

DIE BAUTECHNIK

3. Jahrgang

BERLIN, 15. September 1925

Heft 40

Die Instandsetzung der gewölbten Brücken der Berliner Stadtbahn.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Reichsbahnrat Regierungsbaurat a. D. Julius Grapow, Berlin.

1. Vorgeschichte.

1. Zweck der Stadtbahn.

Die Berliner Stadtbahn wurde von der Preussischen Eisenbahnverwaltung in den Jahren 1875 bis 1882 zur Erfüllung zweier wichtiger Aufgaben erstellt: vor allem, um für den durchgehenden Personenverkehr die im Osten und Westen einmündenden Eisenbahnlinien auf kürzestem Wege zu verbinden, sodann um dem Ortsverkehr innerhalb Berlins zu dienen, der in immer stärkerem Maße anwuchs und den die bereits erbaute Ringbahn zu bewältigen suchte.¹⁾

Fast keine Hauptstadt Europas kann eine verkehrstechnisch so hervorragende, offen mitten durch das Zentrum der Stadt verlaufende, viergleisige, normalspurige Eisenbahnlinie ihren Namen nennen. In den anderen Städten stellte einem derartigen Plane die weit vorgeschrittene, enge Bebauung der Innenstädte sich hindernd in den Weg. In dem damaligen Berlin konnte indessen die neue Linie in der Hauptsache an alte Wassergräben, freie Plätze usw. angelehnt werden, so daß die Kosten des Grunderwerbs für die bereits mit Häusern bebauten Straßen nicht in dem Maße wie anderwärts ins Gewicht fielen (Abb. 1).²⁾

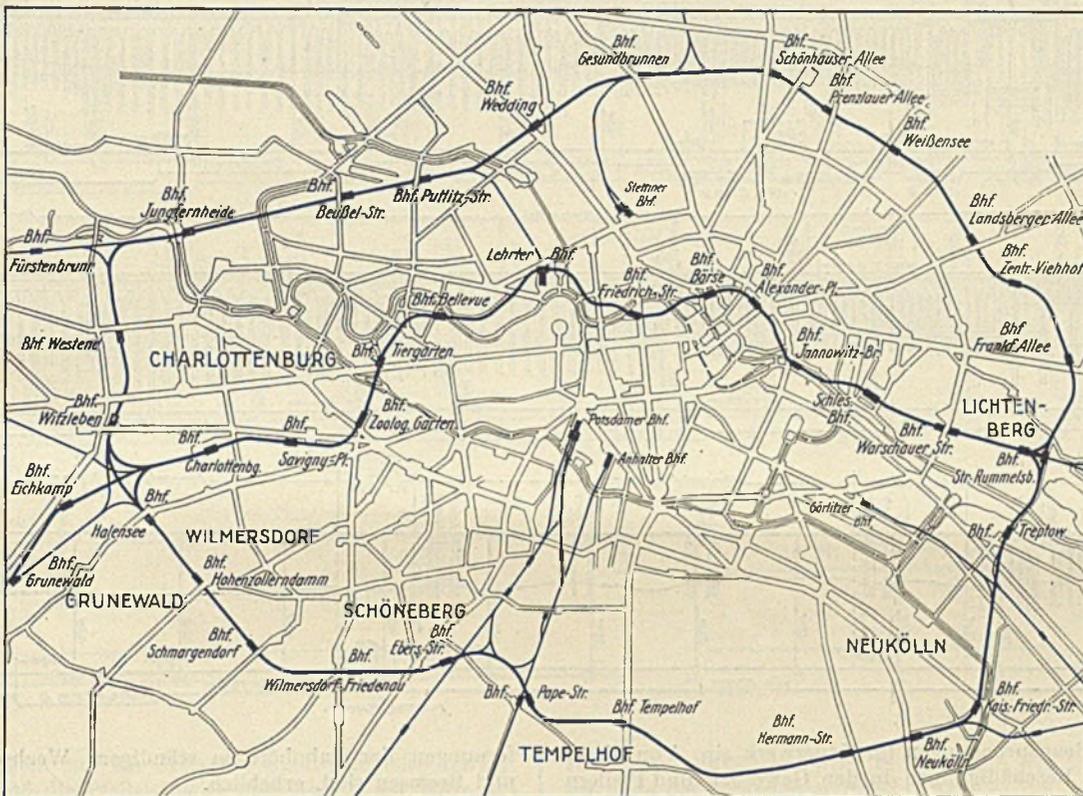


Abb. 1.

2. Länge und Bauart.

Die Berliner Stadtbahn hat vom Ostende des Schlesischen Bahnhofs bis Westende des Bahnhofs Charlottenburg eine Länge von 12,14 km und ist durchweg als Hochbahn, etwa 6 m über Gelände geführt, so daß die zahl- und verkehrsreichen Straßen und Wasserläufe bequem überschritten werden konnten. Das Planum des Bahnkörpers ruht zum geringen Teil auf Dammschüttungen (2,4 km), zum Teil zwischen Futtermauern; größtenteils aber (d. h. rd. 8 km) zur Erzielung eines guten Stadtbildes und zu einer möglichst geringen Inanspruchnahme des wertvollen Grund und Bodens auf gemauerten Viadukten, deren Bogen von 2,5 bis 15 m Spannweite von schlanken Pfeilern getragen werden (Abb. 2).

An den Stellen, wo weder Durchblicke noch Straßendurchgänge notwendig waren, gaben die entstandenen Bogenöffnungen Gelegenheit, sie für Werkstätten, Magazine, Läden und sonstige gewerbliche Betriebe auszunutzen.

Die Breite der Fahrbahn zwischen den Geländern beträgt auf der freien geraden Strecke 15,5 m. Dabei liegen die mittleren Gleise im Abstand von 4 m, die beiden äußeren je im Abstand von 3,5 m. Das

¹⁾ Vergl. Zeitschrift für Bauwesen 1884, S. 1.

²⁾ Die Veröffentlichung des Planes geschieht mit Genehmigung des Herrn Fröhlich, Berlin-Schöneberg.

eine, nördliche Gleispaar dient dem Nahverkehr, das andere dem Fern- und Vorortverkehr (Abb. 3).

Bei den seinerzeitigen Vorarbeiten wurden eingehende wirtschaftliche Untersuchungen angestellt, mit welchen Spannweiten der Bogen und mit welchen Pfeilerstärken sich das Kostenminimum einstelle. Man rechnete mit Hartbrandsteinmauerwerk in Kalkmörtel und ließ in den Gewölben bzw. Pfeilern Spannungen bis 9 kg/cm² und 7,5 kg/cm² zu. Das Gewicht des Mauerwerks und der im Scheitel bis S. U. 0,8 m starken Überschüttung einschl. Kiesbettung war mit 1600 kg/m³ angenommen, die

Verkehrslast zu 0,8 m Belastungshöhe. Die größte Bodenpressung in der Fundamentsohle wurde mit dem für den Sand von Berlin hohen Wert von 4,5 kg/cm² für zulässig erachtet.

Bei der großen Zahl von Bogen (597 Stück) entschloß man sich, die einzelnen Bogen nach wenigen Normalien auszuführen, so daß der weitaus größte Teil der Bogen eine leichte Spannweite von 8 m mit 1/6 Stich und einem Zwischenpfeiler von 1 m Stärke in Kämpferhöhe erhielt. An einzelnen Stellen kommen Bogenöffnungen von 10 m mit demselben Stich und etwa der-

selben Zwischenpfeilerstärke vor. Zur Vergrößerung der Standsicherheit sind nach vier bis sechs Bogen jeweils Gruppenpfeiler mit größerer Breite eingebaut. Die Pfeiler waren in offener Baugrube auf Sand gegründet, und an Orten, wo der tragfähige Grund sich unter dem Grundwasser befand, mit Hilfe von hölzernen Bohl- oder Spundwänden bzw. mit Rammpfählen oder Senkbrunnen (Abb. 2).

An den elf Bahnhöfen und einigen anderen Stellen ist man von den Normalien abgewichen. Die Überquerung der Straßen- und Wasserläufe und Hafenanlagen geschah hauptsächlich durch Eisenkonstruktionen (1,8 km Länge), die bei den Straßen überwiegend aus durchlaufenden Balkenträgern bestehen. Bei den folgenden Darlegungen bleiben jedoch die Arbeiten zur Wiederinstandsetzung dieser Eisenbauten außer Betracht.

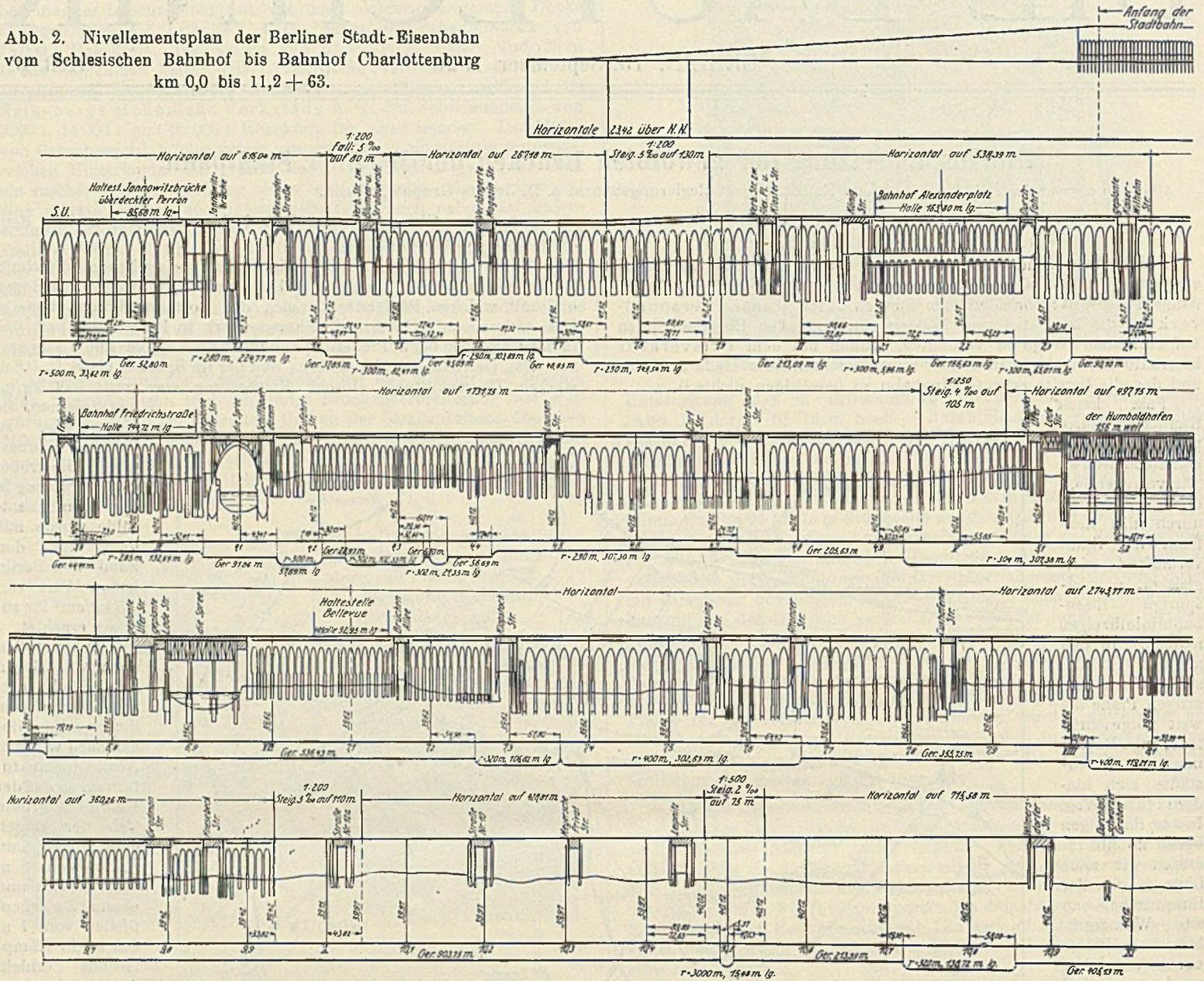
II. Im Lauf der Zeit eingetretene Zerstörungen.

1. Ursachen.

Die Lokomotiven der 80er Jahre hatten für die Stadt- und Fernbahn Achsdrücke von 13,9 t bei 2,2 m Achsabstand.³⁾ Für diese Lasten blieben die Beanspruchungen des Bauwerks in den zulässigen Grenzen. Der Lastenzug von 1895 mit 14 t brachte keine wesentliche Zusatzbeanspruchungen. Erst mit Einführung schwererer Lokomotiven entsprechend dem Lastenzuge A von 17 t im Jahre 1903 trat eine nach-

³⁾ Siehe Berlin und seine Eisenbahnen 1846 bis 1896.

Abb. 2. Nivellementsplan der Berliner Stadt-Eisenbahn vom Schlesischen Bahnhof bis Bahnhof Charlottenburg km 0,0 bis 11,2 + 63.



teilige Erhöhung der Beanspruchungen im Mauerwerk ein. Von dieser Zeit an machten sich Beschädigungen in den Gewölben und Pfeilern bemerkbar, denen man zunächst mit einfachen Mitteln: eiserne Anker, Ausmauern und Vergießen der entstandenen Risse, zu begegnen suchte (Abb. 4 u. 5).

Außer den Gewichten der Betriebsmittel nahm aber auch die Zahl der Züge zu; sie beträgt heute etwa 750 Züge täglich auf den Stadtbahngleisen und 150 Züge täglich auf den Fernbahngleisen. Rechnet man Sonderzüge, Bedarfszüge, Arbeitszüge usw. hinzu, so fahren täglich etwa 1000 Züge über die Stadtbahn. Während die Fernzüge die Bahnstrecken ziemlich schlagfrei durchfahren, sind die Erschütterungen unter den Stadtbahnzügen, die bei den kurzen Ent-

fernungen der Bahnhöfe in ständigem Wechsel zwischen Anfahren und Bremsen sind, erheblich.

Die Entstehung der Zerstörungen ist daher den erhöhten Achslasten und der dichten Zugfolge in erster Linie zuzuschreiben. Sie lassen sich etwa folgendermaßen erklären:

Die zulässige Bodenbeanspruchung war dort zu hoch bemessen, wo schlechte Untergrundverhältnisse, z. B. moorige Zwischenlagen, alte Wasserläufe, leichter Boden usw., vorlagen. Hier wirkten die schmalen Pfeiler wie Pfähle; sie wurden durch die immer schwereren und sich immer rascher folgenden Radstöße gleichsam in den Boden „gerammt“. Die dadurch hervorgerufenen kleinen Senkungen verteilten sich aber nicht gleichmäßig über einen Pfeiler, sondern waren entsprechend

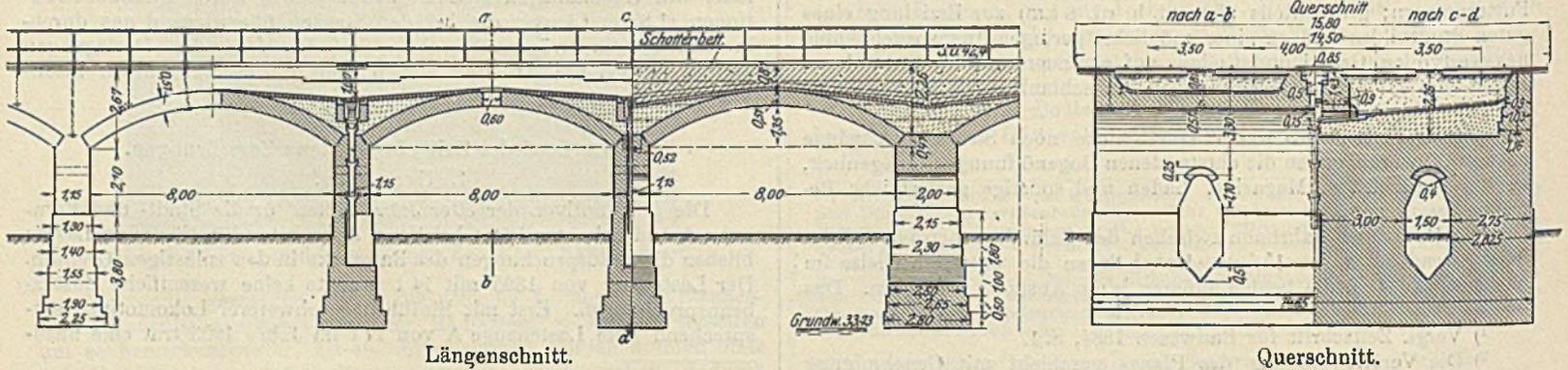
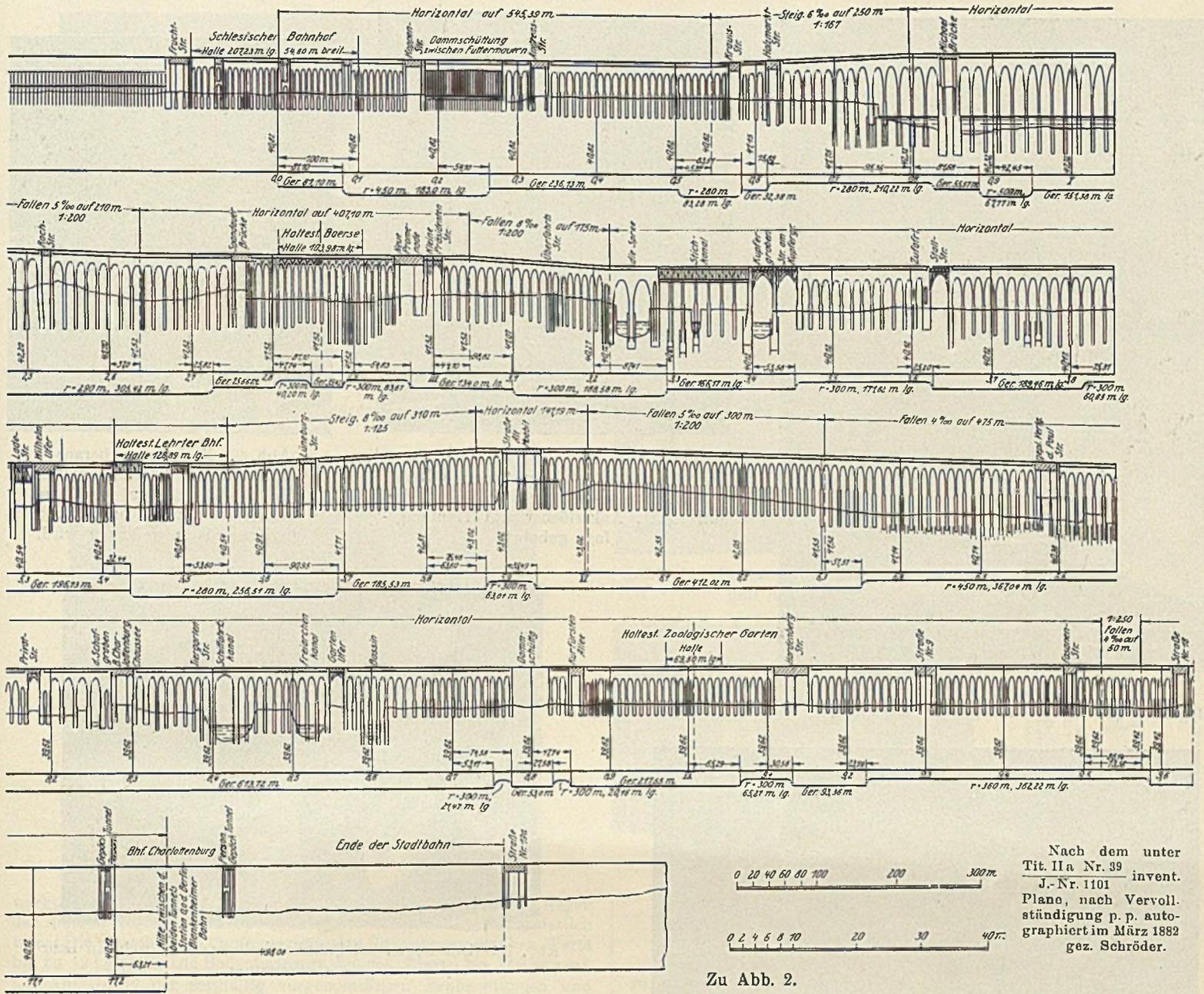


Abb. 3. Viadukt zwischen der Andreas- und Krautstraße.



Zu Abb. 2.

dem dichteren Zugverkehr auf der Seite der Stadtbahnleihe stärker. Daraus erklärt sich, daß die Pfeiler meist über den in der Mitte angeordneten Nischen oder Durchgängen auseinanderrissen. Diese Erscheinungen zeigten sich hauptsächlich am Schlesischen Bahnhof, sowie

rechts und links der Spree in der Nähe des Bahnhofs Bellevue und im Zuge der Lüneburger Straße (Abb. 6, 7 u. 8).

2. Art der Schäden.

Der nach unten gehenden ungleichmäßigen Pfeilerbewegung konnten die auf dem Pfeiler ruhenden eingespannten Bogen nicht entsprechend folgen. Demzufolge mußten starke Längs- und Querrisse entstehen, deren Länge zwischen 0,5 und 12 m schwankt. Die Risse in Richtung der Bahn sind in der Hauptsache Steinrisse und deuten auf die gewaltsame Bruchbildung hin. Während diese Risse als natürliche Trennungsfugen der Gewölbe angesehen werden können, sind die Risse senkrecht zur Bahnachse als eine natürliche Gelenkbildung anzusprechen (Abb. 9, 10 u. 11). Beobachtungen zeigten, daß in den entstandenen Kämpferfugen durch das Öffnen in der unteren Bogenleibung erhöhte Beanspruchungen in der oberen Leibung eintraten. Je nach der Güte des Mörtels rutschten dadurch Bogenteile 1 bis 2 cm vom Kämpfer ab, die für eine Kräfteverteilung kaum mehr in Frage kamen.

Zur Zerstörung der Pfeiler hat auch z. B. an der Adreasstraße und im Tiergarten die mangelhafte Entwässerung des Bahnkörpers unmittelbar durch die Pfeiler hindurch beigetragen. Die Abfallschächte waren in der Mitte des Bahnkörpers in die Achse des Pfeilers gelegt (Abb. 2) und mündeten in Tonrohrleitungen unter dem Boden ein, die nur zum Teil an die städtische Kanalisation angeschlossen waren. Da sich keine Einsteigeschächte vorfanden, konnte ein regelmäßiges Reinigen dieses Entwässerungsrohres und des anschließenden Abfallschachtes nicht vorgenommen werden. Zahlreiche Verstopfungen traten ein, die bewirkten, daß das Wasser in den Schächten hochstieg und die Pfeiler an angrenzenden Gewölbepartien durchnäßte. Im Winter traten starke Eisbildungen auf. Der eindringende Frost zerstörte das

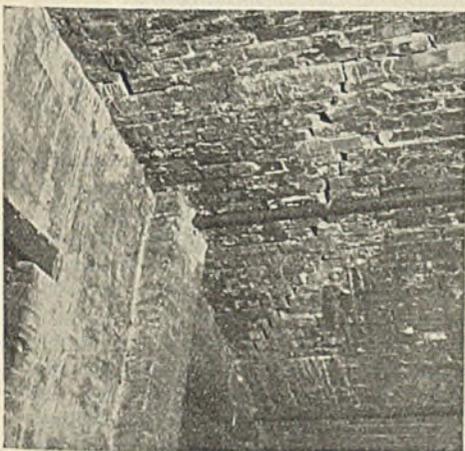


Abb. 4. Bogen 4 an der Andreasstraße Ankereisen zur Verankerung der Stirnmauern.



