ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 18 Górnictwo z.2 1959

WALERY SZUŚCIK

MOMENT GRANICZNY PRZY OGÓLNYM ZGINANIU BELEK Z MATERIAŁU O NIESYMETRYCZNEJ WYTRZYMAŁOŚCI

Streszczenie: W artykule otrzymano wzór na moment graniczny, analogiczny jak przy plastycznym zginaniu płaskim belek. [2] Dla rozważanego przypadku uzyskano nową interpretację momentu granicznego.

Projektowanie belek na dopuszczalny udźwig polega, jak wiadomo, na obliczeniu granicznego momentu gnącego.

Z teorii zginania plastycznego znamy wzory na moment graniczny jedynie w przypadku zginania płaskiego, tj. gdy płaszczyzna działania momentu gnącego pokrywa się z osią symetrii przekroju belek wykonanych z materiału o symetrycznej wytrzymałości. Wzory te podaje np. dzieło [1].

Materiałem o niesymetrycznej wytrzymałości nazwiemy materiał, którego granice plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu są różne; ich stosunek nazwiemy współczynnikiem niesymetrii wytrzymałości:

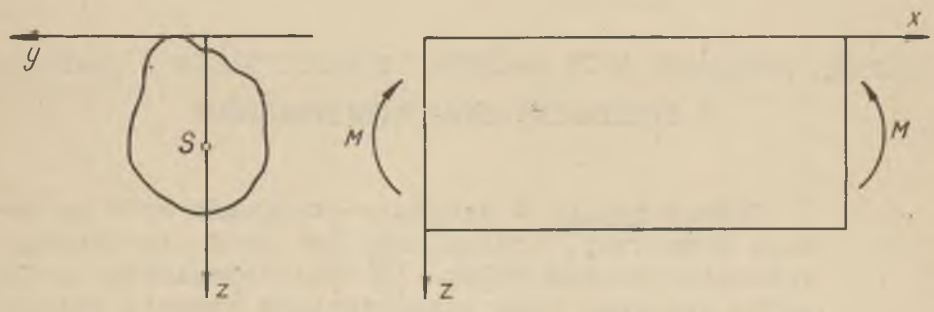
$$m = \frac{R_{plc}}{R_{plr}} \qquad /1/$$

Dla materiałów, których granice plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu są równe, współczynnik niesymetrii wytrzymałości wynosi:

$$m = 1. \qquad /2/$$

Poniższe jednak wywody odnoszą się do przypadku $m \geqslant 1$.

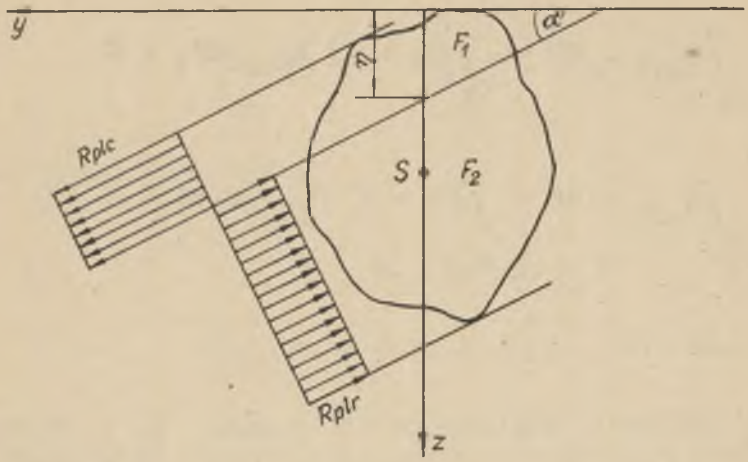
Dla $m < 1$ wyprowadzone wzory zachowują swoją ważność, jeżeli zamienimy w nich R_{plr} na R_{plc}; zaś R_{plc} na R_{plr}.
W celu uzyskania wzoru na moment graniczny przy ogólnym zginaniu belek z materiału o niesymetrycznej wytrzymałości rozpatrzymy belkę o dowolnym przekroju, jak na rys.1 obciążoną momentem granicznym M.



