

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule
Fernsprecher: C I Steinplatz 0011
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

7. Jahrgang

BERLIN, 3. August 1934

Heft 16

Zur Berechnung gedrungener Knickstäbe mit beliebig veränderlichem Querschnitt.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Prof. Dr.-Ing. E. Chwalla, Brünn.

A. Allgemeines. Schon Euler¹⁾, der als erster die Existenz einer Grenze elastischer Stabilität bemerkte, und Lagrange²⁾, der den Einfluß der Lagerungsbedingungen und das Wesen der „höheren Knickwurzeln“ klärte, haben ihre Untersuchungen auf Stäbe mit veränderlichem Querschnitt erstreckt. In den letzten Jahrzehnten des aufstrebenden Stahl- und Leichtbaues erlangten die Stabilitätsprobleme große Bedeutung und es wurde daher auch der Druckstab veränderlichen Querschnitts vielfach behandelt; die einschlägige Literatur³⁾ ist jedoch einigermaßen zerstreut und blieb vielfach unbekannt, so daß manches längst geklärte Sonderproblem wiederholt den Gegenstand der Untersuchung bildete. Allen vorhandenen Arbeiten ist die Voraussetzung des Hookeschen Formänderungsgesetzes (also die Beschränkung der Knickspannungen auf Werte unterhalb der Proportionalitätsgrenze des Werkstoffes) gemeinsam.

Von den Lösungen, die sich auf Stäbe mit analytisch festgelegten Querschnittsgesetzen beziehen, seien einige der von Dinnik⁴⁾ gefundenen hier angeführt. Sie gelten für Stäbe nach Bild 1a, deren Querschnitts-Trägheitsmomente (bezogen auf die zur Ausknickungsebene senkrechte Hauptachse) in einem Fall A das Gesetz $J_x = J_0 e^{-\frac{kx}{l}}$ und in einem Fall B das Gesetz $J_x = J_0 \left(1 - k \frac{x}{l}\right)^m$ befolgen; hierbei ist die Konstante k durch das Verhältnis J_1/J_0 bestimmt, während $m = 1, 2, 3, \dots$

betragen kann. Die maßgebende Knicklast im Hookeschen Bereich beträgt dann $P_k = \alpha \cdot \frac{E J_0}{l^2}$, wobei die Beiwerte α für den Fall beiderseits

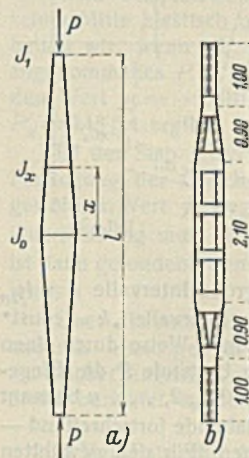


Bild 1.

gelenkiger Lagerung sowie für beiderseits feste Einspannung aus der nachfolgenden Tabelle entnommen werden können. Für einige andere Querschnittsgesetze finden sich unmittelbar anwendbare Lösungen in den Arbeiten von Bleich⁵⁾, Dinnik⁴⁾, Teichmann⁶⁾ und Tölke⁷⁾.

Zu den Problemen, die den Druckstab veränderlichen Querschnitts betreffen, gehört auch das Minimalproblem, jenes Querschnittsgesetz (den sogenannten „günstigsten Längsschnitt“ des Stabes) zu finden, das bei vorgegebener Stablänge und Druckkraft das Minimum an Materialaufwand und damit auch das Minimum an Eigengewicht verbürgt. Die Untersuchung dieses Problems, die wir Lagrange²⁾, Clausen⁸⁾, Nicolai⁹⁾, Blasius¹⁰⁾, Boyd¹¹⁾ u. a. verdanken, zeigte, daß bei drehsymmetrischen Stäben durch die Wahl des Querschnittsgesetzes

Tabelle der Beiwerte „ α “.

$J_1/J_0 =$	Gelenkige Lagerung							Feste Einspannung						
	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Fall A	0	1,27	5,68	7,34	8,42	9,23	9,87	0	3,29	17,57	24,92	30,55	35,29	39,48
Fall B														
$m = 1$	3,78	—	7,01	7,87	8,61	9,27	9,87	5,78	—	20,35	26,16	31,03	35,42	39,48
$m = 2$	1,0	5,40	6,37	7,61	8,51	9,24	9,87	1,0	14,39	18,43	25,54	30,79	35,35	39,48
$m = 3$	0	—	6,14	7,53	8,50	9,23	9,87	0	—	18,44	25,34	30,71	35,32	39,48
$m = 4$	0	4,31	6,02	7,48	8,47	9,23	9,87	0	13,30	18,23	25,23	30,68	35,33	39,48

¹⁾ L. Euler, Additamentum I der Abhdlg. „Methodus Inveniendi...“, 1744, S. 245 und Mem. Acad. d. Sciences, Berlin, 13, 1759, S. 252, und Acta Acad. Petropol., 2, 1780, S. 121, 146, 163; J. L. Lagrange, Miscell. Taurinensia, Tom. V, 1770/73; N. Clausen, Bull. physico-math. de l'Acad. St. Petersburg, 9, 1851, S. 368; F. Engeßer, Z. d. Oe. IAV 1893, 1909, 1913; L. Vianello, Z. d. Vdl 1898; A. Francke, Z. f. Math. u. Physik 1901 und Hannov. Z. f. Arch. Ingw. 1907; E. Nicolai, Ber. Polyt. Inst. St. Petersburg 1907; J. Dondorff, Dissertation, Düsseldorf 1907; H. Kayser, Eisenbau 1910 u. 1916; A. Morley, Engng. (London), 97, 1914 u. 107, 1917; H. Blasius, Z. f. Math. Physik 1914 und Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei 1917/18; J. Case, Engng. (London), 98, 1914 und 106, 1918; A. Dinnik, Abhdlg. Polyt. Inst. Ekaterinoslav 1914 und Westnik Ingenerov 1927 und Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 51, 1929 und 54, 1932; K. Hoening, Eisenbau 1915; V. Lewe, Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei 1918; Akimoso Ono, Mem. Coll. Eng., Kyushu Imp. Univ. 1919; E. Elwitz, Ztrbl. d. Bauv. 1917 u. 1918; J. E. Boyd, Techn. Papers (Bur. of Standards) Nr. 152 (1920) und Bull. Nr. 25, Ohio State Univ., 1923; L. Kulka, Bautechn. 1923; F. Bleich, Theorie u. Ber. d. eis. Brücken, Berlin 1924; A. P. Czerevkov, Z. f. Flugtechn. Motorluft. 1928 u. 1929; F. Kießling, Tekn. Tidskrift 1929; F. Tölke, Bauing. 1929 u. 1930; A. Lockschin, Z. ang. Math. Mech. 1930; E. Steuermann, Ing.-Archiv 1930; A. Teichmann, Z. f. Flugtechn. Mot. 1932; Th. Beljakow, Prinzip d. virt. Biegelinie..., Charkow 1932; F. Tricomi, Atti Accad. naz. Lincei, 16, 1932; E. Frola, Atti Accad. Sci. Torino, 68, 1933; K. Pohl, Stahlbau 1933; K. Hohenesser, Z. f. Flugtechn. Mot. 1933.

$$J_x = J_0 \cos^4 \varphi, \text{ wobei } 2\varphi + \sin 2\varphi = \frac{2\pi x}{l}$$

Gewichtersparnisse von 13,4% gegenüber dem Fall konstanten Querschnitts erzielt werden können. Wird an Stelle dieses „absolut günstigsten“ Querschnittsgesetzes beispielsweise das oben unter Fall B angeführte Querschnittsgesetz zugrunde gelegt, dann sind die Extremwerte der Gewichtersparnis G kleiner und betragen nach Boyd¹⁾ für

$m = 2$	$J_1/J_0 = 0,09$	$D_1/D_0 = 0,56$	$G = 11,1\%$
3	0,11	0,57	10,5%
4	0,115	0,58	10,3%

wobei D_1/D_0 das Querschnitts-Durchmesserverhältnis bedeutet und gleichfalls ein Hookesches Idealmaterial vorausgesetzt wird.

Ist das Querschnittsgesetz in beliebiger Weise graphisch festgelegt, dann kann die Knicklast mit Hilfe des „graphischen Iterationsverfahrens“ von Vianello¹⁾ (dessen Konvergenz Trefftz²⁾ nachgewiesen hat und das von Pohl³⁾ ausgestaltet wurde) oder nach der „Methode der elastischen Gelenkkette“ von Hencky³⁾ bestimmt werden. Beide Verfahren könnten grundsätzlich auch außerhalb des Hookeschen Bereiches angewandt werden, sind dann aber ein wenig umständlicher, da der einzuführende

²⁾ E. Trefftz, Z. ang. Math. Mech. 1923, S. 275.

³⁾ H. Hencky, Eisenbau 1920, S. 437.

„Knickmodul“⁴⁾ vom Querschnittsort und der gesuchten Knicklast abhängt. Im folgenden soll nun ein anderes, rein numerisches Näherungsverfahren vorgeführt werden, das unmittelbar an das Lord Kelvinsche Krümmungskreis-Verfahren und die Integrationsmethode von L. Gümbel (Z. d. VdI 1919 u. a.) anknüpft und durch wiederholte Anwendung einer ganz elementaren Rekursionsformel auch im allgemeinsten Fall in übersichtlicher Weise rasch zum Ziel führt.

B. Symmetrisch ausgebildete Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt. Ist der Stab symmetrisch zur Halbierenden der Stablänge ausgebildet, dann ist die der tiefsten Stabilitätsgrenze zugeordnete „Knickfigur“ gleichfalls symmetrisch und wir können uns auf die Untersuchung einer der beiden Stabhälften beschränken. Im Sinne der Stabilitätstheorie haben wir nach jener Druckkraft $P = P_k$ zu fragen, unter deren Wirkung eine unendlich wenig ausgebogene Gleichgewichtsfigur $y = f(x)$ widerspruchsfrei möglich ist. Für die örtliche Krümmung dieser Gleichgewichtsfigur liefert die technische Biegelehre die Beziehung $k = \frac{M}{TJ} = \frac{Py}{TJ}$,

wobei J das Querschnittsträgheitsmoment (bezogen auf die Hauptachse senkrecht zur Ausknickungsebene) und T den Knickmodul⁴⁾ vorstellt; T hängt von der Druckspannung $\sigma = P/F$, vom Formänderungsgesetz des Werkstoffes und von der Querschnittsform ab. Die Unabhängigkeit der Größe „ TJ “ von der Ausbiegung gestattet eine beliebige Verzerrung der gesuchten, unendlich wenig ausgebogenen Gleichgewichtsfigur und gibt uns damit die Möglichkeit, die „Scheitelausbiegung y_0 “ dieser Figur frei (z. B. mit $y_0 = 1$ cm) zu wählen, ohne das Ergebnis zu beeinflussen. Wir unterteilen die halbe Stablänge in n gleich große Intervalle $a = l/2n$ und schreiben für die Krümmung in jedem dieser Intervalle „ $k = \text{const}$ “ vor, ersetzen also die Gleichgewichtsfigur in bekannter Weise durch einen $2n$ -teiligen Korbbogen. Da für eine vorgegebene Laststufe P die Biegesteifigkeiten $T_i J_i$ an allen Unterteilungsstellen $i = 0, 1, 2, \dots, n$ bekannt sind, können wir — vom Scheitelpunkt gegen das Stabende fortschreitend — die einzelnen Korbbogenordinaten leicht bestimmen. Für den gewählten Wert y_0 ergibt sich $k_0 = \frac{P y_0}{T_0 J_0}$ und damit nach Bild 2, wenn wir die unendliche Kleinheit der Ordinaten beachten, $y_1 = y_0 - a^2 \cdot \frac{k_0}{2} = y_0 - a^2 c_0$;

