ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 18 Górnictwo z.2 1959

WALERY SZUŚCIK

PLASTYCZNE ZGINANIE PŁASKIE BELEK Z MATERIAŁÓW O NIESYMETRYCZNEJ WYTRZYMAŁOŚCI

Streszczenie: Treścią pracy jest plastyczne zginanie belek momentem działającym w płaszczyźnie przechodzącej przez oś symetrii przekroju, wykonanych z materiałów o niesymetrycznej wytrzymałości, to jest materiałów, których granice plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu są różne. Wyprowadzono wzory na położenie osi obojętnej oraz na wartość granicznego momentu gnącego. Porównano graniczne momenty gnące dla belek, wykonanych z materiałów o niesymetrycznej i symetrycznej wytrzymałości. Podano przykłady zastosowania.

1. Wstęp

Plastycznym zginaniem płaskim, w rozumieniu tej pracy jest zginanie belek momentem działającym w płaszczyźnie przechodzącej przez oś symetrii przekroju.

Materiałem o niesymetrycznej wytrzymałości będzie materiał, w którym granice plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu są różne.

Jednym z materiałów o niesymetrycznej wytrzymałości jest żeliwo sferoidalne ferrytyczne.

Nazwijmy stosunek granicy plastyczności przy ściskaniu R_{plc} i rozciąganiu R_{plr} współczynnikiem niesymetrii wytrzymałości m wówczas

$$m = \frac{R_{plc}}{R_{plr}} \qquad /1/$$

W niniejszej pracy rozpatrzymy wypadek, gdy $m \geqslant 1$. Wypadek ten obejmuje w szczególności także znaną teorię zginania belek, w których wartości granicy plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu są równe. Wtedy:

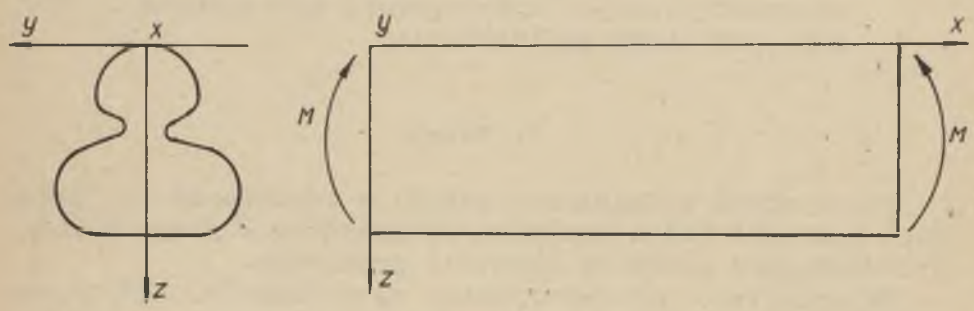
$$m = \frac{R_{plc}}{R_{plr}} = 1. \qquad /2/$$

W wypadku, gdy $m < 1$, można stosować wyprowadzonej niżej wzory po zamianie ról granic plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu.

Przy projektowaniu belek zginanych na dopuszczalny udźwig oblicza się graniczny moment gnący.

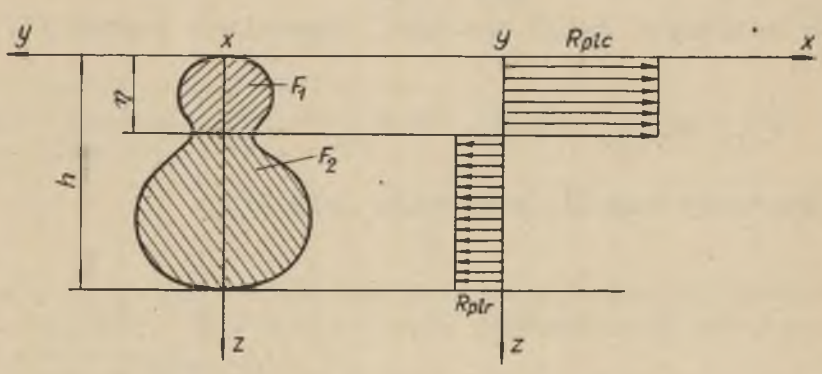
2. Obliczenie granicznego momentu gnącego

Rozpatrzmy belkę jak na rysunku 1. Oś z jest osią symetrii przekroju.