Rys.1

Układ trzech osi x,y,z przyjmiemy w ten sposób, że oś z leży w płaszczyźnie zginania i przechodzi zarazem przez środek ciężkości przekroju, oś y jest styczna do przekroju, natomiast oś x jest równoległa do osi belki.
Przy założonym zwrocie momentu zginającego obszar włókien ściskanych znajduje się w górnej części przekroju, oznaczonej literą F_1 /rys.2/.
Obszar włókien rozciąganych znajduje się w dolnej części przekroju, oznaczonej literą F_2.

Ponieważ w badanym układzie płaszczyzna zginania nie jest płaszczyzną symetrii przekroju, więc oś obojętna będzie nachylona do osi y pod pewnym kątem α, a przecinać się będzie z osią z w pewnej odległości η od początku układu. Warto tu nadmienić, że w zasadzie termin "oś obojętna" zatraca przy zginaniu plastycznym swój sens; należałoby raczej nazwać ją osią graniczną.
Wykres naprężeń w stanie plastycznym przekroju przedstawiono na rys.2. Można go przekształcić w ten sposób, że w obszarze ściskanym F_1 dodajemy i odejmiemy naprężenie R_{plr}. [2]. Możemy dzięki temu uważać, że cały prze-



Rys.2

krój jest rozciągany naprężeniem R_{plr}, obszar F_1 zaś prócz tego ściskany naprężeniem $R_{plc} + R_{plr}$. Zgodnie ze wzorem /1/ suma ta wynosi /rys.3/.

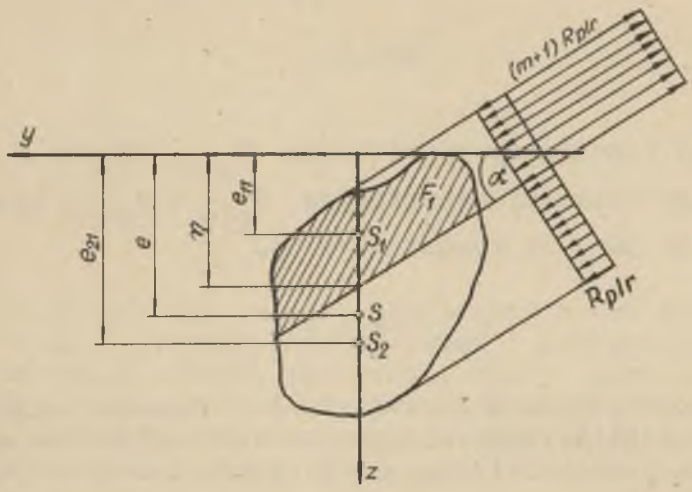
$$R_{plr}(m + 1) \qquad /3/$$

i przechodzi przez środek ciężkości obszaru ściskanego S_1. Natomiast wypadkowa naprężeń rozciągających w całym przekroju przechodzi oczywiście przez środek ciężkości przekroju S.

Obie te wypadkowe równoważą działający w płaszczyźnie xz moment gnący M. Muszą więc leżeć w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny xz. Ponieważ zgodnie z założeniem środek ciężkości całego przekroju S leży na osi z, więc środek ciężkości S_1 obszaru ściskanego F_1 musi również leżeć na osi z. /Do powyższego wyniku można również dojść z warunku równowagi momentów względem osi z/. Warunki równowagi /z wyłączeniem tych, które dają tożsamość/ mają postać:

$$\int_F R_{plr} \cdot dF - \int_{F_1} (m + 1) R_{plr} \, dF_1 = 0 \qquad /4/$$

$$\int_F R_{plr} \cdot z \cdot dF - \int_{F_1} (m + 1) R_{plr} \cdot z \cdot dF_1 - M = 0 \qquad /5/$$



Rys.3

Po wprowadzeniu tutaj oznaczeń:

$$\int_F dF = F, \qquad /6/$$

$$\int_{F_1} dF_1 = F_1, \qquad /7/$$

$$\int_F z \, dF = S_y = Fe_1, \qquad /8/$$

$$\int_{F_1} z \, dF_1 = S_{1y} = Fe_{11}, \qquad /9/$$

otrzymamy równania:

$$F - F_1 (m + 1) = 0, \qquad /10/$$

$$R_{plr} e_1 F - F_1 e_{11} (m + 1) = M. \qquad /11/$$

Wzór /10/ pozwala na obliczenie wielkości obszaru F_1. Obszar ten ograniczony jest od dołu osią obojętną o nieznanych na razie współrzędnych położenia η i α. W konkretnym jednak przypadku na obliczenie współrzędnych η i α mamy dwa warunki:

a/ pole F_1 spełnia warunek /10/

b/ jego środek ciężkości leży na osi z.