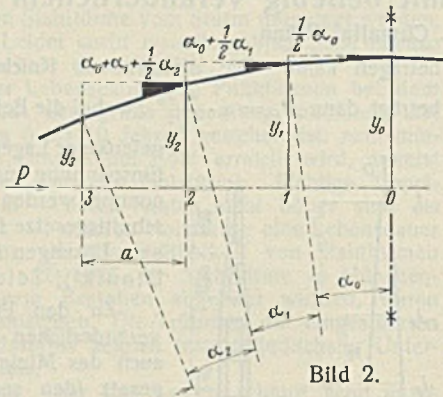


Bild 2.

diesem Wert entspricht ein $k_1 = \frac{P y_1}{T_1 J_1}$, womit sich $y_2 = y_1 - a^2 \left(c_0 + \frac{k_0 + k_1}{2} \right) = y_1 - a^2 c_1$ ergibt usw.; die Ordinaten y_i sind somit nach der einfachen Rekursionsformel

$$(I) \quad y_{i+1} = y_i - a^2 \left(c_{i-1} + \frac{k_{i-1} + k_i}{2} \right) = y_i - a^2 c_i, \quad k_i = \frac{P y_i}{T_i J_i}$$

in elementarer Weise berechenbar und müssen für $i = n$ auf $y_n = 0$ führen, wenn der Druckstab gelenkig gelagert und mit dem gesuchten Wert der Knicklast belastet ist. Wurde P zu klein angenommen, dann ergibt sich $y_n > 0$ und wurde P zu groß gewählt, dann wird $y_n < 0$. Liegen die unter der Last P auftretenden mittleren Druckspannungen innerhalb des Hookeschen Bereiches, dann ist T_i einfach durch den Elastizitätsmodul E zu ersetzen. Die Zahl der Intervalle wird je nach der erforderlichen Genauigkeit (zur Erhöhung der Genauigkeit kann für T_i, J_i auch der Intervall-Mittelwert eingesetzt werden) praktisch etwa $n = 6$ bis 20 betragen. Um den Einfluß dieser Zahl n auf das Endergebnis zu beleuchten, sei ein stählerner Modellstab der Länge $l = 64$ cm untersucht, in dessen 32 cm langem Mittelteil die Werte $F' = 4,00$ cm², $J' = 1,333$ cm⁴ und in dessen beiden Endabschnitten die Werte $F'' = 3,00$ cm², $J'' = 0,5625$ cm⁴ in Geltung stehen. Die Knicklast ist in diesem Fall auf einfache Weise exakt berechenbar und beträgt $P_k = 5,315$ t; nach dem geschilderten Näherungsverfahren würde sich mit $n = 8$ der Wert $P_k = 4,97$ und mit $n = 16$ der Wert $P_k = 5,12$ t ergeben.

Bei der Festlegung des Knickmoduls T und des Wertes P_{zul} haben wir im allgemeinen die folgenden Fälle zu unterscheiden: 1. Ist die Formänderungskurve $\sigma = \varphi(\epsilon)$ des Werkstoffes bekannt, dann können wir für jeden Querschnitt i die mittlere Druckspannung $\sigma_i = P_i/F_i$, dazu die Größe $E_i = d\sigma/d\epsilon$ und damit⁴⁾ den (für rechteckige Querschnitte exakt geltenden) Wert

$T_i = \frac{4 E E_i}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_i})^2}$ berechnen. 2. Ist vom Werkstoff nur die Proportionalitätsgrenze σ_p und die Quetschgrenze σ_Q bekannt, dann können wir

näherungsweise⁵⁾ $T_i = \frac{4 \nu E}{(1 + \nu)^2}$, $\nu = \sqrt{\frac{\sigma_Q - \sigma_i}{\sigma_Q - \sigma_p}}$ ansetzen. 3. Ist bloß die Werkstoffsorte bekannt, dann kann der Knickmodul näherungsweise⁶⁾

auch aus der Beziehung $T_i = \frac{\sigma_i (c_1 - \sigma_i)^2}{\pi^2 c_2^2}$ berechnet werden, wobei c_1 und

c_2 die Beiwerte der für dieselbe Werkstoffsorte geltenden Tetmajerschen Knickformel $\sigma_K = c_1 - c_2 \lambda$ (Knickspannung eines Stabes vom Schlankheitsgrad λ) vorstellen. 4. Ist der Druckstab nach einer amtlichen Vorschrift zu bemessen und liegt dieser Vorschrift eine unveränderliche Knicksicherheitszahl „ n “ zugrunde, dann kann T_i aus der vorgeschriebenen Knickspannungslinie abgeleitet und nach wie vor $P_{zul} = \frac{1}{n} \cdot P_k$ gesetzt werden; beispielsweise gilt nach der Oenorm für St 37 im Bereich $\sigma_K > 1,91$ t/cm² ein lineares Knickspannungsgesetz mit $c_1 = 3,1$ und

$c_2 = 0,0114$, so daß sich $T_i = \frac{\sigma_i (3,1 - \sigma_i)^2}{\pi^2 \cdot 0,0114^2}$ ergibt. 5. Ist schließlich der Stab nach einer amtlichen Vorschrift zu bemessen, der eine veränderliche, vom Schlankheitsgrad abhängige Knicksicherheitszahl zugrunde liegt, dann können wir dieser Vorschrift im Fall „ $F = \text{const}$ “ durch die Einführung des „ideellen Schlankheitsgrades λ_{id} “ Genüge leisten; λ_{id} stellt hierbei den Schlankheitsgrad jenes gedachten Druckstabes von unveränderlicher Querschnittsfigur vor, der im Hookeschen Bereiche dieselbe Knicklast wie der gegebene Druckstab besitzt. Wir haben die Knicklast P'_k im Hookeschen Bereiche nach dem geschilderten Näherungsverfahren zu ermitteln und $\lambda_{id} = \pi \sqrt{\frac{F F'}{P'_k}}$ zu bestimmen. Der gegebene Stab ist dann nach dem vorgeschriebenen ω -Verfahren genau so wie ein Stab unveränderlichen Querschnitts und der Schlankheit λ_{id} zu berechnen; seine Knicksicherheitszahl entspricht dem für $\lambda = \lambda_{id}$ zugrunde liegenden Wert. Ist außer „ n “ auch „ F “ veränderlich, dann ergeben sich innerhalb desselben Stabes verschiedene Werte für die Sicherheitszahl, was eine rationale Bemessung praktisch ausschließt und als Mangel der Vorschrift empfunden wird.

Als Beispiel sei die Berechnung der Knicklast eines Stabes aus St 37 vorgeführt, der als „gespreizter Druckstab“ nach Bild 1b ausgebildet ist und von Tölke¹⁾ behandelt wurde. Der Stab besteht aus zwei nach außen gekehrten U-Eisen NP 16, die im Mittelteil eine lichte Entfernung $e = 11$ cm aufweisen, und möge sich nach Voraussetzung wie ein „Vollstab“ verhalten. Wir unterteilen die halbe Stablänge in $n = 9$ Intervalle von $a = 32,78$ cm Länge und finden für die Unterteilungsstellen die Werte $F = \text{const} = 48,0$ cm², $J_0 = J_1 = J_2 = J_3 = 2757,0$ cm⁴, $J_4 = 1890,6$, $J_5 = 1042,6$, $J_6 = J_7 = J_8 = 505,0$ cm⁴. Um zu entscheiden, ob die Knickspannung im elastischen oder unelastischen Bereiche liegt, nehmen wir $P = F \cdot \sigma_p = 91,2$ t probeweise an, wählen $y_0 = 1$ cm und führen den geschilderten Rechnungsgang nach Formel (I) durch; es ergibt sich $y_9 = + 0,07$ cm, so daß sicher $P_k > 91,2$ t ist und in den „unelastischen“ Bereich fällt. Wir versuchen nun $P = 96,0$ t, bestimmen $\sigma = 2,0$ t/cm² und $T = 1984$ t/cm² (nach Fall 2 mit $\sigma_p = 1,9$ und $\sigma_Q = 2,4$ t/cm²) und erhalten nach Formel (I) den Wert $y_9 = - 0,008$ cm; P_k ist somit ein wenig kleiner als 96,0 t und wird nach einfacher Interpolation mit $P_k \sim 95$ t gefunden. Soll der Stab nach der deutschen Vorschrift bemessen werden, dann haben wir die für den Fall $T = E$ erhaltene (gedachte) Knicklast P'_k in die angegebene Beziehung für λ_{id} einzusetzen und die Knickzahl ω zu bestimmen; es wird $P'_k \sim 100$ t, $\lambda_{id} \sim 100$, $\omega = 2,36$ und $P_{zul} = \frac{F}{\omega} \cdot \sigma_{zul}$.

C. Unsymmetrisch ausgebildete Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt. Wir unterteilen die Stablänge l in n Intervalle der Länge $a = l/n$, zählen die Unterteilungspunkte $i = 0, 1, 2, \dots, n$ vom linken Stabende und bestimmen für diese Orte die Werte T_i, J_i . Dann wählen wir für die Ordinate y_1 einen beliebigen Wert, z. B. $y_1 = 1$ cm, berechnen das Krümmungsmaß $k_1 = \frac{P y_1}{T_1 J_1}$ und weisen k_1 dem rechts von der Stelle $i = 1$ liegenden Intervall zu. Nach Bild 3 ist daher, wenn wir wieder die unendliche Kleinheit der Ausbiegungen an der Stabilitätsgrenze beachten, $y_2 = y_1 + a^2 \left(\frac{y_1}{a^2} - \frac{k_1}{2} \right) = y_1 + a^2 c_1$, $k_2 = \frac{P y_2}{T_2 J_2}$, $y_3 = y_2 + a^2 \left(c_1 - \frac{k_1 + k_2}{2} \right) = y_2 + a^2 c_2$ usw.; allgemein gilt hier somit die Rekursionsformel

$y_{i+1} = y_i + a^2 \left(c_{i-1} - \frac{k_{i-1} + k_i}{2} \right) = y_i + a^2 c_i$ usw.; allgemein gilt hier somit die Rekursionsformel

⁵⁾ Vgl. HDI-Mitteilungen, Brünn 1933, S. 242.

⁶⁾ F. Engeßer, Z. d. VdI 1908, S. 359; vgl. ferner K. Borkmann, Z. f. Flugtechn. Mot. 1933, S. 139.

⁴⁾ F. Engeßer, Schweiz. Bauztg., 26, 1895; Th. v. Kármán, VDI-Forschungsheft 81, 1910.

$$(II) \quad y_{i+1} = y_i + a^2 \left(c_i - \frac{k_{i-1} + k_i}{2} \right) = y_i + a^2 c_i, \quad k_i = \frac{P y_i}{T_i J_i},$$

mit deren Hilfe wir schließlich auf den Wert y_n gelangen, der bei gelenkiger Lagerung der Stabenden und Belastung mit dem gesuchten Wert $P = P_k$ genau Null sein muß. Kommt $y_n > 0$ heraus, dann war P zu klein gewählt worden, und wird $y_n < 0$, dann ist der angenommene Wert P zu groß. Um den Grad der Annäherung zu beleuchten, sei ein 64 cm langer Modellstab aus Baustahl untersucht, der innerhalb der linken Stabhälfte ein $F' = 4,0 \text{ cm}^2$, $J' = 1,333 \text{ cm}^4$ und innerhalb der rechten Stabhälfte ein $F'' = 3,0 \text{ cm}^2$, $J'' = 0,5625 \text{ cm}^4$ aufweist. Die Knicklast dieses Stabes ist in einfacher Weise exakt ermittelbar und beträgt $P_k = 3,85 \text{ t}$; nach unserem Näherungsverfahren wird mit $n = 16$ der Wert $P_k = 3,80 \text{ t}$ erhalten.

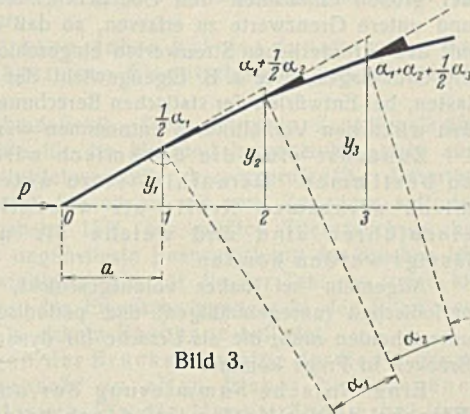


Bild 3.

Abschließend sei hier erwähnt, daß auch alle „höheren Knickwurzeln“ von Stäben veränderlichen Querschnitts nach dem geschilderten Näherungsverfahren ermittelt werden können; es ist dann P einfach so groß zu wählen, daß die entstehende Gleichgewichtsfigur je nach der Ordnungsnummer der höheren Wurzel ein-, zwei-, drei- . . . mal die Wirkungslinie der Kraft P schneidet und für die Stelle „ $i = n$ “ auf $y_n = 0$ führt.

D. Der in seiner Mitte elastisch quergestützte Druckstab mit veränderlichem Querschnitt. Auch bei der Behandlung dieses Problems sind wir im allgemeinen Fall auf ein Näherungsverfahren angewiesen. Bedeutet W_1 t/cm die Federkonstante der Querstützung und y_0 die Ausbiegung der Gleichgewichtsfigur in Stabmitte, dann besitzt der auftretende elastische Widerstand die Größe $W = W_1 y_0$. Bei Stäben, die symmetrisch zur Halbierenden der Stablänge ausgebildet sind, können wir uns bei der Bestimmung der Gleichgewichtsfigur wieder auf eine Stabhälfte beschränken und in der Stabmitte mit einem frei gewählten Wert y_0 (z. B. $y_0 = 1 \text{ cm}$) beginnen. Es sind dann die Stützkraften $A = B = \frac{1}{2} W_1 y_0$, das Biegemoment $M_0 = P y_0 - A \frac{l}{2}$ und die

Krümmung $k_0 = \frac{1}{T_0 J_0} \left(P y_0 - A \frac{l}{2} \right)$ bekannt, so daß (nach Bild 2) $y_1 = y_0 - a^2 \frac{k_0}{2} = y_0 - a^2 c_0$, $k_1 = \frac{1}{T_1 J_1} \left[P y_1 - A \left(\frac{l}{2} - a \right) \right]$, usw. berechnet werden kann. Die Werte y_i sind somit nach der Formel (I) und die Werte k_i nach der Beziehung

$$(III) \quad k_i = \frac{1}{T_i J_i} \left[P y_i - A \left(\frac{l}{2} - i a \right) \right]$$

festzulegen; kommt $y_n > 0$ heraus, dann ist P zu klein und kommt $y_n < 0$ heraus, dann ist P zu groß gewählt worden. Es existiert hier ein Sonderwert W_1' der Federkonstanten, der dadurch gekennzeichnet ist, daß für alle $W_1 \geq W_1'$ der Stabmittelpunkt an der maßgebenden tiefsten Stabilitätsgrenze keine Ausbiegung erfährt und die Knickfigur polarsymmetrisch zu diesem Stabmittelpunkt verläuft; der zugeordnete Wert P_k' ist dann unabhängig von W_1 und kann nach Bild 3 ermittelt werden. Der geschilderte Lösungsweg nach Formel (I) und (III) kommt daher nur im Fall $W_1 < W_1'$ in Frage und liefert dann ein $P_k < P_k'$. Bei Druckstäben mit unveränderlichem Querschnitt gilt bekanntlich $W_1' = \frac{16 \pi^2 T J}{l^3}$ und $P_k' = \frac{4 \pi^2 T J}{l^2}$; im Bereiche $W_1 < W_1'$ kann dann angenähert $P_k \sim \frac{\pi^2 T J}{l^2} + \frac{3}{16} W_1 l$ geschrieben werden.

Wird beispielsweise der Stab Bild 1b aus St 52 hergestellt und in seiner Mitte elastisch quergestützt, wobei $W_1 = 0,5 \text{ t/cm}$ beträgt, dann erhalten wir, wenn wir $n = 9$ und $y_0 = 1 \text{ cm}$ wählen, für ein probeweise angenommenes $P = 140 \text{ t}$ den Wert $y_9 = 0,0572 \text{ cm}$ und für ein $P = 150 \text{ t}$ den Wert $y_9 = -0,0102 \text{ cm}$, so daß sich nach linearer Interpolation einfach $P_k \sim 148,5 \text{ t}$ ergibt.

Ist der Stab unsymmetrisch ausgebildet, dann müssen wir bei der Festlegung der Gleichgewichtsfigur am linken Stabende mit einem frei gewählten Wert y_1 beginnen. Die Ausbiegungsgröße $y_{n/2}$ am Ort der Querstützung muß hier vorerst geschätzt werden und die Lösung $P = P_k$ ist dann gefunden, wenn $y_{n/2}$ mit der Annahme übereinstimmt und $y_n = 0$ wird.

Über die Anwendung des geschilderten Verfahrens bei verschiedenen anderen Gleichgewichtsproblemen gedrückter Stäbe aus Baustahl (exzentrischer Angriff, Querbelastung, Primärkrümmung u. a.) wird an anderer Stelle berichtet werden.

7) Vgl. Bautechn. 1928, S. 103.

Beitrag zur Berechnung der dynamischen Beanspruchung der Hauptträger stählerner Brücken infolge Befahrens durch Dampflokomotiven mit kritischen Geschwindigkeiten.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. R. Bernhard.

Kurze Inhaltsangabe: Es wird ein Verfahren zur Berechnung der dynamischen Beanspruchung von Brücken infolge Befahrens durch Dampflokomotiven mit kritischen Geschwindigkeiten vorgeschlagen. Eine Beschränkung auf die Hauptträger stählerner, statisch bestimmt gelagerter, eingleisiger Überbauten ist zunächst erforderlich. Die Bestimmung einer dynamischen Stoßzahl wird angegeben. Unter der Annahme, daß die von Lokomotiven mit nicht völlig ausgeglichenen hin- und hergehenden Massen ausgehende Triebwerkswirkung den ungünstigsten dynamischen Einfluß darstellt, ist die dynamische Stoßzahl infolge größtmöglicher Aufschaukelung der schwingenden Brücke bei gegebener Dämpfung ermittelt. Die Grenzwerte der ungünstigsten dynamischen Stoßzahlen werden durch Hintereinanderschalten von sechs Nomogrammen nach Einzelrechnung von sechs Verbindungsgeraden ohne weitere Rechnung bestimmt. An einem Beispiel wird das Verfahren erläutert, seine Vorteile sowie auch seine Grenzen werden angegeben. Ein Vergleich mit der Stoßzahl in den „Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken (BE)“ ist durchgeführt.

I. Allgemein.

Die Berücksichtigung der dynamischen Wirkung in der statischen Berechnung durch eine in den „Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken (BE)“ angegebenen Stoßzahl, die auf Grund von Erfahrungswerten geschätzt worden ist, kann von dynamischen Gesichtspunkten aus nur als Behelfslösung angesprochen werden. Schon lange strebt man danach, eine dynamisch begründete Stoßzahlberechnung zu finden, die jedoch so einfach und übersichtlich ist, daß sie auch von Statikern, die sich mit dynamischen Fragen weniger beschäftigt haben, leicht aufgestellt werden kann. Eine Berechnung der dynamischen Beanspruchung von Brücken ist auf theoretischem Wege¹⁻³⁾ ungewöhnlich schwierig.

¹⁾ G. G. Stokes, Discussion of a differential equation, relating to the breaking of railway-bridges. Trans. Camb. Ph. Soc. VIII (1849), S. 707.

²⁾ H. Zimmermann, Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin 1896, Wilh. Ernst & Sohn.

³⁾ S. Timoschenko, Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. J. f. Math. u. Phys. Bd. 59 (1911), S. 163 ff.

⁴⁾ Ders., Vibration of Bridges. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (1932).

⁵⁾ F. M. Lewis, Vibration During Acceleration Through a Critical Speed. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers (1932).

Auf rein empirischem Wege eine Lösung zu finden, also durch praktische Untersuchungen zahlreicher Brücken mit Hilfe dynamischer Meßversuche allein, erscheint gleichfalls nicht durchführbar.

Es wird daher angestrebt, für gewisse, oft vorkommende Fälle eine einfache dynamische Überschlagsrechnung durch Zusammenfassung von theoretischen Überlegungen, sowie der bisher gewonnenen Ergebnisse aus praktischen Meßversuchen aufzustellen. Dabei ist die Zurückführung der dynamischen Aufgabe auf eine rein statische wohl durchführbar, wird aber kaum die unbedingt nötige Übersichtlichkeit ermöglichen.

Es erscheint daher zweckmäßig, die bisher üblichen statischen Berechnungen, jedoch ohne die Stoßzahl σ_{BE} der „Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken“, bestehen zu lassen und getrennt davon eine einfache dynamische Berechnung durchzuführen; bei der Querschnittsbestimmung sind dann die ungünstigeren Werte aus einer der beiden Berechnungen zugrunde zu legen.

Dieses leuchtet um so mehr ein, da bei jeder statischen Berechnung die theoretischen Lastenzüge N, E oder G mit ihren großen statischen Lasten berücksichtigt werden müssen, bei einer dynamischen Berechnung

⁶⁾ C. E. Inglis, Report of the Bridge Stress Committee, published under the authority of His Majesty's stationary office. London 1928, S. 201 ff.