Rys. 1

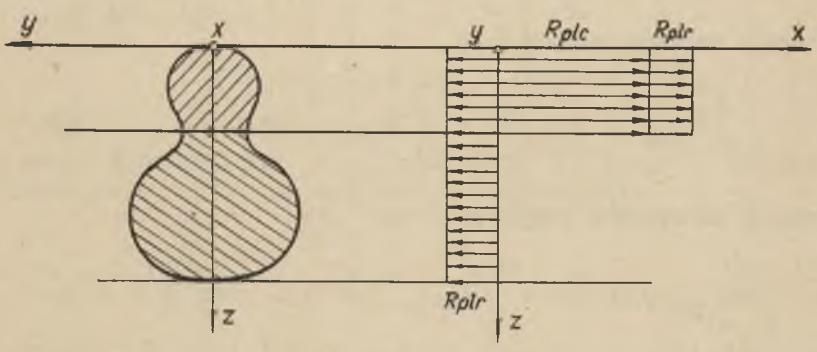
Obciążmy belkę momentem gnącym, którego płaszczyzna działania pokrywa się z osią symetrii przekroju z. Włókna ściskane znajdują się w górnej części przekroju; nazwijmy ją F_1 /rys.2/. Włókna rozciągane znajdują się w dolnej części przekroju; nazwijmy ją F_2. Wykres naprężeń w stanie plastycznym belki będzie kształtował jak na rysunku 2.



Rys.2

Oś obojętna jest oddalona od osi y o η. Całkowita wysokość przekroju wynosi h.

Wykres naprężeń w stanie plastycznym można zmienić przez dodanie i odjęcie naprężenia R_{plr} w części ściskanej przekroju F_1 /rys.3/.



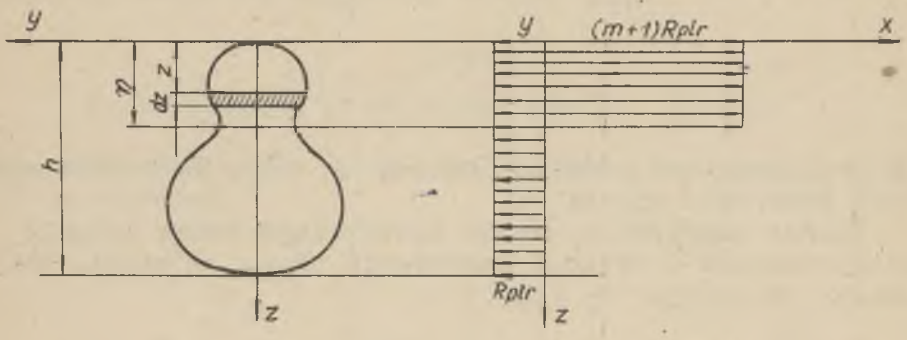
Rys.3

Na skutek tej zmiany możemy uważać, że cały przekrój jest rozciągany naprężeniem R_{plr}, a część F_1 przekroju ściskana naprężeniem $R_{plc} + R_{plr}$.

Suma ostatnich dwóch naprężeń, zgodnie z wzorem /1/, wynosi:

$$R_{plc} + R_{plr} = m.R_{plr} + R_{plr} = R_{plr}(m + 1) \qquad /3/$$

Napiszmy warunki równowagi /rys.4/.



Rys.4

Warunek rzutów na oś x:

$$\int_0^h R_{plr} \cdot y \cdot dz - \int_0^\eta R_{plr} \cdot (m + 1) \cdot y \cdot dz = 0 \qquad /4/$$

Warunek momentów względem osi y:

$$\int_0^h R_{plr} \cdot y \cdot z \cdot dz - \int_0^\eta R_{plr} (m+1) y \cdot z \cdot dz = K = 0. \qquad /5/$$

Pozostałe warunki równowagi przy spełnieniu założenia, że oś z jest osią symetrii, dają tożsamość.
Będzie to więc wypadek zginania płaskiego.
Równanie /4/ można uprościć przez R_{plr}.