Możemy teraz już wyznaczyć wartość momentu granicznego. Po wstawieniu mianowicie wartości F_1 z równania /10/ do /11/ otrzymamy:

$$M = R_{plr} F (e_1 - e_{11}). \qquad /12/$$

Zważmy, że iloczyn granicy plastyczności przy rozciąganiu R_{plr} i powierzchni przekroju F jest równy sile na granicy plastyczności rozciąganego pręta P_{plr}.

$$R_{plr} \cdot F = P_{plr}. \qquad /13/$$

Wprowadzając wzór /13/ do wzoru /12/ otrzymamy ostatecznie:

$$M = P_{plr} (e_1 - e_{11}). \qquad /14/$$

Wzór /14/ daje prostą interpretację momentu granicznego przy zginaniu ogólnym:

Graniczny moment gnący jest równy iloczynowi siły osiowej na granicy plastyczności przy rozciąganiu pręta i odległości środka ciężkości przekroju od środka ciężkości obszaru ściskanego.

Dochodzimy poza tym do wniosku, że w przypadku zginania plastycznego belek o niesymetrycznej wytrzymałości /a także i belek o symetrycznej wytrzymałości/ nie potrzebne stają się pojęcia osi głównych, a więc i podział na zginanie proste i ukośne.

Warto jedynie dla przekrojów symetrycznych wyodrębnić przypadek, kiedy płaszczyzna działania momentu gnącego pokrywa się z osią symetrii przekroju /zginanie płaskie/ [2]. Przy zginaniu płaskim oś obojętna jest prostopadła do płaszczyzny działania momentu gnącego dla każdej wartości współczynnika niesymetrii wytrzymałości m. Szereg nowych problemów nasuwa przyjęcie innego modelu plastycznego, np. wg. linii $\sigma_{pl} = a \cdot \varepsilon_{pl} + b$.

LITERATURA

[1] СОКОЛОВСКИЙ В.В. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТ. Moskwa-Leningrad 1950.

[2] Szuścik W. Plastyczne zginanie płaskie belek z materiałów o niesymetrycznej wytrzymałości. Zeszyty Naukowe Polit. Śląskiej - Górnictwo, zeszyt 2.

РЕЗЮМЕ

Предельный момент при общим изгибе балок из материала с несиметричной выносливостью

Материалом с несиметричной выносливостью является материал, для которого соотношение предела пластической выносливости при сжатии R_{plc} к пределу пластической выносливости при растяжении R_{plr} именуется коэффициентом несиметричности выносливости:

$$m = \frac{R_{plc}}{R_{plr}}$$

Сжимаемая часть сечения балки выражается:

$$F_1 = \frac{F}{m+1}$$

Получена формула для расчета предельного изгибающего момента:

$$M = P_{pl} / e_1 - e_{11} /$$

где: P_{pl} - сила у предела пластической деформации при растяжении прутка сечением равным сечению балки.

$/e_1 - e_{11}/$ - расстояние центра тяжести сжимаемой части сечения F_1 от центра тяжести поверхности F, при чём оба центры лежат в плоскости изгибающего момента.

При пластическом изгибе балок становятся ненужными понятия главных осей и следовательно и раздел на простой и косой изгиб.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Grenzmoment beim allgemeinen Biegen von Stäben aus Werkstoff mit unsymetrischer Festigkeit

Ein Werkstoff bei dem die Streckgrenze σ_{FS} und Quetschgrenze σ_{FQ} verschieden sind wird als Werkstoff mit unsymetrischer Festigkeit genannt. Es wurde die Formel für den Grenzwert des Biegungsmoments erhalten.

$$M = P_F (e_1 - e_{11})$$

wobei: P_F Fliesslast

$e_1 - e_{11}$ der Abstand des Schwerpunktes des gedrückten Querschnittes F_1 vom Schwerpunkt des ganzen Querschnittes F ist, wobei beide Schwerpunkte in der Wirkungsebene des Biegungsmomentes liegen.

Beim plastischen Biegen der Stäbe verübrigt sich der Begriff der Hauptachsen, mithin auch die Einteilung in gerade und schiefe Biegung.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice