ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 10 GÓRNICTWO Z. 1 1956

Stefan Barczyk

Depresja cieplna w układzie ciśnienie — temperatura

Streszczenie: W pracy podano nowy sposób analitycznego i graficznego obliczenia depresji cieplnej kopalni we współrzędnych ciśnienie—temperatura.

1. Wstęp

Przez czynne wyrobiska kopalniane musi przepływać stały prąd świeżego powietrza w celu usunięcia szkodliwych gazów powstałych w wyniku zachodzących procesów fizycznych i chemicznych. Pierwsze kopalnie były przewietrzane w sposób naturalny, tzn. że do wytworzenia prądu powietrza nie używano specjalnych urządzeń. Sposób ten w kopalniach węgla kamiennego utrzymał się do początku bieżącego stulecia, w mniejszych kopalniach rud — nawet do czasów współczesnych.

Mówimy, że przewietrzanie takie odbywa się pod wpływem depresji naturalnej.

Depresja naturalna istnieje także w kopalniach przewietrzanych sztucznie za pomocą wentylatorów i osiągać może znaczną wielkość. Może ona być skierowana zgodnie z depresją wentylatora, co jest korzystne energetycznie i ekonomicznie, lub skierowana niezgodnie, czyli przeciwdziałać jej. Depresja naturalna jest nie tylko zagadnieniem ekonomicznym, lecz ma także duże znaczenie ze względu na bezpieczeństwo, np. przy pożarach kopalnianych, stąd ważne jest zagadnienie poprawnego i szybkiego jej określenia. Znalazło to swój wyraz w literaturze górniczej różnych krajów. Zjawiska przewietrzania naturalnego opisują najstarsze podręczniki górnictwa. Już w drugiej połowie XIX w. podawano sposób obliczenia depresji naturalnej. Opierał się on na zasadzie naczyń połączonych — tzn. różnicy ciśnień hydrostatycznych słupów powietrza w szybie wdechowym i wydechowym głównie z powodu różnic temperatur. Wzory te podaje się także w obecnych podręcznikach wentylacji (np. wzór Protodiakonowa, Weeksa). Wzory te nie są na ogół dokładne, a sam sposób jest przybliżony.

Na wytworzenie ruchu powietrza, czyli pokonanie oporów tarcia konieczny jest pewien nakład pracy. Depresja naturalna jest więc pracą potrzebną na przetransportowanie jednostki powietrza przez kopalnię. Wyra-

żamy ją w dwu jednostkach — zależy to od przyjętej do rozważań formy równania Bernoulliego; mianowicie poszczególne wyrazy tego równania mogą mieć wymiar wysokości (długości) lub ciśnienia. W pierwszym wypadku depresja wyraża się pracą potrzebną na przeprowadzenie przez kopalnię 1 kg powietrza podaną w metrach słupa powietrza — H(m). W drugim przypadku depresja jest pracą potrzebną na przeprowadzenie przez kopalnię 1 m³ powietrza i wyraża się w kGm/m³ lub kG/m², czyli w milimetrach słupa wody — h (mmH_2O). Depresja naturalna wywołana jest zmianami cieplnymi, jakim ulega powietrze przy przepływie przez kopalnię, a także z powodu zmiany składu chemicznego (ubytek tlenu, wzrost dwutlenku węgla, metanu, pary wodnej itp.). Wpływ zmiany składu jest zwykle stosunkowo nieznaczny i w szeregu prac nie uwzględnia się go. Pozostaje więc tylko wpływ zmian termicznych — przyjmowania i oddawania ciepła przez powietrze do otaczających ścian wyrobisk. Otrzymamy wtedy tzw. depresję cieplną, będącą przedmiotem rozważań.

W tym wypadku kopalnię możemy traktować jako silnik cieplny. Przyjmujemy wtedy do rozważań obieg zamknięty, czyli łączymy z sobą wyloty szybów wdechowego i wydechowego przez atmosferę zewnętrzną. Zjawisko depresji cieplnej w ścisły sposób termodynamiczny ujął po raz pierwszy w 1929 r. prof. Budryk [1], [2] używając układu pracy Clapeyrona (p, v), czyli p, $1/\gamma$.

Zagadnienie depresji naturalnej albo cieplnej jest przedmiotem szeregu publikacyj w różnych językach. Dla obliczenia depresji cieplnej użył G. v. Eysbroeck znanego układu ciepła $T-S$ (temperatura bezwzględna — entropia) [3], a w polskiej literaturze — Bystroń [4].

W Związku Radzieckim A. F. Woropajew [5], [6], [7] opracował wykreślną i analityczną metodę obliczenia depresji naturalnej używając układu $Z-T$ (wysokość geodetyczna — temperatura bezwzględna). Układ ten jest zresztą stosowany we wspomnianych już wzorach.