Pierwsza całka przedstawia wtedy:

$$\int_0^h y \cdot dz = F, \qquad /6/$$

pole całego przekroju belki.
Po podstawieniu wartości wzoru /6/ do równania /4/ otrzymamy równanie:

$$F - (m + 1) \int_0^{\eta} y \cdot dz = 0, \qquad /7/$$

z którego można dla danego przekroju wyznaczyć położenie osi obojętnej /wartość η/ oraz współczynnik położenia osi obojętnej α_η:

$$\alpha_\eta = \frac{\eta}{h} \qquad /7a/$$

Współczynnik ten pozwala wyznaczyć η, gdy dla pokrewnych przekrojów znamy α_η.
Wyrażenie całkowe we wzorze /7/ jest

$$\int_0^{\eta} y \cdot dz = F_1, \qquad /8/$$

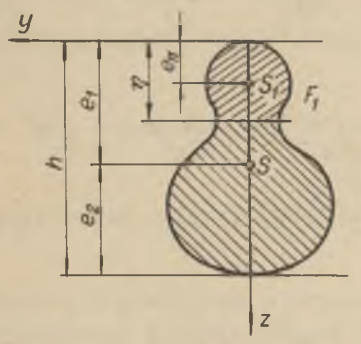
częścią ściskaną przekroju.
Po podstawieniu wartości wzoru /8/ do równania /7/ otrzymamy równanie:

$$F = (m + 1) F_1 = 0, \qquad /9/$$

z którego wynika, że F_1 jest $(m + 1)$ razy mniejsze od F. Pierwsze wyrażenie całkowe w porównaniu /5/

$$\int_0^h y \cdot z \cdot dz = S_y = F \cdot e_1 \qquad /10/$$

jest momentem statycznym całego przekroju względem osi y. Moment ten jest równy iloczynowi powierzchni F i odległości e_1 środka ciężkości S przekroju od osi y /rys.5/.



Rys.5

Drugie wyrażenie całkowe w równaniu /5/:

$$\int_C^{\eta} y \cdot z \cdot dz = S_{1y} = F_1 \cdot e_{11} \qquad /11/$$

jest momentem statycznym części ściskanej przekroju F_1 względem osi y. Moment ten jest równy iloczynowi powierzchni F_1 i odległości e_{11} środka ciężkości S_1 /pola F_1/ od osi y.

Po podstawieniu wzorów /10/ i /11/ do równania /5/ otrzymamy:

$$R_{plr} \left[F \cdot e_1 - (m + 1) F_1 \cdot e_{11}\right] = M. \qquad /12/$$

Po wprowadzeniu równania /9/ do równania /12/ otrzymamy wzór:

$$M = R_{plr} \cdot F(e_1 - e_{11}). \qquad /13/$$

Graniczny moment gnący M jest równy iloczynowi granicy plastycznoćci przy rozciąganiu, powierzchni przekroju i odległości środka ciężkości przekroju od środka ciężkości części ściskanej przekroju.

Iloczyn granicy plastyczności przy rozciąganiu i powierzchni przekroju F jest równy sile na granicy plastyczności przy rozciąganiu P_{pl} pręta o przekroju F.

$$R_{plr} \cdot F = P_{pl} \qquad /14/$$

Po podstawieniu do wzoru /13/ równania /14/ otrzymamy wzór:

$$M = P_{pl} (e_1 - e_{11}). \qquad /15/$$

Wobec powyższego, graniczny moment gnący może być również zdefiniowany jako iloczyn siły na granicy plastyczności przy rozciąganiu pręta i odległości środka ciężkości przekroju od środka ciężkości części ściskanej przekroju.

3. Porównanie granicznego momentu gnącego belek wykonanych z materiału o niesymetrycznej wytrzymałości (m≠1) z belkami o symetrycznej wytrzymałości (m=1)

Dla porównania momentów granicznych wprowadzimy współczynnik wartości momentu granicznego:

$$\alpha_M = \frac{M}{M_{(m=1)}} \qquad /16/$$

gdzie: M - moment graniczny dla belki z materiałów o współczynniku niesymetrii wytrzymałości $m \neq 1$

$M_{/m=1/}$ - moment graniczny dla belki z materiału o współczynniku niesymetrii wytrzymałości m=1.

Po podstawieniu do wzoru /14/ wzoru /13/ otrzymamy:

$$\alpha_M = \frac{R_{plr} \cdot F(e_1 - e_{11})}{R_{pl\,(m=1)} \cdot F(e_1 - e_{11\,(m=1)})}, \qquad /17/$$

gdzie: $e_{11\,(m=1)}$ - odległość środka ciężkości części ściskanej przekroju od osi y dla materiału o m = 1,

R_{plr} - granica plastyczności przy rozciąganiu materiału o $m \neq 1$,

$R_{pl\,(m=1)}$ - granica plastyczności dla materiału o m = 1.

