—	—	—	—	
Nur geschweißt 2 ₁ 2 ₂ 3 ₁ 3 ₂	6	65,64	66,67	66,67	—	—	—	2 Nähte einer Seite zerstört
	—	67,71	66,67	66,67	—	—	—	3 Nähte zerstört
	12	113,00	106,55	106,55	—	—	—	3 Nähte zerstört
	—	100,90	106,55	106,55	—	—	—	3 Nähte zerstört
Genietet und geschweißt 4 ₁ 4 ₂	6	106,70	113,3	66,67	40,43	0,62	0,72	4 Nähte u. 5 Niete zerstört
	—	119,90	113,3	66,67	53,23	0,82	0,72	4 Nähte u. 6 Niete zerstört
5 ₁ 5 ₂	—	169,90	159,85	106,55	58,45	0,90	—	4 Nähte u. 7 Niete zerstört
	12	154,80	159,85	106,55	48,25	0,75	0,82	4 Nähte u. 8 Niete zerstört

Zahlentafel II.

Verhältnis $F_N:F_S$	Bühler	Kayser		Bryla		Paton	
		Zahl der Vers.	Werte k	Zahl der Vers.	Werte k	Zahl der Vers.	Werte k
1:0,25	—	—	—	2	0,82—0,83	0,82	—
1:0,5	—	—	—	12	0,49—0,82	0,65	—
1:0,75	—	—	—	10	0,54—0,85	0,71	2
1:1	0,66	99	0,41—0,89	0,63	15	0,48—0,84	0,61
1:1,5	—	1	0,54	0,54	6	0,47—0,85	0,68
1:1,75	—	—	—	—	6	0,66—0,91	0,75
1:2	0,58	—	—	—	2	0,67—0,83	0,75
1:2,25	—	1	0,69	0,69	4	0,64—0,83	0,74
1:3	—	1	0,74	0,74	4	0,66—0,89	0,79



Außer der Länge der Nähte dürfte aber auch die Stabbreite, der Randabstand der Niete und natürlich die Güte der Arbeit wesentlichen Einfluß haben. Für Verstärkungsarbeiten ist aber besonders das Verhalten solcher Verbindungen wichtig, bei denen die Schweißnaht angebracht wird, während die Niete unter der Wirkung einer Vorlast stehen. (Vgl. Kommerell u. Bierett, Bautechn. 1932, Heft 42.)

Zuschrift an die Schriftleitung.

Zuschrift zum Aufsatz „Das Stahlskelett des Staatsarchivs in Königsberg (Pr.)“ (Stahlbau 1933, Heft 26, S. 207). Der Vollständigkeit halber sei noch darauf hingewiesen, daß der Entwurf und die Bauleitung des Staatsarchivneubaus in den Händen des Herrn Regierungsbaurates Liebenthal von der Regierung in Königsberg lagen; Entwurf und Berechnung der Stahlkonstruktion wurden vom Bauingenieurbüro Josef Gingerich in Königsberg bearbeitet. Zimpel.

INHALT: Berechnung räumlicher Rahmen nach der Deformationsmethode. — Knickspannungsgleichungen für den elastischen und unelastischen Bereich mit Hilfe der allgemeinen Knickgleichung. — Verschiedenes: Versuche des Komitees für Elektroschweißung der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften. — Zuschrift an die Schriftleitung.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8. Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.