Abb. 5. Riß im Bogen 350 an der Lüneburgerstraße. Alte Ankereisen zur Verankerung d. Stirnmauern.

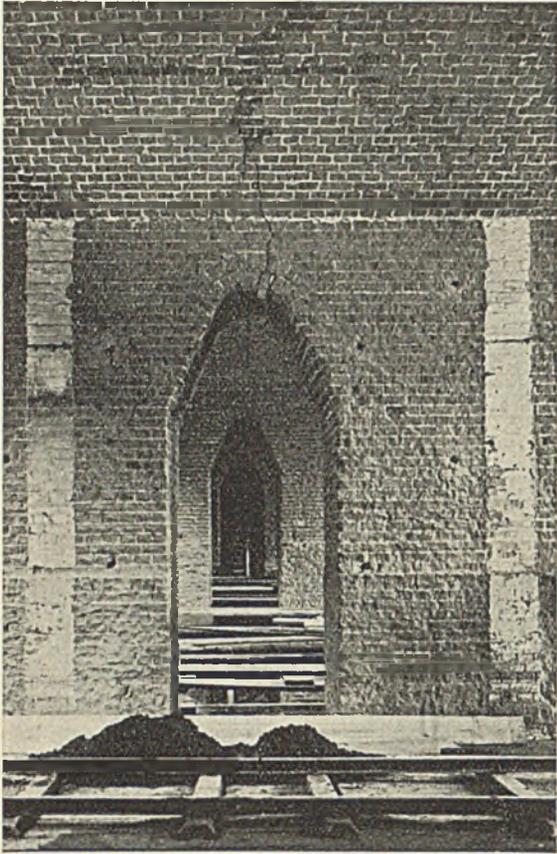


Abb. 6. Risse in Pfeilern und Gewölben Bogen Nr. 339—337 von Bogen Nr. 339 aus gesehen.

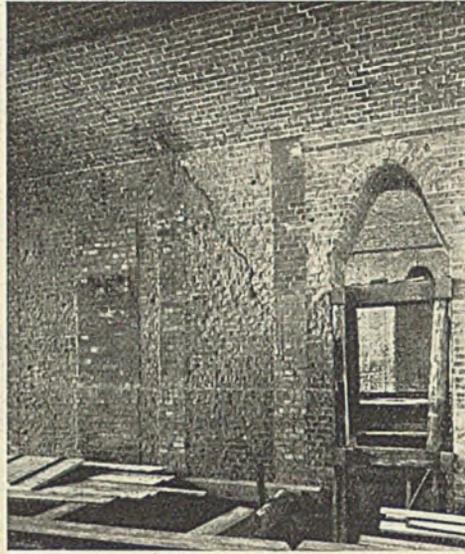


Abb. 7. Risse im Pfeiler zwischen Bogen Nr. 341 und 342 und im Gewölbe Bogen Nr. 341. Pfeiler- und Gewölbeflächen sind aufgeraut, Ankerlöcher und Trennungsfuge gebohrt.

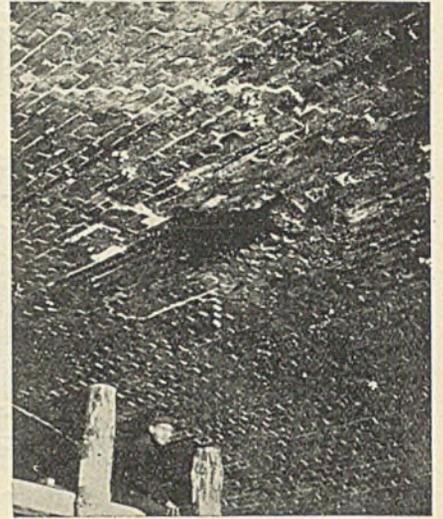


Abb. 9. Kreisförmig herausgebrochener Teil des Gewölbes im Bogen 409, der um rd. 2,5 cm heruntergesackt ist und durch ein Notgerüst abgefangen wird.

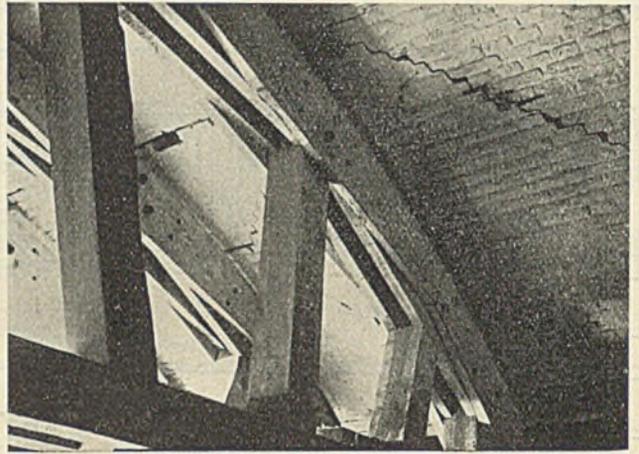


Abb. 10. Der Bogen bei Bahnhof Bellevue ist durch ein Lehrgerüst unterstützt.

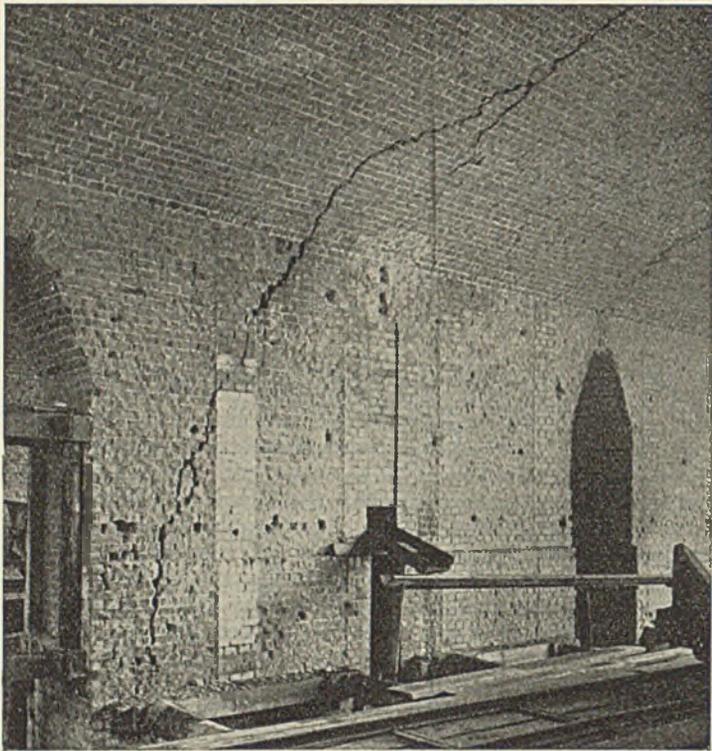


Abb. 8. Risse im Pfeiler zwischen Bogen Nr. 341 und 342 und im Gewölbe Bogen Nr. 342. Pfeiler- und Gewölbeflächen sind aufgeraut, Ankerlöcher und Trennungsfuge gebohrt.

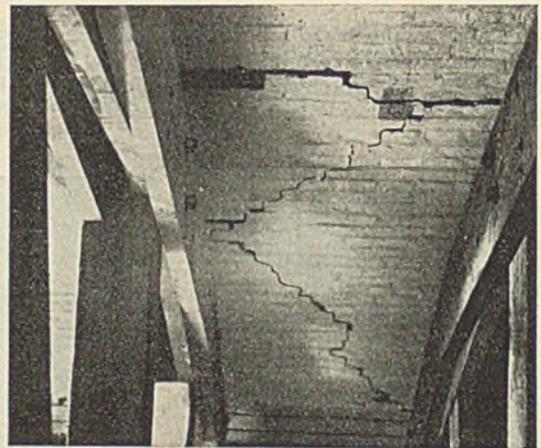


Abb. 11. Derselbe Bogen bei Bahnhof Bellevue.

Mauerwerk, und das um so rascher, je mehr Risse vorhanden waren (Abb. 12, 13 u. 14).

Gleichzeitig mit der Rissebildung in den Gewölben konnte an diesen Stellen auch ein Reißen und Undichtwerden der Gewölbe-Abdichtung beobachtet werden. Die unter der Gleisbettung andrängenden Sickerwasser nahmen ihren Abfluß durch die undichten Stellen der Isolierung und begannen das an sich überbeanspruchte Mauerwerk auszulaugen. (Auf Abb. 15 ist das Durchsickern der Klebmasse der Isolierung zu erkennen, s. auch Abb. 12 bis 14). Infolge dieser Umstände trat oft ein völliges und plötzliches Ablösen einzelner Ziegel-

steine und ganzer Mauerbrocken ein (Abb. 9). — Nicht ohne Einfluß auf die Standsicherheit der Pfeiler erscheint auch die Höhe des Grundwasserspiegels gewesen zu sein. Es wurde festgestellt, daß Veränderungen in der Höhe des Wasserspiegels vermehrte Rissebildungen hervorriefen, besonders dort, wo die Pfeiler auf leichteren Boden gegründet waren.

Als ein seitliches Auseinanderbrechen der Gewölbe hauptsächlich zwischen den Gleisen der Stadtbahn und Fernbahn trotz des Einziehens von Rundeisenankern und starken Ankerplatten immer mehr zunahm, ließ die Eisenbahnverwaltung die besonders beschädigten Bau-

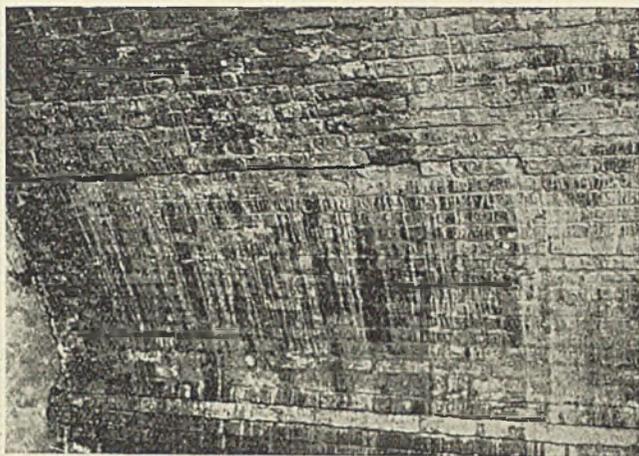


Abb. 12.
Bogen 4 an der Andreasstraße.

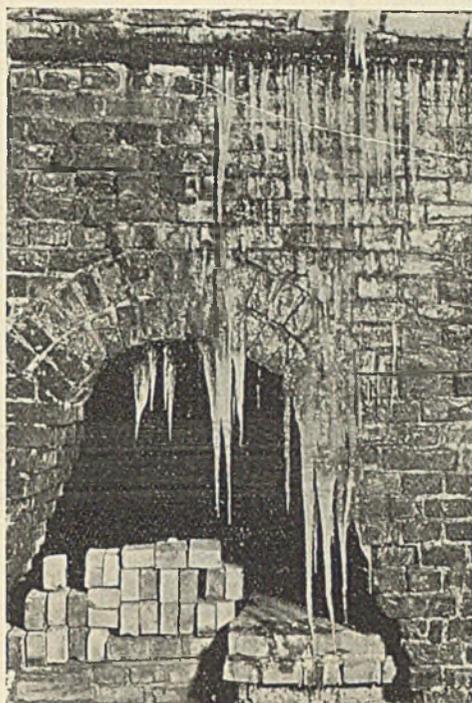


Abb. 14. Bogen 13 zwischen Andreas- und Krautsraße.

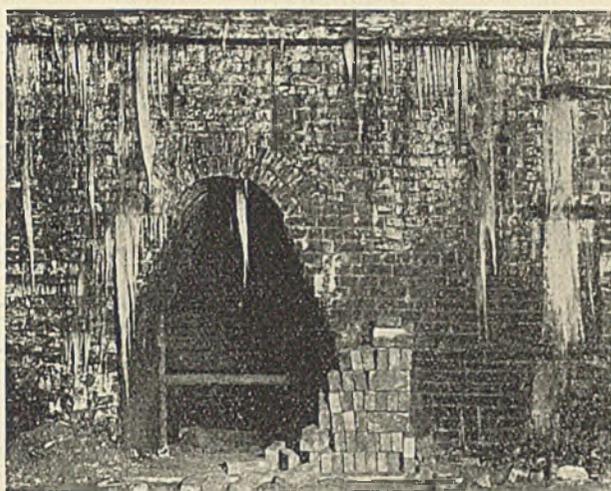


Abb. 13. Bogen 12 zwischen Andreas- und Krautstraße.

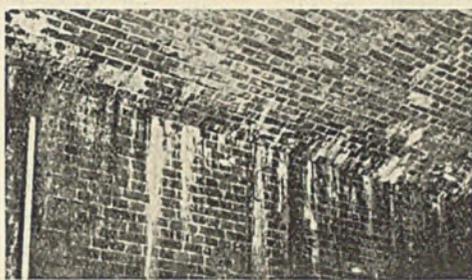


Abb. 15.

werkteile mit dem 20-t-Lastenzug nachrechnen, dessen Annahme wegen der dichten Zugfolge und Überfüllung der Stadtbahnzüge erforderlich war. Die danach im Kämpfer errechneten Spannungen ergaben Werte bis zu 19 kg/cm^2 . Die Bodenbeanspruchungen stiegen bis $12,3 \text{ kg/cm}^2$.

Auf Grund der sorgfältig vorgenommenen Beobachtungen und der hieran angeschlossenen Vergleiche konnte man sich der Erkenntnis nicht verschließen, daß die aufgetretenen Schäden sich zum größten Teil auf die stark wechselnden Erschütterungen zurückführten. Diese setzten die gering bemessenen Gewölbe und Pfeiler in Schwingungen, die das Mauergefüge lockerten. Man erkannte, daß an den langgestreckten Bauwerken der Stadtbahn ähnliche Erscheinungen sich bemerkbar machten, wie sie bereits bei eisernen Brückenträgern anderwärts festgestellt worden sind. Infolge unzähliger Wiederholung starker Zug- und Druckkräfte tritt allmählich eine Art Ermüdung des Baustoffes ein, die eine Erneuerung bzw. Verstärkung der Konstruktionsglieder erfordert. Nur auf diese Weise lassen sich die auffallenden, an der Stadtbahn an den verschiedenen Stellen mit einem Male fast gleichzeitig eintretenden Zerstörungen erklären.

Aus diesen Erscheinungen geht hervor, daß man vorläufig mit weiteren Rissebildungen auch an solchen Stellen der Stadtbahn wird rechnen müssen, die bisher keine Beschädigungen aufwiesen. Außerdem ergibt sich die interessante Folgerung, daß man bei Bauwerken, die einen der Stadtbahn ähnlichen Eisenbahnverkehr zu bewältigen haben, nicht allein auf die mittels der Statik ermittelten kleinsten Bauwerkquerschnitte sehen darf, sondern daß es sich bei dem Entwerfen solcher Bauwerke auch darum handeln wird, die nötigen Massen in das Bauwerk zu bringen, damit die infolge der andauernden Radstöße einsetzenden Schwingungen durch die Gewichte des Mauerwerks ihren schädigenden Einfluß auf die Bauwerkteile verlieren.

Auf jeden Fall war unter diesen Umständen an eine dauerhafte Erhaltung der beschädigten Stadtbahnbogen mit den bisher angewandten, einfachen, behelfsmäßigen Mitteln nicht zu denken. Trotz der nach dem Kriege gebotenen Sparsamkeit ließ sich eine umfassende Inangriffnahme der Wiederinstandsetzungsarbeiten nicht mehr hinausziehen.

III. Entwurfsbearbeitung.

1. Vergleich der verschiedenen Lösungen.

Bei der Verstärkung und Ausbesserung der gemauerten Stadtbahnbogen mußte sich unter diesen Verhältnissen das Hauptaugenmerk darauf richten, bei vollständiger Erhaltung des Eisenbahnbetriebes während der Bauausführung die verschiedenen dynamischen Wirkungen der Stadt- und Fernbahn klar zu trennen, die übermäßigen Bodenpressungen unter den Pfeilern auszuschalten und die schadhafte Abführung des Sammelwassers über den Gewölben zu beseitigen.

Um die Jahreswende 1921/22 trat das Betriebsamt I in Berlin mit einem Vorschlag an eine Anzahl Baufirmen heran und forderte sie auf, für die Sicherung der besonders gefährdeten Stadtbahnbogen 4 und 5, die an der Andreasstraße in der Nähe des Schlesischen Bahnhofes eingebaut lagen, Kostengebote abzugeben und ihrerseits Vorschläge zu machen. Zunächst ergaben sich zwei grundsätzlich verschiedene Ausführungsmöglichkeiten.

Der Vorschlag des Betriebsamts ging darauf hinaus, die bestehenden Pfeiler und Bogen zu verstärken und die Fundamente durch auskragende Eisenbetonkonsolen, die klauenartig unter die Pfeiler greifen, zu verbreitern.⁴⁾ Die andere

⁴⁾ Bericht über die XVII. Hauptversammlung des Deutschen Beton-Vereins, 5., 6. und 7. März 1914, S. 173.

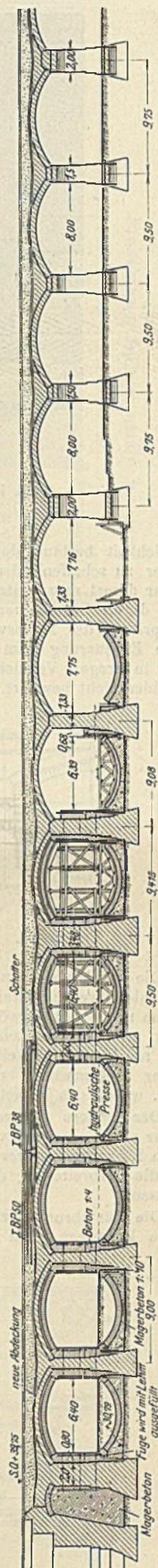


Abb. 16. Arbeitsvorgang zur Instandsetzung der Bogen und Pfeiler.



Abb. 17. Verankerung der Pfeiler-
verstärkung.

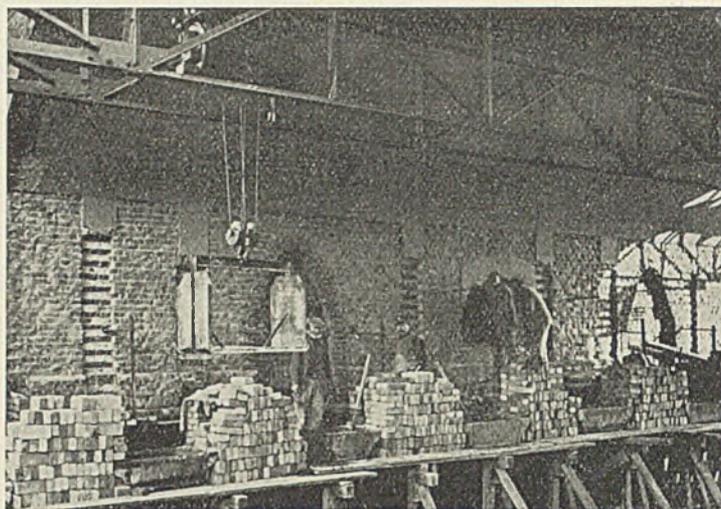


Abb. 18. Verzahnung im alten Bauwerk.

Möglichkeit bestand darin, eine durchgehende Grundplatte für die Pfeiler zu schaffen oder durch Entfernung der Gewölbe den Bahnkörper derart umzugestalten, daß an Stelle des Viaduktes ein beiderseits durch Stützmauern begrenzter Erddamm tritt. Ein bloßes Ausspritzen des Mauerwerks mit Zementmörtel und eine nur teilweise Erneuerung kam angesichts der starken Betriebslasten nicht mehr in Frage. Versuche damit haben gezeigt, daß dieses Verfahren sich hier nicht bewährt.

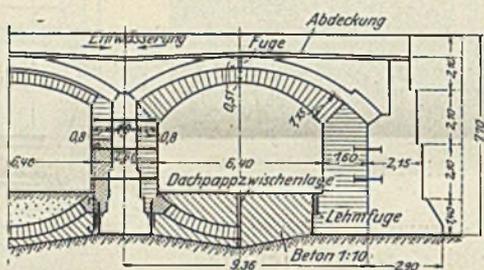


Abb. 20. Ausführung der Endwiderlager.

Die Anordnung von Futtermauern konnte nicht zur Ausführung empfohlen werden, weil diese Bauart eine weitere Benutzung der Räume unter den Gewölben ausschloß, auf die bei der Raumnot in Berlin unbedingt zu achten war. Zudem ließ sich diese Bauweise nicht an denjenigen Stellen der Stadtbahn durchführen, die nicht, wie an der Andreasstraße eingebaut, sondern wegen des Straßenbildes bzw. wegen des Verkehrs offen zu halten waren.

Der andere Entwurfsgedanke, die bestehenden Fundamente, Pfeiler und Bogen zu verstärken, war für die Bogen und Pfeiler durch Hinzufügen neuer Teile nicht un schwer durchzuführen, dagegen war die Verbreiterung der Fundamente nicht in so einfacher Weise zu lösen.

Die Ausführung der Eisenbetonkonsolen erweckte in diesem Falle starke Bedenken, weil dem Bauwerk die Gefahr drohte, daß die

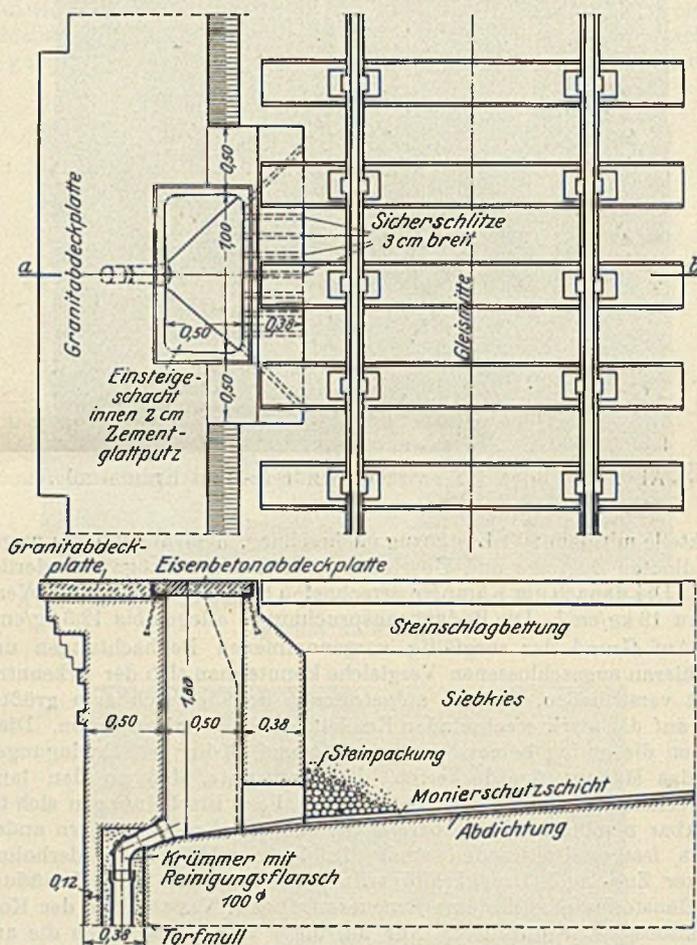


Abb. 21 a.