Poniżej do obliczenia depresji cieplnej użyjemy układu $p-T$ (ciśnienie — temperatura).

2. Podstawy termodynamicznej teorii depresji cieplnej

Oznaczenia:

z — rzędne osi przewodu, m,
p — ciśnienie, kG/m² (mm powietrza), ($p = 13{,}6\ h$),
γ — ciężar właściwy słupa wody, kG/m³,
v — prędkości przepływu, m/sek,
V — objętość właściwa m³/kG
W — wysokość oporów ruchu, m słupa powietrza,
w — wysokość oporów ruchu, kG/m² (mm słupa wody),

L — praca techniczna wykonana przez prąd powietrza, m słupa powietrza,
H_t — depresja cieplna, m słupa powietrza,
h_m — depresja mechaniczna, mm słupa wody (kG/m²),
h_t — depresja cieplna, kG/m²,
H_m — depresja mechaniczna, m słupa powietrza,
t — temperatura, °C,
T — temperatura bezwzględna; $T = 273 + t$,
R — stała gazowa, dla powietrza $R = 29{,}27$, kGm/kg
b — ciśnienie atmosferyczne, mm słupa rtęci, przy czym $p = 13{,}6\, b$.

Równanie różniczkowe dla ruchu powietrza:

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d\frac{v^2}{2g} + dW + dL = 0, \tag{1}$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$z_2 - z_1 + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + W_{12} + L_{12} = 0. \tag{2}$$

Jeżeli rozważamy przemianę zamkniętą, o której wspomnieliśmy poprzednio, to dla niej jest

$$z_1 = z_2; \quad v_1 = v_2.$$

Jeśli w przewodzie zamkniętym działa wentylator lub wentylatory o sumarycznej depresji mechanicznej H_m (słupa powietrza), to $H_m = -L_{12}$. Równanie (2) przejdzie w (3)

$$\oint \frac{dp}{\gamma} + W = H_m, \tag{3}$$

gdzie kółko przy znaku całki oznacza całkowanie na drodze zamkniętej, a całka oznacza powierzchnię w układzie p, $1/\gamma$ (rys. 2). Depresją cieplną obiegu H_t nazwiemy wielkość

$$H_t = -\oint \frac{dp}{\gamma}. \tag{4}$$

Wstawiając tę wartość w równanie (3) otrzymujemy

$$W = H_t + H_m. \tag{5}$$

Ponieważ

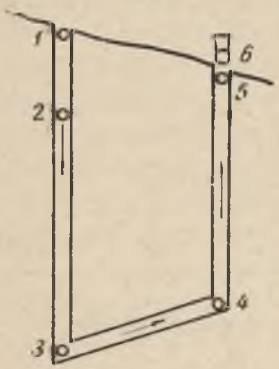
$$\begin{aligned} w &= \gamma \cdot W, \\ h_t &= \gamma \cdot H_t, \\ h_m &= \gamma \cdot H_m, \end{aligned} \tag{6}$$

więc

$$w = h_t + h_m. \tag{7}$$

Równania (4), (5), (7) wykazują, że w kopalni ruch (czyli pokonanie oporów tarcia) odbywa się kosztem sumy depresji mechanicznej i cieplnej. Jeżeli depresja cieplna jest różna od zera ($h_t \neq 0$), co zwykle ma miejsce, to przez kopalnię może przepływać powietrze mimo braku depresji mechanicznej ($h_m = 0$).

Depresję cieplną wyraża wzór (4). Dla obliczenia jej w poszczególnych punktach kopalni wykonuje się pomiary temperatury t i ciśnienia barometrycznego b (rys. 1). Wyniki te dla przytoczonego przykładu ujęte są w kolumnie 1 i 2 tablicy 1.



Rys. 1. Schemat rozmieszczenia punktów pomiaru dla obliczenia depresji cieplnej (do rys. 2 i 4)

Punkty te nanosi się na wykresie p, $1/\gamma$ (rys. 2). Dla ułatwienia naniesienia punktów pomiaru na diagramie tym wykreśla się krzywe jednakowych temperatur (izotermy). Jeśli nie mamy wykresów izoterm, należy wtedy dla danych warunków obliczyć objętość właściwą $1/\gamma$ wychodząc z równania Clapeyrona

$$p \cdot \frac{1}{\gamma} = R \cdot T, \tag{8}$$

skąd

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{RT}{p}. \tag{8a}$$

Przyjmując stałą R dla powietrza

$$R = 29{,}27,$$

$$p = 13{,}6\, b,$$

otrzymamy

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{T}{0{,}465\, b}. \tag{8b}$$

W ten sposób otrzymane wartości użyto do wykonania klasycznego wykresu depresji cieplnej (rys. 2), przy czym depresję tę można wyrazić w formie:

$$H_t = -\oint \frac{dp}{\gamma} = -R \oint T \frac{dp}{p} = -R \oint T \frac{db}{b}. \tag{9}$$

Wartość depresji cieplnej możemy określić przez obliczenie graficzne pola na tym wykresie lub w sposób analityczny, np. według równania (9) zastosowanego w pracy. Całka (4) wyrazi się dla skończonej ilości punktów przez

Tablica 1

L. p.	b	t	T	$\frac{1}{\gamma}$	$b_{śr}$	$t_{śr}$	$T_{śr}$	$-\Delta b$	$\frac{-T_{śr}\cdot\Delta b}{b_{śr}}$	$\frac{-t_{śr}\cdot\Delta b}{b_{śr}}$
	mmHg	°C	°K	m³/kG	mmHg	°C	°K	mmHg	°K	°C
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	741	4	277	0,809						
					746,5	6,0	279	−11	− 4,111	− 0,088
2	752	8	281	0,804						
					766	9,5	282,5	−28	−10,325	− 0,347
3	780	11	284	0,782						
					778	17,0	290	+ 4	+16,786	+ 1,224
4	776	23	296	0,821						
					754,5	21,5	294,5	+43	− 3,186	− 0,223
5	733	20	293	0,859						
					737	20,5	293,5	− 8	+ 1,491	+ 0,087
6	741	21	294	0,855						
Σ									+ 0,653	+ 0,653
7	$H_t = 29{,}27\cdot\Sigma$								+19,11	+19,11
8	γ_0 (z rys. 2)								1,22	1,22
9	$h_t = \gamma_0\cdot H_t$								+23,31	+23,31

sumę

$$H_t = -\sum \frac{\Delta p}{\gamma_{śr}} = -R\sum \frac{T_{śr}\cdot\Delta p}{p_{śr}} = R\sum -\frac{T_{śr}\cdot\Delta b}{b_{śr}}, \tag{9a}$$

gdzie:

$$-\Delta b = -(b_{n+1} - b_n),$$

$$b_{śr} = \tfrac{1}{2}(b_n + b_{n+1}),$$

$$T_{śr} = \tfrac{1}{2}(T_n + T_{n+1}),$$

$$t_{śr} = \tfrac{1}{2}(t_n + t_{n+1})$$

oblicza się z pomierzonych ciśnień i temperatur w poszczególnych punktach. Obliczenie ujęte jest w kolumnie 5, 6, 7 tablicy 1.

Jeśli chodzi o analityczne obliczenie, to zwrócimy uwagę, że dla zamkniętej powierzchni całkę (9) można przedstawić w postaci:

$$H_t = -R\oint T\frac{db}{b} = -R\oint t\frac{db}{b}, \tag{9b}$$

co łatwo udowodnić biorąc pod uwagę, że

$$T = 273 + t$$

oraz

$$\oint \frac{db}{b} = 0.$$

W tym wypadku do obliczeń używamy mniejszych liczb. Sposób ten przedstawiono w kolumnie 10 tablicy 1.

Depresję cieplną wyrażoną w milimetrach słupa wody określamy ze wzoru

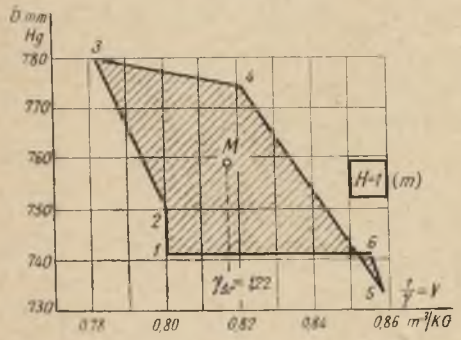
$$h_t = \gamma_{śr} \cdot H_t, \tag{6}$$

gdzie $\gamma_{śr}$ jest średnim ciężarem właściwym powietrza przy przepływie przez kopalnię. Przyjmuje go się ze środka ciężkości M wykresu pracy (rys. 2) — w naszym przykładzie $\gamma_{śr} = 1{,}22$ kG/m³. Obliczone wartości depresji cieplnej wynoszą (tabl. 1):

$$H_t = 19{,}11 \text{ (m słupa powietrza)},$$

$$h_t = 23{,}31 \text{ (mm słupa wody)},$$

i posłużą nam jako porównanie z nowym sposobem obliczenia jej.



Rys. 2. Depresja cieplna w układzie ciśnienie — objętość właściwa

Depresję tę zwykle obliczamy w sposób graficzny, przez określanie powierzchni wykresu naniesionego w odpowiedniej skali (rys. 2). Na wykresie oznaczonej jednostce powierzchni odpowiada depresja 1 m słupa powietrza.

3. Depresja cieplna w układzie ciśnienie — temperatura

Do określenia depresji cieplnej przy użyciu wykresów pracy lub ciepła mierzy się temperaturę i ciśnienie powietrza. Na obu wykresach jedna z osi współrzędnych jest innym parametrem (obj. właściwa, entropia) stanu gazu niż pomierzone wielkości (p, T); wykonanie wykresu jest utrudnione, wymaga obliczeń lub specjalnych gotowych siatek z naniesionymi izotermami (na wykresie pracy) lub izobarami (na wykresie ciepła).

W pracy niniejszej określimy depresję cieplną w pomierzonych współrzędnych „naturalnych" (p, T), tzn., że po naniesieniu punktów pomiaru na wykres i splanimetrowaniu otrzymamy powierzchnię zamkniętą będącą podstawą do określenia depresji.

Klasyczna wartość depresji cieplnej

$$H_t = -\oint \frac{dp}{\gamma}, \tag{4}$$

po uwzględnieniu równania Clapeyrona (8) daje

$$H_t = -\oint \frac{R \cdot T \cdot dp}{p}.$$

Całkę tę przekształcimy następująco (całkowanie przez części):

$$\int \frac{T\,dp}{p} = T \ln p - \int \ln p\, dT = T \ln p - \int (\ln p - \ln p_0)\, dT - \int \ln p_0 \cdot dt =$$

$$= T \ln \frac{p}{p_0} - \int \left(\ln \frac{p}{p_0}\right) dT,$$

przy czym za p_0 przyjmiemy ciśnienie w środku ciężkości pola

$$p_{\min} < p_0 < p_{\max}.$$

Wstawiając ostatnią wartość do (9) i uwzględniając, że dla obiegu zamkniętego pierwszy wyraz jest zerem, otrzymamy

$$H_t = R \oint \left(\ln \frac{p}{p_0}\right) dT. \tag{10}$$

Przyjmiemy (rys. 3) nowy układ dla ciśnienia:

$$p = p_0 + p'. \tag{10a}$$

Po uwzględnieniu równania (10a) otrzymamy:

$$\ln \frac{p}{p_0} = \ln \left(1 + \frac{p'}{p_0}\right).$$

Jak uzasadnimy dalej, wartość p'/p_0 jest małym ułamkiem, dla którego logarytmy można rozłożyć w szereg [1], przy czym można zaniedbać dalsze wyrazy bez popełnienia większego błędu. Przyjmując

$$\ln \left(1 + \frac{p'}{p_0}\right) \approx \frac{p'}{p_0},$$

otrzymamy więc z równości (9)

$$H_t = R \oint dT \cdot \ln \left(1 + \frac{p'}{p_0}\right) \approx \frac{R}{p_0} \oint p'\, dT = \frac{R}{p_0} \oint (p - p_0)\, dT =$$

$$= \frac{R}{p_0} \oint p \cdot dT,$$

$$H_t \simeq \frac{R}{p_0} \oint p \cdot dT. \tag{11}$$

Według tego wzoru możemy określić wielkość depresji cieplnej; całka przedstawia powierzchnię w układzie $p - T$ (w odpowiedniej skali), gdzie

[1]

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \ldots \quad \text{dla} \quad -1 < X \leqslant +1.$$

izobary i izotermy są prostymi. Oczywiście wartość całki nie ulegnie zmianie, gdy zamiast temperatury bezwzględnej użyjemy temperatury w stopniach Celsjusza.

Dla dokładnego określenia depresji w układzie $p-T$ należałoby użyć wzoru oryginalnego z pierwszego przekształcenia, mianowicie

$$H_t = R \oint \ln p \cdot dT, \tag{10b}$$

czyli na wykresie użyć osi: T, $\ln p$. Oś ciśnień ma więc skalę logarytmiczną. W przedziale panujących ciśnień w kopalni skala ta, jak uzasadniono, różni się bardzo mało od skali normalnej. Wzór (10b) może mieć zastosowanie ogólne, powierzchnia w tym układzie wyraża pracę dla obiegu 1 kg gazu doskonałego [8].

Podobnie ciśnienie może być wyrażone w dowolnych jednostkach np. mm słupa wody lub rtęci (ale jednakowych w danym przykładzie)

$$H_t = \frac{R}{b_0} \oint b \cdot dT. \tag{11a}$$

Ciśnienie p_0 albo b_0 przyjmiemy w środku ciężkości powierzchni obiegu na wykresie (rys. 3, 4).

