ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 18 Górnictwo z.2 1959

MICHAŁ LAWINA

WYZNACZANIE MOMENTÓW STATYCZNYCH I POŁOŻEŃ ŚRODKÓW GEOMETRYCZNYCH ZA POMOCĄ SIATEK

Streszczenie: Na rys.1 nałożone są na siebie dwie siatki, z których jedna /równomierna/ jest siatką pól, druga siatką momentów statycznych, tj. tak zbudowana, że jej każde oczko ma pole odwrotnie proporcjonalne do odległości od osi O - O. Wzór /6/ podaje sposób wyznaczenia momentu statycznego i położenia środka geometrycznego dowolnego pola względem osi O - O. Dany przekrój narysowano w skali 1: s i nałożono nań siatki nakreślone na przeźroczystym celofanie; policzono liczbę oczek k i l pierwszej i drugiej siatki, przy czym siatka równomierna jest sporządzona w skali a: 1, a h_o = ac.

Siatki takie mogą mieć szerokie zastosowanie, zwłaszcza przy metodzie stanu granicznego przy badaniu ustrojów zginanych.

1. Wstęp

Zupełnie przez praktyków nie zauważony pozostał artykuł w czasopiśmie VDI [1], może dlatego, że był opublikowany w czasie wojny.

W artykule tym zaproponowano sporządzenie /na przejrzystym celofanie/ siatki, w której pole każdego oczka jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od pewnej podstawowej osi. Jeżeli taką skalę nałożyć na interesujący nas obrys przekroju i policzyć ilość oczek zawartych w obrębie przekroju, otrzymamy liczbę proporcjonalną do momentu bezwładności tego przekroju względem

osi podstawowej; współczynnik proporcjonalności zależy od skali rysunku i skali, w jakiej sporządzono siatkę. Przy badaniu na przykład sztywności zginanego przekroju należy siatkę nałożyć tak, aby jej oś podstawowa pokryła się z osią obojętną przekroju.

Podobnie ilość oczek zawarta w połówce przekroju podłużnego bryły obrotowej, jeżeli oś podstawowa siatki pokrywa się z osią obrotu bryły, jest proporcjonalna do masowego momentu bezwładności tej bryły względem osi obrotu oraz do wielkości GD^2.

W niniejszym artykule proponuje się sporządzenie na podobnej zasadzie siatki, w której pole każdego oczka jest odwrotnie proporcjonalne do pierwszej potęgi odległości od pewnej osi podstawowej. Da to możność mechanicznego wyznaczania momentów statycznych dowolnych figur płaskich oraz położeń ich środków geometrycznych. Wyniknie stąd szereg zastosowań przy obliczaniu naporów hydrostatycznych, uśrednionych prędkości przepływu, naprężeń stycznych przy zginaniu, położeń równowagi układów itd. itd. Szerokie zastosowanie tej metody nie stanowiło by może dostatecznego uzasadnienia do opracowania niniejszej publikacji, gdyby nie stale wzrastające znaczenie metody stanu granicznego przy obliczaniu wytrzymałości ustrojów zginanych. W metodzie tej proponowany przyrząd może mieć szerokie zastosowanie.

Aby uzyskać możliwość poprawnego sporządzenia w/w siatki, podamy wpierw jej teorię i omówimy sposób dobrania skali i obliczenia współczynników proporcjonalności.

2. Teoria przyrządu

Utwórzmy następującą wielkość sprowadzoną:

$$A_i^* = A_i \; x_i, \qquad /1/$$

gdzie A_i oznacza pewne dowolne co do wielkości i dowolnie ukształtowane pole, którego srodek geometryczny leży w odległości x_i od pewnej podstawowej osi. Dowolne pole, po założeniu pewnej osi podstawowej można podzielić na skończoną ilość pól częściowych A_i, a także pól sprowadzonych A_i^*. Moment statyczny tego pola ma wartość:

