

Janusz Dietrych

Teoria napędów maszyn drgających

Streszczenie: Treścią pracy jest teoria napędów maszyn drgających. Omówiono równanie ruchu okresowego jako teoretyczną podstawę wyjściową. Zaproponowano czworobok sił jako podstawę do analizy sił w napędzie i w układzie drgającym. Przedstawiono sposób określenia sił w napędzie dla napędu wywołującego stałą amplitudę, dla napędu bezwładnościowego, sprężystego i oporowego. Wprowadzono pojęcia: pozornej siły wzbudzenia i częstości pozornie krytycznej. Porównano siły różnych napędów.

1. Wstęp

Maszyną drgającą w rozumieniu tej pracy jest maszyna, której cełowym ruchem roboczym jest ruch okresowy przy takich częstościach i amplitudach, że na ogół siły masowe są jednym z głównych czynników ruchu. Takich maszyn obok przesiewaczy, udarowych narzędzi, wstrząsarek do przeróbki materiałów budowlanych czy przygotowywania form odlewniczych jest dziś coraz więcej. Coraz więcej różnych maszyn, do niedawna posiadających napędy powietrzne czy spalinowe, wyposażanych jest w napędy elektryczne. Możliwe to jest dzięki zmianie układu maszyn na mechaniczny układ drgający.

Można rozróżnić dwa zasadnicze rodzaje ruchu maszyn drgających.

Do pierwszej grupy można zaliczyć maszyny o okresowym ruchu symetrycznym. Najbardziej podstawowym rodzajem jest ruch harmoniczny określany następującymi zależnościami:

$$s = s_0 \cdot \sin \omega t, \quad (1)$$

$$v = s_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \quad (2)$$

$$a = -s_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t, \quad (3)$$

gdzie s_0 – amplituda, s – wielkość odchylenia, a – przyspieszenie, ω – częstość kątowna drgań, v – prędkość.

Do tej grupy maszyn należą przesiewacze. Napęd tego rodzaju maszyn jest przedmiotem tej pracy.

Drugim rodzajem maszyn są maszyny o ruchu okresowym asymetrycznym. O ile ruch tego rodzaju maszyn da się sprowadzić do elementarnego ruchu okresowego, to pewne fazy tego ruchu można przedstawić

wyżej podanymi zależnościami. Ogólnie jednak ruch jest nieciągły, charakterystyczny tym, że dla pewnych wartości odchyień roboczych część maszyny może mieć co najmniej dwie różne prędkości. Teoria napędu tych maszyn jest przedmiotem dalszych prac autora.

Nasz kraj jest jednym z niewielu w świecie, gdzie szeroko rozwinięto budowę przesiewaczy zwanych rezonansowymi. Te przesiewacze są znakomitym przykładem maszyn drgających o ruchu symetrycznym.

Przejęte w 1945 roku wytwórnice maszyn poza nie zawsze kompletną dokumentacją, pewną rutyną pozostałych załóg czy też pewnymi doświadczeniami ruchowymi nie wniosły wiele. Nie otrzymaliśmy żadnych naukowych metod obliczania tych maszyn. Jedną z głównych przyczyn takiego stanu rzeczy były sposoby pracy w przedsiębiorstwach kapitalistycznych, gdzie ujawnianie podstaw naukowych, a tym bardziej rozpowszechnianie ich nie należało do zwyczaju.

Zadania postawione inżynierom i technikom polskim po roku 1945, a szczególnie zadania planu sześcioletniego wymagały oparcia budowy przesiewaczy na podstawach naukowych.

Metody obliczeń zostały oparte na właściwej teorii. Pod tym względem nie przedstawiało to specjalnych trudności. Wymagało jedynie twórczej inicjatywy. Trzeba było wypełnić poważną lukę w światowej literaturze tego tematu. Jedną z głównych pobudek nowych opracowań były zadania wynikające z obowiązku prowadzenia wykładów „Maszyny mechanicznej przeróbki węgla“, które rozpoczął autor w 1947 roku na Politechnice Śląskiej. W związku z tymi zadaniami rozwinęły się prace przejściowe i dyplomowe słuchaczy. Często te ostatnie prowadzone były w Biurze Konstrukcji Maszyn Górniczych jako projekty produkcyjne dzięki ściśłemu związkowi wykładającego z tymże biurem, które w ten sposób reprezentowało stronę odbiorcy opracowań naukowych.

2. Teoretyczna podstawa wyjściowa

Główną częścią przesiewacza wprawianą w ruch drgający jest rzeszoto. Ruch rzeszota uwarunkowany jest napędem. Napęd przesiewacza wprawia w ruch rzeszoto przez wywieranie sił właściwych do wywoływania pożądaných prędkości i przyspieszeń rzeszota. Jednym z podstawowych ruchów rzeszota jest ruch harmoniczny. W tej pracy zostaną omówione rodzaje napędów zapewniających ten rodzaj ruchu. Omówienie zostanie ograniczone do sposobów określania sił w drgającym układzie. Znajomość tych sił pozwala bez większych trudności na obliczenie mocy napędów. Obliczanie mocy napędów nie jest przedstawione w tej pracy.

Należy rozpatrzeć siły, jakie w ogóle działają na rzeszoto w czasie wykonywania ruchu okresowego.

Można rozróżnić dwa rodzaje sił:

- siły rzeszota,
- siły napędu.

O ile rzeszoto ma być utrzymane w ruchu, siły rzeszota muszą być zrównoważone siłą napędu.

W czasie ruchu okresowego wobec masy rzeszota i przyspieszeń występuje siła bezwładności. Odpowiednie opanowanie tej siły jest jednym z głównych zagadnień konstrukcyjnych przy opracowywaniu przesiewacza. Jak ogólnie wiadomo, siła bezwładności jest proporcjonalna do przyspieszeń.

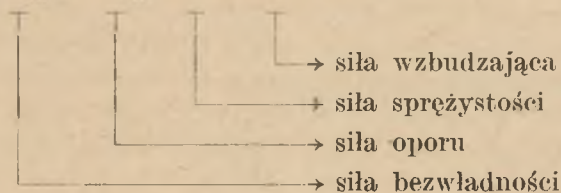
Przesiewacze wahadłowe zawieszono są na wahaczach tak, że rzeszoto stanowi wahadło fizyczne, bądź też wahacze same czy też z dodatkowymi zawieszzeniami stanowią sprężyste zawieszenie. Na skutek tej właściwości przesiewacza należy do sił rzeszota zaliczyć siłę, którą ogólnie nazwać można siłą sprężystości. Siła występująca w wahadle co do sposobu wpływania na ruch rzeszota nie różni się od sił sprężystości, tak że tę siłę można traktować na równi z siłą sprężystości. Na ogół przyjmuje się, że siła ta jest proporcjonalna do wielkości odchylenia rzeszota, czyli drogi.