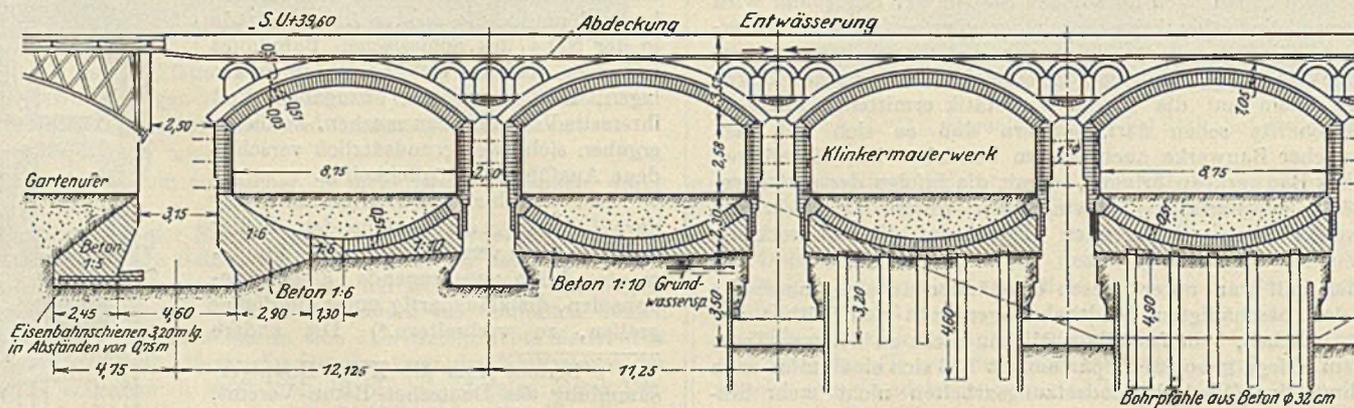


Abb. 19. Ausbildung der Endwiderlager. Längenschnitt in der Bahnachse.

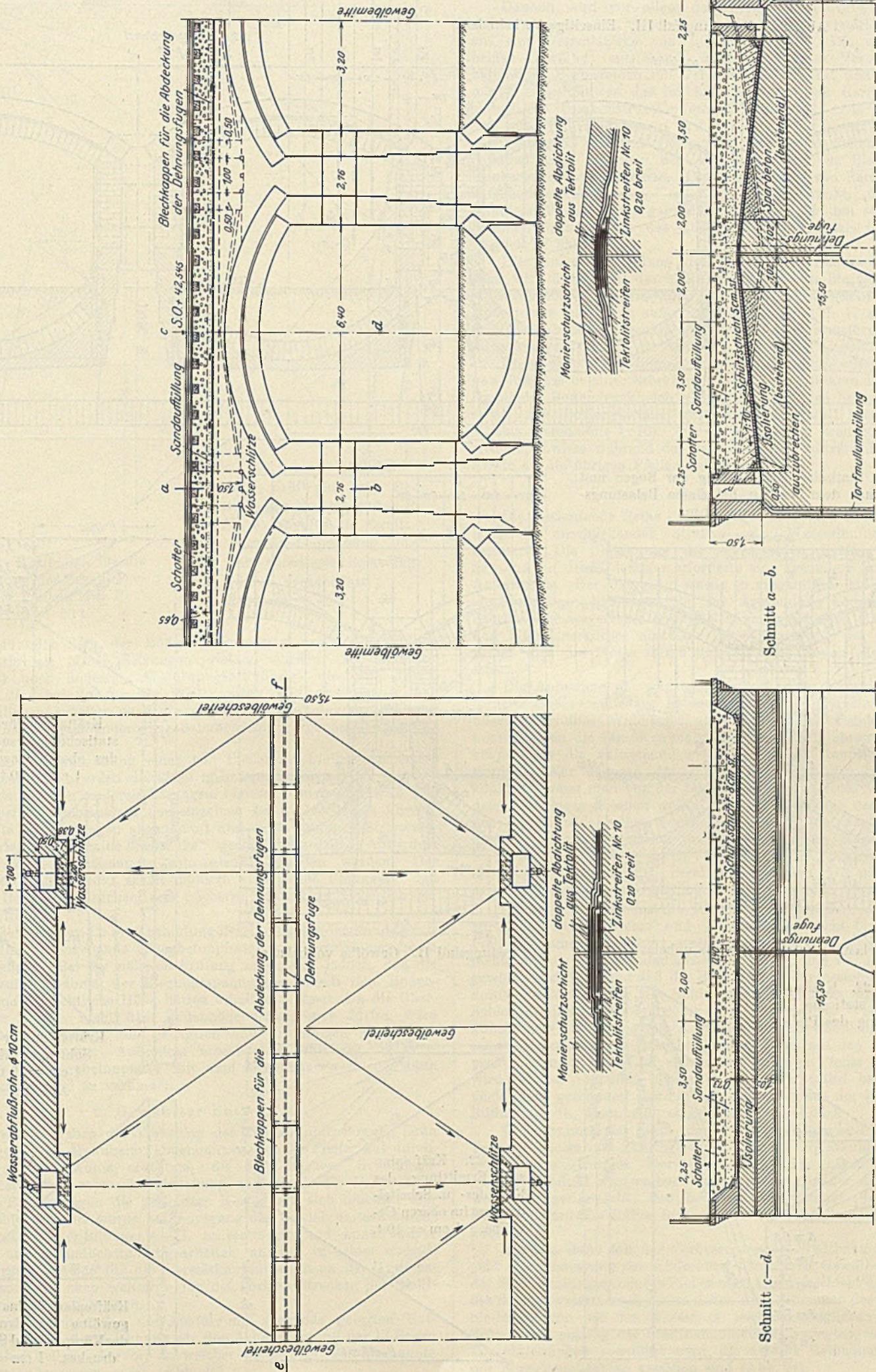


Abb. 21. Darstellung der Entwässerung.

Abb. 21. Wagerichter Schnitt mit Draufsicht auf die Gewölbe.

Abb. 22. Belastungsfall III. Einseitige Verkehrslast.

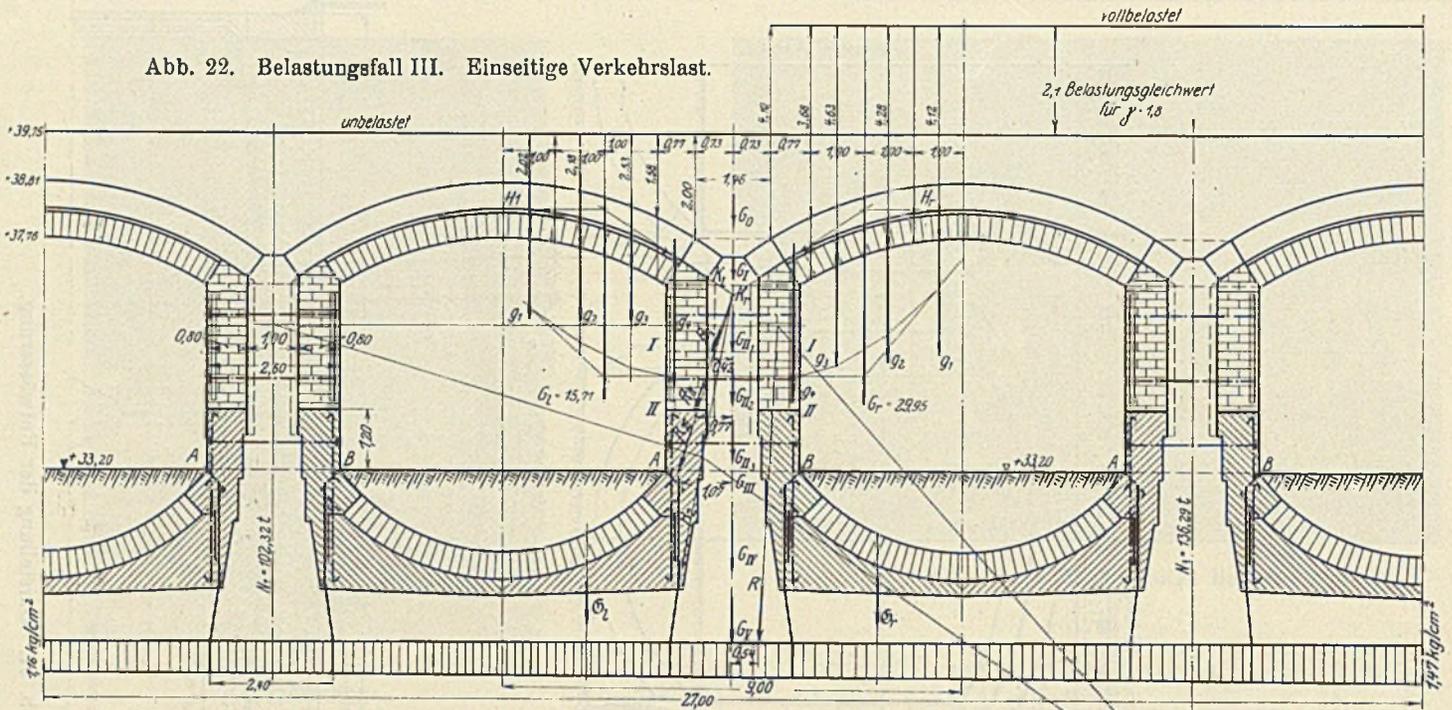
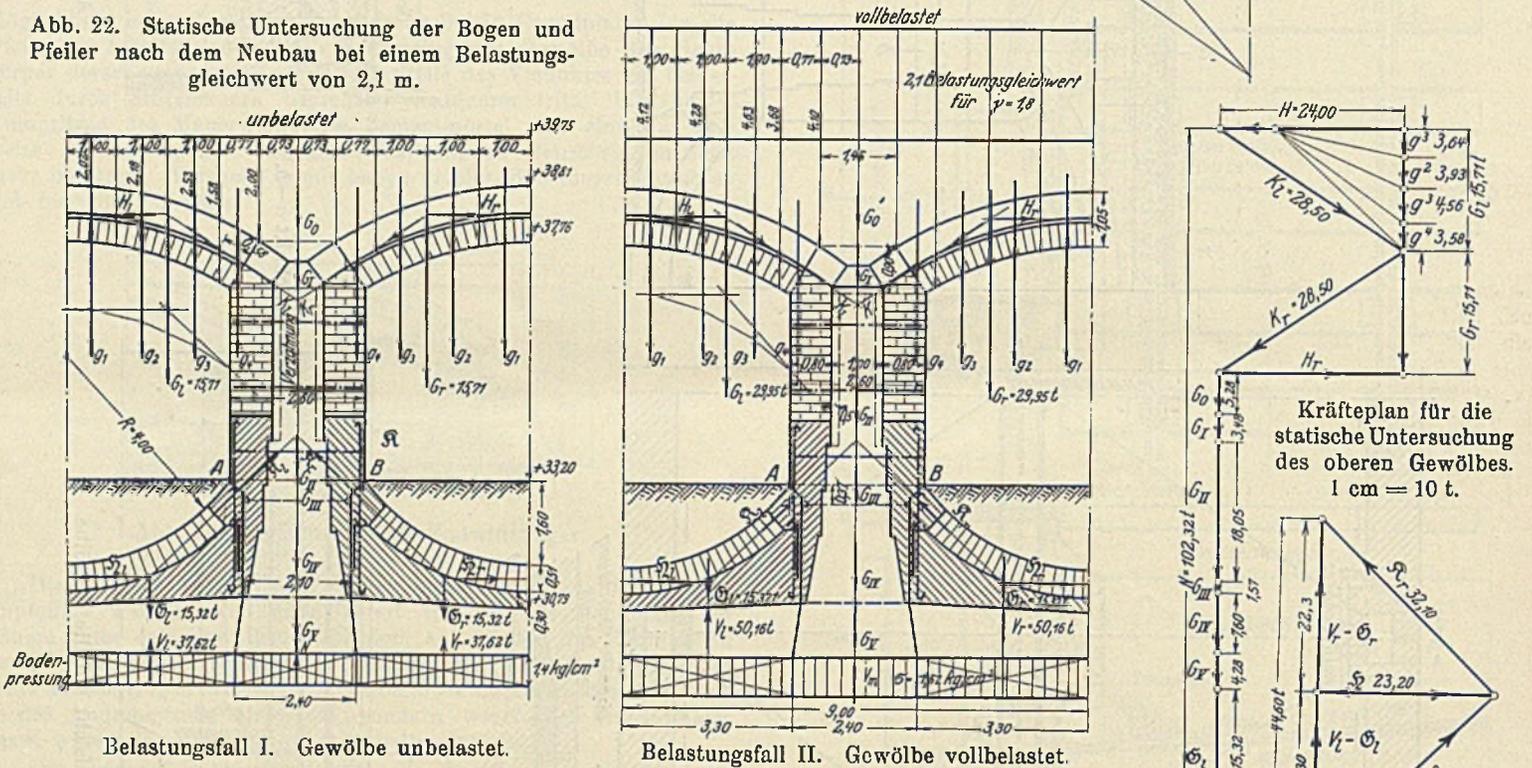


Abb. 22. Statische Untersuchung der Bogen und Pfeiler nach dem Neubau bei einem Belastungsgleichwert von 2,1 m.



Belastungsfall I. Gewölbe unbelastet.

Belastungsfall II. Gewölbe vollbelastet.

Kräfteplan für die statische Untersuchung des oberen Gewölbes. 1 cm = 10 t.

Kräfteplan für das Sohlengewölbe. 1 cm = 10 t. Abb. 22.

Abb. 22. Kräfteplan für die statische Untersuchung des Pfeilers.

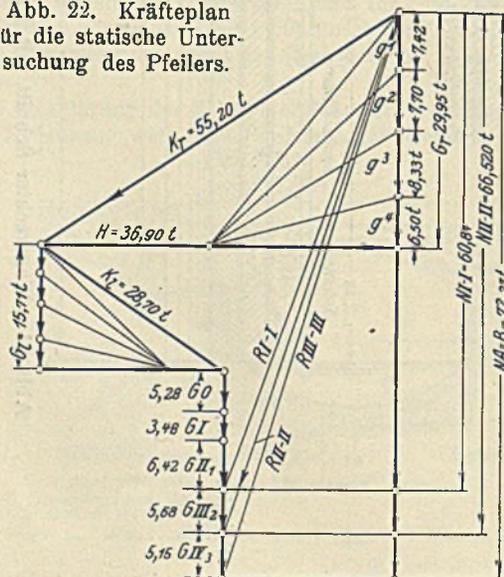
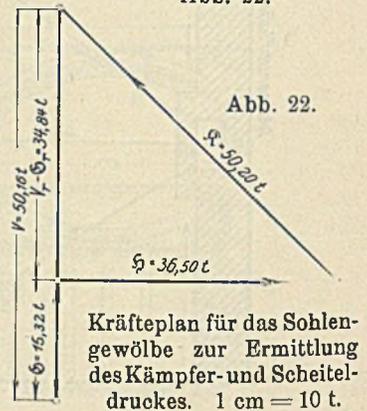
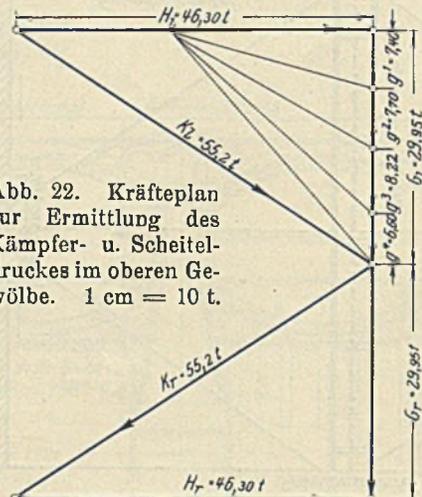


Abb. 22. Kräfteplan zur Ermittlung des Kämpfer- u. Scheitel-druckes im oberen Gewölbe. 1 cm = 10 t.



Kräfteplan für das Sohlengewölbe zur Ermittlung des Kämpfer- und Scheitel-druckes. 1 cm = 10 t.

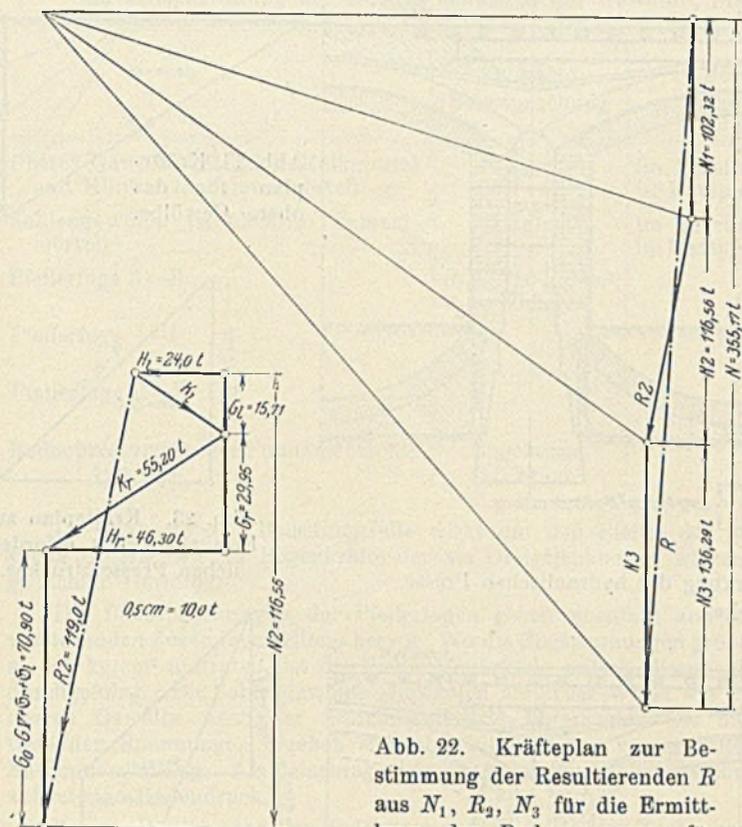


Abb. 22. Kräfteplan für die Bestimmung der Resultierenden des Pfeilers II = R_2 .
1 cm = 20 t.

Abb. 22. Kräfteplan zur Bestimmung der Resultierenden R aus N_1, R_2, N_3 für die Ermittlung der Bodenpressung für den Fall einseitiger Belastung durch Verkehrslast.
1 cm = 40 t.

Pfeiler für die Zeit der Bodenausschachtung und Unterwühlung noch mehr als bisher Setzungen erleiden würden. Es blieb deshalb nur noch diejenige Ausführungsart übrig, die eine durchgehende Bodenplatte für die Pfeiler schuf und ermöglichte, daß die sämtlichen Arbeiten ohne die geringste Einschränkung des über die Viadukte weglaufernden Eisenbahnbetriebes vorgenommen werden konnten.

Durch die Anordnung einer von Pfeiler zu Pfeiler reichenden Fundamentplatte wurden allerdings mehr Massen in das Bauwerk gebracht als bei den anderen Lösungen. Dieser Umstand erwies sich jedoch bei der Schlankheit der einzelnen Bauwerksteile als Vorzug, indem die Schwingungen abgedämpft und einer künftigen Steigerung der Betriebslasten keine Schranken gezogen wurden. Außerdem durften die Bodenpressungen sehr niedrig gehalten werden. Der ganze Stadtbahnviadukt erhält dadurch eine solche Festigkeit, daß er den Betriebsansprüchen der nächsten Jahrzehnte sicherlich genügen wird.

Zunächst schien für die Ausbildung der durchgehenden Fundamentplatte eine durchgehende Eisenbetonplatte mit Verstärkungsrippen das Gegebene. Bei der näheren Prüfung zeigte sich jedoch, daß die Rippen zur Aufnahme der Biegungsspannungen durch den Bodendruck eine beträchtliche Höhe hätten erhalten müssen. Da die Oberkante der Rippen nicht über Bodenhöhe herausragen durfte, wäre die Gründung dadurch tief geworden und an einigen Stellen ins Grundwasser geraten. Außerdem erschien es schwierig, die Verbindung der Eisenbetonplatte mit dem Ziegelmauerwerk der alten Pfeiler einwandfrei zu verbinden.

2. Gewählter Entwurf.

Es wurde daher der Vorschlag der Tiefbauunternehmung Grün & Bilfinger A.-G., Mannheim, angenommen, der die Pfeiler auf durchgehende Sohlengewölbe abstützte, die eine flachere Gründungsmöglichkeit, eine raschere Herstellung und durch die Vermeidung jeglicher Eiseneinlagen die geringsten Kosten mit sich brachte. Der eingereichte Entwurf wurde auf Anregung des Betriebsamtes I seitens der Firma Grün & Bilfinger A.-G. in statischer und konstruktiver Hinsicht aufs gründlichste umgearbeitet, um ihn in seiner endgültigen Form nicht nur für die Verstärkungsarbeiten an der Andreasstraße, sondern auch weiterhin für die übrigen Strecken der Stadtbahn verwenden zu können.

Die Einzelheiten des der Ausführung zugrunde gelegten Entwurfes gehen aus der Zeichnung für den Arbeitsvorgang der 13 Bogen bei Bahnhof Bellevue hervor, an welcher Stelle 8 m weit gespannte Bogen instanzzusetzen waren (Abb. 16).

Danach wird vor allem das bestehende Gewölbe durch Unterziehen eines zweiten, 51 cm starken Gewölbes verstärkt und damit auf eine Gesamtstärke von 1,05 m gebracht. Die zwischen den beiden Gewölben entstehende Fuge wird unter Verwendung von besonderen Formsteinen mit Verzahnung gemauert und mit Zementmörtel ausgefüllt, so daß im Endzustande beide Gewölbe als eine einheitliche Tragkonstruktion anzusprechen sind. Die neuen Bogen sind mit Klinkern gemauert und setzen sich auf 68 cm breite Pfeilerverstärkungen, die sich gleichmäßig auf beiden Seiten des Pfeilers befinden und je nach der Beanspruchung aus Eisenbeton oder Klinkermauerwerk bestehen. Die Verwendung von Beton wurde im aufgehenden Mauerwerk möglichst eingeschränkt, um bei der ständigen Vibration des ganzen Bauwerks durch den starken Eisenbahnbetrieb die Menge des abzubindenden Materials so gering wie möglich zu halten.

Die innige Verbindung des neuen Pfeilermauerwerks mit dem alten wird durch quer durch die Pfeiler gesteckte Eisenanker gewährleistet. Außerdem wurde die gesamte Berührungsfläche des alten Mauerwerks maschinell aufgeraut und gemäß Abb. 17 u. 18 in regelmäßigen Abständen senkrechte, schwalbenschwanzförmige Verzahnungen angebracht, in die das neue Mauerwerk eingreift.

Diese neue Pfeilerummantelung stützt sich gegen das Sohlengewölbe, das in einer Stärke von 51 cm aus Klinkern hergestellt ist. Damit der Bodendruck sich gleichmäßig auf den Erdboden verteilt, erhält das Sohlengewölbe eine Unterlage aus Magerbeton (im Mischungsverhältnis 1:10). Der Beton hat die weitere Aufgabe zu erfüllen, gewisse während der Bauausführung auftretende wagerechte Kräfte an die übrigen Pfeiler weiterzuleiten.

Endpfeiler.

Die fortlaufende Reihe der Sohlengewölbe wird durch die Widerlager der anschließenden Straßen- oder Wasserlaufüberführungen begrenzt. Die Überleitung der wagerechten Kräfte der Sohlengewölbe auf die Widerlager erforderte eine besondere Ausbildung des Anschlusses. Der Übergang wurde so ausgebildet, daß am Endfelde ein einhäufiges Sohlengewölbe zur Anwendung kommt, an dessen Scheitel eine wagerechte Betonplatte angebracht ist, die sich gegen den Widerlagerkörper abstützt. Zur Vermehrung der Reibung am Boden wird die Platte durch aufgebracht Boden oder Beton belastet.