⁷⁾ W. Hort, Stoßbeanspruchungen und Schwingungen der Hauptträger statisch bestimmter Eisenbahnbrücken. Bautechn. 1928, Heft 3 u. 4, S. 37 bis 40 und S. 50 bis 54.

⁸⁾ Despréts, Étude mathématique de l'état vibratoire d'une poutre dans quelques cas particuliers. Veröffentlichungen des internationalen Eisenbahnverbandes 1930 (Madrid) und des internationalen Brückenkongresses 1930 (Lüttich).

⁹⁾ Homann, Probleme der Brückendynamik, Vorbericht vom Pariser Kongreß 1932.

jedoch oftmals wesentlich leichtere Lastenzüge ungünstigere Werte geben können. Um nun eine einfache dynamische Berechnung durchführen zu können, sind jedoch gewisse Annahmen erforderlich. Die vorliegende Berechnung will und kann daher keineswegs den Anspruch einer allgemein gültigen Lösung machen, sondern beschränkt sich bewußt auf ganz bestimmte, aber oft auftretende Sonderfälle.

Die dynamische Berechnung bezieht sich auf eingleisige Überbauten mit statisch bestimmten Hauptträgern von 20 bis 100 m Spannweite.

Dabei sei angenommen, daß die Hauptträger nur in ihrem Grundton schwingen, also ihre Spannweite gleich der halben Wellenlänge ist. Bei Fachwerkbrücken sollen die zusätzlichen Beanspruchungen der Einzelstäbe als dynamische Nebenspannungen vernachlässigt werden. Als dynamische Nebenspannungen von zunächst untergeordneter Bedeutung sind z. B. die zusätzlichen be- oder auch entlastenden Beanspruchungen von Gurtstäben in der Nähe der Fahrbahn oder auch die Eigenschwingungen schlanker Füllungsstäbe anzusprechen. Ferner seien nur lotrechte Schwingungen in der Hauptträgerenebene verfolgt, also Torsions- oder waagerechte Schwingungen ausgeschlossen.

Diese Voraussetzungen berechtigten zu der weiteren Annahme, die Hauptträger wie Vollwandträger, d. h. als einheitliche schwingende Gebilde aufzufassen, um zunächst mit einer gemeinsamen dynamischen Stoßzahl, die mit φ_{dyn} bezeichnet werden soll, rechnen zu können.

Ferner sei angenommen, daß die Brücken von Dampflokomotiven mit nicht völlig ausgeglichenen hin- und hergehenden Triebwerksteilen befahren werden; für diese Brücken stellt die Triebadwirkung bei Spannweiten von 20 bis 100 m, wie später ausführlich begründet wird, die ungünstigste dynamische Beanspruchung dar.

Beim Befahren mit Lokomotiven ohne Triebadwirkung, also Dreil- bzw. Vierzylinderlokomotiven oder insbesondere auch elektrischen Lokomotiven, ergibt sich gleichfalls eine dynamische Beanspruchung der Überbauten; infolge Durchbiegung der Längsträger entstehen periodische, lotrechte Zusatzkräfte (Zimmermann-Effekt), die jedoch hier nicht verfolgt werden sollen. Die Durchbiegungswirkung wird gleichfalls weiter unten näher besprochen.

Um eine dynamische Berechnung für eine Brücke überhaupt aufstellen zu können, ist eine ebenso wichtige Vorbedingung die genaue Kenntnis ihrer dynamischen Belastung. Einstweilen sind jedoch die dynamischen Raddruckdiagramme der Fahrzeuge noch nicht genügend genau bestimmt worden. Da in der vorliegenden Berechnung davon ausgegangen ist, daß die Triebadwirkung die größte dynamische Beanspruchung darstellt, kann mit dem ungünstigsten Fall, der bei der zulässigen Höchstgeschwindigkeit der Lokomotive 15% des Achsdrucks nicht überschreiten darf, gerechnet werden. Solange also genaue dynamische Raddruckdiagramme nicht vorliegen, muß mithin eine sinusförmig verlaufende Kraftwirkung (mit der Größtampplitude gleich 15% des Triebadachdruckes und einer Wellenlänge gleich dem Triebadumfang) in die dynamische Berechnung eingesetzt werden.

Hier sei eingefügt, daß wohl in den meisten Fällen nur mit einer einzigen Lokomotive als dynamische Belastung zu rechnen ist, da der Fall, daß zwei dynamisch gleich ungünstige Lokomotiven mit derselben Stellung ihrer Gegengewichte, d. h. also gleichphasig, die Brücke befahren, als Ausnahmefall nicht berücksichtigt zu werden braucht. Auch scheidet für die folgenden Betrachtungen die zusätzliche Belastung durch angehängte Wagen aus, da diese Fahrzeuge fast immer eine dämpfende und mithin günstigere Wirkung haben werden.

Schließlich sei noch bemerkt, daß auch gewisse dynamische Eigenschaften der Brücken bekannt sein müssen, die zwar auf Grund der bisher durchgeführten Messungen bereits geschätzt werden können, jedoch durch praktische Messungen bestätigt werden müssen. Es sei ausdrücklich betont, daß die weitere Messung, z. B. von Durchbiegungen, Dehnungen, Dämpfungen, Einfluß des Wanderns der Lasten usw., keineswegs ausgeschlossen werden soll, sondern im Gegenteil derartige Untersuchungen die gemachten Annahmen zu ergänzen bzw. zu berichtigen haben; auch fallen ja Fahrbahnträger und Brücken mit kleineren Spannweiten als 20 m und größeren als 100 m nicht in den Rahmen der vorliegenden Berechnung.

Ferner sei hervorgehoben, daß ein am Schluß durchgeführter Vergleich mit der Stoßzahl φ_{BE} der „Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken“ ausschließlich den Zweck haben soll, die praktische Auswirkung der vorgeschlagenen Berechnungsart an Hand einiger ausgeführter Beispiele zu erläutern.

Dynamische Berechnung.

Die dynamische Berechnung wird so einfach gestaltet, daß mit Hilfe fertiger Nomogramme ohne Rechenarbeit sofort zu entscheiden ist, ob eine größere dynamische Beanspruchung überhaupt auftreten kann und eine genauere dynamische Berechnung mithin erforderlich erscheint.

Die verwendeten Formeln sind nachstehend nicht alle abgeleitet, sondern es ist auf die einschlägige Literatur jeweils verwiesen worden. Sie beschränken sich nur auf einfache, aber oft auftretende Aufgaben der

Praxis, können jedoch, falls die Berechnung mit der Wirklichkeit übereinstimmende Resultate ergibt, auch ohne Schwierigkeiten für andere Fälle erweitert werden.

Alle aufgestellten Formeln sind in Form von Nomogrammen darstellbar. Jede Berechnung mit Hilfe von Nomogrammen hat außer der großen Einfachheit und Übersichtlichkeit noch den Vorteil, obere und untere Grenzwerte zu erfassen, so daß die notwendigen Annahmen mit den erforderlichen Streuwerten eingeschlossen werden. Auch können die Grundlagen, wie z. B. Eigengewicht der Brücke oder die Verkehrslasten, bei Entwürfen der statischen Berechnung, bei vorhandenen Brücken den wirklichen Verhältnissen entnommen werden.

Zunächst sind die dynamisch wirksamen äußeren Kräfte zu bestimmen. Daraufhin ist zu untersuchen, welche dynamisch wirksamen Kräfte als wesentlich in die Berechnung einzuführen sind und welche als nebensächlich vernachlässigt werden können.

Allgemein sei daher vorausgeschickt, daß man zwischen nicht-periodischen (unregelmäßigen) und periodischen (regelmäßigen) Kräften unterscheiden muß, die als Ursache für dynamische Beanspruchungen der Brücken in Frage kommen.

Eine einfache Summierung der ungünstigsten Wirkungen (Effekte) dieser Kräfte ist jedoch keineswegs zulässig¹⁰⁾.

So können z. B. durch Phasenverschiebung oder Schwebungserscheinungen auch Nullwerte auftreten.

1. Unregelmäßige Kräfte, die in den meisten Fällen stoßartigen Charakter haben, können hervorgerufen werden:

a) durch Stoßwirkung infolge Anstoß der Räder auf den Schienenstößen oder auch an den Schienen selbst, sowie durch sonstige zufällige Hindernisse auf den Schienen.

Derartige Stöße können durch Schweißen der Schienenstöße und gute Gleisunterhaltung beseitigt werden und brauchen daher bei einer dynamischen Berechnung der Brückenhauptträger nicht berücksichtigt zu werden.

b) durch Stoßwirkung infolge Flachstellen in den Bandagen der Räder. Diese Stöße können erhebliche Werte erreichen, beschränken sich aber meistens auf sehr hohe Frequenzen und mithin in erster Linie örtliche Verformungen. Sie beanspruchen daher vor allem die Schienen und die Fahrbahnträger und weniger das Haupttragwerk. Derartige Stöße können sich zwar in regelmäßigen Abständen wiederholen, müssen aber trotzdem zu den unregelmäßigen Kräften gerechnet werden, da sie infolge der im Vergleich zur Brücke hohen Dämpfung des Oberbaues meistens rascher abklingen, als ihre Aufeinanderfolge beträgt. Sie müssen daher nach jedem Stoß von neuem erregt werden.

Die Flachstellen können durch gute Unterhaltung des Fahrzeugparkes so weit vermieden werden, daß sie als Ausnahmefälle zu betrachten sind und brauchen daher bei einer dynamischen Berechnung, die ja stets eine gewisse Dauerbeanspruchung voraussetzt, jedenfalls für die Hauptträger gleichfalls nicht berücksichtigt zu werden.

2. Regelmäßige Kräfte, die in den meisten Fällen sinusförmig zu- und abnehmen, können durch folgende Kräfte hervorgerufen werden:

a) Durchbiegungswirkung (Zimmermann-Effekt). Lotrechte Zentrifugalkräfte entstehen beim Durchfahren der sich nach unten durchbiegenden Brücke, ähnlich wie waagerechte Fliehkräfte bei Kurvenfahrten erzeugt werden.

Sie können durch entsprechende Überhöhung des Oberbaues fast ganz vermieden werden und brauchen daher bei der dynamischen Berechnung der Hauptträger zunächst gleichfalls nicht berücksichtigt zu werden.

b) Geschwindigkeitswirkung (Timoschenko-Effekt). Lotrechte Zusatzkräfte entstehen auch beim Durchfahren der Brücke mit einer kritischen Geschwindigkeit. Eine kritische Geschwindigkeit ergibt sich in diesem Falle, wenn die halbe Durchfahrzeit mit der Zeitdauer einer Periode der Brückeneigenschwingung übereinstimmt⁹⁾. Nur bei größeren Geschwindigkeiten können nennenswerte lotrechte Kräfte auftreten; große Geschwindigkeiten, also kurze Durchfahrzeiten, setzen aber hohe Eigenschwingungszahlen voraus; sie werden nur bei Brücken kleinerer Spannweiten und hohen kritischen Geschwindigkeiten vorkommen, die meistens die zulässigen Höchstgeschwindigkeiten der Fahrzeuge überschreiten.