Ogólnie wiadomo, że jakikolwiek ruch na ziemi połączony jest z występowaniem oporów. Rzeszoto pozbawione napędu w bardzo krótkim czasie przechodzi w stan spoczynku, z czego wynika, że energia, jaką rzeszoto posiadało w czasie ruchu, została zużyta na pokonanie oporu. Dodatkowym powodem strat energii jest ruch przesiewanego materiału. Ścisłe określenie rodzaju oporów jest bardzo trudne. Na ogół przyjmuje się, że opory te są analogiczne do oporów, jakie stawiają ciecze lepkie, i że siła oporu albo inaczej siła tłumienia jest proporcjonalna do prędkości.

W tym świetle siła napędu nie jest niczym innym jak siłą wzbudzającą ruch rzeszota.

Suma sił: bezwładności, oporu i sprężystości jako przeciwstawienie siły napędu jako siły wzbudzającej przedstawia równanie ruchu okresowego, które w danym przypadku jest równaniem ruchu rzeszota.

$$-m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} - c \cdot \frac{ds}{dt} - k \cdot s + P = 0 \quad (4)$$



gdzie

s — droga (odchylenie rzeszota),

t — czas,

m — masa rzeszota,

c — współczynnik oporu (tłumienie),

k — współczynnik sprężystości.

Jeśli ruch okresowy ma być ruchem harmonicznym, czyli takim, który można wyrazić zależnościami (1), (2) i (3), to siła wzbudzająca musi mieć ten sam charakter

$$P = P_0 \cdot \sin \omega t, \quad (5)$$

gdzie

P_0 — siła wzbudzenia,

ω — częstość kątowna napędu,

tak że równanie (4) można przedstawić jako

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} + c \cdot \frac{ds}{dt} + k \cdot s = P_0 \cdot \sin \omega t. \quad (6)$$

W tak określonych warunkach wielkość odchylení rzeszota określa równanie (7), które jest szczególnym rozwiązaniem równania (6)

$$s = s_0 \cdot \sin(\omega t - \varepsilon), \quad (7)$$

gdzie

s_0 — amplituda rzeszota,

ε — kąt przesunięcia fazowego siły wzbudzenia w stosunku do siły bezwładności i do odchylenia.

Wielkość amplitudy rzeszota określoną na podstawie równania (6) przedstawia ogólnie znany wzór (8)

$$s_0 = \frac{P_0}{\sqrt{c^2 \cdot \omega^2 (k \cdot m \cdot \omega^2)^2}}, \quad (8)$$

przesunięcie fazowe zaś

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c \cdot \omega}{k - m \cdot \omega^2}. \quad (9)$$

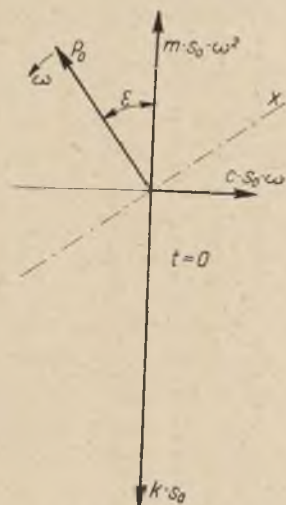
Należy pamiętać, że ruch okresowy jest tylko wtedy możliwy, kiedy spełniony jest warunek $c < c_k$, gdzie c_k współczynnik oporu krytycznego

$$c_k = 2m \cdot \omega_0,$$

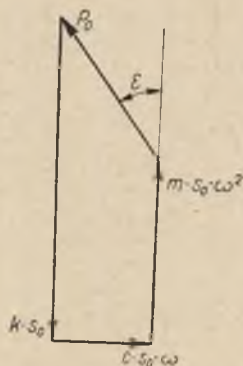
gdzie ω_0 częstość kątowna krytyczna

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10)$$

Wielkość sił rzeszota i siły wzbudzającej, zmiennych w czasie, można przedstawić za pomocą układu wektorów (rys. 1), które odpowiadają naj-



Rys. 1. Obraz występowania sił w układzie



Rys. 2. Czworobok sił

większym siłom przy określonej częstości kątowej (amplitudom, o których w dalszym ciągu będzie się mówić jako po prostu o siłach).

O ile oznaczone wektory będą obracane z prędkością kątową ω , to każdorazowe rzuty wektorów na oś \pm (prostopadłą do P_0 w chwili $t=0$) będą przedstawiały wielkości sił, jakie działają w danej chwili [1, str. 24].

Właściwość tego wykresu wynika z równania (6), bowiem po zróżniczkowaniu (7) i po podstawieniu do (6) otrzymuje się

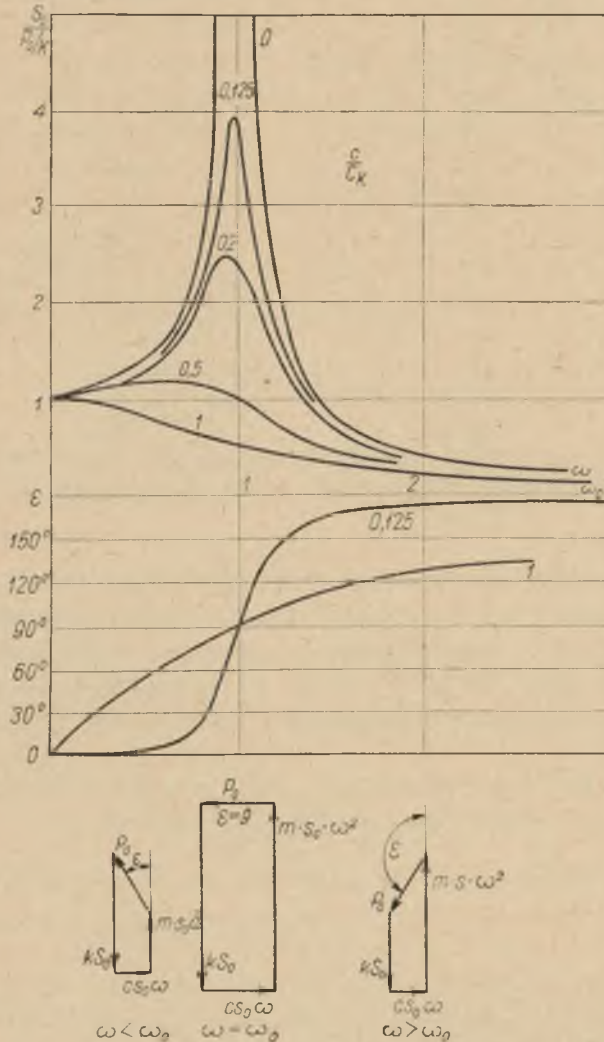
$$-m \cdot s_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t - \varepsilon) + c \cdot s_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \varepsilon) + k \cdot s_0 \cdot \sin(\omega t - \varepsilon) - P_0 \sin \omega t = 0.$$

O ile w chwili $t=0$ oś \pm jest prostopadła do wektora P_0 , to jest widoczne, że dla dowolnego czasu t rzuty wyznaczonych wektorów przedstawiają wartości wyrażeń w ostatnim równaniu.

Dla obliczeń potrzebne są graniczne wielkości sił. Bezwzględne wartości tych wielkości są sobie równe. Wobec tego wystarczającym obrazem sił w układzie jest czworobok sił pokazany na rysunku 2. Podobnie przy obrocie czworoboku około jednego z wierzchołków rzuty wektorów na odpowiednią oś przedstawiałyby każdorazowe siły działające na rzeszoto.

3. Ruch wywołany siłą wzbudzenia niezależną od częstości

Na rysunku 3 przedstawiono ogólnie znane wykresy amplitudy drgań i przesunięcia fazowego dla różnych współczynników oporu w zależności od częstości kątowej napędu.



Rys. 3. Wielkość amplitudy i przesunięcia fazowego ε

Na osi rzędnej wykresu amplitud odmierzone są wartości stosunku amplitudy do odchylenia statycznego $\frac{s_0}{P_0/k}$.

Na osi odciętych odmierzone są wartości stosunku częstości kątowej napędu do krytycznej częstości kątowej ω/ω_0 .

Na wykresie podano krzywe dla różnego tłumienia określonego stosunkiem współczynnika oporu c do współczynnika oporu krytycznego c_k — dla wartości: 1; 0,5; 0,2; 0,125 i 0.

Na rysunku 3 podano jednocześnie czworobok sił dla różnych stosunków częstości.

Jak wiadomo, w układzie, w którym występuje więź sprężysta i masa, a więc siła sprężystości i siła bezwładności, a który wprawiany jest w ruch okresowy siłą wzbudzącą, może nastąpić współbrzmienie (rezonans). W przypadku kiedy w układzie nie występuje tłumienie przy częstości krytycznej (10), teoria wykazuje możliwość doprowadzenia układu do drgań o amplitudzie nieskończenie wielkiej, co praktycznie jest niemożliwe, kończy się bowiem zniszczeniem układu.

Przy występowaniu tłumienia amplituda ma skończoną wielkość, tak że rezonans może nie spowodować zniszczenia układu.

W nie tłumionym układzie (bez oporu) największa amplituda występuje przy częstości krytycznej ω_0 . Z wykresu na rysunku 3 widać, że największa amplituda dla określonego współczynnika oporu powstaje przy $\omega < \omega_0$.

Częstość kątowna, przy której występuje największa amplituda, nazywana będzie częstością kątowną największej amplitudy i oznaczana ω_n .

Badanie maksimum równania (8) wykazuje, że

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}. \quad (11)$$

Amplitudę największą oznacza się s_n i podstawiając (11) do (8) otrzymuje się

$$s_n = \frac{P_0}{c \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}. \quad (12)$$

Ogólnie wiadomo, że wartość pierwiastka znajdującego się w mianowniku przedstawia wartość częstości kątowej własnych drgań tłumionych, to jest takich, które występują niezależnie od częstości siły wzbudzenia.

$$q = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}.$$

Należy zwrócić uwagę na to, że

$$\omega_n < q < \omega_0.$$

Opory tłumienia w przesiewaczach na ogół są małe i dlatego poza specjalnymi przypadkami częstości kątowe krytyczne drgań własnych i największego skoku nieznacznie się różnią od siebie.

Analiza teorii ruchu drgającego wywołanego stałą siłą P_0 pozwala na następujące wnioski.

Przy częstotliwości kątowej napędu bliskiej 0 wpływ oporu jest mały i siła wzbudzenia wywołuje odchylenia, których amplituda jest bliska ugięciu statycznemu P_0/k . Przy małej częstotliwości kątowej siła wzbudzenia użyta jest głównie na przezwycięzenie siły sprężystości. Amplituda drgań w tym przypadku jest mało zależna od oporów.

Specjalnie charakterystyczną częstotliwością kątową jest częstość krytyczna. Dla $\omega = \omega_0$ przesunięcie fazowe siły wzbudzenia w stosunku do siły bezwładności $\varepsilon = 90^\circ$. Przy tej częstotliwości siła bezwładności zrównoważy siłę sprężystości, tak że siła wzbudzenia całkowicie wykorzystana jest na pokonanie siły oporu. Stąd wynika, że przy krytycznej częstotliwości kątowej napęd służy jedynie do dostarczenia energii potrzebnej na pokrycie strat wynikających z występowania oporów.

$$P_0 = c \cdot s_0 \cdot \omega_0 \quad (13)$$

oraz

$$m \cdot s_0 \cdot \omega_0^2 = k \cdot s_0.$$

Po przekroczeniu krytycznej częstotliwości kątowej ω_0 przesunięcie fazowe ε dalej wzrasta i jest większe od 90° . Natomiast amplituda i siła sprężystości maleją.

Przy znacznym stosunku ω/ω_0 również i siły oporu maleją, tak że siła wzbudzenia użyta jest głównie na przezwycięzenie sił bezwładności.