Die Aufnahme der wagerechten Schübe der oberen Gewölbe erforderte eine verschiedene Behandlung, je nachdem ein freistehendes oder hinterfülltes Widerlager vorlag. Das freistehende Widerlager konnte gegen die Straße zu meist durch Anfügung eines neuen Mauerkörpers für die auftretende wagerechte Kraft stand sicher gemacht werden. War dagegen das Widerlager mit Boden hinterfüllt, so konnte — wenn man von der teuren Ausführung eines Stollens hinter dem Widerlager absehen wollte — die Verstärkung des Widerlagers nur im Endfelde selbst durch Vorlagerung von neuen Bauwerkmassen stattfinden und der Schub des über das Endfeld gehenden neuen oberen Gewölbes durch Verringerung der Spannweite und Vermehrung des Gewölbestichs herabgesetzt werden. Die näheren Einzelheiten gehen aus den Abbildungen hervor (Abb. 19 u. 20).

Um zu erreichen, daß die von oben kommenden auf den Pfeiler wirkenden Eigengewichts- und Verkehrslasten nicht bloß dem alten Pfeilerfundament zugeführt werden, sondern sich möglichst gleichmäßig auf die ganze Bodenfläche der Pfeiler und der neuen Sohlengewölbe verteilen, und daß der Boden unter den bestehenden Pfeilern durch die Mitwirkung der Sohlengewölbe entlastet wird, wird das Sohlengewölbe vor Fertigstellung in einer neuartigen Weise unter eine künstliche Vorspannung gesetzt, derart, daß jedes Sohlengewölbe nach seiner Herstellung mit einer bestimmten Kraft auf den Erdboden gepreßt und mit dieser Vorspannung an den alten Pfeiler angeschlossen wird. Dieses Verfahren, das sich sehr gut bewährt hat und später noch näher geschildert werden soll, wurde seitens der Firma Grün & Bilfinger A.-G., Mannheim, eingehend durchgebildet.

Zur Trennung der Stadt- und Fernbahnhälfte wird in den neuen Teilen — oberes und Sohlengewölbe — Pfeilerverstärkung in der Mitte einer Fuge angeordnet. Der alte als einheitlich ganzes Bauwerk hergestellte Viadukt wird vorher durch Anbohren in der Achse des Bauwerks so geschwächt, daß bei etwaigen späteren Setzungen der einen oder anderen Hälfte Risse nur in der gewollten Fuge entstehen können.

Hand in Hand mit der Verbesserung der Stadtbahn im Unterbau geht die Erneuerung der Abdeckung der oberen Gewölbe. An Stelle der Entwässerung durch die Pfeiler nach innen geschieht die Abführung des Sammelwassers nach außen durch die Stirnmauer des Bahnkörpers hindurch, von wo das Wasser in leicht zugänglichen gußeisernen Rohren den entlang des Stadtbahnviaduktes verlegten, unterirdischen Tonrohrleitungen zugeführt wird, die zwecks Reinigungsmöglichkeit mit Einsteiggeschächten versehen sind (Abb. 21).

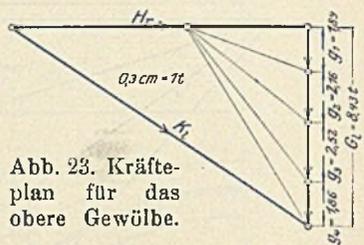
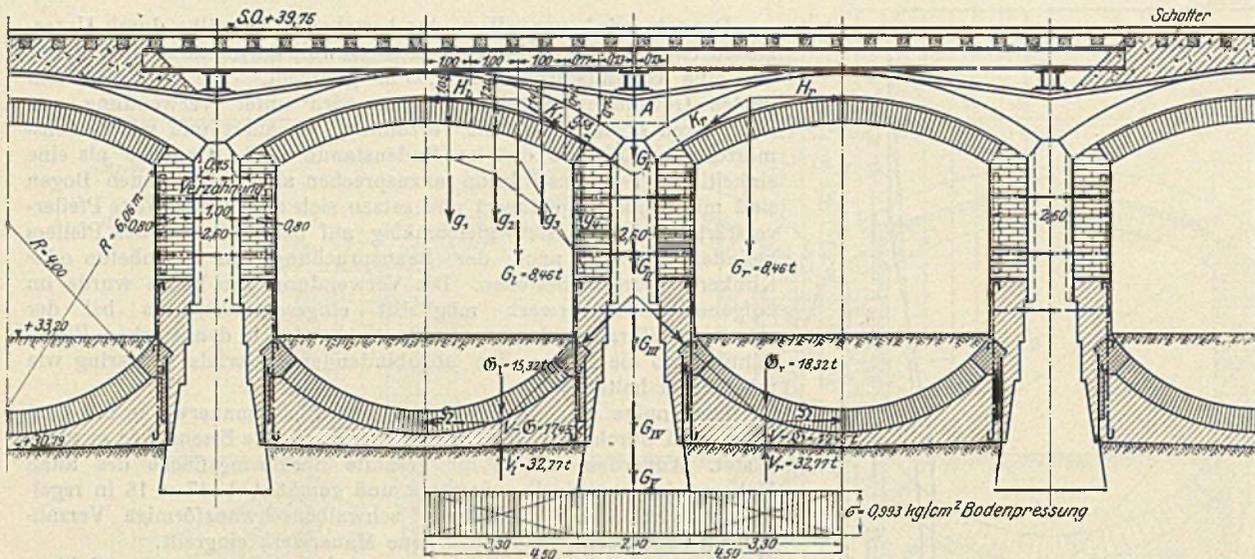


Abb. 23. Kräfteplan für das obere Gewölbe.

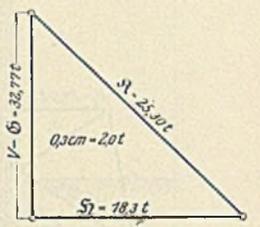


Abb. 23. Kräfteplan zur Ermittlung des erforderlichen Pressendruckes.

Abb. 23. Statische Untersuchung der Sohlengewölbe unter der Einwirkung der hydraulischen Presse. Ermittlung des erforderlichen Pressendruckes.

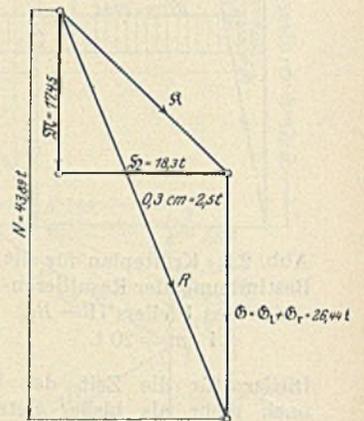
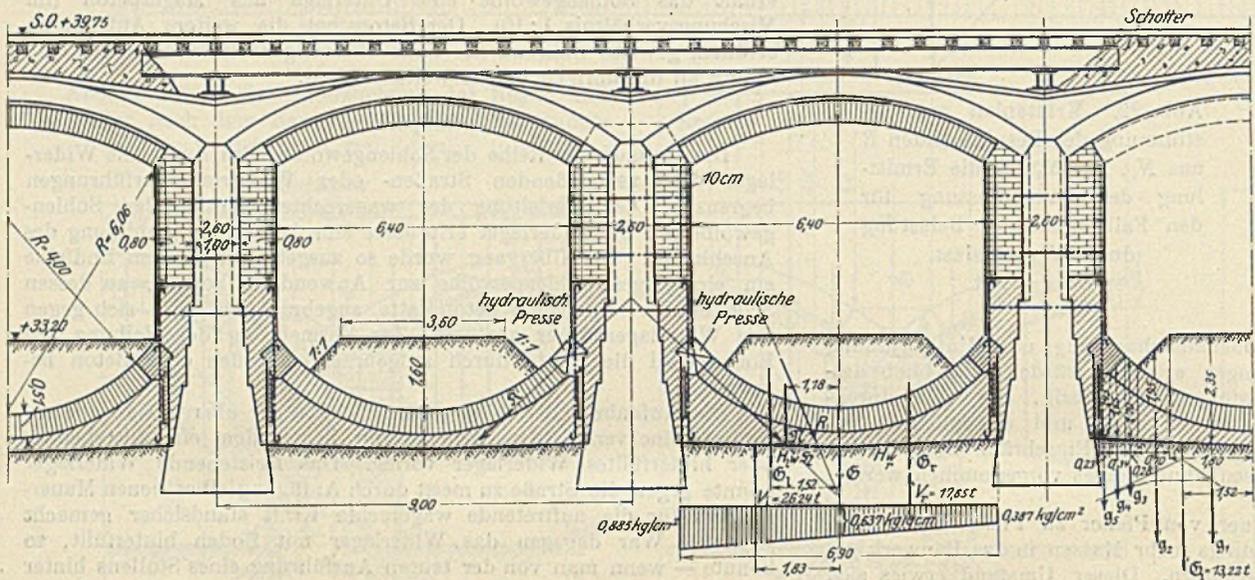


Abb. 23. Kräfteplan zur Ermittlung der Resultierenden am Sohlengewölbe.

Abb. 23. Statische Untersuchung der Sohlengewölbe für den Pressendruck $R = 25,3 t$.

Die Gewölbeabdeckung besteht aus zwei Lagen Tektolith auf Zementglattstrich. Die unterste Lage wird lose auf dem hergestellten Glattstrich mit etwa 10 cm überdeckten Stößen aufgelegt. Hierauf wird die zweite Lage mit versetzten Stößen aufgeklebt. Das Aufkleben der untersten Schicht unterbleibt, weil die Erfahrung gelehrt hat, daß die auf die Unterlage festgeklebten Isolierungen leichter mitreißen als die nicht aufgeklebten. Das ist auch erklärlich. Die zwischen den Körpern eingespannte Dichtung erfordert vom Standpunkte der Abdichtungstechnik kein Aufkleben. Durch das Aufkleben wird eine größere Sicherheit gegen Wasserdurchlässigkeit nicht erzielt sondern nur eine Gefahr zum Reißen der Dichtung geschaffen. Es ist beobachtet worden, daß beim Reißen der Unterlage und auch der über der Dichtung befindlichen Schutzschicht bei nicht aufgeklebter Dichtung eine Dehnung der Dichtungshaut stattfand. Es ist erkannt worden, daß die Dichtungshaut als vollständig selbständige Schicht zwischen der Unterlage und der Schutzschicht ruhen muß. Die Tektolithabdeckung wird durch eine 5 cm starke Monierschicht gegen Beschädigungen durch Eindrücken der Überschüttung geschützt. Die alte aus Ziegeln bestehende Schutzschicht der zwei Filzapplagen hatte sich nicht bewährt; die Ziegel waren im Laufe der Zeit in die Isolierschicht eingedrückt worden und hatten sie an den Auflagerstellen brüchig gemacht.

3. Bemerkung zur statischen Berechnung.

Die statische Berechnung der Gewölbe, Pfeiler und Sohlengewölbe des endgültigen Zustandes wurde durchgeführt für den Lastenzug E, dessen Belastungsgleichwert von 2,1 m Belastungshöhe für $\gamma = 1,8 t f. 1 m^3$ Überschüttung einer Belastung von 3,78 t/m^2 entspricht. Gegenüber der Belastungshöhe von 0,8 m bei der Erbauung der Stadtbahn bedeutet dieser Wert eine Erhöhung um 163 0/0; er gibt einen Begriff, in welchem gewaltigem Maße die Verkehrsbelastung der Berliner Stadtbahn in den Jahren 1882 bis heute angewachsen ist.

Für die spezifischen Gewichte der einzelnen Bauteile wurde zu grunde gelegt:

- Mauerwerk der oberen Gewölbe 1,8 t/m^3
- Ausfüllung und Schotter 1,8 "
- Pfeilmauerwerk im Mittel 1,8 "
- Beton und Klinker 1,9 "
- Sohlengewölbe mit Betonunterlage 1,9 "

Die Art der statischen Berechnung geht aus Abb. 22 hervor. Als Beispiel wird ein Bogen von 8 m früherer Spannweite in der Nähe des Bahnhofs Bellevue herausgegriffen. Die übrigen Gewölbespannweiten, hauptsächlich in den Maßen 8 bis 10 m, wurden in ähnlicher Weise untersucht.

Die statische Untersuchung der Gewölbe wurde nach der Stützlinientheorie für die Grenzfälle des unbelasteten und vollbelasteten Gewölbes vorgenommen. Da die verstärkten Pfeiler nach ihrer Instandsetzung und nach dem Einziehen der Sohlengewölbe keine große Höhe mehr aufweisen, dürfen sie als vollkommen starr angesehen werden. Die Gewölbestützlinie wird demgemäß, wie bei einem Dreigelenkbogen, sowohl in den Kämpferfugen als auch in der Scheitelfuge durch die Fugenmitte gehend angenommen.

Gemäß der nebenstehenden Zusammenstellung bleiben die Beanspruchungen in den Gewölbefugen innerhalb der zulässigen Grenze.

Die Pfeiler wurden in gleicher Weise für die in Betracht kommenden Belastungsfälle untersucht, d. h.

1. beide anschließenden Gewölbe unbelastet,
2. ein anschließendes Gewölbe voll belastet,
3. beide anschließenden Gewölbe voll belastet.

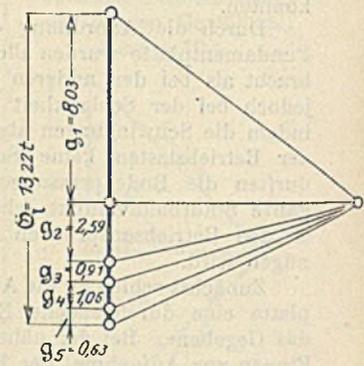


Abb. 23. Kräfteplan zur Ermittlung der Lage von G_1 . $0,6 cm = 2 t$.

Zusammenstellung der Beanspruchungen der Gewölbe, Pfeiler und Fundamentsohlen für die verschiedenen Belastungsfälle.

	Zulässige Beanspruchung	Belastungsfall I ohne Verkehrslast	Belastungsfall II Vollbelastung durch Verkehrslast	Belastungsfall III Einseitige Verkehrslast
Oberes Gewölbe (Ziegel in Kalkmörtel und Klinker in Zementmörtel)	10 kg/cm ²	im Scheitel $\sigma = 2,28$ kg/cm ² im Kämpfer $\sigma = 2,72$ kg/cm ²	im Scheitel $\sigma = 4,40$ kg/cm ² im Kämpfer $\sigma = 5,26$ kg/cm ²	im Scheitel $\sigma = 4,40$ kg/cm ² im Kämpfer $\sigma = 5,26$ kg/cm ²
Sohlgewölbe (Klinker in Zementmörtel)	35 kg/cm ²	im Scheitel $\sigma = 4,54$ kg/cm ² im Kämpfer $\sigma = 6,30$ kg/cm ²	im Scheitel $\sigma = 7,15$ kg/cm ² im Kämpfer $\sigma = 9,85$ kg/cm ²	} liegt zwischen den Werten aus Belastungsfall I und II
Pfeilerfuge A—B	$\sigma_e = 750$ kg/cm ² $\sigma_b = 30$ kg/cm ²	$\sigma = 2,24$ kg/cm ²	$\sigma = 3,54$ kg/cm ²	
Pfeilerfuge I—I	.	.	.	} $\sigma_{max} = 4,6$ kg/cm ² } $\sigma_{min} = 0,07$ kg/cm ² } Druck
Pfeilerfuge II—II	.	.	.	
Bodenpressung in der Fundamentsohle	Zugelassen 2,5 kg/cm ²	$\sigma = 1,14$ kg/cm ²	$\sigma = 1,52$ kg/cm ²	} $\sigma_{max} = 1,47$ kg/cm ² } $\sigma_{min} = 1,15$ kg/cm ²

Im ungünstigsten Belastungsfalle wirkt auf den Pfeiler der gesamte Unterschied der Bogenkräfte der als Dreigelenkbogen wirkend gedachten Gewölbe.

Die Beanspruchungen der Pfeilerfugen gehen ebenfalls aus der vorstehenden Zusammenstellung hervor. Wo die Zugspannungen größer als 2,0 kg/cm² auftraten, ist die Pfeilerverstärkung mittels Eisenbeton durchgeführt. Die Sohlengewölbe wurden in ähnlicher Weise wie die oberen Gewölbe nach der Stützlinientheorie untersucht. Die auftretenden Spannungen ergeben sich ebenfalls aus der vorgenannten Zusammenstellung. Als Belastung wirkt der unter den Sohlengewölben auftretende Bodendruck.

Bei der Bestimmung der Bodenpressungen, die in der Zusammenstellung des näheren aufgeführt sind, wurde von der Annahme ausgegangen, daß es sich um eine durchgehende Fundamentplatte handelt, auf die die gesamte Pfeilerlast wirkt und die den Bodendruck stetig verteilt. Diese Annahme ist berechtigt, weil die Sohlengewölbe gemäß dem früheren Hinweise durch künstliche Vorspannung auf den Boden angepreßt und in vorzüglicher Weise zu einem einheitlichen

Ganzen verbunden sind. Bei symmetrischer Belastung des Pfeilers genügt zur Ermittlung der Bodenpressung, die Belastung eines Pfeilers auf eine Fundamentplatte von 9 m Länge anzunehmen (Abb. 23). Bei unsymmetrischer Belastung ist es zweckmäßig, nicht nur die eines Pfeilers, sondern auch den Einfluß der Nachbarpfeiler mit zu berücksichtigen, d. h. die Fundamentplatte für drei Pfeiler in einer Länge von $3 \times 9 = 27$ m zu untersuchen.

IV. Ausführung der Instandsetzungsarbeiten.

1. Verwendete Baustoffe.

Angesichts der ständigen Erschütterungen durch den über die Stadtbahn Tag und Nacht hinweglaufenden Eisenbahnbetrieb mußte die Verwendung von Beton mit seiner langen Erhärtungszeit möglichst eingeschränkt werden. Er wurde daher nur verwendet für die Unterlagen der Sohlengewölbe oder an Stellen, wo er als Eisenbeton zur Aufnahme von Zugspannungen unerlässlich ist, aber auch hier nur an Stellen, wo die Verkehrslasten nicht unmittelbar einwirken. Zur Herstellung des Betons wird Rüdersdorfer Zement, der durch die

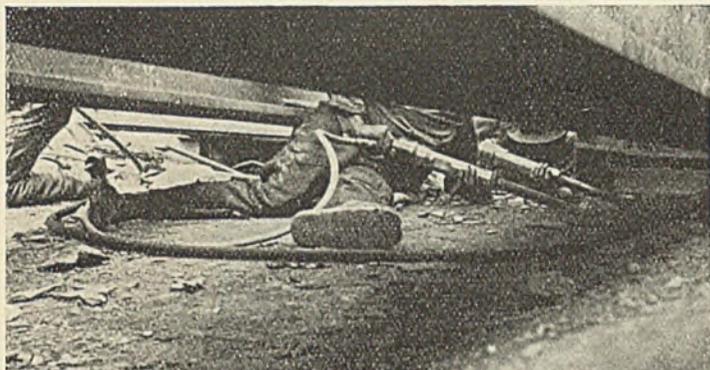


Abb. 24. Abstemmen mittels Preßluft der alten Dichtung der Stadtbahn­gewölbe unter den Betriebsgleisen.

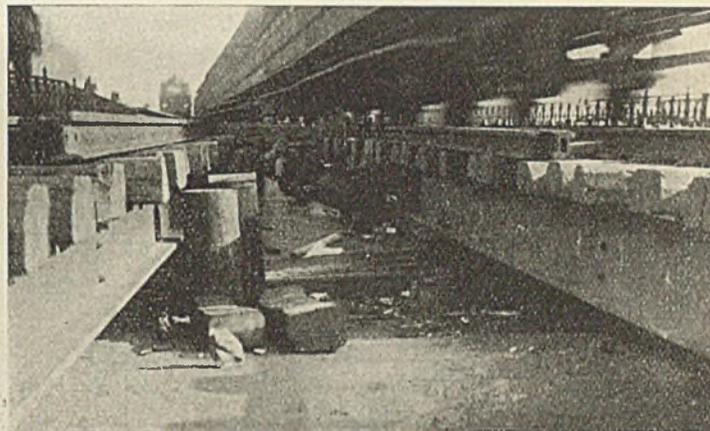


Abb. 26. Aufbringen der neuen Abdichtung.

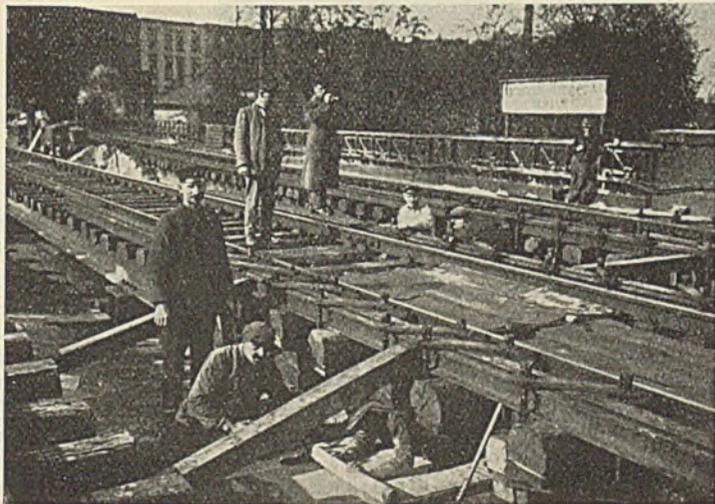


Abb. 25. Aufbringen der neuen Abdichtung.



Abb. 27. Aufbringen der Monierschutzschicht.

Eisenbahnverwaltung beschafft wird, benutzt, der Kies und Sand kommt aus Gruben in der Nähe von Niederfinow und Oderberg-Bralitz oder aus der Magdeburger Gegend. Für einzelne Bauteile, z. B. unter

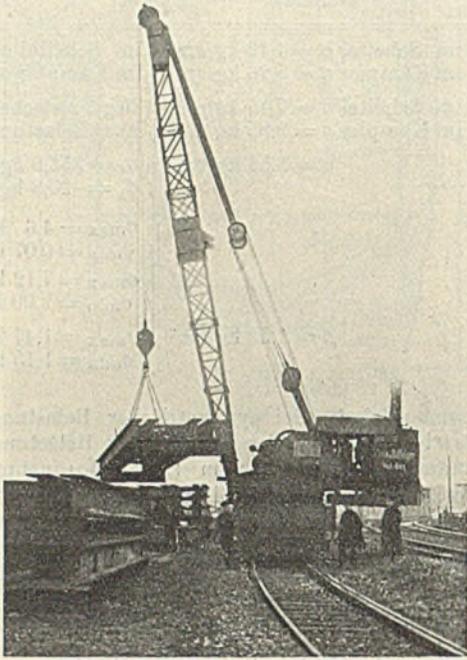


Abb. 28. Auslegerkran (Dampfbetrieb).

und neben den hydraulischen Pressen, oberes Gewölbe, wird hochwertiger Zement in Form des „Dyckerhoff Doppel“ zur Verwendung gebracht, um an Abbindezeit und damit an Bauzeit wesentlich zu

2. Bauvorgang.

Die grundsätzlich gleichen Arbeitsvorgänge (Abb. 16) an den einzelnen Baustellen Schlesischer Bahnhof bis Krautstraße, Lüneburger Straße, Bahnhof Bellevue, Bahnhof Tiergarten weichen infolge der Verschiedenheit der Bogenspannweiten, des Untergrundes, der Zugangsmöglichkeit usw. in Einzelheiten voneinander ab.

a) Eiserne Abfangeträger. An allen Baustellen besteht die Notwendigkeit, die Gewölbe zu ihrer einwandfreien Verstärkung und



Abb. 30. Auslegerkran (elektr. Antrieb).

zur Vornahme der neuen Abdichtung von dem darübergehenden Eisenbahnbetrieb zu entlasten. Dies geschieht mit Hilfe von eisernen Abfangkonstruktionen von im Mittel 9,0 m Länge, die jeweils in den



Abb. 29. Durchschlupfkran.

sparen. Nach den bisherigen Erfahrungen haben sich damit nur befriedigende Ergebnisse gezeigt. Das Hauptmauerwerk besteht aus Klinkern in Zementmörtel 1:3, die in vorzüglicher Beschaffenheit in umfangreichem Maße nötig wurden. Da für die Lieferung solcher guter Steine nur Plätze in Frage kamen, die weitab von Berlin lagen, andererseits die Reichsbahnverwaltung ein besonders hochwertiges Tonlager bei Brandenburg besitzt, so wurde auf Veranlassung der Reichsbahndirektion eine besondere Ziegelei durch die Firma Wasmuth bei Krahnepuhl in der Nähe des Tonlagers in Betrieb gesetzt, die aus diesem Ton jederzeit die erforderlichen Mengen gleich guter Steine von sehr hoher Druckfestigkeit (675 kg/cm^2) herstellt.