$$S = \sum A_i \; x_i = \sum A_i^* . \qquad /2/$$

Moment statyczny dowolnego pola względem dowolnie przyjętej osi /podstawowej/ jest więc równy sumie pól sprowadzonych /względem osi podstawowej/. Równocześnie, przy dowolnym podziale całkowitego pola na częściowe pola A_i, jest oczywiście

$$A = \sum A_i. \qquad /3/$$

Ponieważ zgodnie z twierdzeniem o momentach statycznych jest

$$A\, x_o = \sum A_i\, x_i,$$

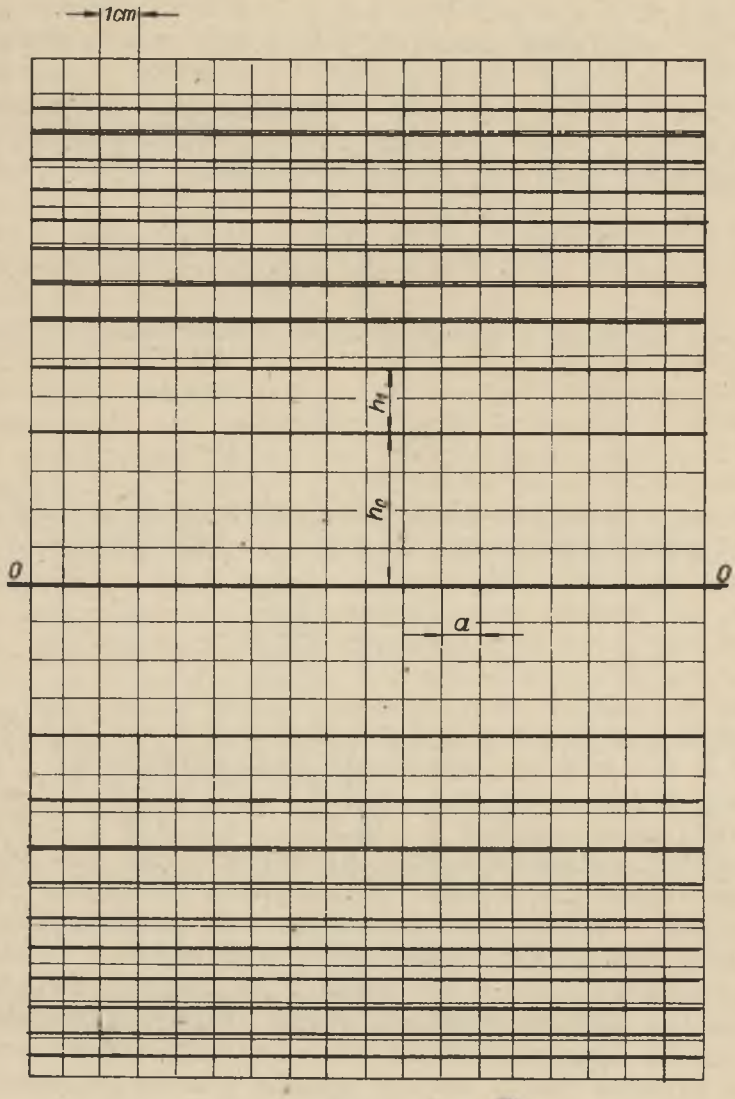
gdzie x_o oznacza odległość środka geometrycznego pola od osi podstawowej, wynika stąd na podstawie /2/ i /3/, że

$$x_o = \frac{\sum A_i^*}{\sum A_i}. \qquad /4/$$

Słownie: położenie środka geometrycznego przekroju jest określonej stosunkiem sumy pól sprowadzonych do sumy pól częściowych.

Podział cakowitego pola na odpowiednie dla jego kształtu pola częściowe, a następnie tworzenie pól sprowadzonych - byłoby postępowaniem nie przynoszącym korzyści przy wyznaczaniu momentów statycznych i położeń środków geometrycznych w porównaniu ze znanymi metodami.

Istotna korzyść wystąpi wtedy, kiedy niezależnie od pól, jakie wypadnie badać, sporządzimy siatki prostokątne, z których jedna będzie zwykłą siatką milimetrową, a więc z góry narzuconym podziałem na pola częściowe A_i, druga - siatką pól sprowadzonych względem raz przyjętej osi podstawowej, narzucającą podział na pola sprowadzone. Na rys.1 widzimy odbitkę zwyczajnej kalki milimetrowej. Możemy ją uważać za siatkę równomiernego podziału na pola A_i. Linie narysowane tworzą siatkę pól sprowadzonych A_i^*, przy czym szerokość tych pól a jest ta sama co przy siatce pól A_i.



Rys. 1

Jeżeli założymy podstawowy "walor" pola sprowadzonego S_0, wtedy wysokość h_0, pól przylegających do osi podstawowej 0 - 0, spełnia związek

$$a\, h_0\, \frac{h_c}{2} = S_0,$$

czyli

$$h_o = \sqrt{\frac{2\ S_o}{a}} \qquad /5/$$

Zgodnie z definicją /1/ wysokość następnego pola h_1 spełnia związek

$$a\ h_1 \left(h_o + \frac{h_1}{2}\right) = a\ \frac{h_o^2}{2}.$$

Kilka kolejnych rozwiązań na wysokości następujących po sobie pól można przedstawić w postaci:

$$h_1 = h_o\ (\sqrt{2} - \sqrt{1}),$$

$$h_2 = h_o\ (\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

$$h_3 = h_o\ (\sqrt{4} - \sqrt{3}).$$

Na wysokość n-tego pola otrzymujemy przez indukcję wzór:

$$h_n = h_o\ (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \qquad /6/$$

Wysokości h_n tworzą ciąg zbieżny do zera dla dowolnego bowiem ε istnieje taka liczba

$$N = \frac{1}{2}\ \left(\sqrt{1 + (1 - \varepsilon)^2} - 1\right),$$

że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \varepsilon\ .$$

Wyobraźmy sobie, że pole, którego moment statyczny względem danej osi należy wyznaczyć, narysowane jest w skali 1:1. Jeżeli rys.1 sporządzony jest na kalce milimetrowej, nałożymy ją na nakreślone pole w ten sposób, aby oś C-C pokryła się z osią, względem której obliczamy moment statyczny pola. Ponieważ na rys.1. przyjęto $h_o = 4$ cm, więc walorem każdego pola sprowadzonego jest

$$S_o = 1\ .\ \frac{4^2}{2} = 8\ \text{cm}^3.$$

Jeżeli liczba pól sprowadzonych, mieszczących się w badanym polu, wynosi l /obowiązuje tu pewne zliczanie nadmiarów i niedomiarów w skrajnych polach, nakrywających kontur/, wtedy moment statyczny pola wynosi $8\,l\ cm^3$. Jeżeli liczba pól siatki równomiernej wynosi k /tj. $A = k\ cm^2$/, wtedy odległość środka geometrycznego pola jest równa stosunkowi $\frac{l}{k}$.

Ogólnie: jeżeli skala, w jakiej nakreślono pole, jest 1: s , wtedy każde oczko zyskuje walor s^3 razy większy. Trudno przewidzieć, w jakiej skali na kliszy drukarskiej wypadnie podziałka milimetrowa na rys.1; przyjmijmy, że odcinek a będzie miał a cm, natomiast wysokość h_o przyjmiemy równą c.a. Wtedy zliczając k oczek siatki równomiernej i l oczek siatki sprowadzonej otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} S &= s^3 a^2 c l \quad cm^3 \\ x_o &= s^3 c \frac{l}{k} \quad cm \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Wzory /7/ wraz z rys.1 pozwalają na sporządzenie opisanych siatek w dowolnej skali i o dowolnym walorze pól sprowadzonych.