W praktyce siła wzbudzenia nie jest wartością stałą, tak że na ogół

$$P_0 = f(\omega).$$

Przeprowadzone rozważania odnoszą się więc do pewnego układu abstrakcyjnego. Okazuje się, że wnioski z tych rozważań znajdują praktyczne zastosowanie przy określaniu wartości sił wzbudzenia, jakie występują czy występować mogą w praktycznym układzie.

4. Siła wzbudzenia przy stałej amplitudzie

Na wstępie omówiona zostanie siła wzbudzenia dla przypadku napędu mimośrodowego. Jest to przypadek bardzo powszechny dla przesiewaczy wahadłowych. Należy określić siłę wzbudzającą P w równaniu (4) określając siłę wzbudzenia P_0 przy założeniu stałej amplitudy wywołanej sztywnym napędem mimośrodowym.

Warunki kinematyczne można określić zależnością (7) przyjmując, że

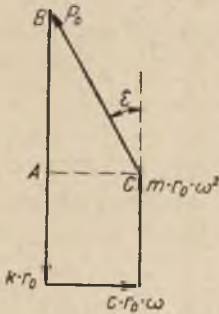
$$s_0 = r_0,$$

gdzie r_0 — amplituda rzeszota wywołana napędem mimośrodowym i dlatego

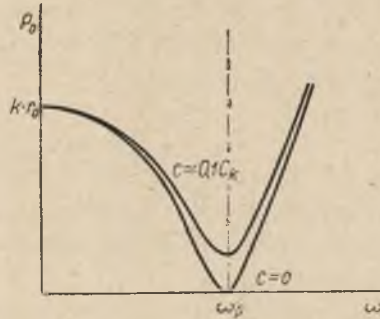
$$s = r_0 \cdot \sin(\omega t - \varepsilon). \quad (14)$$

Zależność słuszna dla przypadku, gdy r_0 małe w stosunku do długości łącznika mimośrodowego.

Znając wielkość amplitudy r_0 można dla dowolnej częstości kątowej ω określić siłę sprężystości (w tym przypadku niezależną od częstości) $k \cdot r_0$, siłę oporu $c \cdot r_0 \cdot \omega$ i siłę bezwładności $m \cdot r_0 \cdot \omega^2$. Znajomość tych sił pozwala



Rys. 4. Czworobok sił układu o stałej amplitudzie



Rys. 5. Siła wzbudzenia przy $c=0$ i $c=0,1C_k$ (układ ze stałą amplitudą)

na zbudowanie czworoboku sił (rys. 4). Czwartym bokiem czworoboku jest szukana siła wzbudzenia P_0 .

Z trójkątą ABC wynika, że

$$P_0^2 = c^2 \cdot r_0^2 \cdot \omega^2 + (k \cdot r_0 - m \cdot r_0 \cdot \omega^2)^2$$

i z tego

$$P_0 = r_0 \sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + (k - m \cdot \omega^2)^2}. \quad (15)$$

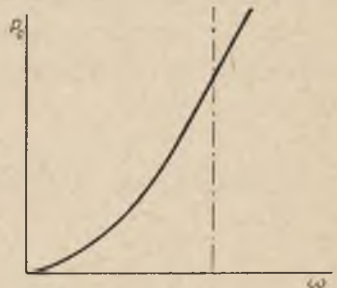
Na rysunku 5 przedstawiono wykres wielkości siły wzbudzenia dla przypadku bez oporów $c=0$ i dla przypadku kiedy $c \approx 0,1c_k$.

Na rysunku 6 przedstawiono wykres wielkości siły wzbudzenia dla przypadku, kiedy siła sprężystości nie występuje $k=0$ i brak oporów $c=0$. Dla porównania wykres sporządzono dla przypadku, kiedy masa m i amplituda r_0 jest taka sama jak dla warunków przedstawionych na rysunku 5.

W przypadku napędu mimośrodowego siła P_0 występuje w łączniku mimośrodowym. Jest to siła, na której działanie trzeba obliczyć cały napęd mimośrodowy.

W przypadku pokazanym na rysunku 6

$$P_0 = r_0 \cdot \omega^2 \cdot m$$



Rys. 6. Siła wzbudzenia przy $k=0$ (układ ze stałą amplitudą)

a równanie (6) zgodnie z prawem Newtona przybiera postać

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = r_0 \cdot \omega^2 \cdot m \cdot \sin \omega t. \quad (16)$$

Po podstawieniu do równania (16) dwukrotnie zróżniczkowanej wartości z równania (14) otrzyma się równanie

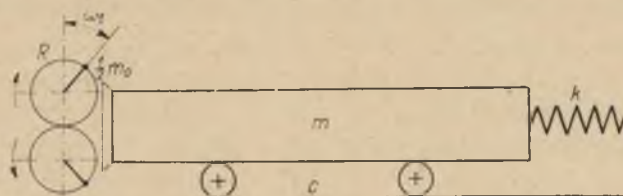
$$-r_0 \cdot \omega^2 \cdot m \cdot \sin (\omega t - \varepsilon) = r_0 \cdot \omega^2 \cdot m \cdot \sin \omega t,$$

co słuszne jest dla $\varepsilon = 180^\circ$.

5. Napęd bezwładnościowy

Napęd bezwładnościowy jest najpowszechniej stosowany po mimośrodowym napędzie. Ma on zastosowanie w przesiewaczach i różnych maszynach budowlanych.

W rozważanym przykładzie napęd składa się z dwusymetrycznie przeciwbieżnie wirujących mas (każda $\frac{1}{2}m_0$) po obwodzie o promieniu R .



Rys. 7. Układ z napędem bezwładnościowym

Dzięki temu składowe poprzeczne siły bezwładności znoszą się i na układ działają jedynie składowe podłużne.

Napędzany układ składa się z masy m i z więzi sprężystej (zawieszenia sprężystego o współczynniku k). Ponadto w układzie występuje opór o współczynniku c .

Suma składowych podłużnych (na schemacie rys. 7 — poziomych) sił odśrodkowych wirujących mas $\frac{1}{2}m_0$ przy stałej prędkości kątowej ω posiada wartość

$$m_0 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

bowiem składowa przyspieszeń wynosi

$$-R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t.$$

Należy od razu zwrócić uwagę na to, że rzeczywista siła wzbudzenia dla tego przypadku przedstawionego równaniem (6)

$$P_0 \neq m \cdot R \cdot \omega^2,$$

co wcale nie jest sprzeczne z tym, że w napędzie występuje siła odśrodkowa $m_0 \cdot R \cdot \omega^2$, którą należy brać pod uwagę przy obliczaniu wytrzymałościowym mechanizmu napędowego.

Wobec tego zachodzi konieczność określenia siły P w równaniu (4).

Siła wzbudzenia omawianego napędu jest równa nie zrównoważonej wewnątrz napędu sile bezwładności. Tymi nie zrównoważonymi wewnątrz siłami są zgodnie z przyjętym schematem (rys. 7) siły poziome.

Siła bezwładności przy przyspieszeniu poziomym a jest siłą wzbudzającą i wynosi

$$P = -m_0 \cdot a.$$

Przyspieszenie poziome a wynosi

$$a = -R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t + \frac{d^2 s}{dt^2},$$

gdzie s — odchylenie masy m , a $\frac{d^2 s}{dt^2}$ — przyspieszenie masy,

$$P = m_0 \left(R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t - \frac{d^2 s}{dt^2} \right). \quad (17)$$

I wreszcie po podstawieniu do równania (4) otrzymuje się równanie (18a)

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + c \frac{ds}{dt} + k \cdot s = m_0 \left(R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t - \frac{d^2 s}{dt^2} \right). \quad (18a)$$

Po przekształceniu widoczne jest podobieństwo do równania (6)

$$(m + m_0) \frac{d^2 s}{dt^2} + c \frac{ds}{dt} + k \cdot s = m_0 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t. \quad (18)$$

(Równanie to w wielu publikacjach podawane jest w ten sposób, że w miejsce sumy $m + m_0$ podawane jest m i jednocześnie jest przemilczane, że m jest sumą wszystkich mas łącznie z masami wirującymi).

Z porównania równań (18) i (18a) przez analizę układu pokazanego na rysunku 7 wynika następujące twierdzenie:

Celem obliczenia można na układ z masą m i rzeczywistą siłą wzbudzającą wyrażoną wzorem (17) patrzeć jak na układ o masie $m + m_0$ z pozorną siłą wzbudzenia $m_0 \cdot R \cdot \omega^2$.

Wobec tego korzystając z równania (18) można posłużyć się sposobem określenia amplitudy za pomocą (8), z czego wynika zależność

$$s_0 = \frac{m_0 \cdot R \cdot \omega^2}{\sqrt{c^2 \cdot \omega^2 + (k - m \cdot \omega^2 - m_0 \cdot \omega^2)^2}}. \quad (19)$$

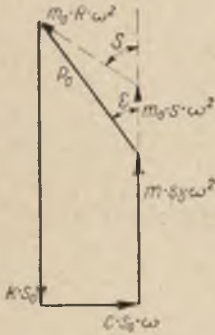
Przesunięcie fazowe siły pozornej δ

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{c \cdot \omega}{k - (m + m_0) \cdot \omega^2} \quad (20)$$

Wielkość odchylenia s dla dowolnego czasu

$$s = s_0 \cdot \sin (\omega t - \delta). \quad (21)$$

Pozorna siła wzbudzenia $m_0 \cdot R \cdot \omega^2$, jak zostało już wspomniane, jest rzeczywiście działającą na mechanizm siłą odśrodkową i na tę siłę trzeba obliczyć łożyska mechanizmu napędowego. Takie postępowanie na ogół w praktyce nie prowadzi do błędów, zwłaszcza w przypadku kiedy częstość robocza jest nadkrytyczna.



Rys. 8. Czworobok sił układu z napędem bezwładnościowym

Jednak należy zdać sobie sprawę z tego, że obok siły odśrodkowej (działającej na łożyska przede wszystkim w chwili, kiedy według schematu na rysunku 7 $\omega t = 0$ bądź $\omega t = \pi$) działa rzeczywista siła wzbudzenia, która może być większa od pozornej siły wzbudzenia.

Ponieważ za pomocą wzoru (19) można obliczyć dla dowolnego ω wielkość amplitudy s_0 , wobec tego można również dla określenia rzeczywistej siły wzbudzenia skorzystać z czworoboku sił podobnego do czworoboku z rysunku 4.

Na rysunku 8 pokazano taki czworobok sił — korzystając z czworoboku tak jak na rysunku 4 można dla obliczeń siły P_0 posłużyć się wzorem (15) podstawiając za wartość r_0 amplitudę s_0 obliczoną wzorem (19)

$$P_0 = m_0 \cdot R \cdot \omega^2 \sqrt{\frac{c^2 \cdot \omega^2 + (k - m \cdot \omega^2)^2}{c^2 \cdot \omega^2 + (k - m \omega^2 - m_0 \omega^2)^2}} \quad (22)$$

Bezpośrednio z czworoboku wynika, że przesunięcie fazowe rzeczywistej siły wzbudzenia określa wzór (23)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{c \cdot \omega}{k - m \omega^2} \quad (23)$$

Analizując wartość znajdującą się pod pierwiastkiem wzoru (22) czy też korzystając z wykresu na rysunku 8, w którym wrysowano wektory dodatkowej siły bezwładności $m_0 \cdot s_0 \cdot \omega^2$ i pozorną siłę wzbudzenia $m_0 \cdot R \cdot \omega^2$, można wykazać, że dla

$$\omega < \sqrt{\frac{2k}{2m + m_0}}, \quad (24)$$

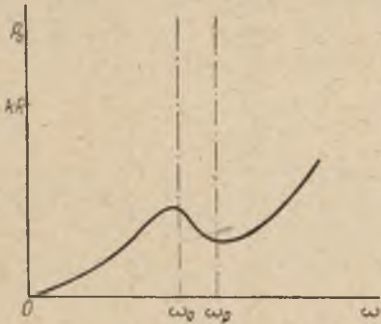
siła wzbudzenia rzeczywista jest większa od pozornej siły wzbudzenia

$$P_0 > m_0 \cdot R \cdot \omega^2.$$

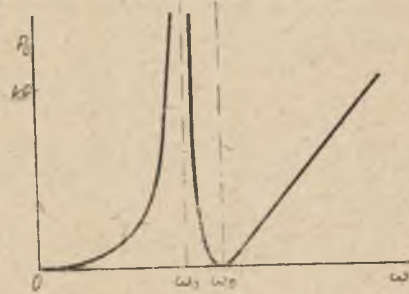
Należy pamiętać, że przy przechodzeniu napędu przez kątową częstość krytycznego układu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + m_0}} \quad (25)$$

wartość siły wzbudzenia może osiągnąć bardzo duże wielkości.



Rys. 9. Siła wzbudzenia w układzie tłumionym (napęd bezwładnościowy)



Rys. 10. Siła wzbudzenia w układzie nie tłumionym (napęd bezwładnościowy)

Na rysunku 9 przedstawiono wykres siły P_0 , gdzie widoczny charakterystyczny wzrost siły P_0 w pobliżu częstości krytycznej ω_0 .

Obok charakterystycznej częstości kątowej ω_0 , w pobliżu której zgodnie z wzorem (11) przy uwzględnieniu masy $m + m_0$ znajduje się częstość kątowa największego skoku ω_n , widoczna jest charakterystyczna druga częstość.

Tą charakterystyczną częstością jest częstość ω_p

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (26)$$

W pobliżu tej częstości siła P_0 ma wartość minimum. Szczególnie charakterystycznie przedstawia się ta częstość w przypadku drgań bez oporów. W przypadku kiedy $c=0$ przy $\omega = \omega_p$ siła P_0 , zgodnie z wzorem (22), równa jest zero (rys. 10), amplituda s_0 zaś zgodnie z wzorem (19)

$$s_0 = -R.$$

W tym świetle, częstość ω_p można nazwać częstością pozornie krytyczną.

6. Napęd sprężysty

Napęd sprężysty obecnie stosowany jest głównie w przesiewaczach rezonansowych.

Napęd stanowi sprzęg sprężysty k_0 (rys. 11), na który działa mechanizm przedstawiający na schemacie korbę o promieniu R obracającą się ze stałą prędkością kątową ω . Korba połączona jest ze sprzęgiem za pomocą łącznika tak długiego, że można praktycznie uznać ruch końca łącznika za harmoniczny.

Układ napędzany składa się z masy m i więzi sprężystej o współczynniku k . Ponadto występują opory o współczynniku c .

Siła wzbudzenia omawianego napędu jest równa sile sprężystości sprzęgu sprężystego

$$P = k_0(R \sin \omega t - s), \quad (27)$$

bowiem ugięcie sprzęgu równe jest odchyleniu $R \cdot \sin \omega t$ (wywołanemu mechanizmem korbowym) pomniejszonemu o wykonane w tym czasie odchylenia s masy m .

Po podstawieniu wartości P z równania (27) do równania (4) otrzymuje się

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + c \frac{ds}{dt} + k \cdot s = k_0(R \cdot \sin \omega t - s). \quad (28a)$$

Równanie to jest równoważne równaniu (28)

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} + c \frac{ds}{dt} + (k + k_0)s = k_0 \cdot R \cdot \sin \omega t. \quad (28)$$

Z porównania (28) i (28a) oraz analizy układu pokazanego na rysunku 11 wynika następujące twierdzenie:

Celem obliczenia można na układ z więzią sprężystą k i rzeczywistą siłą wzbudzącą wyrażoną wzorem (27) patrzeć jak na układ o więzi sprężystej $k + k_0$ napędzany pozorną siłą wzbudzenia $k_0 \cdot R$.

Wobec tego korzystając z równania (28) można posłużyć się sposobem określania amplitudy wyrażonej wzorem (8) i napisać

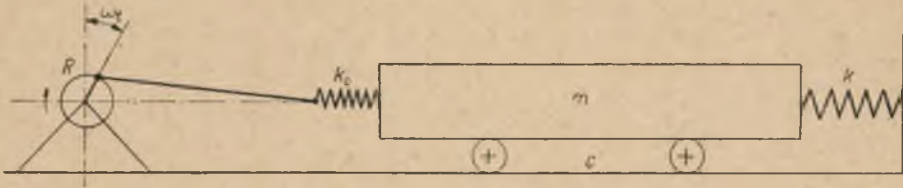
$$s_0 = \sqrt{\frac{R \cdot k_0}{c^2 \cdot \omega^2 + (k + k_0 - m \omega^2)^2}}. \quad (29)$$

Przesunięcie fazowe siły pozornej δ

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{c \cdot \omega}{k + k_0 - m \omega^2}. \quad (30)$$

Wielkość odchylenia s dla dowolnego czasu określa wzór (21).

Pozorna siła wzbudzenia $k_0 \cdot R$ jest rzeczywistą działającą siłą w przypadku, kiedy masa m nie uległa przesunięciu pod wpływem siły. Możliwe to byłoby, gdyby korba mechanizmu po postoju rozpoczęła ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym tak dużym, że w pierwszej chwili odchylenie masy m mogłoby być praktycznie uznane za równe 0.



Rys. 11. Układ z napędem sprężystym

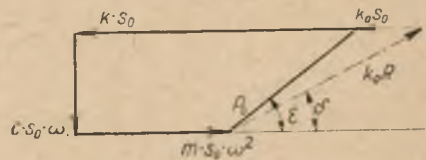
Ponieważ za pomocą wzoru (29) można dla dowolnego ω obliczyć amplitudę s_0 , wobec tego postąpi się podobnie jak w poprzednim rozdziale budując czworobok sił pokazany na rys. 12. Korzystając z tego czworoboku można dla obliczenia siły P_0 posłużyć się wzorem (15) podstawiając za r_0 amplitudę s_0 z wzoru (29)

$$P_0 = k_0 \cdot R \sqrt{\frac{c^2 \cdot \omega^2 + (k - m \cdot \omega^2)^2}{c^2 \cdot \omega^2 + (k + k_0 - m \cdot \omega^2)^2}} \quad (31)$$

Bezpośrednio z czworoboku wynika, że rzeczywiste przesunięcie fazowe ε określa wzór (23).

Analizując wartość pod pierwiastkiem ze wzoru (31) bądź też korzystając z wykresu na rysunku 12, w którym wrysowano wektory dodat-

Rys. 12. Czworobok sił układu z napędem sprężystym



kowej siły sprężystości $k_0 s_0$ i pozornej siły wzbudzenia $k_0 R$, można wykazać, że dla

$$\omega > \sqrt{\frac{2k + k_0}{2m}} \quad (32)$$

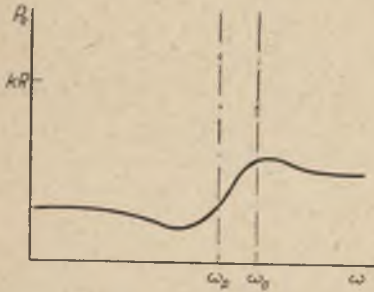
siła wzbudzenia rzeczywista jest większa od pozornej siły wzbudzenia

$$P_0 > k_0 \cdot R.$$

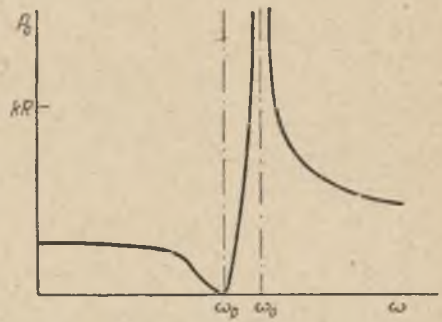
Należy pamiętać, że przy przechodzeniu napędu przez kątową częstotliwość krytyczną układu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k_0}{m}}, \quad (33)$$

sila wzbudzenia osiągnąć może bardzo duże wartości.



Rys. 13. Siła wzbudzenia układu tłumionego (napęd sprężysty)



Rys. 14. Siła wzbudzenia układu nie tłumionego (napęd sprężysty)

Na rysunku 13 przedstawiono wykres siły P_0 , gdzie widoczny charakterystyczny wzrost siły P_0 w pobliżu częstotliwości kątowej ω_0 .

Obok charakterystycznej częstotliwości kątowej ω_0 widoczna jest charakterystyczna druga częstotliwość. Tą charakterystyczną częstotliwością jest częstotliwość ω_p określona wzorem (26) i uznana w poprzednim ustępie jako częstotliwość pozornie krytyczna.

W danym przypadku w obszarze $\omega < \omega_0$ siła P osiąga minimum; szczególnie charakterystycznie zaznacza się ta częstotliwość w przypadku drgań bez oporu. Przy $\omega = \omega_p$, gdy $e = 0$, zgodnie z wzorem (31) siła P_0 równa jest 0 (rys. 14), amplituda zaś zgodnie z wzorem (29)

$$s_0 = R.$$

Teoria podana w tym ustępie stanowi podstawę zasad budowy przesiewaczy rezonansowych.

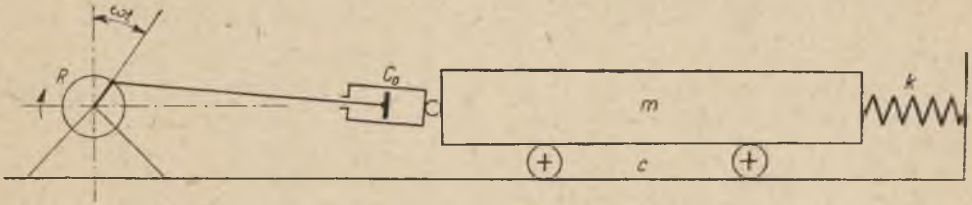
7. Napęd oporowy

Budowa równania (6) nasuwa wniosek, że jeżeli siła wzbudzenia może mieć postać siły bezwładności bądź sprężystości, również mogłaby mieć postać siły oporowej.

Napęd może stanowić sprzęg o konstrukcji zbliżonej do amortyzatorów hydraulicznych. W miejsce sprzęgu sprężystego pokazanego na rysunku 11 dla przypadku napędu oporowego umieszcza się sprzęg

hydrauliczny, co schematycznie pokazano na rysunku 15; współczynnik oporu sprzęgu hydraulicznego określa się jako c_0 .

Układ napędzany składa się z masy m i więzi sprężystej o współczynniku k . Ponadto jak w poprzednich przypadkach występuje opór o współ-



Rys. 15. Układ z napędem oporowym

czynnikowi c . Siła wzbudzenia omawianego napędu jest równa sile oporu sprzęgu hydraulicznego

$$P = c_0 \left(R \cdot \omega \cdot \cos \omega t - \frac{ds}{dt} \right), \quad (34)$$

bowiem prędkość względna jednej części sprzęgu w stosunku do drugiej równa jest prędkości wywołanej mechanizmem korbowym, pomniejszonej o prędkość, jaką posiada w tym czasie masa m .

Po podstawieniu do równania (4) otrzymuje się

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + c \frac{ds}{dt} + k \cdot s = c_0 \cdot \left(R \omega \cdot \cos \omega t - \frac{ds}{dt} \right) \quad (35a)$$

i podobnie jak poprzednio po przekształceniu

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + (c + c_0) \frac{ds}{dt} + k \cdot s = c_0 \cdot R \cdot \omega \cdot \cos \omega t. \quad (35)$$

Z porównania równań (35) i (35a) wynikają następujące wnioski:

Celem obliczenia można na układ o oporach c i rzeczywistej sile wzbudzenia o wielkości wyrażonej wzorem (34) patrzeć jak na układ o oporach $c + c_0$ z pozorną siłą wzbudzenia $c_0 \cdot R \cdot \omega$.

Postępując jak w poprzednich rozdziałach, można wobec tego określić wielkość amplitudy w sposób następujący:

$$s_0 = \frac{c_0 \cdot R \cdot \omega}{\sqrt{(c + c_0)^2 \omega^2 + (k - m \omega^2)^2}}. \quad (36)$$

Przesunięcie fazowe siły pozornej δ

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(c + c_0) \omega}{k - m \cdot \omega^2}. \quad (37)$$

Pozorna siła wzbudzenia byłaby rzeczywistą działającą w przypadku, kiedy masa m nie uległaby przesunięciu w czasie działania siły wzbudzenia.

Ponieważ za pomocą wzoru (36) można obliczyć dla dowolnego ω wielkość amplitudy s_0 , wobec tego dla określenia rzeczywistej siły wzbudzenia zostanie wykorzystany czworobok sił, podobnie jak na rysunku 8.

Na rysunku 16 pokazano czworobok sił dla przypadku napędu oporowego.

Korzystając z tego czworoboku można dla obliczenia siły posłużyć się wzorem (15) podstawiając za r_0 amplitudę s_0 z (36)

$$P_0 = c_0 \cdot R \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{c^2 \cdot \omega^2 + (k - m \cdot \omega^2)^2}{(c + c_0)^2 \cdot \omega^2 + (k - m \cdot \omega^2)^2}} \quad (38)$$

Bezpośrednio z czworoboku wynika, że przesunięcie fazowe rzeczywistej siły wzbudzenia określa wzór (23).

Analizując wartość pod pierwiastkiem wzoru (38) czy też korzystając z wykresu na rysunku 16, w który wrysowano wektor dodatkowej siły oporu $c_0 \cdot s_0 \cdot \omega$ i pozornej siły wzbudzenia $c_0 \cdot R \cdot \omega$, można wykazać, że dla każdej wartości ω rzeczywista siła wzbudzenia jest mniejsza od pozornej siły wzbudzenia.

W danym tylko przypadku, podobnie jak przy napędzie sprężystym i bezwładnościowym, występuje częstość pozornie krytyczna ω_p obliczona zgodnie z wzorem (26). Dla tej częstości, kiedy $c = 0$, siła $P_0 = 0$ (rys. 18), zgodnie zaś z wzorem (36)

$$s_0 = R.$$

Rzeczywista częstość krytyczna w tym układzie nie występuje — układ jest zawsze tłumiony oporami napędu. Można wykazać, że przy tym napędzie amplituda s_0 jest zawsze mniejsza od promienia R (bądź mu równa),

$$s_0 \leq R.$$

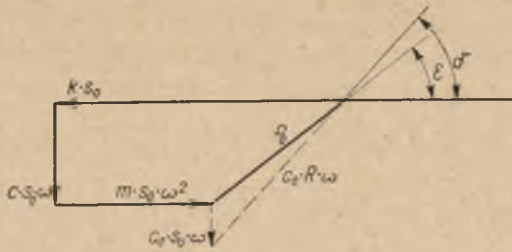
8. Porównanie sił wzbudzenia

Porównanie wykresu sił wzbudzenia wywołanych napędami: bezwładnościowym, sprężystym i oporowym pozwala na ustalenie pewnych wspólnych właściwości tych sił jak również różnic.

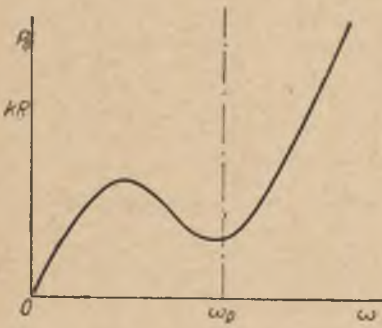
Wspólną właściwością jest sposób zmienności siły w pobliżu częstości pozornie krytycznej ω_p .

Przy częstości ω_p w przypadku, kiedy opór nie występuje, $c = 0$, siła $P_0 = 0$.

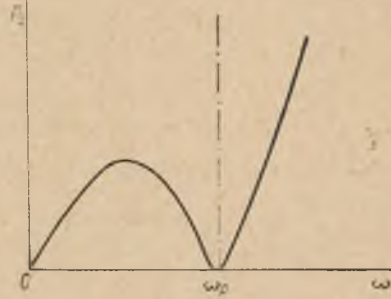
W przypadku kiedy $c > 0$, w pobliżu ω_p siła P_0 osiąga minimum w określonym zakresie $\omega = \omega \pm \Delta\omega_p$; z tego wynika, że najekonomiczniejszą pracą przesiewaczy zwanych rezonansowymi jest praca przy częstości bliskiej ω_p .



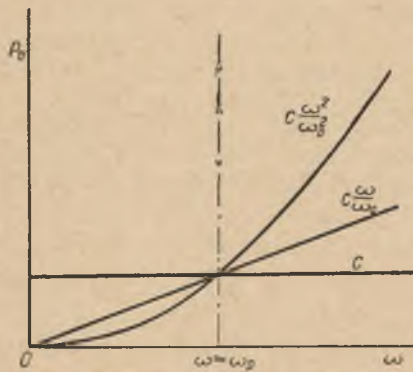
Rys. 16. Czworobok sił układu z napędem oporowym



Rys. 17. Siła wzbudzenia przy $c > 0$
(napęd oporowy)



Rys. 18. Siła wzbudzenia przy $c = 0$
(napęd oporowy)



Rys. 19. Zestawienie porównawcze sił wzbudzenia

Dla lepszego uwypuklenia różnic w sposobach przebiegu wartości siły wzbudzenia można pomyśleć trzy napędy: sprężysty, oporowy i bezwładnościowy, które tak są dobrane, że przy częstotliwości ω_p siły wzbudzenia są równe. Ponadto tak skonstruowano napędy, że wartości

$$k_0 \cdot R_1 = c_0 \cdot R_2 \cdot \omega_p = m_0 \cdot R_3 \cdot \omega_p^2 = c \cdot s_0 \cdot \omega_p,$$

przy czym promienie R są tak duże, że stosunki $\frac{k_0}{k}$, $\frac{c_0}{c}$ i $\frac{m_0}{m}$ są bardzo małe. Wartości te z tego względu mogą być w tym przypadku pominięte.

Przy powyższych założeniach granicami wartości sił P_0 wyrażonych wzorami (31), (38) i (22) są

$$P_0 = c \quad \text{napęd sprężysty,}$$

$$P_0 = c \frac{\omega}{\omega_p} \quad \text{napęd oporowy,}$$

$$P_0 = c \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \quad \text{napęd bezwładnościowy.}$$

Wykres tych trzech rodzajów sił wzbudzenia przedstawiono na rysunku 19.

Z wykresów na rysunkach 19 i 14 wynika, że siła wzbudzenia napędu sprężystego spośród praktycznie możliwych do zastosowania najbardziej zbliżona jest do siły niezależnej od częstotliwości. W warunkach wyabstrahowanych, dla których sporządzono wykres (rys. 19), siła napędu sprężystego przedstawiona jest prostą równoległą do osi odciętych.

LITERATURA

- [1] Hartog J. P., *Mechanical Vibrations*, Nowy Jork—Londyn 1947.
- [2] Huber M. T., *Stereomechanika techniczna*, cz. III, Warszawa 1951.
- [3] *Машиностроение*, т. 2, ч. 2, Москва 1948.
- [4] Naleszkiewicz J., *Dynamika*, Warszawa 1952.
- [5] Николай Б. Л., *Теоретическая механика*, т. II, Москва 1952.
- [6] Пономарев, Бидерман, Лихаров, Макушин, Малинин, Феодосьев, *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, Москва 1952.