Zur Isolierung der Gewölbe werden, wie bereits angedeutet, zwei Lagen Tektolith verwendet, die sorgfältig überklebt werden.

nächtlichen Betriebspausen eingebaut werden und die sich auf behelfsmäßige Auflager über den Pfeilern abstützen. Die Konstruktion besteht aus vier Breitflanschträgern ID 50 im Gewicht von etwa 11 t einschließlich Querverband.

Die Behelfsbrücken müssen in der Weise verlegt werden, daß zwischen den Trägern und der alten Gewölbeoberkante noch ein Raum von 25 bis 30 cm verbleibt, um das Aufbringen der Abdichtung einwandfrei vornehmen zu können (Abb. 24, 25, 26 u. 27). Da der Einbau nur nachts in einer Betriebspause von etwa $3\frac{1}{2}$ Stunden ausgeführt werden kann, so war das Heranziehen eines besonderen Hilfskranes zum Einsetzen der Träger erforderlich. Da die Kranwagen der Eisenbahnverwaltung einen großen Zeitaufwand bedingen, sind die Baufirmen nacheinander dazu übergegangen, sich eigene

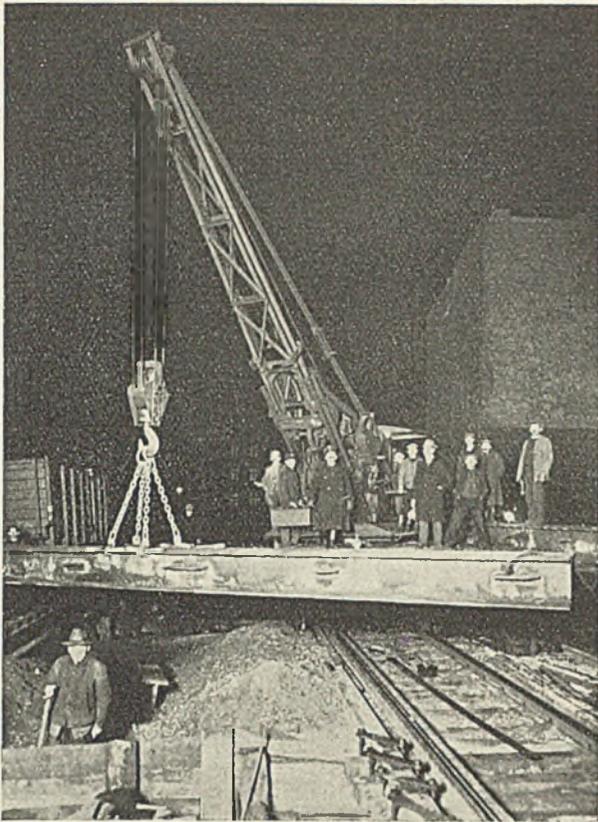


Abb. 31. Auslegerkran (elektr. Antrieb).

Der Einbau geschieht folgendermaßen: Nach Sperrung des Gleises wird der Oberbau aufgenommen, das Schotterbett entfernt und die darauf zusammengepreßte Gewölbeüberschüttung herausgehauen (Abb. 32). Die Beengtheit der Baugrube und die starke Anspannung der Arbeiter erfordert zwei Kolonnen von je 15 Mann, die sich alle 10 Minuten gegenseitig ablösen. Sind die Behelfsbrücken mit Hilfe des Kranes auf die Auflager gebracht und verschraubt, so wird der Oberbau wieder verlegt und der Eisenbahnbetrieb wieder darüber gelassen.

b) Lehrgerüste. Zum Wölben der Bogen werden Lehrgerüste

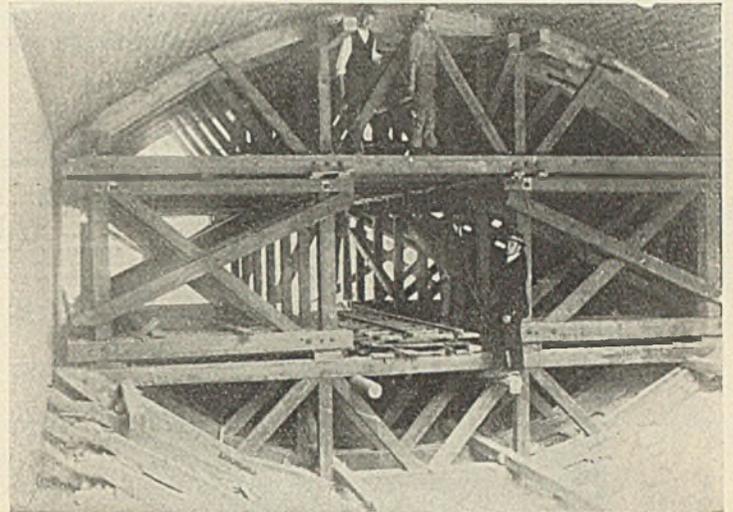


Abb. 33.

Krane anzuschaffen. Die Firma Grün & Billfinger arbeitet an ihren Baustellen mit einem schweren Dampfkran mit 15 m langem Ausleger (Abb. 28), die Firma Polensky & Zöllner benutzt einen nach Angabe

verwendet, die sich auf die Sohlengewölbe abstützen und so ausgebildet sind, daß sie einerseits leicht von einem Bogen in den anderen Bogen umgesetzt werden können, andererseits für den Querverkehr unter

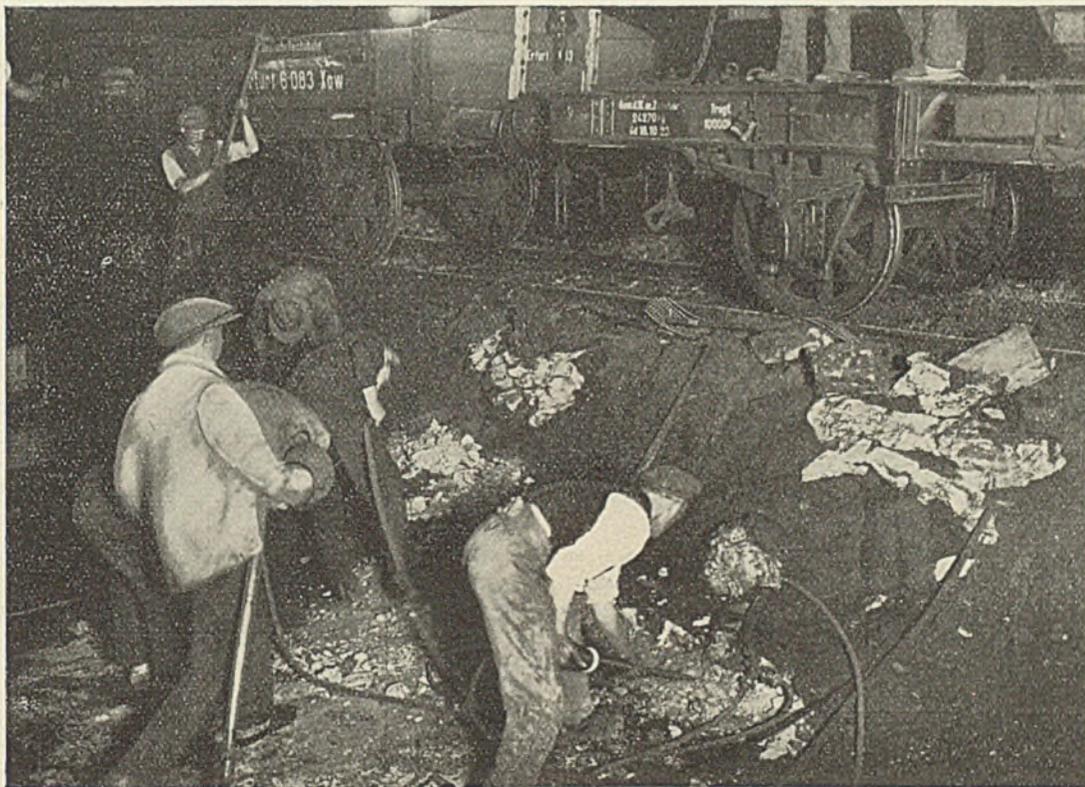


Abb. 32. Einbau der Gleisbrücken im Bogen 354. Abstemmen des früheren Mittelganges und Beseitigung der alten Gewölbeabdichtung mit Preßluftschlämmern. Auf der rechten Seite Teile der abgerissenen alten Dichtung. Im Hintergrunde Ende der Gleisbrücke im Bogen 353, Gleis 3, mit davorliegender bereits eingebauter Auflagerschwelle.

ihres Reg.-Baumeisters a. D. Werner-Ehrenfeucht gebauten Durchschlupfkran (Abb. 29), und die Firma Streubel wiederum verwendet einen elektrischen Kran mit Ausleger (Abb. 30 u. 31).

dem Gewölbe möglichst viel Durchfahrtraum lassen (Abb. 33). Bei der Ausbildung des Lehrgerüsts wurde darauf Bedacht genommen, auch wagerechte Kräfte aus den Bogenschüben der anschließenden

Öffnungen her aufnehmen zu können, um bei außerordentlichen Fällen eine genügende Sicherheit zu haben.

c) **Hydraulische Pressen.** Um die neuen Mauerwerkskörper der Sohlengewölbe vor ihrer Verbindung mit dem alten Mauerwerk auf den Boden fest anzudrücken, damit die alten und neuen Bauwerkteile als einheitliches Ganzes statisch zusammenwirken, werden hydraulische Pressen angewendet, mit denen man in der Lage ist, Kämpferdrücke von vorgeschriebener Größe zu erzeugen. Die Größe des auf einen Normalpfeiler von 2,6 m Stärke auszuübenden Pressendrucks ist gemäß der zeichnerischen Ermittlung zu 25,3 t für vorkommende 1 m breite Gewölbetreifen ermittelt worden. Je nach dem Abstände der Pressen ändert sich der von der Presse jeweilig auszuübende Pressendruck. Das Abpressen der Sohlengewölbe eines Bauabschnitts wird am Endpfeiler begonnen und hintereinander entsprechend dem Bauvorgang an jedem Pfeiler fortgesetzt.

Ermittlung des Pressendrucks für die einzelnen Pressen.

Presse	Belastungstiefe	Pressendruck für 1 m Steifen	Erforderlicher Pressendruck	
			in t	in at
1	1,85	25,3	$1,85 \cdot 25,3 = 46,8$	$\frac{46\ 800}{380} = 123$
2	1,85	25,3	$1,85 \cdot 25,3 = 46,8$	$\frac{46\ 800}{380} = 123$
3	1,80	25,3	$1,80 \cdot 25,3 = 45,5$	$\frac{45\ 500}{380} = 120$
4	1,80	25,3	$1,80 \cdot 25,3 = 45,5$	$\frac{45\ 500}{380} = 120$
5	1,80	25,3	$1,80 \cdot 25,3 = 45,5$	$\frac{45\ 500}{380} = 120$

Wirksame Kolbenfläche = 380 cm².

1 at Druck auf die wirksame Kolbenfläche entspricht einem Pressendruck von 380 kg.

Die Aussparungen für die Öffnungen sind berücksichtigt durch Reduzieren der Belastungstiefen entsprechend der Öffnungsweiten um 1/4 ihrer Größe.

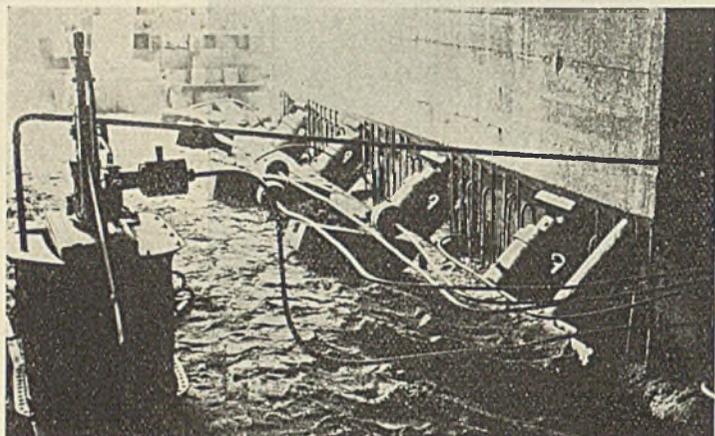


Abb. 34. Anordnung der Pressen.

Die Art der Pressen ergibt sich aus den beistehenden photographischen Bildern (Abb. 34 u. 35). Der Preßstempel kann vor Wegnahme des hydraulischen Druckes durch eine besondere Tragmutter festgestellt werden. Die an einem Pfeiler beiderseits angesetzten Pressen (16 Stück) werden durch besondere Rohrleitungen mit einem Ventilkasten verbunden, von dem aus die Steuerung, d. h. die Verteilung des Druckes, stattfindet (Abb. 36). Der Druck wird durch eine besondere Preßflüssigkeit in den Rohren weitergegeben, die aus mit Petroleum verdünntem Rollwagenöl besteht. Die Größe des auf die einzelnen Pressen auszuübenden, verschiedenen hydraulischen Druckes wird an einem Manometer angezeigt. Besondere Sorgfalt wird auf die Lagerung der einzelnen Pressen gelegt, um möglichst Überbeanspruchungen des Mauerwerks in den betreffenden Stellen hintanzuhalten.

Nachdem die sämtlichen Pressen an einem Pfeiler voll unter Druck gesetzt sind, wird der zwischen den Pressen befindliche Zwischenraum mit Beton ausgestampft. Nach genügender Erhärtung, die durch Ver-

wendung von hochwertigem Zement möglichst gekürzt wird, werden die Pressen durch Lösen der Tragmuttern entfernt.

Die Vorgänge im Bauwerk werden während der Einwirkung der hydraulischen Pressen sorgfältig beobachtet. Es konnten nirgends nachteilige Einwirkungen festgestellt werden, überall vollzog sich der sorgfältig vorbereitete Vorgang in der berechneten Weise.



Abb. 35. Pumpe und Ventilkasten für die hydraulischen Pressen.

Um eine Verschiebung des Sohlengewölbes durch einen einseitigen Pressendruck auszuschließen, wurden eingehende Untersuchungen über des Verhalten des Sohlengewölbes bei dem einseitigen Schub vorgenommen. Wenn auch keine Gefahr besteht, daß das Sohlengewölbe infolge der Reibungskräfte auf dem Boden in wagerechter Richtung verschoben wird, so wird doch zur Sicherheit das Sohlengewölbe vor dem Einsetzen der Pressen bis zur Geländehöhe mit Boden angefüllt.

Im übrigen wird die Betonunterlage unter dem Sohlengewölbe so ausgeführt, daß sich der Mauerwerkskörper des Sohlengewölbes gegen den benachbarten Pfeiler anlehnen kann, der seinerseits wieder durch das bereits nebenan ausgeführte Sohlengewölbe festgehalten wird.

d) **Ausschachtung.** Bei der Ausschachtung muß sehr vorsichtig vorgegangen werden. Die Resultierende der bei einseitiger Verkehrsbelastung angreifenden Kräfte geht in Fundamentsohle knapp an der

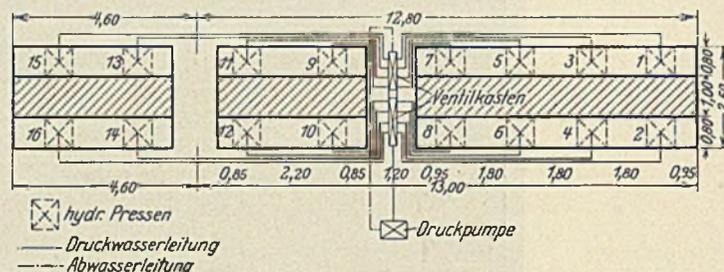


Abb. 36.

Kante des Pfeilers durch. Wenn auch die Pfeiler durch die Bogen in gewisser Weise eine Verspannung erfahren, so müssen die Pfeiler doch gegeneinander durch starke hölzerne Spriëßen abgesteift werden, damit die aus den Bogenschüben herrührenden, in der Richtung ständig wechselnden wagerechten Kräfte den benachbarten Pfeilerfundamenten zugeteilt werden können. Diese Spriëßen bleiben so lange an Ort und Stelle eingezogen, bis das Klinkermauerwerk des Sohlengewölbes eingebracht und damit eine natürliche Verspannung der Fundamente wieder eingetreten ist.

In der Lüneburger Straße und im Tiergarten erwies sich der Untergrund außerordentlich schlecht. In der Lüneburger Straße traf man auf Moor und im Tiergarten auf aufgefüllte Wasserlöcher. Da sich in der Lüneburger Straße die schlechten Untergrundverhältnisse auf eine ziemliche Länge erstrecken, mußte zu einer Grundwasserabsenkung geschritten werden, um den Moorboden unterhalb der Sohlengewölbe wegnehmen und den Beton unter den Sohlengewölben auf dem guten Baugrunde absetzen zu können. Bei der Menge des auszuschachtenden

Bodens und der starken Höhenförderung werden interessante mechanische Fördereinrichtungen seitens der bauausführenden Firma Polensky & Zöllner verwendet, die leicht von einem Bogen in den anderen verstellbar sind (Abb. 37, 38, 39 u. 40).

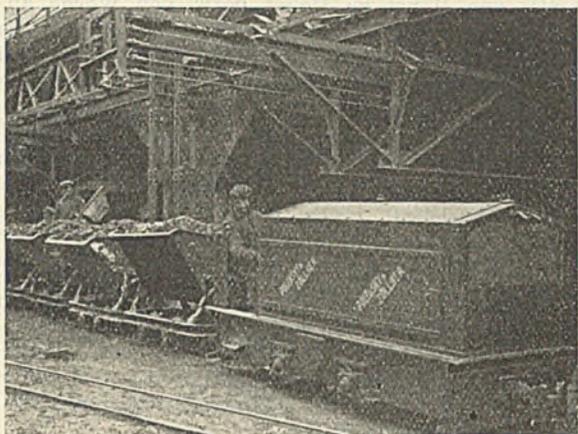


Abb. 37.

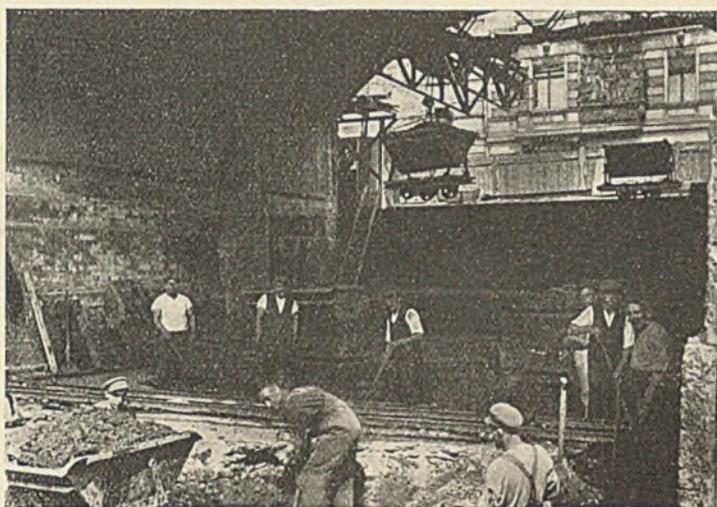


Abb. 38.

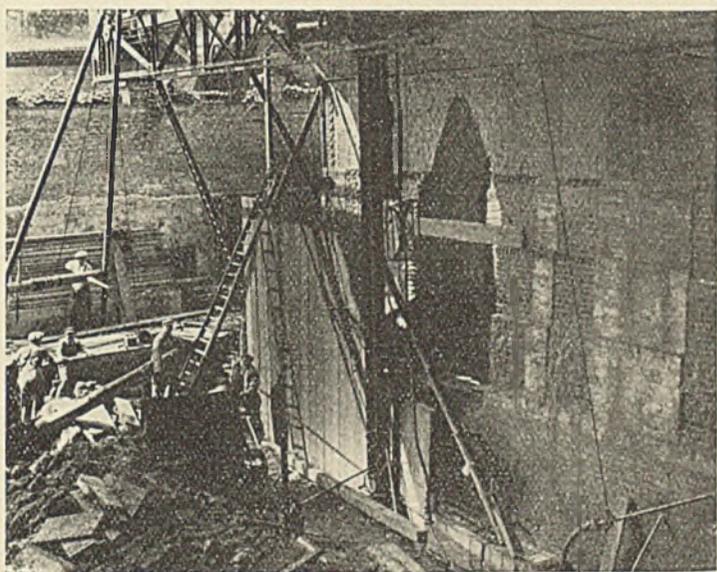


Abb. 39.

Im Tiergarten wurde die Betonunterlage der Soblengewölbe auf Betonpfähle abgestützt, die mit Hilfe eines besonderen Verfahrens der Firma Grün & Bilfinger bis auf den guten Grund in abgeteufte Bohrlöchern an Ort und Stelle hergestellt wurden. Dieses Verfahren

wurde erforderlich, weil bei der beschränkten Bauhöhe und der Baufälligkeit der Pfeiler an ein Rammen der Pfähle nicht zu denken war. Die durchschnittliche Länge der Behelfspfähle war 4,5 m (Abb. 41 u. 42).

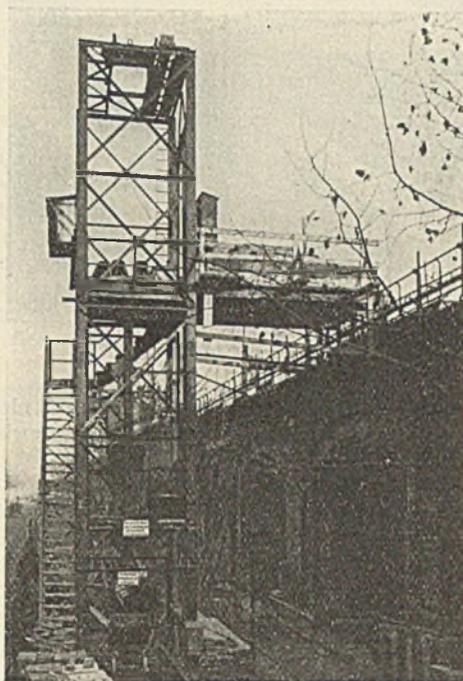


Abb. 40.

3. Bauprogramm.

In den Jahren 1922 und 1923 wurde die Instandsetzung von 143 Stadtbahnbogen in Angriff genommen, und zwar zunächst an den meistgefährdeten Stellen am Schlesischen Bahnhof zwischen Andreas- und Krautstraße, am Bahnhof Bellevue in der Lüneburger Straße und am Hippodrom zwischen Zoo und Tiergarten.

Die Arbeiten am Bahnhof Bellevue und an der Andreasstraße wurden im Monat Juli 1922 begonnen. Bellevue ist fertiggestellt,

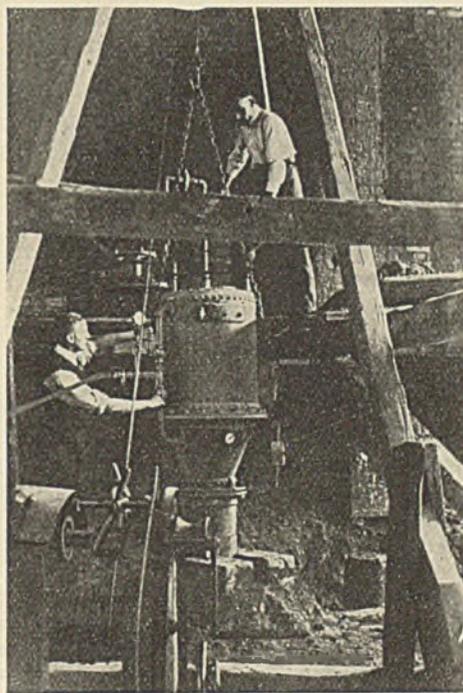


Abb. 41. Pfahlgründung zwischen Gartenufer und Bhf. Zoologischer Garten.

Andreasstraße und Tiergarten werden Ausgang dieses Sommers beendet sein; die Arbeiten an der Lüneburger Straße werden etwa noch ein Jahr in Anspruch nehmen.

4. Vertragsform.

Die zur Wiederherstellung der Stadtbahn erforderlichen Arbeiten werden wegen des über die Viadukte weg laufenden Eisenbahnbetriebes

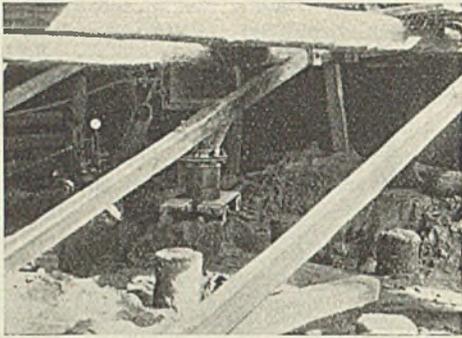


Abb. 42.

äußerst verwickelt, und ihr Umfang konnte zunächst nicht klar übersehen werden. Ebe der Boden aufgedeckt bzw. gewisse Bauwerk-

teile herausgenommen waren, konnte der eigentliche Schaden nicht festgestellt und eine Entscheidung über die zu treffenden Maßnahmen nicht getroffen werden.

Auf der anderen Seite änderten sich infolge der in den Jahren 1922 und 1923 stark einsetzenden Markentwertung die Löhne und Baustoffpreise von Monat zu Monat bzw. von Woche zu Woche. Ein festes Angebot konnte daher dem Unternehmer nicht zugemutet werden. Es wurde daher der gemilderte Akkordvertrag mit Preiserlegung als Vertragsform gewählt. Jeder Preis des Kostenanschlages wurde nach Lohn und Material klar getrennt. Überdies wurden die verschiedenen Materialien einer Position wieder aufgeteilt, und so wurde schließlich eine klare Übersicht über die Zusammensetzung jedes einzelnen Preises gewonnen. Die Unterteile des Einzelpreises veränderten sich verschieden, je nach der Steigerung des Lohnes oder des Baustoffes, z. B. Eisen, Kohle, Dachpappe usw.

Die Abrechnung gestaltete sich in der Inflationszeit durch diese starke Unterteilung wohl etwas umständlich. Sie hat aber den großen Vorteil, daß das Verhältnis zwischen dem Unternehmer und der Behörde sich reibungslos vollzog. Nachforderungen, langwierige Schiedsgerichte und sonstige Preisaueinandersetzungen schieden durch diese Vertragsform von selbst aus, so daß seine Anwendung für ähnliche Fälle nur empfohlen werden kann.

Der Umbau der Warnowbrücke bei Niex an der Strecke Rostock—Laage.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Reichsbahnrat Ehbrenberg, Schwerin.

1. Das alte Bauwerk aus dem Jahre 1886.

a) Bauart. Die in den Jahren 1882 bis 1886 von der Société belge de chemins de fer in Brüssel erbaute eingleisige Eisenbahnlinie von Neustrelitz nach Warnemünde überschreitet etwa 4,5 km vor Bahnhof Rostock den hier rd. 60 m breiten Warnowfluß mit der nach dem Dorfe Niex benannten Niexer Brücke. Eine Beschreibung dieses Bauwerks nebst Darstellungen einiger Einzelheiten findet sich in der Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingen. 1886, Nr. 46,¹⁾ auf die verwiesen

tragen. Die Gesamtkosten wurden gegenüber denjenigen der ursprünglich von der belgischen Gesellschaft in Aussicht genommenen Anlage wesentlich niedriger. Der Harkortsche Entwurf sah einen Gerberträger von rd. 67,5 m Stützweite vor. Der Kragträger ruht auf zwei schlanken, mit Druckluft gegründeten Mittelpfeilern, die mit Rücksicht auf einen etwaigen späteren Ausbau der Strecke zweigleisig ausgeführt wurden. Das feste Auflager war auf dem Südpfeiler angeordnet. Die Pfeiler wurden in einer solchen Entfernung voneinander

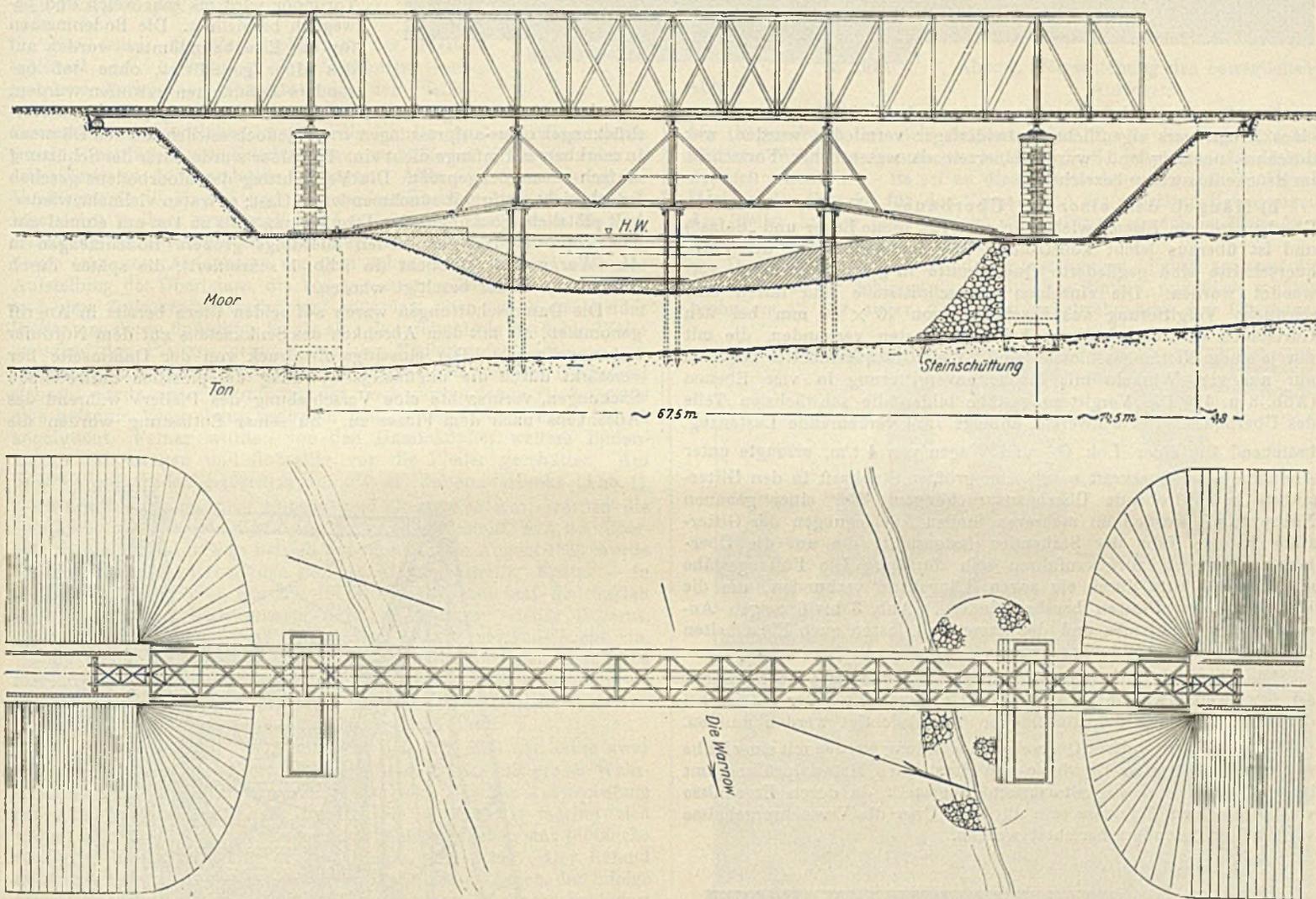


Abb. 1. Überbau aus dem Jahre 1886. — Alte Warnowbrücke bei Niex. Gesamtplan.

wird. Zur Vervollständigung des Gesamtbildes sollen hier jedoch die wichtigsten Angaben kurz wiederholt werden.

An der Übergangsstelle liegen S. O. auf +12,5, das flache Ufergelände auf etwa +1,75 und der tragfähige Baugrund — sandiger Ton — auf etwa -9,1 auf dem Nord- bzw. -12,0 m auf dem Südufer. Der Ton ist überlagert von einer rd. 9 bzw. 12 m starken Torfschicht. Ein Vorentwurf der belgischen Eisenbahngesellschaft sah einen eisernen Überbau mit einer einzigen Öffnung von 66 m Lichtweite mit zwei Endwiderlagern vor, deren Abmessungen bei rd. 25 m Gesamthöhe sehr beträchtlich angenommen waren. Die Gesellschaft Harkort in Duisburg, die zur Preisabgabe aufgefordert war, legte den in Abb. 1 dargestellten Gegenvorschlag vor. Auf Grund dieses von den Oberingenieuren Seifert und Backhaus dieser Firma aufgestellten Entwurfs wurde ihr die Ausführung des Bauwerks einschl. der Pfeiler über-

vorgesehen, daß zwischen ihnen ein ausreichender Durchflußquerschnitt verblieb. Die beiderseitigen Eisenbahndämme wurden so weit zurückgesetzt, daß der Erddruck aus der Dammschüttung nicht mehr wesentlich auf sie einwirken sollte. Die Kragarme sind rd. 14,5 m lang. An diese sind die rd. 4,80 m weit gestützten Schleppträger gelenkig angeschlossen. Auf den Dammkronen sind die Schleppträger beweglich gelagert auf besonders konstruierten sogenannten „Sofas“ nach Abb. 2,²⁾ die zugleich den Kiesbettabschluß bildeten und deren unterer kastenförmiger Teil mit Beton gefüllt war. Die „Sofas“ wurden entsprechend den eingetretenen Dammsackungen hochgestopft. Zum Ausgleich geringer Sackungen dienten Schraubenspindeln, die über den oberen Sattelstücken der Schleppträgerlager eingeschaltet waren.

¹⁾ Vergl. auch Wochenschrift für Bankunde 1886, Nr. 43; Deutsche Bauztg. 1886, S. 277.

²⁾ Die in der Abhandlung wiedergegebenen Zeichnungen und Bilder wurden von den Firmen J. Gollnow & Sohn-Stettin und Paul Thomas-Rostock dankenswerterweise zur Verfügung gestellt.

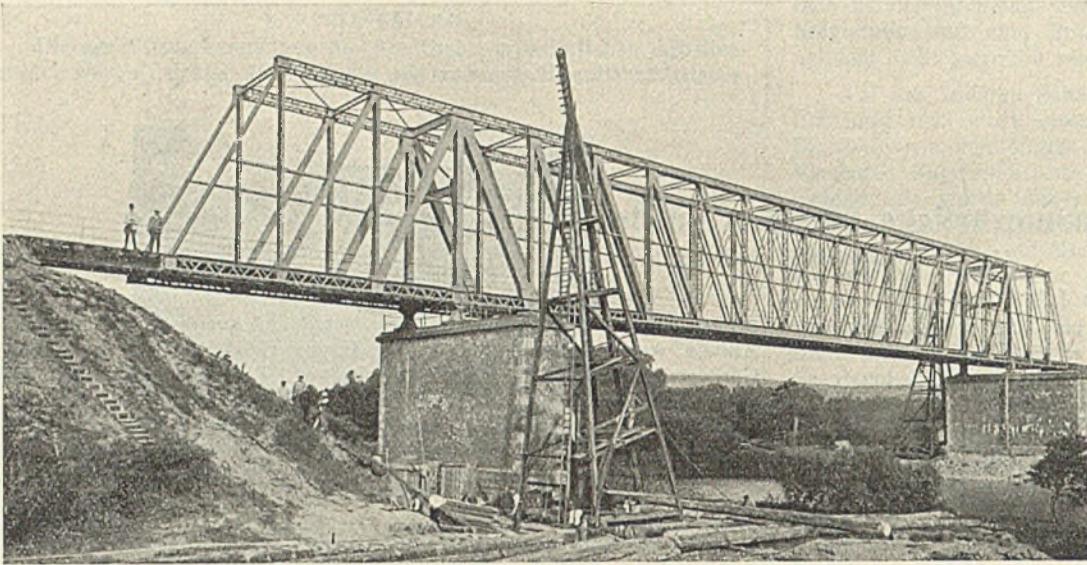


Abb. 3.

Der Grundgedanke dieser Ausführung, durch die bei Anwendung eines Kragträgers eigentliche Endwiderlager vermieden wurden, war durchaus neuartig und wurde seinerzeit als wesentlicher Fortschritt im Brückenbauwesen bezeichnet.

b) Mängel des eisernen Überbaues. Der schweißeiserne Überbau hat ein Eisengewicht von rd. 210 t (ohne Lager und „Sofas“) und ist überaus leicht konstruiert. Bei der Ausbildung der Stabquerschnitte sind gegliederte Querschnitte in großem Umfange verwendet worden. Die einzelnen Querschnittsteile sind durch eine schwache Vergitterung aus Flacheisen von 70×10 mm bei den Gurtstäben und 60×10 mm bei den Pfosten verbunden, die mit nur je einem Niet angeschlossen sind. Viele Gurtquerschnitte bestehen nur aus vier Winkeln mit Flacheisenvergitterung in vier Ebenen (Abb. 3 u. 4). Die Vergitterungsstäbe bilden die schwächsten Teile des Überbaues. Der schwerste, anfangs 1924 verkehrende Lastenzug, bestehend aus einer Lok. $G\frac{2}{7}$ und Wagen von 4 t/m, erzeugte unter Annahme einer Querkraft = 2% der größten Stabkraft in den Gitterstäben gefährdende Überbeanspruchungen. Bei einer genauen Nachprüfung wurden an mehreren Stellen Ausbiegungen der Gitterstäbe in der Nähe der Stabenden festgestellt, die auf die Überbeanspruchungen zurückzuführen sein dürften. Die Füllungsstäbe sind in Stabmitte durch ein sogen. Längsband verbunden, um die Knicklänge der Pfosten herabzumindern. Abb. 3 bis 6 zeigen Ansichten des Überbaues und der Lager und lassen auch Einzelheiten der Querschnittausbildung erkennen.

Die Firma Harkort teilte auf Anfrage mit, daß nicht mehr bekannt sei, inwieweit etwa die konstruktiven Gepflogenheiten der Belgier bei der Durcharbeitung der Einzelheiten berücksichtigt werden mußten.

Wegen der besonderen Querschnittausbildung werden mit einer Reihe von Stäben des alten Überbaues im Staatlichen Materialprüfungsamt in Berlin-Dahlem Festigkeitsversuche angestellt, da deren Ergebnisse von allgemeinem Interesse sein dürften. Über die Versuchsergebnisse wird später besonders berichtet werden.

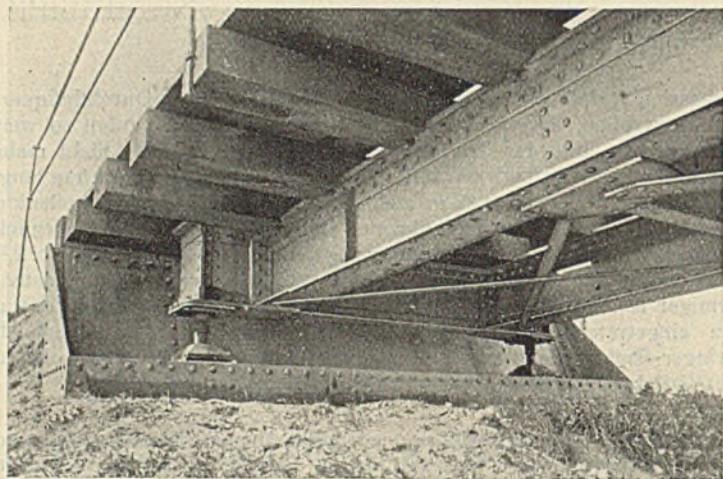


Abb. 2.

c) Bauausführung und Mängel der Pfeiler. Das Bauwerk blieb während seiner Herstellung nicht von schweren Prüfungen verschont, die seine Standfähigkeit vorübergehend als zweifelhaft erscheinen ließen. Über den Bau und die während des Baues aufgetretenen Mängel sowie die zu deren Behebung getroffenen Maßnahmen seien im folgenden die wesentlichsten Angaben kurz wiederzugeben.

Die Bodenuntersuchungen, die sich auf Abtrieb einzelner Bohrlöcher in der Nähe der Standorte der geplanten Pfeiler beschränkten, stellten den tragfähigen Ton in etwa derselben Tiefe fest, wie die Bohrungen des Jahres 1924, auf die später noch näher eingegangen wird, bestätigten. Das Torfmoor wird als sehr weich und beweglich bezeichnet. Die Bodenmassen für die Eisenbahndämme wurden auf das Moor geschüttet, ohne daß besondere Maßnahmen getroffen wurden,

um dem Moor Gelegenheit zum Ausweichen zu geben. Bodenverdrückungen oder -aufpressungen traten jedoch seitlich von den Dämmen in merkbarem Umfange nicht ein. Das Moor wurde unter der Schüttung einfach zusammengepreßt. Die Verdichtung des Moorbodens geschah jedoch nicht stetig mit zunehmender Auflast; es traten vielmehr wiederholt plötzliche Sackungen der Dämme um 1 bis zu 4 m auf einmal ein. Vor Kopf der Dämme wurden allerdings größere Bodenmengen in das Warnowbett gedrückt (in Abb. 1 schraffiert), die später durch Baggerung wieder beseitigt wurden.

Die Dammschüttungen waren auf beiden Ufern bereits in Angriff genommen, als mit dem Absenken des Senkkastens auf dem Nordufer begonnen wurde. Der einseitige Erddruck von der Dammseite her verstärkt durch die ungünstige Wirkung der plötzlich auftretenden Sackungen, verursachte eine Verschiebung des Pfeilers während des Absenkens nach dem Flusse zu. Zu seiner Entlastung wurden die

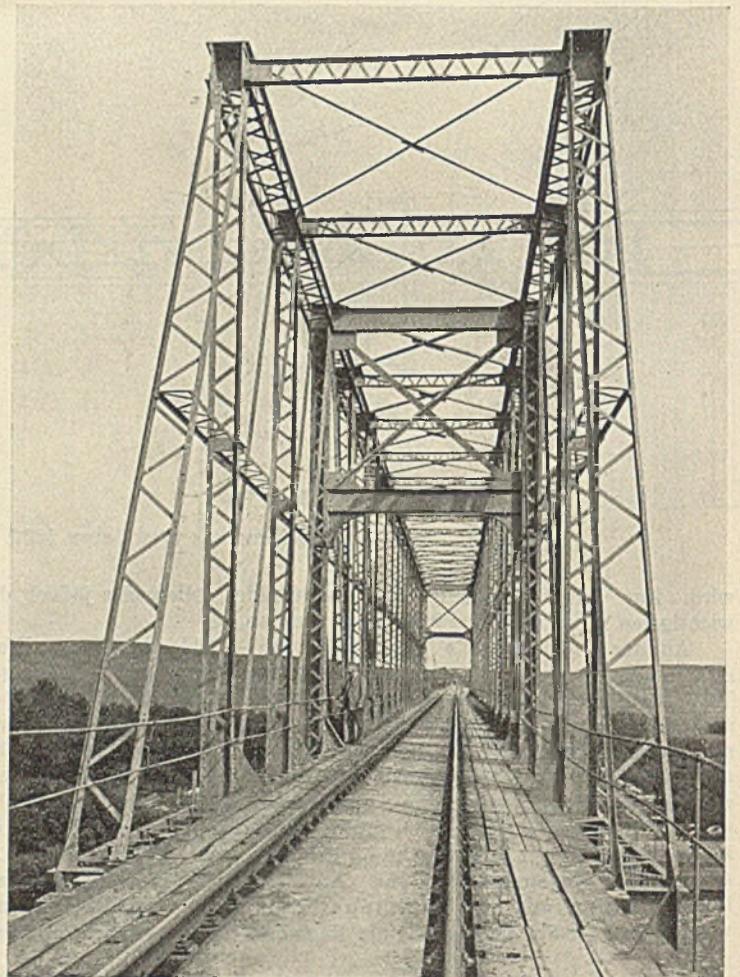


Abb. 4.

Schüttungen in der Nähe des Dammkopfes eingestellt, und letzterer wurde teilweise wieder abgetragen, und letzterer wurde teilweise wieder abgetragen. Auf dem Südufer lagen die Verhältnisse ähnlich. Auch hier wurde der Pfeiler durch Abtragen des Dammkopfes entlastet, wodurch jedoch die Verschiebung auch dieses Pfeilers nach dem Flusse zu nicht vermieden werden konnte. Die Maße der Abweichungen hielten sich bei diesem Pfeiler etwa in den Grenzen derer des Nordpfeilers. Da außerdem die Pfeiler zweigleisig, die Dämme jedoch nur eingeleisig hergestellt wurden, richtete sich der Hauptdruck aus der Dammschüttung nur gegen die eine Pfeilerhälfte, wodurch der Südpfeiler auch eine Verdrehung um eine senkrechte Achse erfuhr. Es wurde festgestellt, daß nach Niederbringung des Pfeilers dessen westliche Kante um rd. 35 cm nach Süden und dessen östliche Kante um rd. 31 cm nach Norden gegenüber Pfeilermitte verdreht waren. Die Abweichungen infolge der Verdrehung wurden in dem aufgehenden Pfeilermauerwerk ausgeglichen.

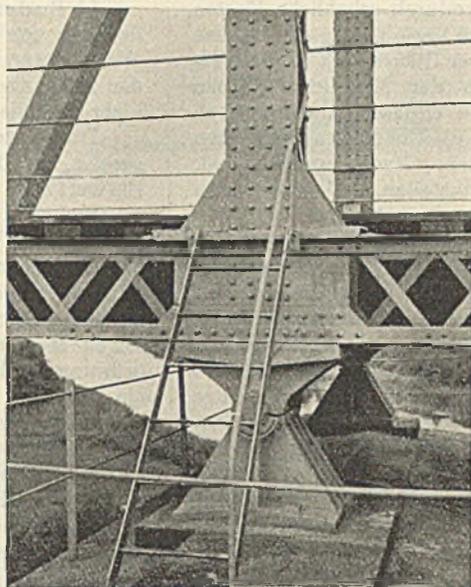


Abb. 5.

Die durch die Verschiebungen der Pfeiler während der Absenkung der Senkkasten entstandene Verkürzung des Abstandes der Pfeilermitten voneinander betrug etwa 0,5 m. Um diesen Unterschied auszugleichen, wurden die 1×1 m großen Auflagersteine durch Hinzufügen von Quaderstücken von 35 cm Breite (in Abb. 7 schraffiert) an der Landseite verlängert. Abb. 5 u. 6, auf denen im Vordergrund die für den geplanten zweiten Überbau vorgesehenen Auflagersteine in ihrer ursprünglichen Lage sichtbar sind, lassen die Verschiebung der Pfeilermitten gegenüber dem Auflagerpunkte des Überbaues erkennen (Aufnahmen aus dem Jahre 1924). Als bald nach der Aufstellung des Überbaues, die von gerammten Gerüsten aus stattfand und ohne Zwischenfall verlief, trat außerdem noch ein Kippen beider Pfeiler um deren flußseitige Kante ein; dadurch wurde die lichte Weite zwischen den Pfeilern, gemessen an den Pfeilerköpfen, noch um zusammen 35 cm verringert. Um die Pfeiler gegen weiteres Kippen zu sichern, wurde unter Benutzung der noch vorhandenen Gerüstpfähle eine hölzerne Verstrebung zwischen den beiden Pfeilern nach Abb. 1 angebracht. Ferner wurden von den Dammköpfen weitere Bodenmengen abgetragen und flußseitig vor die Pfeiler geschüttet. Am Nordpfeiler wurden außerdem rd. 250 m³ Felsen versenkt (Abb. 1).

Nachdem ein gewisser Ruhezustand eingetreten war, wurden die Dammköpfe in ihrem endgültigen Zustande hergestellt, und der Überbau wurde im Mai 1886 in Betrieb genommen. Im August 1886 wurde die Verstrebung zwischen den Pfeilern wieder entfernt. Später — in den Jahren 1887/88 — wurden die in das Warnowbett gedrückten und geschütteten Bodenmassen durch Baggerung wieder entfernt. Eine weitere Bewegung der Pfeiler trat danach vorläufig nicht ein.

Es bleibt dahingestellt, ob die Bewegung der Pfeiler durch die hier angewandten Maßnahmen verhindert wurde oder etwa dadurch, daß sich inzwischen besonders durch den wirksam gewordenen passiven Erddruck der Gleichgewichtszustand eingestellt hatte.

Die Kippbewegung der Pfeiler hat sich im Laufe der Jahre zwar nur langsam, aber stetig fortgesetzt. Hierauf dürfte mit großer Wahrscheinlichkeit ein Vorfall zurückzuführen sein, der zur Auswechslung der alten beweglichen Lager führte. Im Jahre 1900 machte sich während der Überfahrt eines Zuges unter lautem Krachen eine plötzliche ruckartige Längsbewegung des Überbaues bemerkbar. Der Befund der beweglichen Auflager auf dem Nordpfeiler ließ erkennen, daß infolge von Klemmung der Rollen die freie Bewegung des Überbaues behindert gewesen war. An dem einen beweglichen Auflager war der obere Lagerkörper auf den Rollen, und an dem anderen waren die Rollen auf ihrer Grundplatte gegliedert, so daß die äußersten Rollen des letzteren Lagers kaum noch auf den Lagergrundplatten ruhten (Abb. 7). Bei den Landlaufagern des nördlichen Schleppträgers waren die Rollen dieser Lager seitlich verschoben und mit dem einen Rollenbund auf die Lagergrundplatte heraufgesprungen. Eine bei dieser Gelegenheit vorgenommene Nachmessung ergab, daß sich die Pfeilerkronen seit 1886 zusammen um weitere rd. 5 cm einander genähert hatten. Die alten beweglichen Auflager des Überbaues wurden alsdann ersetzt durch je eine Stelze von 600 mm Durchm., auf die beiderseits 40 mm starke Platten mit Zähnen aufgeschraubt waren. Letztere griffen in entsprechende Zahnkränze an den Lageroberteilen und Grundplatten ein (Abb. 6). Diese Stelzen haben sich gut bewährt.

Seit Einbau der Stelzen (1901) bis zum Jahre 1924 hatten sich die Pfeiler wieder um zusammen rd. 5 cm einander genähert, so daß damit die durch die Kippbewegung der Pfeiler hervorgerufene Verkürzung des Abstandes der beiden Pfeilerkronen das Maß von 45 cm erreichte. Wie sich die Bewegung der Pfeiler über die letzte Zeitspanne (1901

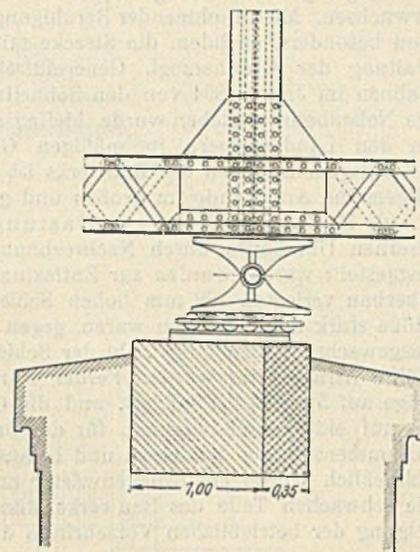


Abb. 7. Verschiebung des beweglichen Auflagers.

bis 1924) verteilt, ist nicht bekannt. Abb. 6, die im Juli 1924 bei mittlerer Wärme aufgenommen ist, läßt die Schiefstellung der Stelzen deutlich erkennen. — Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die Firma Harkort die Ursache für das Kippen und die sonstigen Bewegungen der Pfeiler in der nach Ansicht dieser Firma unsachgemäßen Ausführung der Erdarbeiten erblickte.

Die Pfeilerbewegungen und Dammsackungen blieben auch auf die Landauflager der Schleppträger nicht ohne Einfluß, und diese mußten besonders in der ersten Zeit nach Inbetriebnahme des Überbaues



Abb. 6.

häufig geregelt und hochgestopft werden, wodurch erhebliche Kosten erwachsen. Mit zunehmender Beruhigung und Verfestigung der Dämme und besonders, nachdem die Strecke mit ihrer Übernahme in die Verwaltung der Großherzogl. Generaldirektion der Mecklenburgischen Bahnen im Jahre 1894 von den Schnellzügen entlastet und nur noch als Nebenbahn betrieben wurde, hielten sich die Unterhaltungsarbeiten an den Landauflagern in mäßigen Grenzen. Nach nunmehr rd. 40-jährigem Bestehen des Bauwerks ist festzustellen, daß sich dessen allgemeine Anordnung im großen und ganzen bewährt hat.

d) Maßnahmen zur Entlastung. Nachdem die Mängel des eisernen Überbaues durch Nachrechnung und genaue Untersuchung festgestellt waren, wurden zur Entlastung des Überbaues die auf dem Überbau verlegten 128 mm hohen Schienen von 7,5 m Länge, deren Stöße stark ausgeschlagen waren, gegen 18-m-Schienen der Form 15c ausgewechselt, womit die Zahl der Schienenstöße auf weniger als die Hälfte herabgesetzt wurde. Ferner wurde die Geschwindigkeit aller Züge auf 5 km/Std. ermäßigt, und die Güterzüge wurden umgeleitet bis auf ein Nabgüterzugpaar, für das besondere Vorschriften für die Zusammenstellung der leeren und beladenen Wagen erlassen wurden. Schließlich wurde ein Brückenwärter an der Brücke aufgestellt, der die schwachen Teile des Bauwerks ständig beobachtete und die Befolgung der betrieblichen Vorschriften überwachte.

2. Grundlagen für den Neubau.

a) Grundlagen der Ausschreibung. Wenn auch mit diesen Maßnahmen zunächst eine Entlastung erzielt war, so war doch eine schleunige und gründliche Abhilfe dringend geboten. Eine Verstärkung des Überbaues konnte nicht mehr in Frage kommen. Es wurde daher Anfang 1924 ein umfassender Umbau des ganzen Bauwerks beschlossen.

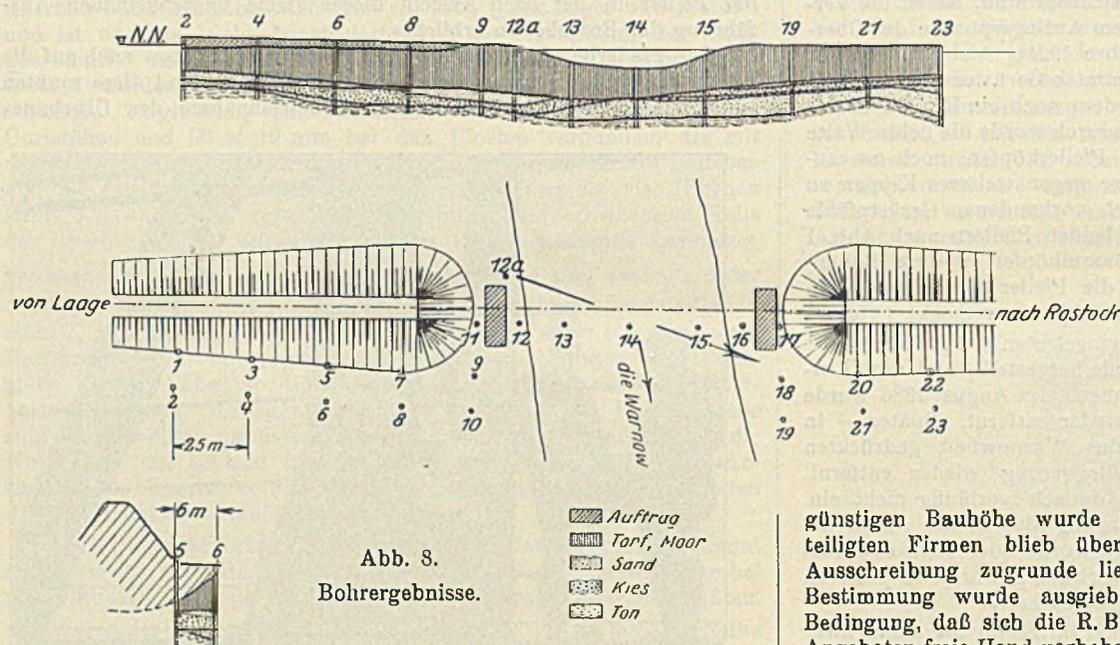


Abb. 8.
Bohrergebnisse.

Da die Pfeiler des alten Bauwerks bereits zweigleisig, die Dämme dagegen eingleisig ausgeführt waren, lag es nahe, die bestehenden Pfeiler beizubehalten und zu verstärken, den neuen Überbau unter grundsätzlicher Beibehaltung der Bauart als Gerberträger mit kurzen, auf den Dammkronen gelagerten Schlepptägern neben dem bestehenden Überbau auf den freien Pfeilerhälften zu errichten und das Streckengleis nach Verbreiterung der Dämme auf den neuen Überbau zu verschwenken. Die Verstärkung der Pfeiler war dabei durch an den Langseiten der Pfeiler angebrachte Schrägpfähle in Aussicht genommen, die durch Bohren hätten abgetrieben werden müssen. Bestimmend für die Gurtform des neuen Überbaues war der Umstand, daß die lichte Durchfahrhöhe für die Schifffahrt nunmehr nur noch 4,20 m über dem höchsten schiffbaren H.W. (gegenüber rd. 9,00 m bei dem alten Überbau) auf etwa 48 m Breite betragen sollte. Damit ergab sich ein System mit versenkter Fahrbahn und über den Pfeilern heruntergezogenen Auflagerpunkten unter Abbruch der oberen Pfeilerteile bis etwa in Höhe des H.W., um einen möglichst tief liegenden Angriffspunkt für die wagerechten Kräfte zu erhalten. Schließlich mußte mit Rücksicht auf die gespannte wirtschaftliche Lage Wert darauf gelegt werden, den Umbau mit möglichst geringem Kostenaufwand auszuführen. Ein bei der R. B. D. Schwerin vorliegender Entwurf, der obigen Gesichtspunkten zwar in der Hauptsache entsprach, jedoch noch einer Durcharbeitung bedurfte, wurde der Ausschreibung zugrunde gelegt, für die nur eine begrenzte Zahl von Firmen aufgefördert wurde.

b) Boden- und Wasseruntersuchung. Von besonderer Bedeutung für die späteren Entscheidungen waren die Boden- und Wasseruntersuchungen, deren Ergebnisse erst nach Ausschreibung der Neubauten endgültig vorlagen und daher in den Angeboten noch nicht in vollem Umfange berücksichtigt werden konnten.

Die Bohrlöcher waren längs der Dämme an deren Ostseite angesetzt, an der nach dem der Ausschreibung zugrunde liegenden Entwurf die Dammverbreiterungen geplant waren. Die Bohrungen ergaben sehr lehrreiche Aufschlüsse über Größe und Ausfüllung des spätglacialen Warnowtales. Abb. 8 zeigt im Grundriß die Anordnung der Bohrlöcher, im Aufriß die erbohrten Bodenschichten. Den tragfähigen Baugrund bildet grauer Ton, der von im Mittel 4 bis 5 m starken Schichten grauer Kiese und Sande überlagert ist. Darauf folgen Moorsande, Moor und Torf bis in Geländehöhe. Durch Anordnung der Parallelprofile in rd. 6 m Abstand voneinander ergab sich ein Einblick in die Veränderungen der Bodenschichten infolge der Dammschüttungen. Wie der Querschnitt z. B. bei den Bohrlöchern 5 und 6 erkennen läßt (Abb. 8), sind die Moor- und Torfschichten am Dammfuß durch die Belastung mit dem Dammboden von vorher rd. 12 m Stärke auf rd. 1,5 m Stärke zusammengedrückt worden. Eine noch stärkere Verdichtung darf hiernach unter der Dammitte angenommen werden. Wenn sich auch die Verdichtung der Torfschichten seinerzeit ohne merkbares seitliches Ausweichen des Torfes vollzog, so blieb das im voraus nicht bestimmbar Verhalten der Bodenschichten im Falle einer Dammverbreiterung immerhin ein unsicherer Faktor für die Beurteilung der Standsicherheit der Pfeiler wie auch der Kosten.

Für die chemische Untersuchung des Wassers wurden Proben aus der Warnow, aus einigen Bohrlöchern und aus einem offenen Torfloch am Südufer in etwa 60 m Entfernung vom Dammfuß (Torfgewinnung des Gutes Niex) entnommen. Während das Warnowwasser für Betonzwecke geeignet befunden wurde, zeigten die übrigen Proben neben einem erheblichen Gehalt an Schwefelsäure und Huminverbindungen reichliche Mengen freier, zum Teil sogar aggressiver Kohlensäure, besaßen also Beton und Mörtel angreifende Eigenschaften.

3. Das neue Bauwerk.

a) Ergebnisse der Ausschreibung. Die Pfeilerverstärkungen und der eiserne Überbau wurden getrennt voneinander ausgeschrieben, doch etwa zu gleichem Zeitpunkte. Mit Rücksicht auf die Dringlichkeit der Arbeiten war vorgeschrieben, daß die bauausführenden Firmen die Entwürfe aufzustellen hatten. Die Anhebung der S. O. um bis zu 1,20 m zur Erzielung einer günstigen Bauhöhe wurde freigestellt. Dem am Wettbewerb beteiligten Firmen blieb überlassen, andere Vorschläge als die der Ausschreibung zugrunde liegenden zu unterbreiten. Von dieser Bestimmung wurde ausgiebig Gebrauch gemacht; auch mag die Bedingung, daß sich die R. B. D. Schwerin für die Auswahl unter den Angeboten freie Hand vorbehalten hatte, befruchtend auf die Entwurfsfähigkeit gewirkt haben.

Die mit den Angeboten eingereichten Vorschläge lehnten sich an die von der R. B. D. Schwerin zugrunde gelegte Bauart für den eisernen Überbau, von unwesentlichen Abweichungen bezüglich der Art der Ausfachung abgesehen, grundsätzlich an, da ja auch die örtlichen Verhältnisse und die gegebenen Ordinaten sowohl für die Wahl des Systems wie auch für die Formgebung wenig Spielraum ließen. Dagegen wurden für die Art der Pfeilerverstärkung eine Reihe sehr beachtenswerter Lösungen vorgeschlagen, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Nach eingehender Prüfung erschienen die Vorschläge, die von den Firmen J. Gollnow & Sohn-Stettin für den eisernen Überbau und Paul Thomas-Rostock für die Pfeilerverstärkung angeboten wurden, als die zweckmäßigsten und wirtschaftlichsten, und diese wurden daher zur Ausführung bestimmt.

Dem Vorschlage dieser Firmen, die sich zur gemeinsamen Entwurfsbearbeitung und Bauausführung verbunden hatten, lagen drei Hauptgesichtspunkte zugrunde, die im wesentlichen die Lösung bestimmten. Der Entwurf sah vor, daß der neue Überbau nicht, wie bei der Ausschreibung vorgesehen, neben dem alten auf den freien Pfeilerhälften zu errichten war, sondern an die Stelle des alten — also unter Beibehaltung der bestehenden Gleisachse — gesetzt und daß ferner die bestehende S. O. beibehalten wurde. (Dieser Vorschlag war auch von anderer Seite gemacht worden.) Damit fielen die zeitraubenden, teuren und für den Bestand der Pfeiler gefährlichen Erd-

arbeiten ganz aus. Außerdem waren die Landwiderlager der Schleppträger nicht auf den neu herzustellenden Dammschüttungen, sondern auf den alten gesetzten Dämmen anzuordnen. Zweitens sollten die bestehenden Dammköpfe um je rd. 10 m zurückgesetzt werden bei entsprechender Vergrößerung der Stützweite der neuen Schleppträger. Durch diese Maßnahme wurde der Erd- druck auf die Pfeiler, der den eigentlichen Herd der Pfeiler- krankheit bildete, auf etwa die Hälfte seines bisherigen Wertes herabgesetzt. Der dritte Punkt endlich betraf den Vorschlag, gerammte Pfähle zu verwenden, was für das innige Zusammen- wirken mit den alten Pfeiler- teilen außerordentlich er- wünscht war und durch die sehr geschickte Anordnung der Pfähle ermöglicht wurde. Da das Rammen der rd. 19 m lang zu wählenden Schräg- pfähle unter dem bestehen- den Überbau und an den Langseiten der Pfeiler nicht möglich war, sah der Vor- schlag die Zusammenfassung der Pfähle in Bündeln an den Schmal- seiten der Pfeiler vor, wobei die Kräfte auf die Pfähle durch einen den Pfeilerhals und die Pfähle umschließenden Eisenbetonring über- tragen wurden. Der Einfluß dieser drei Gesichtspunkte auf die Durch- bildung des ganzen Bauwerks und den Bauvorgang wird in den ent- sprechenden Abschnitten erläutert.

Der Gedanke, die Dammköpfe zurückzusetzen, erschien nach den bisherigen Erfahrungen als der bedeutsamste Vorzug der vorgeschlagenen Lösung, da die hierdurch eintretende Entlastung der Pfeiler die Sicher- heit des ganzen Bauwerks beträchtlich erhöhte.

Eine wesentliche Eigentümlichkeit der Bauart des alten Überbaues war die Verwendung sehr kurzer Schleppträger, um deren Eigen- gewicht sowie den Auflagerdruck aus den Betriebslasten möglichst niedrig zu halten, was bei Anordnung der Schleppträgerauflager auf der Krone der hohen und frisch geschütteten Dämme — also an deren empfindlichster Stelle — naturgemäß von großer Bedeutung war und in dem Harkortschen Entwurf eine zweckmäßige Lösung gefunden hatte. Durch das Zurücksetzen der Dammköpfe mußte, da sich eine Verlängerung der Kragarme des Kragträgers wegen der Durchbiegungen nicht empfahl, die Vergrößerung der Stützweite der Schleppträger auf rd. 17,5 m (also auf das $3\frac{1}{2}$ -fache der alten Schleppträger) in Kauf genommen werden, wodurch deren Eigengewicht und Auflagerdruck beträchtlich vergrößert wurden. Hierin konnten jedoch keine Bedenken mehr erblickt werden, wie aus den folgenden Betrachtungen hervor- geht. An den Schleppträgerlagern des alten Überbaues waren Rege- lungen ihrer Höhenlage bis in die letzte Zeit in kurzen Zeiträumen dauernd erforderlich gewesen. Aus der Tatsache jedoch, daß die Höhenlage der an die Schleppträger anschließenden Streckengleise innerhalb der letzten 10 Jahre unveränderlich blieb, obgleich auch sie in großer Ausdehnung auf den hohen Dämmen lagen, geht hervor, daß sich die Sackungen auf die Sofas selbst beschränkten, daß jedoch Sackungen der Dämme in merkbarem Umfange nicht mehr eingetreten waren. Das Sacken der Sofas erklärt sich daraus, daß sie nur oben auf das Erdreich der Dämme aufgesetzt und dadurch vor allem den Frosteinwirkungen stark ausgesetzt waren und daß die verhältnismäßig leichten Sofas den Stößen der Betriebslasten wenig Widerstand boten, wodurch deren Einarbeiten in das Erdreich be- günstigt wurde.