3. Zastosowania w metodzie stanu granicznego

Prócz zastosowań, o których wspomniano we wstępie, opisane siatki mogą mieć zastosowania przy obliczaniu ustrojów zginanych metodą stanu granicznego. Jak wiadomo moment zginający potrzebny do wywołania w przekroju przegubu plastycznego wynosi

$$M_{pl} = (S_1 + S_2)\,\sigma_{pl},$$

gdzie S_1 i S_2 są momentami statycznymi części przekroju zginanego względem osi dzielącej przekrój na wspomniane dwie części o równych polach. Położenie tej osi wyznacza się momentalnie, przesuwając siatkę do takiego położenia, aby liczba oczek siatki równomiernej po obu stronach osi 0-0 była ta sama. Policzenie następnie oczek siatki sprowadzonej daje wielkość $S_1 + S_2$ i w konsekwencji moment

plastyczny. Stąd ważne zastosowanie opisanego przyrządu przy nowoczesnym obliczaniu obudowy.

Jeszcze bardziej przydatne stają się opisane siatki przy obliczaniu metodą stanu granicznego ustrojów zginanych, których cechy zarówno wytrzymałościowe, jak i geometryczne są asymetryczne [2]. Oś rozgraniczająca obie części przekroju zginanego musi wtedy być tak położona, aby spełniać dwa warunki: musi dzielić pole na dwie części o określonym stosunku powierzchni - przy czym środki geometryczne tych części muszą leżeć w płaszczyźnie zginania. Wyznaczenie położenia takiej osi, obliczeniowo dość żmudne, następuje sprawnie przy użyciu skal. Najlepiej ustawić je tak, aby oś 0-0 leżała poza przekrojem, równolegle do płaszczyzny zginania, następnie przesuwamy i nachylamy linijkę lub napiętą nitkę tak, aby jej położenie spełniło oba wyżej podane warunki.

LITERATURA

1. Spiegler A., Graphische Ermittlung von Momenten mittels Hilfsraster. VDI, 1942, str. 378

2. Szuścik W., Moment graniczny przy ogólnym zginaniu belek z materiału o niesymetrycznej wytrzymałości - Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Górnictwo, zeszyt 2.

РЕЗЮМЕ

Определение статических моментов и положения геометрических центров при помощи решеток

Рис. I представляет наложенные на себя две решётки, одна из которых /равномерная/ - решётка площадей, вторая - сетка статических моментов т.е. построена таким образом, что каждая ее клитка составляет площадь обратно-пропорциональную к расстоянию от оси 0-0. Формула /6/ объясняет способ построения второй решётки.
Формулы /7/ служат для определения статического момента и положения геометрического центра любой площади относительно оси 0-0. Данный разрез представлен по шкале 1 : s и нанего положены решётки начерченные на прозрачном целлулоиде; сосчитано количество клеток к и l в первой и второй решётке, при чем равномерная решётка построена по шкале a : l и h_o = ac.

Этого рода решётки могут найти широкое применение, особенно в случае применения метода предельного состояния при исследовании изгибаемых конструкций.

ZUSAMMENFASSUNG

Berechnung der statischen Momente und der geometrischen Mittelpunktslage mittels Hilfsraster

Auf dem Bilde 1 sind zwei Raster aufeinander gelegt; ein der gleichmässige, ist der Felderraster, der andere der statischen Momente welcher so gebaut ist, dass jede Masche ein Feld hat das umgekehrt proportional ist zum Abstand von der Achse O - O. Die Formel /6/ gibt den Bau dieses zweiten Netzes an. Die Gleichung /7/ enthält die Art der Bestimmung des statischen Momentes und die Lage des geometrischen Mittelpunktes eines beliebigen Feldes bezüglich der Achse O-O. Der entsprechende Querschnitt wurde in dem Massstab 1: s gezeichnet und darauf der auf durchsichtigem Zellophan gezeichnete Raster gelegt. Nun wurde die Anzahl der Netze k und l der ersten und zweiter Netztafel bezeichnet, wobei die gleichmässige in dem Massstab a : l hergestellt ist und $h = a \cdot c$. Solche Raster können eine breite Anwendung finden, besonders bei der Methode des Grenzstandes bei Berechnung der gebogenen Systeme.