Depresję w mm słupa wody wyrazi się wzorem (6):

$$h_t = \gamma_0 \cdot H_t, \tag{6}$$

gdzie za γ_0 przyjmiemy średni ciężar właściwy w środku ciężkości wykresu, obliczony według wzoru (8). Otrzymamy wtedy z równań (11) i (6):

$$\underline{h_t = \frac{1}{T_0} \oint p \cdot dt.} \tag{12}$$

Jeśli ciśnienie wyrazimy w mm Hg, to:

$$h_t = \frac{13 \cdot 6}{T_0} \oint b \cdot dt. \tag{12a}$$

Według powyższego wzoru obliczono analitycznie depresję w kolumnie 8 tablicy 2 dla tych samych obserwacji co w tablicy 1. Δt określone jest w zależności

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n = T_{n+1} - T_n.$$

Dla operowania niniejszymi liczbami całkę (12a) możemy przedstawić w formie:

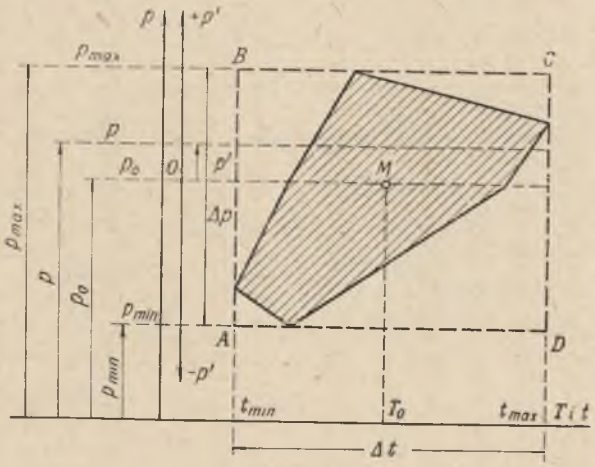
$$\oint b\,dt = \oint (b - B)\,dt, \tag{12b}$$

gdzie B jest dowolną stałą liczbą. Możemy przyjąć np., że B jest najmniejszym pomierzonym albo obliczonym ciśnieniem. W naszym przykładzie

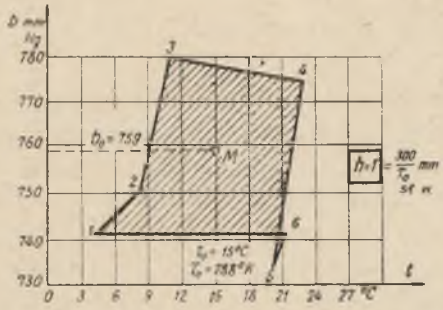
przyjęliśmy $B = \min b_{śr} = 737$. Obliczenie ujęte jest w kolumnie 9 (tabl. 2). Dla obiegów zamkniętych podane całki można wyrazić także następująco:

$$\oint p\,dt = -\oint T\,dp = -\oint t \cdot dp = -13{,}6 \oint t \cdot db.$$

W kolumnie 10 tablicy 2 obliczono depresję przy użyciu ostatniej zależności.



Rys. 3. Depresja cieplna w układzie ciśnienie — temperatura



Rys. 4. Depresja cieplna w układzie ciśnienie — temperatura

Oczywiście wszystkie te wzory (kolumny 8, 9, 10) dają identyczne wartości depresji cieplnej. Wartości te różnią się bardzo mało od „prawdziwej" wielkości obliczonej według klasycznego wzoru (4).

Obliczenia te są na ogół prostsze niż w układzie pracy lub ciepła, sposób ten nadaje się również do graficznego obliczenia depresji i w tym wypadku jest również znacznie prostszy. Mianowicie obserwacje w po-

mierzonych punktach nanosimy na wykres $p-T$ albo $b-T$ (rys. 4), obliczamy powierzchnię obiegu, np. przez planimetrowanie lub w inny sposób. Otrzymujemy wtedy wartość całki z równania (11) albo (12);

Tablica 2

L. p.	b mmHg	t °C	T °K	$t_{śr}$ °C	$T_{śr}$ °K	$-\Delta b$ mmHg	Δt	$b_{śr}\cdot\Delta t$ mmHg·1°	$(b_{śr}-B)\Delta t$ mmHg·1°	$-\Delta b\cdot t_{śr}$ mmHg·1°
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	741	4	277							
				6,0	279	−11	+ 4	+ 2986	+ 38	− 66,0
2	752	8	281							
				9,5	282,5	−28	+ 3	+ 2298	+ 87	−266,0
3	780	11	284							
				17,0	290	+ 4	+12	+ 9336	+492	+ 68,0
4	776	23	296							
				21,5	294,5	+43	− 3	− 2263,5	− 52,5	+924,5
5	733	20	293							
				20,5	293,5	− 8	+ 1	+ 737	—	−164,0
6	741	21	294							
							−17	−12597	− 68	—
Σ								+ 496,5	+496,5	+496,5
b_0	mmHg	(z rys. 4)						759	759	759
T_0	°K	(z rys. 4)						288	288	288
h_t	mmH$_2$O	$h_t=\frac{13.6\cdot\Sigma}{T_0}$						23,45	23,45	23,45
H_t	m. sł. p.	$H_t=\frac{R}{b_0}\Sigma$						19,15	19,15	19,15

częściej używa się zależności (12), gdyż daje depresję w milimetrach słupa wody, czyli w jednostkach używanych praktycznie.

Wielkość tej powierzchni dzielimy przez temperaturę absolutną T_0 środka ciężkości M wykresu. W naszym przykładzie skalę obrano w ten sposób (rys. 4), że jednostka powierzchni wykresu odpowiada $300/T_0$ (mm słupa wody), przy czym ciśnienie na osi wykresu wyrażone jest w milimetrach słupa rtęci. Przez planimetrowanie określono powierzchnię obiegu na

$$S = 22{,}3 \text{ jednostek},$$

średnią temperaturę obiegu przyjęto ze środka ciężkości wykresu na

$$t_0 = 15^\circ\,\text{C}, \text{ czyli } T_0 = 288.$$

Depresja cieplna wynosi więc

$$h_t = \frac{S\cdot 300}{T_0} = \frac{22{,}3\cdot 300}{288} = 23, \text{ (mm Hg)}.$$

Analitycznie obliczono ją z tegoż sposobu na 23,45, a więc błąd jest rzeczywiście mały. Podobnie można obliczyć H_t (11a), przyjmując z wykresu wartość $b_0 = 759$.

Co do znaku h_t, albo H_t to łatwo uzasadnić, że depresja jest dodatnia (tzn. zgodna z depresją mechaniczną), jeśli ruchowi powietrza od szybu wlotowego do wylotowego odpowiada obieg na konturze wykresu w kierunku ruchu wskazówek zegara. Wykres (rys. 4) może składać się więc z części dodatnich i ujemnych, które należy sumować z uwzględnieniem znaków.

4. Praktyczne zastosowanie nowej metody

Wyprowadzone wzory (11) i (12) są przybliżone, dokładny jest tylko wzór (10). Możliwość zastosowania powyższej metody uzasadnimy w ten sposób, że udowodnimy, iż popełniony błąd z powodu przyjętego uproszczenia jest niewielki, a z drugiej strony obliczenie depresji według klasycznego wzoru (4) z powodu błędu pomiaru ciśnienia i temperatur określonych dokładnością przyrządów jest również obarczone błędem przynajmniej w tych samych granicach.

Po rozwinięciu w szereg wzór (10) przedstawia się następująco:

$$H_t = R \int \left(\ln \frac{p}{p_0}\right) \cdot dT = \frac{R}{p_0} \int p \cdot dT - R \int \frac{1}{2} \left(\frac{p'}{p_0}\right)^2 dT + R \int \frac{1}{3} \left(\frac{p'}{p_0}\right)^3 dT,$$

opuszczając dalsze wyrazy i uwzględniając nierówność (11) otrzymamy:

$$\frac{R}{p_0} \int p \cdot dT > H_t > \frac{R}{p_0} \int p \cdot dT - \frac{R}{2p_0^2} \int p'^2 \cdot dT.$$

Oznaczymy przez S_H górny kraniec błędu (błąd jest dodatni) dla H_t, spowodowany przyjętym uproszczeniem, czyli

$$S_H = \frac{R}{p_0} \int p \cdot dT - H_t. \tag{13a}$$

Druga całka ma charakter momentu wytrzymałości pola obiegu w stosunku do osi przechodzącej przez jej środek ciężkości M. Jeżeli (rys. 3), wykreślimy prostokąt $ABCD$ o bokach równoległych do osi $p - T$ i opisany na konturze pola obiegu, boki jego będą wynosiły odpowiednio

$$a = \Delta t = t_{\max} - t_{\min},$$

$$b = \Delta p = p_{\max} - p_{\min}.$$

Moment wytrzymałości tego prostokąta równy $ab^2/6$ jest większy od momentu wytrzymałości pola wykresu, czyli

$$S_H = \frac{R}{2 \cdot p_0^2} \int p'^2 dT < \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \Delta t. \tag{13b}$$

Błąd ten jest mały dla warunków kopalnianych. Dla naszego przykładu jest

$$p_{max} = 13{,}6 \cdot 780, \quad b_{min} = 13{,}6 \cdot 733, \quad p_0 = 13{,}6 \cdot 759,$$

$$\Delta p = p_{max} - p_{min} = 13{,}6\,(780 - 733) = 13{,}6 \cdot 47,$$

$$\Delta t = 23 - 4 = 19,$$

$$S_H = \frac{29{,}27}{2 \cdot 6}\left(\frac{13{,}6 \cdot 47}{13{,}6 \cdot 759}\right)^2 19 = 0{,}18,$$

$$19{,}15 - 0{,}18 < H_t < 19{,}15,$$

$$18{,}97 < H_t < 19{,}15.$$

Błąd jest więc niewielki, obliczona wartość jest bliska wartości obliczonej według poprawnego wzoru (4) mianowicie 19,11 m słupa powietrza. Krócej możemy więc określić wielkość depresji

$$H_t = 19{,}06 \pm 0{,}09$$

lub ogólnie

$$H_t = \left(\frac{R}{p_0}\oint p \cdot dT + \frac{1}{2} S_H\right) \pm \frac{1}{2} S_H.$$

A więc za wartość najprawdopodobniejszą przyjmiemy

$$H_t = \frac{R}{p_0}\oint p \cdot dT + \frac{R}{24}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 \cdot \Delta t. \tag{14}$$

Wyrażenie na poprawkę uprościmy przyjmując za

$$R = 29{,}27, \quad p_0 = 13{,}6 \cdot b_0 = 13{,}6 \cdot 760.$$

Wynosi ona

$$\frac{29{,}27\,(\Delta b)^2 \cdot \Delta t}{24 \cdot 760^2} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}(\Delta b)^2 \cdot \Delta t.$$

Zatem

$$H_t = \frac{R}{b_0}\oint b \cdot dT + 2{,}1 \cdot 10^{-6}(\Delta b)^2 \cdot \Delta t \tag{14a}$$

lub

$$h_t = \gamma_0 \cdot H_t = \frac{13{,}6}{T_0}\oint b\,dT + 2{,}5 \cdot 10^{-6}(\Delta b)^2 \cdot \Delta t, \tag{14b}$$

przy czym przyjęliśmy w poprawce $\gamma_0 = 1{,}2$. Jak to wynika z interpretacji geometrycznej (rys. 4), za Δb można przyjąć wahania ciśnień między najwyższym ciśnieniem w kopalni i na powierzchni, a więc $\Delta b = b_3 - b_2$ zamiast przyjętego poprzednio $\Delta b = b_3 - b_5$ (b_5 — ciśnienie w kanale ssącym wentylatora). Wtedy wymienione różnice między obu sposobami są jeszcze mniejsze.

Mimo ścisłości wzoru (4) wartość ta również obarczona jest pewnym błędem, wynikającym z niedokładności pomiarów. Błąd S_{1H} obliczymy w sposób uproszczony przyjmując:

$$H_1 = \int \frac{dp}{\gamma} < \Delta\left(\frac{1}{\gamma}\right) \Delta p = \Delta V \cdot \Delta p, \tag{15}$$

gdzie przez $V = \frac{1}{\gamma}$ oznaczono objętość właściwą, zaś przez Δp, ΔV,

$$\Delta p = p_{\max} - p_{\min} = 13{,}6 \times 47 = 640,$$

$$\Delta V = \left(\frac{1}{\gamma}\right)_{\max} - \left(\frac{1}{\gamma}\right)_{\min} = 0{,}859 - 0{,}782 = 0{,}077.$$

Według znanego prawa górny kraniec błędu określa się w zależności:

$$S_{1H}^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial \Delta p}\right)^2 \cdot S_p^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \Delta V}\right)^2 \cdot S_V^2. \tag{16}$$

S_p, S_V, S_T są błędami przy określaniu ciśnienia, objętości właściwej i temperatury: S_p jest dokładnością użytego przyrządu do pomiaru ciśnienia; S_T — dokładnością termometru, S_V zaś musimy obliczyć z poprzednich, gdyż objętości właściwej nie mierzymy.

W tym celu użyjemy równania (8), skąd $V = \frac{1}{\gamma} = \frac{RT}{p}$. Podobnie określimy błąd S_V:

$$S_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)^2 S_T^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 S_p^2, \tag{17}$$

$$S_V^2 = \frac{R^2}{p^2}\left[S_T^2 + \left(\frac{T}{p}\right)^2 S_p^2\right]. \tag{17a}$$

Jeśli przyjmiemy za średnie temperatury i cisnienia z naszego przykładu

$$T = T_0 = 288,$$

$$p = p_0 = 13{,}6 \times 759 = 10320,$$

dokładność odczytów termometru i barometru odpowiednio

$$S_T = 0{,}5\,(^\circ\mathrm{C}),$$

$$S_p = 0{,}5 \text{ mm Hg} = 7\,(\text{mm } H_2O).$$

Równanie (17a) daje:

$$S_V^2 = \frac{29{,}27^2}{10320^2}\left[0{,}5^2 + \left(\frac{289}{10320}\right)^2 \cdot 7^2\right],$$

$$S_V^2 = 1{,}82 \cdot 10^{-6}$$

skąd

$$S_V = 1{,}35 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}0014.$$

Wstawiając tę wartość do (16) i uwzględniając, że w zależności (15) mamy

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta p} = \Delta V; \quad \frac{\partial H}{\partial \Delta V} = \Delta p,$$

otrzymamy

$$S_{1H}^2 = (\Delta V)^2 S_p^2 + (\Delta p)^2 \cdot S_V^2, \tag{18}$$

$$S_{1H}^2 = 0{,}077^2 \cdot 7^2 + 640^2 \cdot 1{,}82 \cdot 10^{-6} = 1{,}126,$$

czyli

$$S_{1H} = 1{,}06.$$

Rzeczywista wartość H_t zawarta jest więc w przedziale

$$H_t = 19{,}11 \pm 1{,}06,$$

czyli

$$18{,}05 < H_t < 20{,}17.$$

Przykład powyższy wykazuje, że błąd, jaki popełniamy przez obliczenie według nowego sposobu ($\frac{1}{2} S_H = 0{,}09$) jest około 12 razy mniejszy od błędu wynikającego z niedokładności pomiarów ($1\, S_{1H} = 1{,}06$) przy obliczeniu sposobem dokładnym. Przykład ten jest ogólnie reprezentacyjny, gdyż, jak widać ze wzorów (17a), (18), względne wahania temperatur absolutnych i ciśnień bezwzględnych w warunkach kopalnianych są nieznaczne w granicach przeliczonego przykładu. Zatem obliczanie depresji cieplnej w układzie $p-T$, mimo że sposób ten jest ściśle biorąc przybliżony, praktycznie daje wyniki takie jak przy zastosowaniu wykresu Clapeyrona. Oczywiście błąd wynikający z niedokładności pomiarów jest jednakowy w obu sposobach [1]. A zatem do analitycznego wykreślnego obliczenia depresji cieplnej możemy używać układu $p-T$ opierając się na równościach (11), (12) albo bardziej dokładnych (14a) i (14b).

Wzory (12) i (14b) mają poza tym tę zaletę, że odnoszą się do każdego gazu, oczywiście o stałym składzie wzdłuż całej drogi, a więc odpada konieczność obliczania lub przyjmowania stałej gazowej lub ciężaru właściwego. Podają one depresję w milimetrach słupa wody, czyli w jednost-

[1] Należy zaznaczyć, że wyniki pomiarów depresyjnych obarczone są praktycznie także znacznymi innymi błędami z powodu:

a) zmiany warunków w czasie trwania pomiaru,

b) wykonywania pomiarów nie w sposób ciągły wzdłuż prądu powietrza, lecz tylko w skończonej liczbie punktów.

Z tego powodu określona dokładność ($\pm 1{,}06$) jest zadowalająca.

kach praktycznych. Poza wspomnianą już łatwością wykonania wykresów $p-T$ układ ten wyróżnia się jeszcze korzystnie tym, że krzywe jednakowych temperatur i ciśnień (izotermy i izobary) są prostymi ortogonalnymi, przez co wykres pracy jest bardziej wyzyskany niż w innych układach ($p-V$; $T-S$). Przy takich samych wielkościach arkusza powiększa się dokładność naniesienia. Poza tym błąd przy odczycie wielkości do obliczenia powierzchni albo błąd przy planimetrowaniu jest mniejszy. Na przykład w układzie $T-S$ wykres składa się z wąskiego paska w kierunku przekątnym. Mały błąd przy odczycie szerokości tego paska powoduje większy błąd przy obliczeniu powierzchni. Użycie wykresu $p-T$ do obliczenia pracy jest sposobem nowym w aerologii górniczej i nie jest znane w podręcznikach termodynamiki.

LITERATURA

[1] Budryk W., *Depresja cieplna*, „Przegląd Górniczo-Hutniczy" nr 11—12, 1929.
[2] Budryk W., *Le travail de la chaleur — moteur de l'aérage dans les mines*, Liège 1930.
[3] Eysbroeck v. G., *Colliery Engineering*, 1950, 1951.
[4] Budryk W., *Wentylacja kopalń*, cz. I. Katowice 1951.
[5] Воропаев А. Ф., *Термодинамический метод определения депрессии естественной тяги в шахтах* „Горный Журнал", 7/1949.
[6] Oszczakiewicz H., *Metoda termodynamiczna określenia depresji naturalnej przewietrzania kopalń*, „Przegląd Górniczy" 1—2/1950.
[7] Воропаев А. Ф, *Тепловая депрессия шахтной вентиляции*, Москва 1950.
[8] Barczyk S., *Logarytmiczny układ pracy*, Zeszyty Naukowe Polit. Śląskiej „Energetyka" nr 2 (przygotowane do druku).