Wprowadźmy współczynnik materiałowy:

$$\beta_m = \frac{R_{plr}}{R_{pl\,(m=1)}} \qquad /18/$$

oraz współczynnik kształtu przekroju:

$$\beta_p = \frac{e_1 - e_{11}}{e_1 - e_{11(m=1)}} \qquad /19/$$

Po podstawieniu wzorów /16/ i /17/ do wzoru /15/ otrzymamy:

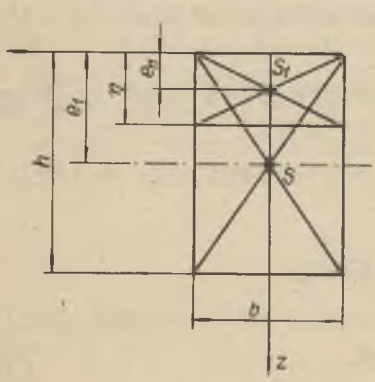
$$\alpha_M = \beta_m \cdot \beta_p. \qquad /20/$$

Współczynnik wartości momentu granicznego jest więc iloczynem współczynnika materiału β_m i współczynnika kształtu β_p. Współczynnik kształtu wskazuje nam, jakie korzyści wynikają ze stosowania materiałów o niesymetrycznej wytrzymałości w porównaniu z materiałami o symetrycznej wytrzymałości i tych samych wartościach granicy plastyczności przy rozciąganiu.

4. Przykłady

W poniższych przykładach podamy wartości na odległość osi obojętnej η, współczynnik położenia osi obojętnej α_η wartość momentu granicznego M oraz na wartość współczynnika kształtu przekroju β_p.

a/ <u>Przekrój prostokątny /rys.6/</u>



Rys.6

$$e_1 = \frac{h}{2} \qquad y = b$$

Ze wzoru /8/

$$F_1 = \int_0^{\eta} y \cdot dz = b \cdot \eta$$

Ze wzoru /9/ po podstawieniu do niego wzoru /8/

$$\eta = h \frac{1}{m + 1}$$

Ze wzoru /11/

$$e_{11} = \frac{\int_0^h y \cdot z \cdot dz}{F_1} = \frac{h}{2(m + 1)}.$$

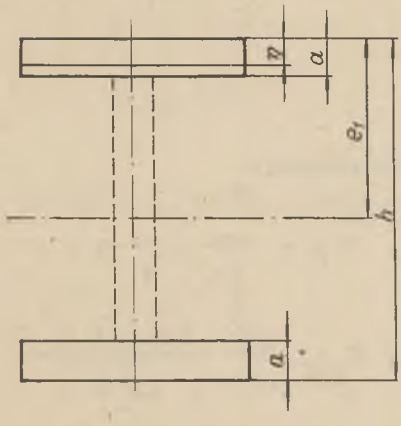
Po podstawieniu wartości e_{11} do wzoru /13/ otrzymamy

$$M = R_{plr} \frac{b \cdot h^2}{2} \frac{m}{m + 1}.$$

Ze wzoru /19/

$$\beta_p = \frac{2 \cdot m}{m + 1}.$$

b/ Przekrój dwuteowy bez środnika /h = 10·a/ /rys.7/



Rys.7

Po przeprowadzeniu analogicznych obliczeń jak w punkcie a, otrzymamy /dla $m \geq 1$/:

$$\alpha_\eta = \frac{1}{5(m + 1)},$$

$$M = R_{plr} \frac{b \cdot h^2}{50} \frac{5 \cdot m + 4}{m + 1},$$

$$\beta_p = \frac{10 \cdot m + 8}{9(m + 1)}.$$

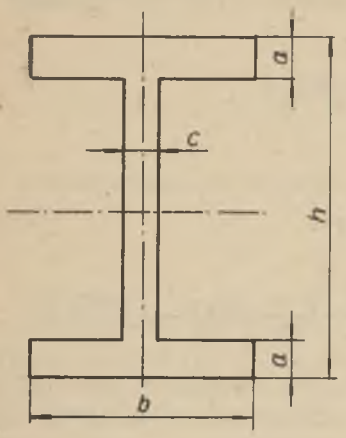
c/ Przekrój dwuteowy /h = 10·a; b = 6·c/ rys.8/

W związku z nieciągłością wartości y w punkcie $\eta = a$ otrzymujemy różne wzory dla $2{,}3 \geq m \geq 1$

$$\alpha_\eta = \frac{3 - m}{2(m + 1)},$$

$$M = 5R_{plr}\, a^2 \cdot c \frac{-3m^2 + 34\, m - 3}{m+1},$$

$$\beta_p = \frac{2}{28} \frac{-3m^2 + 34\, m - 3}{m + 1}$$



Rys.8

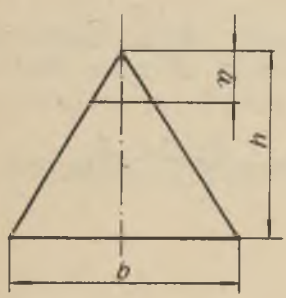
oraz dla $m \geq 2,3$

$$\alpha_\eta = \frac{1}{3(m+1)},$$

$$M = R_{plr} \cdot 100a^2c \frac{3m+2}{3(m+1)}$$

$$\beta_p = 1,43 \frac{3m+2}{3(m+1)}.$$

d/ Przekrój trójkątny /rys.9/



Rys.9

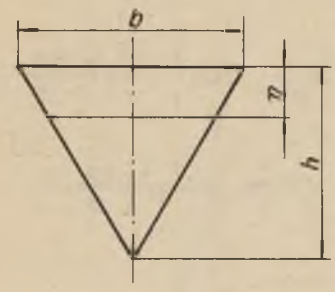
Otrzymamy:

$$\alpha_\eta = \frac{1}{\sqrt{m+1}},$$

$$M = R_{plr} \frac{bh^2}{3} \frac{\sqrt{m+1}-1}{\sqrt{m+1}},$$

$$\beta_p = 3,44 \frac{\sqrt{m+1}-1}{\sqrt{m+1}}.$$

e/ Przekrój trójkątny /rys.10/



Rys.10

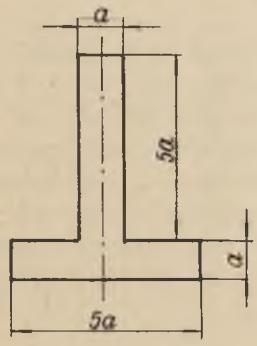
Otrzymamy:

$$\alpha_\eta = 1 - \sqrt{\frac{m}{m+1}},$$

$$M = R_{plr} \frac{bh^2}{3} \frac{m}{\sqrt{m+1}\,(\sqrt{m}+1+\sqrt{m})},$$

$$\beta_p = \frac{3{,}41\ m}{\sqrt{m+1}\,(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})}$$

f/ Przekrój teowy /rys.11/



Rys.11

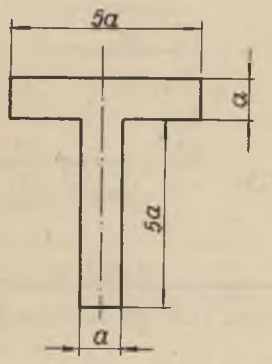
Otrzymamy:

$$\alpha_\eta = \frac{5}{3(m+1)},$$

$$M = R_{plr}\ 10a^3 \frac{4m-1}{m+1},$$

$$\beta_p = \frac{2}{3} \frac{4m-1}{m+1}$$

g/ Przekrój teowy /rys.12/



Rys.12

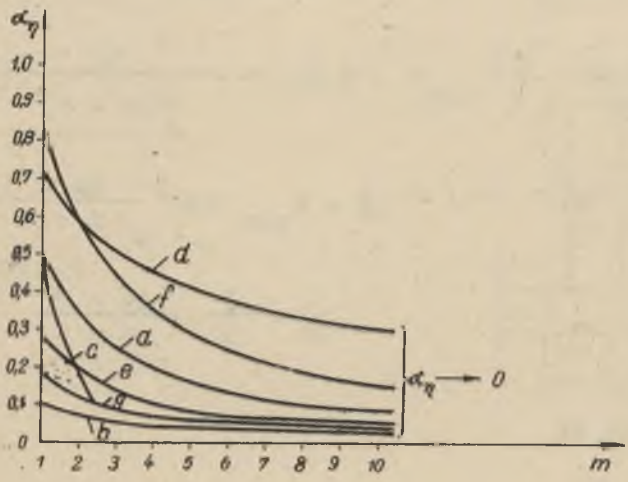
Otrzymamy:

$$\alpha_\eta = \frac{1}{3(m+1)}$$

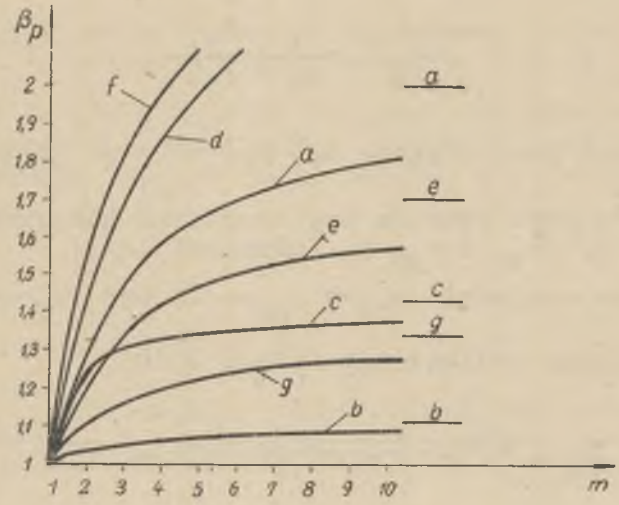
$$M = R_{plr}\ 10a^3\ \frac{1+2m}{1+m}$$

$$\beta_p = \frac{2}{3}\ \frac{1+2m}{1+m}.$$

Na rysunkach 13 i 14 przedstawiono przebieg wartości współczynnika położenia osi obojętnej α_η oraz współczynnika kształtu przekroju β_p dla podanych wyżej przekrojów.



Rys.13. Wykresy α_η



Rys. 14. Wykresy β_p

5. Porównanie wartości granicznego momentu gnącego belek o jednej osi symetrii przy właściwym i niewłaściwym położeniu przekroju

Belka o jednej osi symetrii jak na przykład na rysunku 9 i 10 obciążona jest momentem jak na rysunku 1.

W obu położeniach przekroju belki /np. rys. 9 i 10/ otrzymujemy różne wartości granicznego momentu gnącego. Właściwym położeniem przekroju najwijmy to położenię, które da nam większą wartość granicznego momentu gnącego. Wypiszmy zgodnie ze wzorem /13/ wartości granicznego momentu gnącego w obu położeniach:

$$M_1 = R_{plr} \cdot F(e_1 - e_{11}), \qquad /21/$$

$$M_2 = R_{plr} \cdot F(e_2 - e_{22}). \qquad /22/$$

Stosunek tych momentów nazwijmy:

$$\varphi_M = \frac{e_1 - e_{11}}{e_2 - e_{22}}. \qquad /23/$$

Jeżeli M_1 jest większe od M_2, to φ_M jest większe od jedności.
Wartość φ_M jest funkcją współczynnika niesymetrii wytrzymałości m. /e_{11} i e_{22} są funkcjami m/.
Dla $m \to \infty$ wartości e_{11} i $e_{22} \to 0$, zaś $\varphi_M \to \frac{e_1}{e_2}$

Dla przekroju trójkątnego /rys.9 i 10/

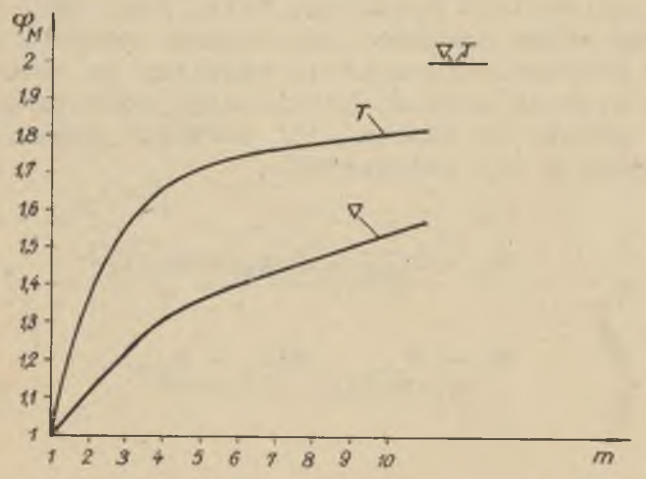
$$\varphi_M = \frac{(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) \cdot (\sqrt{m+1} - 1)}{10}$$

Dla przekroju teowego /rys.11 i 12/

$$\varphi_M = \frac{4m - 1}{2m + 1}$$

W obu tych przykładach, gdy $m \to \infty$; $\varphi_M \to \frac{e_1}{e_2} = 2$.

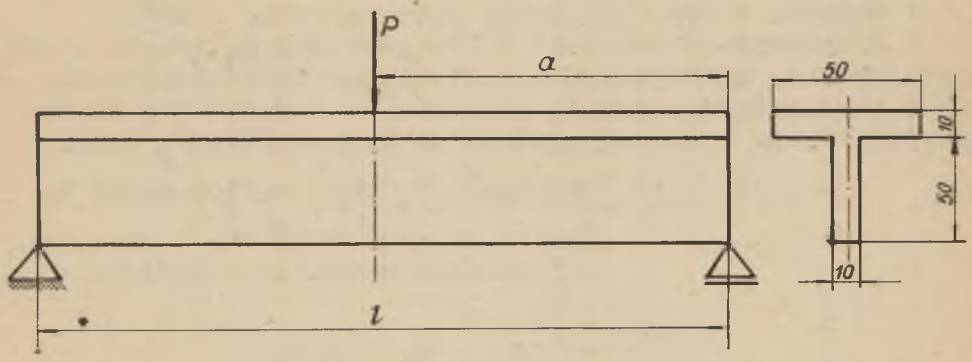
Wartości φ_M jako funkcje m dla powyższych przykładów podano na wykresie na rys.15.



Rys.15. Wykresy φ_M

6. Przykłady zastosowania

Przykład 1. Dana belka jak na rysunku 16 obciążona jest siłą P. Belkę wykonano ze stali St5 /R_{plr} = = 28 kG/mm^2/. Ile razy może wzrosnąć obciążenie, jeżeli belkę wykonano by z materiału o niesymetrycznej wytrzymałości, w którym R_{plr} = 30 kG/mm^2, a R_{plc} = 120 kG/mm^2.



Rys. 16

R o z w i ą z a n i e:

Kształt belki odpowiada rysunkowi 12.
Zgodnie ze wzorem /18/

$$\beta_m = \frac{R_{plr}}{R_{pl\,(m\,=\,1)}} = \frac{30}{28} = 1{,}07.$$

Współczynnik niesymetrii wytrzymałości wg wzoru /1/

$$m = \frac{R_{plc}}{R_{plr}} = \frac{120}{30} = 4.$$

Z wykresu /rys.14/ odczytuję /krzywa g/ wartość β_p

$$\beta_p = 1,2.$$

Współczynnik wartości momentu granicznego wg wzoru /20/ wynosi:

$$\alpha_M = \beta_m \cdot \beta_p = 1,07 \cdot 1,2 = 1,29.$$

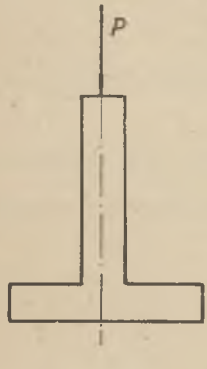
Wartość momentu granicznego wzrosła więc o 29%. W naszym wypadku obciążenie jest proporcjonalne do maksymalnego momentu granicznego.

W związku z tym obciążenie może wzrosnąć o 29%.

W powyższym przykładzie belka jest dla materiału o niesymetrycznej wytrzymałości zastosowana niewłaściwie. Jeżeli ją odwrócimy, jak to pokazano na rysunku 17, to obciążenie może wzrosnąć zgodnie ze wzorem /23/ φ_M razy.

Wartość φ_M dla zastosowanej tu belki teowej odczytamy z rysunku 15 /krzywa górna/

$$\varphi_M = 1,66,$$



Rys.17

Całkowity dozwolony wzrost obciążenia, po odwróceniu belki i zastosowaniu podanego materiału o niesymetrycznej wytrzymałości wynosi:

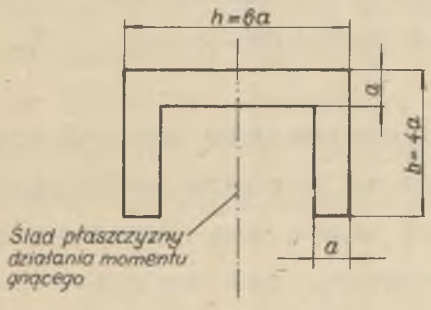
$$\alpha_M \ \varphi_M = 1,29 \cdot 1,66 = 2,14 \text{ razy},$$

czyli

114%.

<u>Przykład 2</u>. Zaprojektować przekrój ceowy belki /rys.18/ wykonanej ze stali St5, zginanej momentem zginającym M_g = 100 kGm.

Dane: R_{plr} = 28 kG/mm^2; R_{plc} = 28 kG/mm^2; Współczynnik bezpieczeństwa n = 6.



Rys. 18

R o z w i ą z a n i e:

Zgodnie ze wzorem /13/ graniczny moment gnący wynosi:

$$M = F \cdot R_{plr}(e_1 - e_{11}).$$

W naszym wypadku:

$$e_{11} = \frac{a}{2}\ ;\quad e_1 = \frac{3}{2}a$$

$$F = 12 \cdot a^2.$$

Moment dopuszczalny:

$$M_{dop} = \frac{M}{n} = \frac{F \cdot R_{plr}(e_1 - e_{11})}{n}.$$

Po podstawieniu wartości:

$$M_{dop} = \frac{12 \cdot a^3 \cdot R_{plr}}{n}.$$

Skąd obliczone

$$a = \sqrt[3]{\frac{M_{dop} \cdot n}{12 \cdot R_{plr}}}.$$

Po podstawieniu wartości:

$$a = 1{,}2\ \text{cm};\quad b = 4{,}8\ \text{cm};\quad h = 7{,}2\ \text{cm}.$$

РЕЗЮМЕ

Пластический плоский изгиб балок из материала с несеметричной выносливостью

Целью работы является исследование пластического изгиба балок под влиянием момента действующего в плоскости проходящей через ось симетрии сечения, выполненных из материала, для которого соотношение предела пластической деформации при сжатии R_{plc} к пределу пластической деформации при растяжении R_{plr} именуется коэффициентом несиметричности выносливости:

$$m = \frac{R_{plc}}{R_{plr}} .$$

Сжимаемая часть сечения балки выражается:

$$F_1 = \frac{F}{m + 1} .$$

Получена формула для расчёта предельного изгибающего момента:

$$M = P_{pl} / e_1 - e_{11} /,$$

при чем: P_{pl} - сила у предела пластической деформации при растяжении прутка сечением равным сечению балки.

$/e_1 - e_{11}/$ - расстояние центра тяжести сжимаемой части сечения F_1 от центра тяжести поверхности F.

Сравнили величину предельного изгибающего момента балок выполненных из материала с несиметричной выносливостью / $m \neq 1$ / с величиной этого же момента балок из материала с симетрической выносливостью /$m=1$/. Соотношение этих величин принято называть коэффициентом величины изгибающего момента:

$$\alpha_M = \frac{M}{M/m=1/} = \frac{e_1 - e_{11}}{e_1 - e_{11}/m=1} = \beta_m \cdot \beta_p ,$$

где: β_m - коэффициент материала,

β_p - коэффициент конфигурации.

На примере разных поверхностей сечений балок расчитали и построили графики величин необходимых для проектирования.

Сравнили предельные величины изгибающего момента при положительной и отрицательной величинах изгибающего момента.

Приведены примеры применения.

ZUSAMMENFASSUNG

Plastische Flachverbiegung von Stäben aus Werkstoff mit unsymetrischer Festigkeit

Behandelt wurde die plastische Verbiegung der Stäbe mit einem in der die symmetrische Querschnittachse schneidenden Ebene wirkenden Moment. Die Stäbe sind aus einem Werkstoff, in dem das Verhältnis der Streckgrenze σ_{FS} zur Quetschgrenze σ_{FQ} als Unsymmetriekoeffizient der Festigkeit bezeichnet wird:

$$m = \frac{\sigma_{FS}}{\sigma_{FQ}}.$$

Der gedrückte Teil des Stabquerschnittes wird berechnet:

$$F_1 = \frac{F}{m + 1}.$$

Die erhaltene Formel für das Grenzmoment der Biegung ist:

$$M = P_F (e_1 - e_{11}),$$

wobei: P_F - Fliesslast

$e_1 - e_{11}$ - der Abstand des Schwerpunktes des gedrückten Querschnittes F_1 vom Schwerpunkt des ganzes Querschnittes F.

Verglichen wurde der Wert des Biegunggrenzmomentes der Stabe, die aus einem Werkstoff mit unsymetrischer Festigkeit ($m \neq 1$) mit dem Wert von Stab aus Werkstoff mit symetrischer Festigkeit ($m = 1$). Ihr Verhältnis wird als Wertkoeffizient des Biegungsmomentes bezeichnet.

$$\alpha_M = \frac{M}{M_{(m=1)}} = \frac{e_1 - e_{11}}{e_1 - e_{11(m=1)}} = \beta_m \cdot \beta_p,$$

wobei: β_m - Werkstoffkoeffizient,

β_p - Formkoeffizient.

An Beispielen der Stabquerschnitte wurden Diagrammen berechnet und dargestellt. Die Grenzwerte des Biegungsmomentes bei dessen positivem und negativem Wert wurden Verglichen. Hinzugefügt wurden Anwendungsbeispiele.