Auch diese, allein von der Fahrgeschwindigkeit abhängige Wirkung kann daher in der dynamischen Berechnung der Hauptträger in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

c) Koppelschwingungen zwischen Fahrzeug und Brücke. Koppelschwingungen können entstehen, wenn die Eigenschwingungen der abgedeckten Fahrzeugteile auf dem Fahrzeuguntergestell mit der Eigenschwingung des Oberbaues angenähert übereinstimmen. Hierfür er-

¹⁰⁾ Mechanische Schwingungen der Brücken. Leitfaden zum Verständnis und zur Beobachtung der dynamischen Wirkungen der Verkehrslast. Berlin 1933. Verlag der Verkehrswissenschaftlichen Lehrmittelgesellschaft m. b. H. bei der Deutschen Reichsbahn.

geben sich zwei kritische Geschwindigkeiten¹¹⁾. Infolge der langsamen Eigenschwingung abgefederter Fahrzeuge können nur Brücken mit großen Spannweiten, d. h. langsamen Eigenschwingungen, in Frage kommen; auch verhindert die große Dämpfung der Eisenbahnfahrzeugfedern, im Gegensatz zur Abfederung der gummiereiften Straßenfahrzeuge, meistens eine Aufschauklung des Überbaues zu großen Beanspruchungen, selbst bei kritischen Geschwindigkeiten.

Die Koppelwirkung kann daher bei der dynamischen Berechnung der Hauptträger von Eisenbahnbrücken ebenfalls vernachlässigt werden.

d) Radwirkung (Triebtradefekt). Freie lotrechte Zentrifugalkräfte werden durch Zusatzgewichte für die hin- und hergehenden, nicht ausgeglichenen Dampflokotivtriebwerkteile hervorgerufen¹²⁾. Derartige Kräfte können nur bei Dampflokotiven mit zwei Zylindern auftreten und dürfen bei der Reichsbahn 15% des größten Triebtradachdruckes nicht überschreiten¹³⁾. Die ungünstigste Beanspruchung der Brücken tritt bei einer kritischen Geschwindigkeit ein, für die der Takt der freien lotrechten Zentrifugalkräfte mit der Eigenschwingungszahl der Brücke angenähert übereinstimmt, d. h. sich in Resonanz befindet.

Die Beanspruchungen der Brücken infolge der Radwirkung können daher im Gegensatz zu allen bisher besprochenen Kräften im Resonanzfall auch für die Hauptträger erhebliche Werte erreichen.

Die dynamische Berechnung ist infolgedessen auf diesem Resonanzfall aufgebaut. Die erforderlichen Annahmen sind nunmehr zusammengefaßt folgende:

Annahmen:

1. Für die Brückenhauptträger soll die unter 2 d erklärte kritische Geschwindigkeit die größte dynamische Zusatzbeanspruchung ergeben. Die kritische Geschwindigkeit ist demnach diejenige Geschwindigkeit, bei der die Periode der von unausgeglichenen Massen der Lokotivtriebwerkteile ausgehenden, lotrechten sinusförmig zu- und abnehmenden Kräfte mit der Periode der Eigenschwingung der Brücke angenähert übereinstimmen. Es wird mithin also ein Resonanzfall als Grundlage der dynamischen Berechnung vorausgesetzt.

2. Die durch Zusatzgewichte erzeugten freien, lotrechten Zentrifugalkräfte infolge hin- und hergehender Massen nicht ausgeglichener Dampflokotivtriebwerkteile sollen bei der zulässigen Höchstgeschwindigkeit den vorgeschriebenen ungünstigen Größtwert von 15% auch erreichen.

Dynamische Beanspruchungen infolge anders gearteter periodischer sowie nichtperiodischer Kräfte, sowohl die obengenannten regelmäßigen und unregelmäßigen Kräfte als auch Waagrecht- oder Drehschwingungen und etwaige Obertöne der Grundschwingungen (z. B. Eigenschwingungen von Einzelstäben), haben gegenüber dem Resonanzfall für die Hauptträger nur eine untergeordnete Bedeutung¹⁴⁾.

3. Ferner werden die bisher aus praktischen Versuchen gewonnenen Dämpfungszahlen¹⁴⁾ der Brücken in der Berechnung verwertet.

4. Schließlich sei zur Vereinfachung der Rechnung der Einfluß des Wanderns der Einzellasten und der zunehmende Einfluß der freien lotrechten Kräfte in Brückenmitte und abnehmende an den Brückenenden durch einen gemeinsamen Abminderungsfaktor (Erfahrungswert) von 0,81 berücksichtigt. Die Größe dieses Faktors hat sich bei den bisherigen Versuchen, insbesondere auch der englischen Eisenbahngesellschaften, als brauchbarer Mittelwert ergeben¹⁵⁾.

5. Dabei wird angenommen, daß die Hauptträger im Resonanzfall mit ihrem Grundton schwingen, so daß auch bei Fachwerkträgern die Aufstellung einer gemeinsamen Stoßzahl für sämtliche Fachwerkstäbe zunächst berechtigt ist.

Schwingungen, die durch Stoßerregung von der Fahrbahn unmittelbar auf benachbarte Hauptträgerstäbe übertragen werden (Obertöne) und in

¹¹⁾ Bernhard, R., Brücke und Fahrzeug. Betrachtungen über ihre dynamischen Zusammenhänge. Bauing. 1930, Heft 28, S. 481 bis 488.

¹²⁾ Diese Vorschrift für die lotrechten Zusatzkräfte besteht z. B. nicht bei den englischen Eisenbahngesellschaften und hat dort bei ungünstig gebauten älteren Lokotiven zu einem Abheben der Triebräder und hammerschlagartigen Herabfallen (hammer-blow) geführt. Vgl. auch Fußnote 9).

¹³⁾ Nach einer von Prof. Hort aufgestellten Berechnung können die dynamischen Zusatzbeanspruchungen durch unausgeglichene Lokotivtriebwerkteile im Resonanzfall 100% betragen, während die übrigen dynamischen Zusatzbeanspruchungen nur 6% ausmachen (vgl. Fußnote 7).

¹⁴⁾ R. Bernhard und W. Späth, Rein dynamische Verfahren zur Untersuchung der Beanspruchungen von Bauwerken. Stahlbau 1929, Heft 6, S. 61 bis 71.

¹⁵⁾ W. Späth, Zur Frage des Stoßkoeffizienten an Brücken. Rückblick und Ausschau. Internationale Vereinigung für Brücken und Hochbau. Abhandlungen. — Dr. Späth hat eine größere Zahl von Versuchsergebnissen an deutschen und englischen Brücken zusammengestellt. Es geht daraus hervor, daß bei Resonanzregung durch periodische Kräfte in Brückenmitte eine etwa 16fache Vergrößerung, bei den gleichen, aber wandernden periodischen Kräften jedoch nur eine 13fache Vergrößerung der dynamischen Wirkung der Massenkräfte eingetreten ist. Der Abminderungsfaktor errechnet sich daraus mithin zu $13:16 = 0,81$.

manchen Fällen zu einer Erhöhung der Stoßzahl einzelner Fachwerkstäbe führen können, seien in den folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt.

Die dynamische Berechnung ist, wie bereits eingangs angegeben wurde, zunächst nur für statisch bestimmte Hauptträger stählerner Eisenbahnbrücken von Spannweiten zwischen 20 bis 100 m aufgestellt.

Brückenspannweiten unterhalb 20 m kommen für die Radwirkung kaum in Frage, da die kritischen Geschwindigkeiten die höchstzulässigen Fahrgeschwindigkeiten meist überschreiten. Auch Quer- und Längsträger scheiden aus, da bei der Fahrbahn die unmittelbare Stoßwirkung (Stoßweg¹¹⁾ der Räder auf den Schienen (Schienenstöße bzw. flache Stellen in den Radbandagen) überwiegt.

Als Eigenschwingungen der Brücke können infolge Eigenart der aufgestellten Nomogramme die oberen und unteren Grenzwerte zwischen unbelasteter und belasteter Brücke verfolgt werden.

Alle diese Annahmen bedeuten zwar eine Einschränkung gegenüber dem allgemeinen Fall; Zweck der Betrachtungen ist jedoch zunächst nur, einen einfachen Weg zur Lösung der in der Praxis meistens auftretenden Fälle zu finden.

Eingehende Versuche, die nicht bloß die Bestimmung der schwingungstechnischen Eigenschaften der Brücken, sondern ebenso auch der Fahrzeuge (Lokotiven) zum Ziel haben, müssen diese Annahmen vervollständigen bzw. berichtigen.

II. Rechnungsgang.

Der allgemeine Rechnungsgang sei angegeben, um für anders geartete Fälle leicht eine Ergänzung bzw. Umrechnung der aufgestellten Nomogramme vornehmen zu können.

1. Bestimmung der Eigenschwingungszahl der Brücke.

Die Eigenschwingungszahl ω_e in Hertz (1 Hertz = 1 Schwingung je sec) der Brücke ergibt sich aus der Formel:

$$(1) \quad \omega_e = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{5}{384} \cdot \frac{g}{d}}^{14)},$$

worin g die Erdbeschleunigung in cm/sec^2 und d die Durchbiegung der Brücke in cm bedeutet.

Als Belastungsgleichwerte müssen zwei Grenzwerte, und zwar das Eigengewicht der Brücke allein, sowie auch die durch Eigengewicht und Fahrzeuge belastete Brücke betrachtet werden. In den weitaus meisten Fällen ist die Eigenschwingungszahl des belasteten Überbaues einzusetzen. Für die Verkehrslasten genügt die Umrechnung in eine gleichmäßig verteilte Belastung.

2. Bestimmung der kritischen Geschwindigkeiten infolge Radwirkung auf die Brücke.

Die im Abschnitt I unter Fall 2 d erklärte kritische Geschwindigkeit der Brücke ergibt sich aus der Formel:

$$(2) \quad v_{\text{krit}} = 3,6 \pi D \omega_e^{16)},$$

worin D den Triebraddurchmesser der auf der Strecke verkehrenden Lokotiven in m und ω_e die unter II, 1 bestimmte Eigenschwingungszahl der Brücke in Hertz bedeutet.

Durch Annahme der größten und kleinsten Triebraddurchmesser der auf der Strecke verkehrenden Lokotiven ergeben sich die oberen und unteren Grenzwerte von v_{krit} . Auch könnte der Fall verfolgt werden, daß Schlagstellen an den Bandagen, z. B. von Güterwagenrädern, insbesondere Großraumgüterwagen mit verhältnismäßig hohen Achsdrücken und kleinen Raddurchmessern, eine kritische Geschwindigkeit ergeben.

Liegt die gefundene kritische Geschwindigkeit oberhalb der auf der Strecke zulässigen Höchstgeschwindigkeit, so kann von einer weiteren Rechnung überhaupt abgesehen werden.

3. Bestimmung der Zahl der auf einer Brücke durch darüberfahrende Lokotiven infolge unausgeglichener Massenkräfte abgegebenen lotrechten Impulse.

Die Anzahl der auf einer Brücke durch ein einzelnes Triebad der Lokomotive infolge der unausgeglichener Massenkräfte abgegebenen sinusförmigen Impulse J berechnet sich nach der Formel:

$$(3) \quad J = \frac{l}{\pi D},$$

worin l die Spannweite der Brücke in m und D den Triebraddurchmesser in m bedeutet.

4. Bestimmung der Aufschauklung.

Die bisher bei Brücken beobachteten Werte des Dämpfungsdekrement (ϑ) schwanken zwischen den Zahlen 0,05 und 0,20¹⁷⁾.

¹⁶⁾ Brückeneigenschwingung = Impulszahl eines Rades vom ϕD m je sec bei V km/h: $\omega_e = \frac{v_{\text{krit}} \cdot 1000}{3600 \pi D}$.

¹⁷⁾ Das Dämpfungsdekrement ϑ wird am einfachsten durch Aufzeichnen eines Leistungs-Frequenz-Diagramms (Resonanzkurve) mit Hilfe einer Schwingungsmaschine bestimmt. Die π -fache mittlere Breite des Diagramms, geteilt durch die Resonanzfrequenz (ω_e), ergibt das Dekrement der Dämpfung. Vgl. auch Fußnote 14).

Bis zur Festlegung genauerer Zahlen empfiehlt sich die Annahme eines Mittelwertes von 0,075. Die Nomogramme ermöglichen jedoch auch die Einführung der oberen und unteren Grenzwerte.

Nach den Formeln:

$$(4) \quad F = \frac{\pi^{14}}{\vartheta}$$

und

$$(5) \quad t = \frac{2,3^{14}}{\vartheta}$$

errechnet sich für den Resonanzfall der Vergrößerungsfaktor F und die bis zur Aufschauklung erforderliche Periodenzahl t genügend genau aus dem Dekrement ϑ . F ist also diejenige Zahl, mit der die vorhandenen Kräfte im Resonanzfall zu vervielfachen sind, um den Höchstwert durch den dynamischen Einfluß zu erhalten.

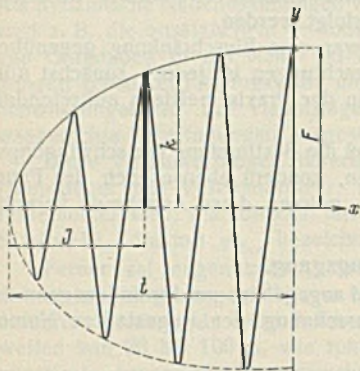


Bild 1. Aufschaukelvorgang.

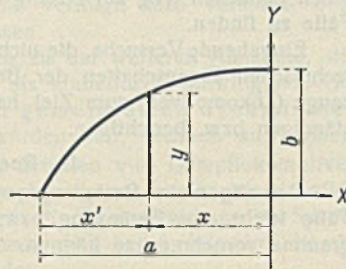


Bild 2. Zu Bemerk. 18.

Die Aufschaukelzeit bestimmt für den Resonanzfall diejenige Zahl (t) von Perioden, die erforderlich ist, damit die Brücke sich bis zu ihrem Größtvermögen infolge der dynamischen Beanspruchung durch die unausgeglichenen Massenkräfte aufschaukelt. Da ein Gleichgewichtszustand mit konstantem Ausschlag theoretisch erst nach unendlich langer Zeit erreicht wird, bezeichnet man, um einen anschaulichen Wert zu gewinnen,

als Aufschaukelzeit diejenige Periodenzahl (t), nach welcher die Amplitude sich bis auf 10% ihrem Endwert genähert hat¹⁴).

Die Rechnung bleibt genau genug, wenn man der Einfachheit halber eine elliptische Kurve für das Anwachsen der Amplituden von 0 bis t Perioden annimmt (Bild 1). Es besteht dann die einfache Gleichung:

$$(6) \quad k = \frac{F}{t} \sqrt{2tJ - J^2^{18}}$$

worin k denjenigen Teil des Vergrößerungsfaktors nach t Perioden bedeutet, der infolge aller auf die Brücke entfallenden Impulszahlen J zur Wirkung kommt.

Setzt man die für F und t in Gl. (4) u. (5) angegebenen Werte ein, so erhält man:

$$(7) \quad k = 1,365 \sqrt{2tJ - J^2}$$

Da sowohl der erste Teil der Kurve für sehr kleine, als auch der letzte Teil für sehr große Werte von J bei praktischen Fällen ausscheidet, ist die Annahme eines elliptischen Anwachsens genau genug.

Berücksichtigt man ferner zur Vereinfachung der Rechnung, wie eingangs erwähnt, den Einfluß des Wanderns der Verkehrslasten, sowie die zunehmende Wirkung der lotrechten Zusatzkräfte in Brückenmitte und abnehmende an den Brückenenden durch Einführung eines Abminderungsfaktors (Erfahrungswert) von 0,81, so wird aus Gl. (7):

$$k_w = 0,81 \cdot 1,365 \sqrt{2tJ - J^2} \text{ oder}$$

$$(8) \quad k_w = 1,11 \sqrt{2tJ - J^2}$$

k_w gibt dann denjenigen Teil des Vergrößerungsfaktors (F) an, der bei Berücksichtigung aller Störwirkungen, durch die lotrechten Zusatzkräfte infolge unausgeglichener Lokomotivtriebwerksteile nach J Impulsen noch zur Wirkung kommt. k_w werde mit Verstärkungszahl bezeichnet.

¹⁸ Die Ableitung von Gl. (6) lautet: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (Bild 2)

$$x^1 = a - x; \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax^1 - x^{12}}; \quad \text{für } x^1 = k, \quad b = F, \quad a = t$$

$$\text{und } x^1 = J \text{ wird } k = \frac{F}{t} \sqrt{2tJ - J^2}. \quad (\text{Fortsetzung folgt.})$$

Die Berechnung einer auf Biegung beanspruchten Überlappungsschweißung.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dozent Ing. Dr. Karl Ježek, Wien.

Das technische Schrifttum der letzten Jahre weist eine größere Anzahl von theoretischen Untersuchungen über die Kraftverteilung in Schweißverbindungen auf¹). Im folgenden soll die Spannungsverteilung in einer durch ein konstantes Biegemoment beanspruchten Überlappungsschweißung ermittelt werden. Die Verbindung der Bleche kann mittels Flankennähten allein oder mittels Flankennähten und Stirnnähten erfolgen; letztere Art der Verbindung, welche den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet, hat im Stahlbau praktische Bedeutung, und zwar beim Stegblechstoß eines Blechträgers.

I. Die Grundgleichungen.

In Bild 1 ist eine Überlappungsschweißung in der Ansicht und im Querschnitt dargestellt. Die beiden Bleche I und II (Trägheitsmomente J_1, J_2 , Widerstandsmomente W_1, W_2) sind durch zwei Flankenkehlnähte von der Stärke a und Länge l und außerdem durch eine — mit Rücksicht auf die spätere Anwendung — einseitig angeordnete Stirnnaht von der Stärke a und der Länge h_1 miteinander verbunden. Diese Verbindung, welche durch ein konstantes Biegemoment M beansprucht wird, ist in Bild 2 im verformten Zustande dargestellt. Infolge der Nachgiebigkeit der Schweißnähte werden sich zwei im unbelasteten Zustande übereinander liegende Blechquerschnitte gegeneinander verdrehen (Winkel ω_x) und außerdem eine gegenseitige Verschiebung s_y senkrecht zur Stabachse erfahren. Die Schweißnähte erfahren daher sowohl in ihrer Längsrichtung als auch senkrecht dazu eine Beanspruchung: Die Flankenkehlnähte haben je Längeneinheit eine Längsbelastung T_x (x -Richtung) und eine Querbelastung T_y (y -Richtung) aufzunehmen, die Längs- bzw. Querbelastung der Stirnnaht wird entsprechend dem gewählten Koordinatensystem mit \bar{T}_y bzw. \bar{T}_x bezeichnet. Da sich die elastischen Linien der beiden Bleche überschneiden, wechselt die Querverschiebung s_y das Vorzeichen und damit auch die Querbelastung der Flankenkehlnähte T_y den Richtungssinn.

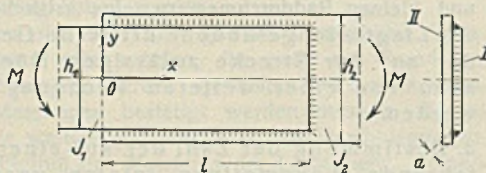


Bild 1.

Auch die Querverschiebung der Stirnnaht s_x und dementsprechend die Querbelastung \bar{T}_x ändern längs der Naht das Vorzeichen. Zur besseren

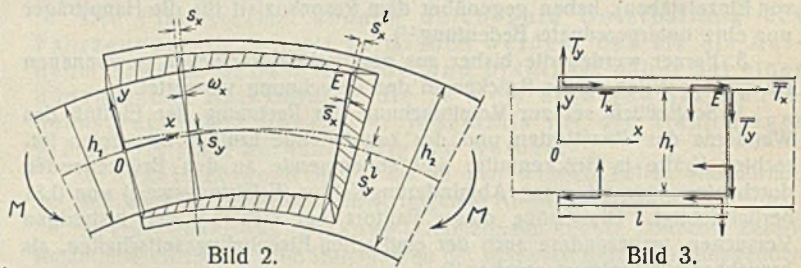


Bild 2.

Bild 3.

Übersicht sind in Bild 3 die Belastungen der Flankenkehlnähte und der Stirnnaht ihrem Richtungssinn nach schematisch eingetragen. Für die Verteilung der Biegespannungen in den Blechen wird in üblicher Weise das Geradlinengesetz angenommen²). Die rechnerische Behandlung der Aufgabe erfolgt unter Verwendung von Gleichgewichtsbedingungen, elastischen und geometrischen Bedingungen, da diese Untersuchungsmethode allen anderen gegenüber den Vorteil der größeren Übersichtlichkeit besitzt³).

Bezeichnet man in einem Querschnitt x die inneren Momente bzw. die Randspannungen in den Blechen mit M_{1x}, M_{2x} bzw. σ_{1x}, σ_{2x} , so lautet die erste Gleichgewichtsbedingung

$$(1) \quad M = M_{1x} + M_{2x} = W_1 \sigma_{1x} + W_2 \sigma_{2x}$$

Aus Gleichgewichtsgründen ergibt sich ferner das innere Moment im Blech II an der Stelle x zu

$$(2) \quad M_{2x} = h_1 \int_0^x T_x d\xi + 2 \int_0^x T_y (x - \xi) d\xi,$$

wobei $0 \leq \xi \leq x$. Als elastische Bedingung für die beiden Bleche wird das Hookesche Gesetz eingeführt. Die spezifischen Randfaserdehnungen der beiden Bleche erhält man daher zu

$$(3) \quad \varepsilon_{1x} = \frac{\sigma_{1x}}{E} \quad \varepsilon_{2x} = \frac{\sigma_{2x}}{E}$$

²) Dies ist zwar nur eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse, doch dürfte die Lösung der vorliegenden Aufgabe als ebenes bzw. räumliches Problem mit Rücksicht auf die schwierigen Randbedingungen kaum möglich sein.

³) Vgl. P. Fillunger, Über die Festigkeit von Löt-, Leim- und Nietverbindungen. Österr. Wochenschrift f. d. öff. Baudienst 1919.

¹) Eine Zusammenstellung der theoretischen Untersuchungen über Haftverbindungen findet man bei R. Kallina, Die Spannungsverteilung in Blechträgern mit unterbrochenen Schweißnähten. Stahlbau 1934, Heft 5.

Die elastischen Bedingungen für die Schweißnähte ergeben sich aus der Annahme der Proportionalität zwischen Belastung je Längeneinheit und mittlerer Verschiebung eines Nahtelementes zu

$$(4) \quad \begin{cases} T_x = K s_x & T_y = K_1 s_y \\ \bar{T}_x = K_1 \bar{s}_x & \bar{T}_y = K \bar{s}_y \end{cases}$$

wobei K und K_1 die „Verschiebungsmaße“ der Naht in der Längs- bzw. Querrichtung bedeuten⁴⁾. Das Verschiebungsmaß hat die Dimension des Elastizitätsmoduls und besitzt jedenfalls, da die Nahtverschiebungen in erster Linie auf die Einwirkung von Schubspannungen zurückzuführen sind, die Größenordnung des Schubmoduls. Das Verschiebungsmaß ist für eine vorgegebene Naht als konstant anzusehen, seine Abhängigkeit von der Beschaffenheit des Schweißgutes und den Nahtabmessungen wäre durch eingehende Versuche festzustellen.

Zwischen den mittleren Verschiebungen der Flankennähte und den Dehnungen der Bleche bestehen geometrische Beziehungen. Die spezifische Längsverschiebung der Flankennähte ergibt sich aus der Differenz der dort auftretenden spezifischen Blechdehnungen zu

$$(5) \quad \frac{d s_x}{d x} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \varepsilon_{2x} - \varepsilon_{1x}$$

Für die mittlere Querverschiebung der Flankennähte s_y gilt unter den getroffenen Annahmen (Wahl des Koordinatensystems usw.) die nachfolgende Differentialgleichung

$$(6) \quad \frac{d^2 s_y}{d x^2} = \frac{M_{1x}}{E J_1} - \frac{M_{2x}}{E J_2} = - \frac{2}{h_1} \cdot \frac{d s_x}{d x}$$

Zwischen den Verschiebungen der Flanken- und Stirnnaht im Punkte E ($x=l, y=\frac{h_1}{2}$, s. Abb. 2) bestehen die nachfolgenden geometrischen Beziehungen:

$$(7) \quad s_x^l = \bar{s}_x^E \quad s_y^l = \bar{s}_y^E$$

Unter der Annahme, daß die Querschnitte der Bleche eben bleiben, gilt für die Querverschiebung der Stirnnaht das Geradliniengesetz:

$$(8) \quad \bar{s}_x = \frac{2y}{h_1} \cdot \bar{s}_x^E$$

Die mittlere Längsverschiebung der Stirnnaht ist konstant und ergibt sich zu

$$(9) \quad \bar{s}_y = \bar{s}_y^E = \text{konstant}$$

Gl. (1) bis (7) stellen zwölf Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten dar und reichen daher zur Lösung der vorliegenden Aufgabe aus. Zunächst wird eine Bestimmungsgleichung für eine der Randbiegespannungen in den Blechen, etwa für σ_{2x} , ermittelt, da für alle anderen Unbekannten keine Randwerte angegeben werden können. Man erhält mit den Abkürzungen

$$(10) \quad \begin{cases} 2\nu = \frac{h_1^2 K}{2E} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \\ \mu^2 = \frac{2K_1}{E} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \end{cases}$$

eine lineare Differentialgleichung IV. Ordnung für die Randspannung im Blech II:

$$(11) \quad \frac{d^4 \sigma_{2x}}{d x^4} - 2\nu \frac{d^2 \sigma_{2x}}{d x^2} + \mu^2 \sigma_{2x} = \frac{2K_1 M}{E J_1 W_2}$$

II. Spannungsverteilung in den Blechen und Schweißnähten.

Die Form der allgemeinsten Lösung der Differentialgleichung (11) hängt von der Differenz $(\nu^2 - \mu^2) \geq 0$ ab. Setzt man zur Abschätzung des Vorzeichens dieser Differenz $J_2 = J_1 = \frac{d_1 h_1^3}{12}$, $K = K_1 = \frac{E}{4}$ (dieser Wert dürfte kleiner sein als der Schubmodul des Schweißgutes), so ist $(\nu^2 - \mu^2) \geq 0$ identisch mit $h_1 \geq 5,3 d_1$ bzw. wenn $K_1 = 2K$ gesetzt wird, identisch mit $h_1 \geq 10,6 d_1$. Da bei der überwiegenden Mehrzahl der auf Biegung beanspruchten Überlappungsverbindungen $h_1 > 10,6 d_1$ ist, wird die weitere Rechnung unter der Annahme $(\nu^2 - \mu^2) > 0$ durchgeführt. Mit den Abkürzungen

$$(12) \quad \alpha^2, \beta^2 = \nu \pm \sqrt{\nu^2 - \mu^2} > 0$$

erhält man die Randbiegespannung im Blech II zu

$$(13) \quad \sigma_{2x} = A \cdot \sin \alpha x + B \cdot \cos \alpha x + C \cdot \sin \beta x + D \cdot \cos \beta x + \frac{M h_1}{2(J_1 + J_2)}$$

wobei A, B, C und D die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten bedeuten. Die auf den Querschnittflächen $a l$ bzw. $a h_1$ der Flankennähte bzw. der Stirnnaht auftretenden Schubspannungen, deren Nachweis die DIN 4100 (Vorschriften für geschweißte Stahlbauten) fordert,

ergeben sich unter der Annahme gleichmäßiger Verteilung über die Nahtbreite a zu

$$(14) \quad \begin{cases} \tau_y = \frac{T_y}{a \sqrt{2}} = - \frac{W_2}{2 a \sqrt{2}} [\beta^2 (A \cdot \sin \alpha x + B \cdot \cos \alpha x) + x^2 (C \cdot \sin \beta x + D \cdot \cos \beta x)] \\ \tau_x = \frac{T_x}{a} = - \frac{K h_1}{K_1 \sqrt{2}} \cdot \frac{d \tau_y}{d x} \\ \bar{\tau}_y = \frac{\bar{T}_y}{a} = \frac{K \sqrt{2}}{K_1} \cdot \tau_y^l \\ \bar{\tau}_x = \frac{\bar{T}_x}{a \sqrt{2}} = \frac{K_1 \sqrt{2}}{K} \cdot \frac{y}{h_1} \cdot \tau_x^l \end{cases}$$

wobei τ_x^l und τ_y^l die Schubspannungen der Flankennäht im Punkte E (s. Bild 2) bedeuten. Die vier Integrationskonstanten sind aus den nachfolgenden Randbedingungen zu ermitteln. Das Blech II ist an seinem Ende ($x=0$) unbelastet und hat im Querschnitt $x=l$ (knapp links neben der Stirnnaht) das um das durch die Stirnnaht übernommene Moment M_s verminderte Lastmoment ($M - M_s$) aufzunehmen. Die beiden ersten Randbedingungen lauten daher

$$(15) \quad \begin{cases} x=0 & \sigma_{2x} = 0 \\ x=l & W_2 \sigma_{2x} = M - \int \bar{T}_y y dy = M - M_s \end{cases}$$

Aus Gleichgewichtsgründen muß ferner die Resultierende aus der gesamten Querbelastung der Flankennähte und der gesamten Längsbelastung der Stirnnaht gleich Null sein, und das durch die Flankennähte und die Stirnnaht übernommene Moment muß gleich dem Lastmoment M sein. Diese beiden Randbedingungen sind durch die nachfolgenden Gleichungen gegeben:

$$(16) \quad \begin{cases} 2 \int_0^l T_y dx + \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} \bar{T}_y dy = 0 \\ h_1 \int_0^l T_x dx + 2 \int_0^l T_y (l-x) dx + M_s = M \end{cases}$$

Gl. (15) u. (16) führen zu vier linearen, nicht homogenen Gleichungen mit den Unbekannten A, B, C und D .

III. Eine einfache Näherungsberechnung der größten Nahtbeanspruchung.

Die Kenntnis der Spannungsverteilung in den Schweißnähten bildet das Hauptziel der vorliegenden Untersuchung. Die Ermittlung der größten Nahtbeanspruchung erfordert jedoch einen verhältnismäßig großen Rechenaufwand. Es läßt sich nun zeigen, daß man zu praktisch durchaus brauchbaren Ergebnissen gelangt, wenn die Rechnung unter weitgehend vereinfachten Annahmen durchgeführt wird. Bei einer nach DIN 4100 ausgeführten Überlappungsschweißung besteht zwischen den Längen der Flanken- und Stirnnaht die Beziehung

$$(17) \quad \frac{M}{a h_1 \tau_{zul}} = \frac{h_1}{6} + l$$

Setzt man $M = W_1 \sigma_{zul} = 2 W_1 \tau_{zul}$ und $a = \frac{d_1}{\sqrt{2}}$ (größtmögliche Nahtstärke), so erhält man aus Gl. (17) $l = 0,305 h_1$. Die Stirnnaht ist daher in allen praktisch vorkommenden Fällen mehr als doppelt so lang als die Flankennähte. Unter dieser Voraussetzung werden aber die Flankennähte vornehmlich in der Längsrichtung beansprucht, die Stirnnaht dient in erster Linie der Aufnahme von Querbelastungen, und es ist naheliegend, die Querbelastung der Flankennähte und die Längsbelastung der Stirnnaht zu vernachlässigen ($T_y = \bar{T}_y = 0$). Unter diesen Annahmen erhält man für die Randspannung σ_{2x} eine lineare Differentialgleichung II. Ordnung. Die größte Schubbeanspruchung der Flankennähte tritt an der Stelle $x=0$ auf und ergibt sich mit den Abkürzungen

$$(18) \quad p^2 = 2\nu \quad \kappa = \frac{p h_1 K_1}{6 K}$$

zu

$$(19) \quad \max \tau_x' = \tau_0' = \frac{M p}{a h_1 (J_1 + J_2)} \cdot \frac{[J_1 + J_2 (\cos p l + \kappa \cdot \sin p l)]}{(\sin p l + \kappa \cdot \cos p l)}$$

Die in den Flankennähten an der Stelle $x=l$ auftretende Schubspannung τ_l' ist kleiner als der oben angegebene Wert ($\tau_l' < \tau_0'$). Die in der Stirnnaht auftretende größte Querschubspannung erhält man zu

$$(20) \quad \max \bar{\tau}_x' = \bar{\tau}_E' = \frac{K_1}{K \sqrt{2}} \cdot \tau_l' = \frac{K_1}{K \sqrt{2}} \left[\tau_0' \cdot \cos p l - \frac{M p J_2 \cdot \sin p l}{a h_1 (J_1 + J_2)} \right]$$

⁴⁾ Vgl. R. Kalina, Die Beanspruchung von Flankenkehlnähten in Überlappungsverbindungen. Z. d. OelAV 1933, Heft 29/30.

Ein ziffernmäßiger Vergleich der aus Gl. (19) ermittelten größten Nahtbeanspruchung mit der aus Gl. (14) errechneten größten resultierenden Schubspannung der Flankennähte beweist die praktische Brauchbarkeit der abgeleiteten Näherungsformeln (s. die nachfolgenden Zahlenbeispiele).

IV. Zahlenbeispiele.

1. In Bild 4 ist eine Doppellaschenverbindung, welche z. B. beim Stegblechstoß eines Blechträgers zur Anwendung gelangt, dargestellt⁵⁾. Die Abmessungen der Stoßlaschen I werden derart gewählt, daß ihr gesamtes Trägheitsmoment J_1 gleich dem Trägheitsmoment J_2 des an der Stelle $x=0$ gestoßenen Bleches II ist. Die wirksame Stärke der Flanken und Stirnnähte wird, da zwei Laschen und damit je vier Flankennähte und zwei Stirnnähte vorhanden sind (vgl. Abb. 1 u. 4),

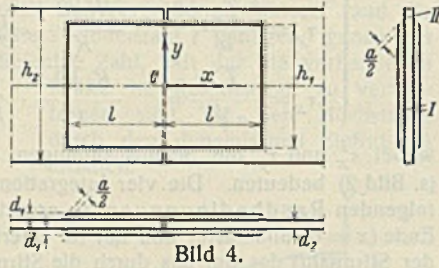


Bild 4.

mit $\frac{a}{2}$ bezeichnet. Die zulässigen Beanspruchungen und die Länge der Flankennähte werden nach DIN 4100 (1931) gewählt. Die für die Rechnung erforderlichen Zahlenwerte sind nachstehend zusammengestellt.

$h_2 = 300 \text{ mm}$	$\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$
$d_2 = 12 \text{ mm}$	$\tau_{zul} = 700 \text{ kg/cm}^2$
$h_1 = 262 \text{ mm}$	$M = 252 \text{ tcm}$
$d_1 = 9 \text{ mm}$	$\frac{a}{2} = 5 \text{ mm}$
$E = 2100 \text{ t/cm}^2$	$l = 100 \text{ mm}$

Die in Amerika durchgeführten Messungen über die Nachgiebigkeit von Flankenkehlnähten ermöglichen eine Abschätzung des „Verschiebungsmaßes“ $K^6)$. Nach diesen Versuchen dürfte $K = 500 \text{ t/cm}^2$ zu ziemlich als unterer Grenzwert für das Verschiebungsmaß in der Längsrichtung der Naht anzusehen sein. Über die Größe des Verschiebungsmaßes K_1 (Querverschiebungen der Naht) liegen m. W. noch keine Versuchsergebnisse vor. Es wird daher angenommen, daß die beiden Verschiebungsmaße gleich groß sind: $K_1 = K$.

In Bild 5 ist zunächst der Verlauf der Längs- und Querschubspannungen in der oberen Flankennaht graphisch dargestellt. Die größten Schubspannungen treten an der Stoßstelle ($x=0$) auf: $\max \tau_x = 1,27 \text{ t/cm}^2$, $\max \tau_y = 0,32 \text{ t/cm}^2$. Aus diesen Komponenten erhält man die größte resultierende Schubspannung zu $\max \tau_{res} = 1,31 \text{ t/cm}^2 = 1,88 \tau_{zul}$. In Bild 5 ist ferner der Verlauf der nach Abschnitt III berechneten Näherungswerte für die Längsschubspannungen τ_x' eingetragen, deren Höchstwert sich laut Gl. (19) zu $\tau_0' = 1,28 \text{ t/cm}^2$ ergibt und mit der nach der genaueren Rechnung ermittelten größten Nahtbeanspruchung $\max \tau_{res}$ sehr gut übereinstimmt. Bild 6 zeigt die Schubspannungsverteilung in der Stirnnaht ($\max \tau_{res} < \tau_{zul}$). Bei der Übertragung des Lastmomentes entfallen auf die Flanken- bzw. Stirnnähte folgende Anteile: Durch die

Längsschubkräfte T_x bzw. durch die Querbelastung T_y der Flankennähte werden 65% bzw. 6%, durch die Querbelastung der Stirnnaht werden 29% des Lastmomentes übernommen.

2. Da für das Verschiebungsmaß K_1 keine Versuchswerte vorliegen, wird die im vorhergehenden Beispiel behandelte Doppellaschenverbindung unter der Annahme, daß die Schweißnähte Querverschiebungen gegenüber größeren Widerstand leisten, nochmals rechnerisch untersucht. Dementsprechend wird das Querverschiebungsmaß größer, und zwar zu $K_1 = 1000 \text{ t/cm}^2$ gewählt.

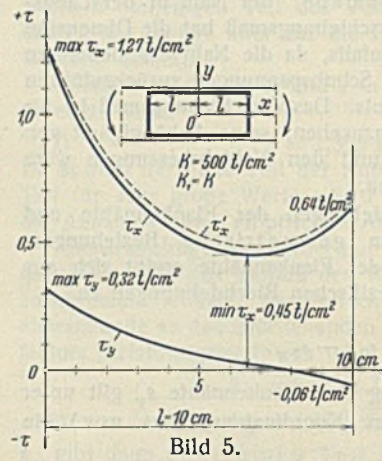


Bild 5.

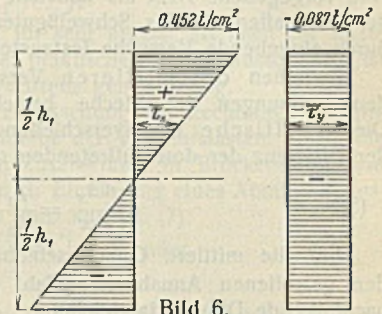


Bild 6.

Die größte Beanspruchung der Flankennähte tritt wieder an der Stoßstelle auf, und man erhält folgende Werte: $\max \tau_x = 1,20 \text{ t/cm}^2$, $\max \tau_y = 0,44 \text{ t/cm}^2$ und $\max \tau_{res} = 1,28 \text{ t/cm}^2 = 1,83 \tau_{zul}$. Die größte resultierende Schubbeanspruchung der Flankennähte ist also innerhalb ziemlich weiter Grenzen von der Größe des Verschiebungsmaßes K_1 fast unabhängig. Der aus Gl. (19) ermittelte Näherungswert für die größte Nahtbeanspruchung ergibt sich zu $\tau_0' = 1,25 \text{ t/cm}^2$. Für die Stirnnaht erhält man die folgenden Spannungshöchstwerte: $\max \tau_x = 0,582 \text{ t/cm}^2$ und $\max \tau_y = 0,085 \text{ t/cm}^2$, die größte resultierende Schubspannung ist auch in diesem Falle kleiner als die zulässige Beanspruchung. Durch die Längsschubkräfte T_x bzw. durch die Querbelastung T_y der Flankennähte werden 52% bzw. 11%, durch die Querbelastung T_x der Stirnnähte werden 37% des Lastmomentes übertragen.

Zusammenfassung.

Bei einer auf Biegung beanspruchten Überlappungsverbindung ist die Verteilung der Schubspannungen längs der Schweißnähte sehr ungleichmäßig. In den behandelten Beispielen beträgt die größte Schubbeanspruchung der Flankennähte bereits mehr als 180% der zulässigen Inanspruchnahme, obwohl die Schweißnähte als sehr nachgiebig (kleines Verschiebungsmaß K) angenommen wurden und ihr Schlankheitsverhältnis nur die Hälfte des von der DIN 4100 empfohlenen Höchstwertes (40) beträgt. Die größte Beanspruchung der Stirnnähte dagegen ist kleiner als die zulässige Inanspruchnahme. Da die Nahtstärke durch die Blechstärke nach oben hin und damit nach den Vorschriften die Länge der Flankennähte bzw. deren Schlankheitsverhältnis nach unten hin begrenzt ist, können Überbeanspruchungen der Flankennähte, welche unter ungünstigen Umständen schon bei der Nutzbelastung zu plastischen Formänderungen der Nahtenden führen⁷⁾, praktisch nur durch Verwendung eines weichen (nachgiebigen) Schweißgutes gemildert werden.

⁷⁾ Vgl. K. Ježek, Über die Festigkeit von Schweißverbindungen. Ww. 1933, 2. Sondernummer Schweißtechnik, Heft 7/8.

Zuschrift an die Schriftleitung.

Schlußwort zu den Zuschriften an die Schriftleitung zum Aufsatz Stahl- oder Holzfunktürme.

Dem Wunsche des Herrn Dr.-Ing. H. Seitz, nähere Aufklärungen über die Holzmaße auf dem Laaer Berge zu geben, komme ich gerne nach. Die beiden 80 m hohen Holzmaße wurden im Jahre 1913 aufgestellt und mußten im Herbst 1932 abgetragen werden. Als Holz wurde Pitch Pine verwendet. Es hat sich herausgestellt, daß das Holz nicht erstklassig war und vielfach Zopfenden verwendet wurden. Die Imprägnierung der Hölzer erfolgte mit Karbolinäum.

Im Laufe der Jahre zeigte es sich, daß speziell an den Verlasungen Bauschäden auftraten, die Verziehlungen der Maste bewirkten und schließlich eine derartige Baufälligkeit hervorriefen, daß man mit größtmöglicher Beschleunigung — in Anbetracht der um diese Jahreszeit herrschenden Raureifverhältnisse — die Maste abtragen mußte. Ein Mast wurde einfach umgelegt; der zweite Mast wurde wegen Raummangel im oberen Ende abgetragen, erst der untere Teil konnte umgelegt werden. Die Schäden an den Masten sind vor allem auf konstruktive Mängel zurückzuführen, die durch Mangel an Erfahrungen bei solchen Objekten erklärlich sind. Jedenfalls sind sich die Fachleute hier einig, daß Holz-

maste — wenn auch in der konstruktiven Durchbildung zur Zeit der Erbauung der Laaer-Berg-Maste seither große Fortschritte erzielt worden sind — gerade an den Verbindungsstellen einer ständigen Bewachung zu unterziehen sind, damit nicht derartige Erscheinungen auftreten, welche ein Abtragen des Mastes notwendig machen.

Auf Grund dieser Erfahrungen ist meine Äußerung über die Notwendigkeit einer „fortwährenden Überholung der Verbindungen“ erfolgt.
Ing. Lerch.

Wir schließen hiermit die Aussprache. Die Schriftleitung.

INHALT: Zur Berechnung gedrungener Knickstäbe mit beliebig veränderlichem Querschnitt. — Beitrag zur Berechnung der dynamischen Beanspruchung der Hauptträger stählerner Brücken infolge Befahrens durch Dampflokomotiven mit kritischen Geschwindigkeiten. — Die Berechnung einer auf Biegung beanspruchten Überlappungsschweißung. — Zuschrift an die Schriftleitung.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8. Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.