Da bei dem Alter der Dämme und nach ihrem Verhalten in den letzten Jahren sowie nach dem Ergebnis der Bohrungen mit weiteren erheblichen Sackungen nicht mehr zu rechnen war, wurde die in Abb. 9 wiedergegebene Anordnung der Dammwiderlager gewählt. Sie wurden aus Beton hergestellt und frostfrei gegründet. Unterkante Beton- körper liegt rd. 2,90 m unter S.O., also mehr in der Masse des Damm- körpers, womit eine wesentlich günstigere Übertragung der Drücke stattfindet, für deren fast gleichmäßige Verteilung über die ganze untere Fläche durch entsprechende Wahl der Form und Abmessungen

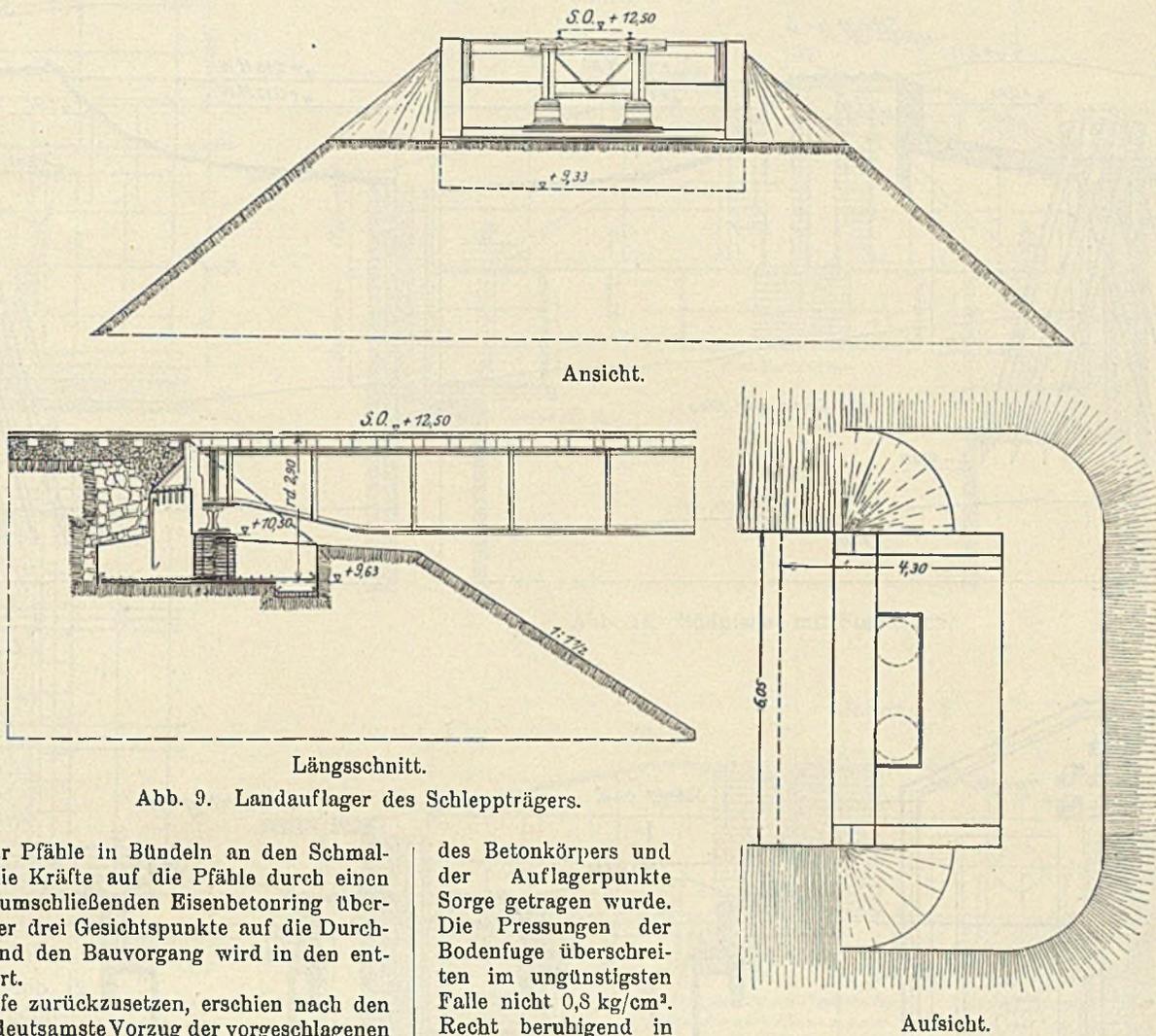


Abb. 9. Landauflager des Schleppträgers.

des Betonkörpers und der Auflagerpunkte Sorge getragen wurde. Die Pressungen der Bodenfuge überschreiten im ungünstigsten Falle nicht $0,8 \text{ kg/cm}^2$. Recht beruhigend in dieser Hinsicht wirkte der Befund des Dammbodens, auf den die Betonkörper gesetzt wurden; der Boden war so fest geworden, daß er sich teilweise nur mit der Hacke lösen ließ. Wegen ihres erheblichen Eigengewichts sind die Widerlager gegenüber Stoßwirkungen der Betriebsmittel wenig empfindlich. Der erste landseitige Schienenstoß wurde 3 m vom Dammwiderlager abgerückt.

Es ist hiernach zu erwarten, daß wesentliche Sackungen der Widerlager nicht mehr eintreten werden. Da jedoch die Auflagerung der Schleppträger auf den Dämmen stets ein empfindlicher Punkt bleiben wird, an dem Störungen am ehesten eintreten können, wurden an den Auflagern weitgehende Maßnahmen getroffen, um einen Aus- gleich etwaiger Sackungen leicht herbeiführen zu können (vgl. die späteren Ausführungen).

b) Pfeilerverstärkung. Die Pfeilergrundmauern waren nach Entlastung vom Erddruck, von den wagerechten Kräften aus dem Überbau und von dem Gewicht des abzubrechenden Pfeilermauerwerks in der Lage, ohne Überschreitung der als zulässig erachteten Boden- pressungen die lotrechten Drücke der schwereren neuen Überbauten einschließlich der Betriebslasten aus Lastenzug N aufzunehmen. Um sie auch gegen die wagerechten Kräfte standsicher zu machen, wurden sie verstärkt durch Pfähle, deren Zahl bestimmt wurde unter der Annahme, daß sie allein den Erddruck und die wagerechten Kräfte aufzunehmen hatten. Die Auflagersteine bzw. die die Über- tragung der Auflagerdrücke vermittelnden Böcke aus Flußstahl, im folgenden kurz als „Standböcke“ bezeichnet, wurden unmittelbar auf das alte Pfeilermauerwerk aufgesetzt. Die wagerechten Kräfte wurden auf die Pfähle übertragen durch einen bewehrten Betonring, der sich in einer Stärke von etwa $1,2 \times 1,2 \text{ m}$ um die Pfeiler legt, mit denen er durch in diese eingestemmte Nuten innig verbunden ist, und über den Pfahlköpfen verstärkt und verbreitert ist.

Die ursprüngliche Absicht, für die Pfeilerverstärkung Rammpfähle aus bewehrtem Beton zu verwenden, wurde aufgegeben, da die Schutzmittel (Verwendung von kalkarmem Zement, Traßzusatz, Schutz- anstriche) keinen unbedingt sicheren Schutz gegen die angreifenden Grundwasser erwarten ließen. Es wurden daher Pfähle aus Kiefern- holz verwendet, die bei einer Länge von rd. 19 m einen mittleren Durch- messer von 42 cm erhielten. Am Südpfeiler, der die festen Auflager trägt, war der Hauptanteil der Bremskräfte aufzunehmen. Daher war

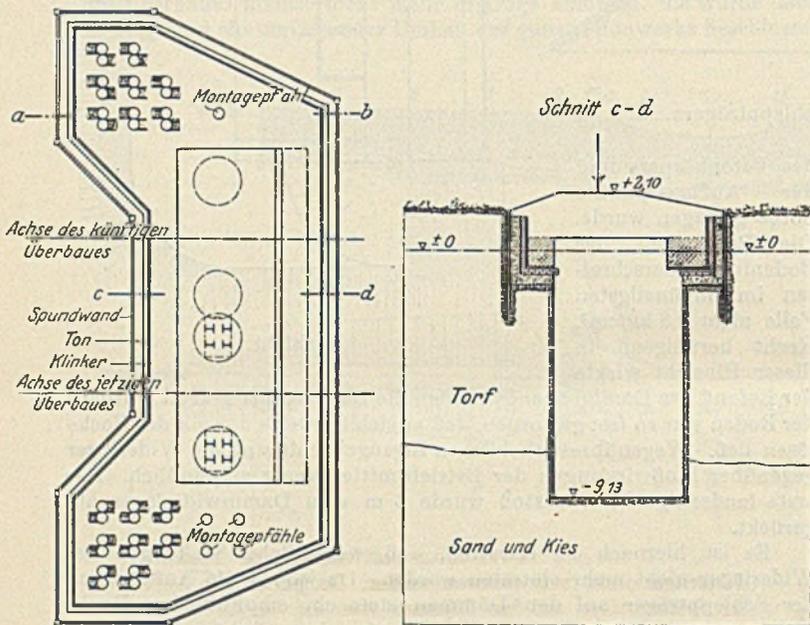
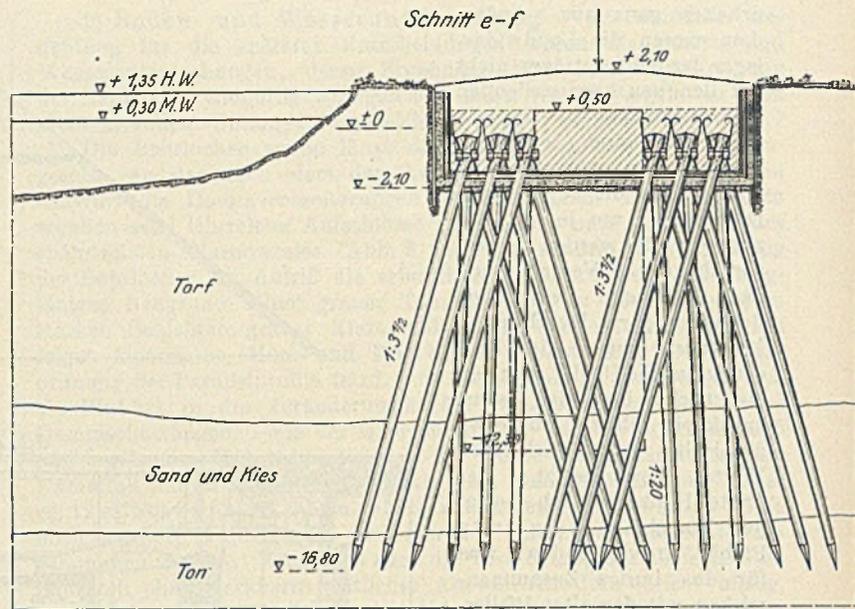
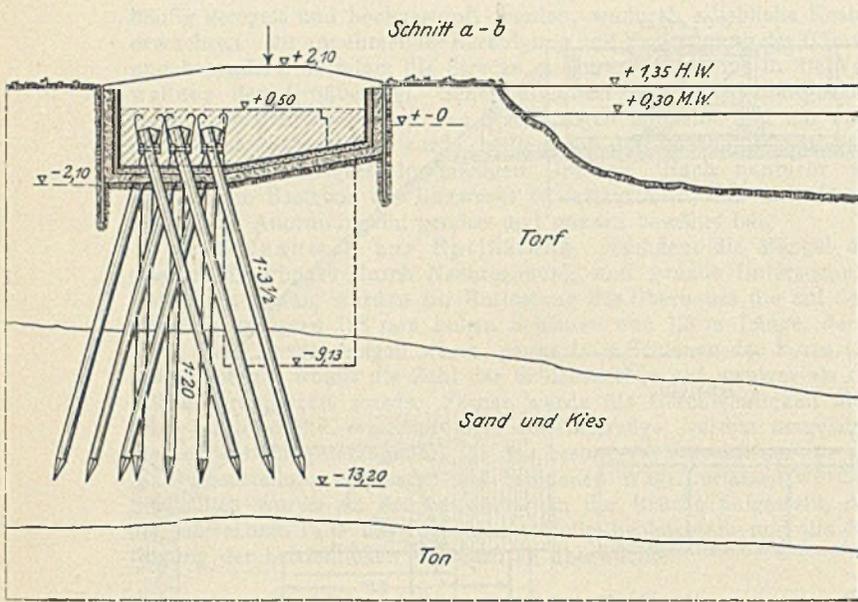


Abb. 11. Verstärkung des Nordpfeilers.

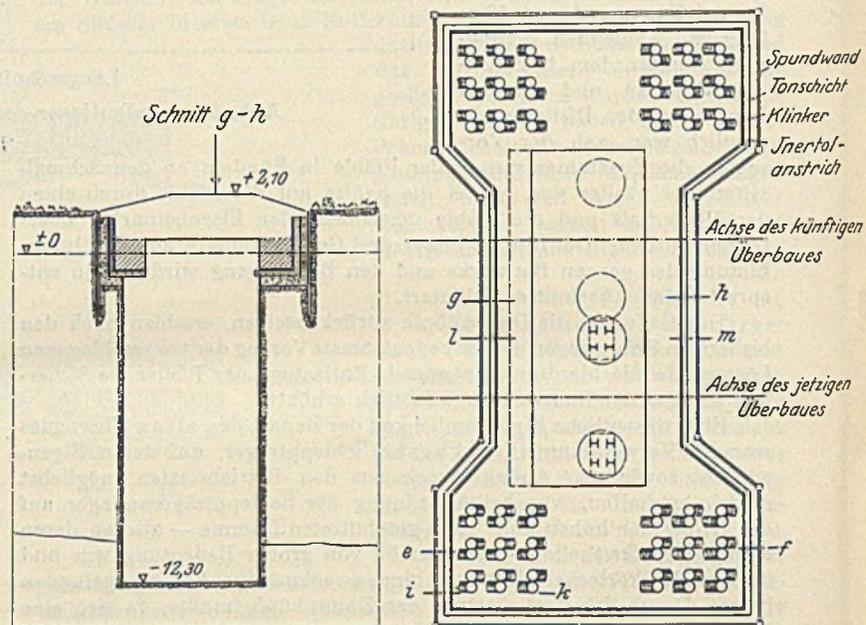


Abb. 10. Verstärkung des Südpfeilers.

hier die größere Zahl von Pfählen erforderlich, die symmetrisch zu den Hauptachsen der Pfeiler angeordnet wurden, (Abb. 10). Am Nordpfeiler mußten sämtliche Pfähle an der Landseite angeordnet werden, da die seinerzeit vor diesen Pfeiler geschütteten Steinmassen das Rammen an der Wasserseite verhinderten (Abb. 11). Für die Rammarbeiten, die von der Firma Thomas an die Firma Hans Behm-Hamburg weiter vergeben waren, wurde eine einfache Dampframme mit Nachlaufkatze mit 23 m hohem Mätkler verwendet. Das Bärgegewicht betrug 2200 kg, die Fallhöhe 1,80 m. Die Rammung wurde so lange fortgesetzt, bis die Eindringungstiefe bei den letzten 10 Schlägen 20 mm betrug. Die zeichnungsgemäße Niederbringung der Pfähle machte keine Schwierigkeiten, obgleich die eintretende Bodenverdichtung sich beim Rammen der letzten Pfähle stark bemerkbar machte.

Je zwei Pfähle wurden durch kräftige hölzerne Zangen und Bolzen verbunden; mit letzteren wurden lange, in den Beton tief einbindende Flacheisenbügel verschraubt (Abb. 12 u. 13).

Die Baugrube für die Herstellung der Betonringe war durch kurze Spundwände eingefast. Um den Beton gegen die Einwirkung der angreifenden Grundwasser möglichst widerstandsfähig zu machen wurde Eisenportlandzement mit Traßzusatz verwendet. Um ferner den Zutritt des Grundwassers möglichst zu erschweren, wurde der Betonkörper an der Unterseite und den Wänden mit einer Klinkerschicht umgeben, die innen mit Inertol gestrichen und außen mit einer Tonschicht von 30 cm Stärke umstampft wurde (Abb. 12, 14 u. 15). Es war nicht beabsichtigt, hierdurch das Eindringen des Grundwassers in den Beton überhaupt zu unterbinden, sondern es

sollte nur das Zustandekommen eines Grundwasserstroms verhindert werden, der eine ständige Erneuerung der angreifenden Bestandteile verursachen würde.

Die Wasserhaltung in der Baugrube am Südpfeiler machte keine Schwierigkeiten. Dagegen war es am Nordpfeiler, wo das Wasser durch die Steinschüttung von unten her ungehinderten Zutritt fand, auch unter Verwendung dreier maschinell betriebener Pumpen nicht möglich, den Aushub der Baugrube, der die Forträumung der bis zu $\frac{1}{3}$ m³ großen Steine erforderte, zu bewerk-

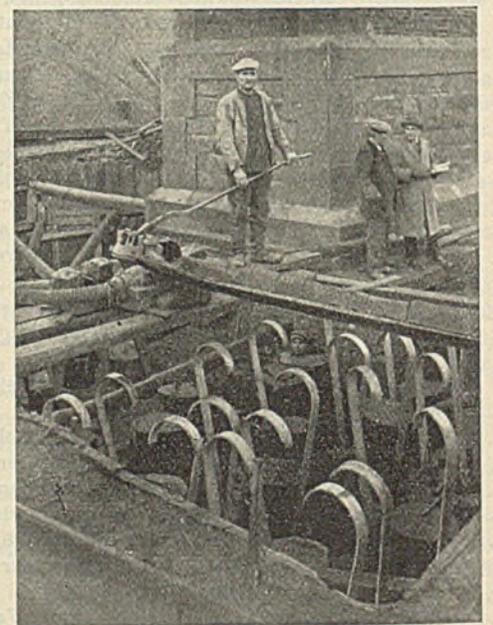
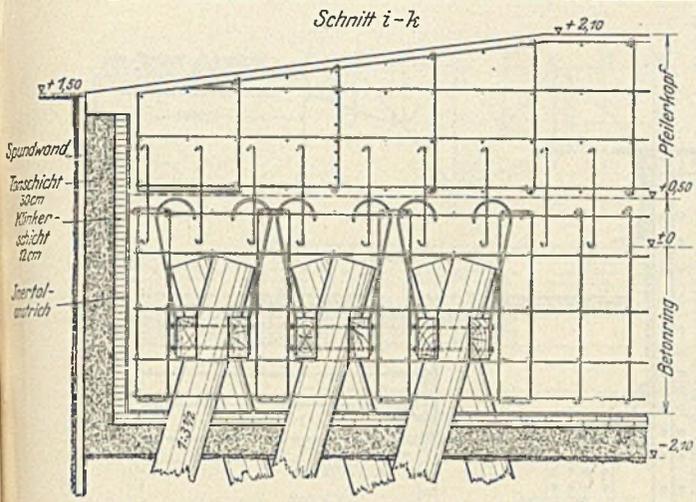


Abb. 13.

Schnitt i-k



Schnitt l-m

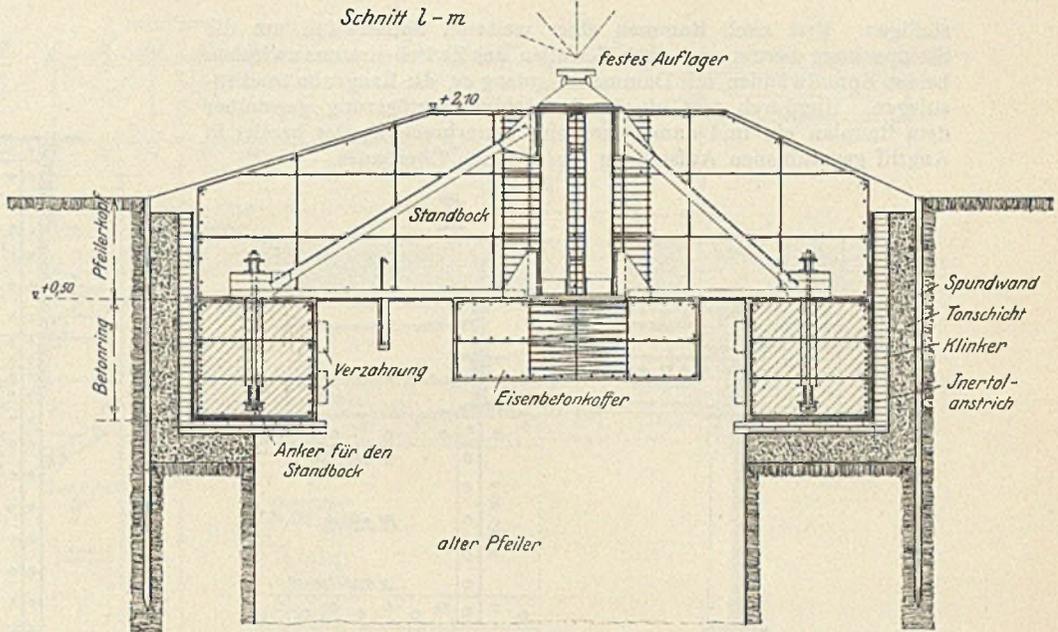
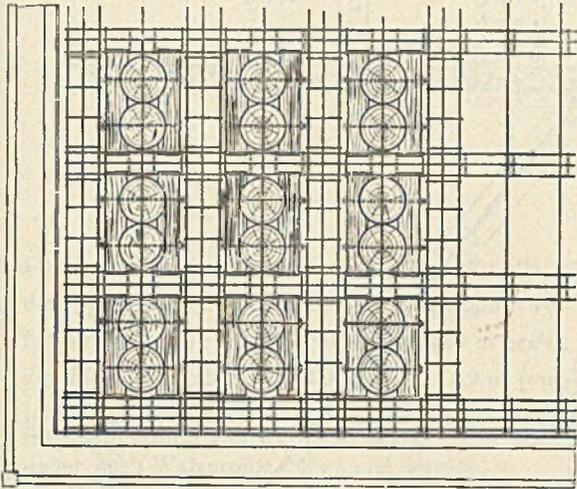
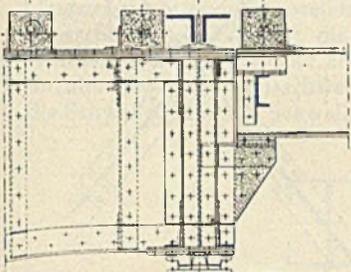


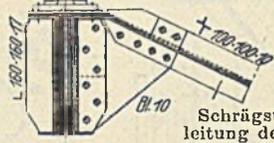
Abb. 14. Südpfeiler mit Standbock.



Aufsicht.
Abb. 12.
Südpfeiler.



Zu Abb. 16.



Schrägstab zur Überleitung der Bremskräfte.

Schnitt g-h

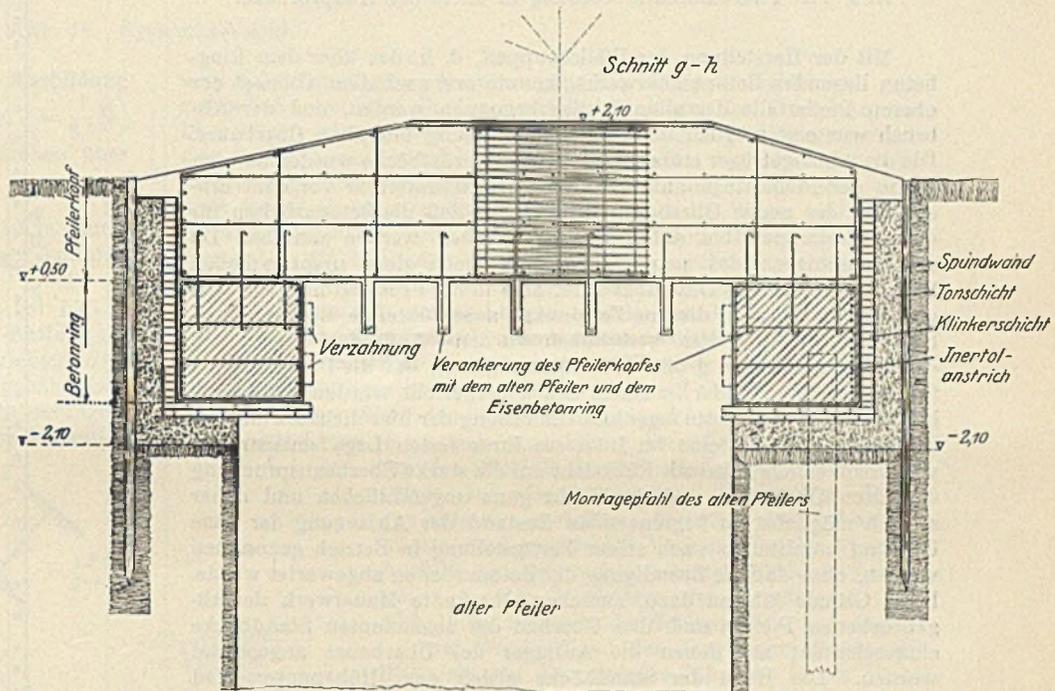


Abb. 15. Südpfeiler. Auflagerstein für den 2. Überbau.

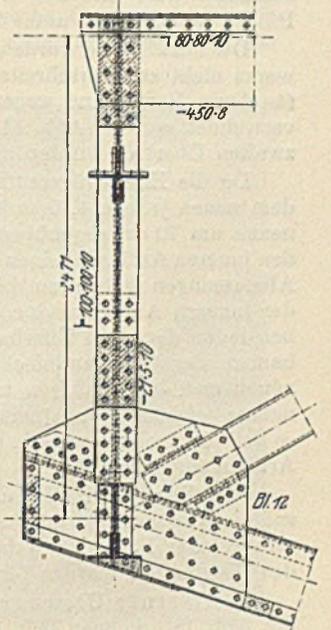
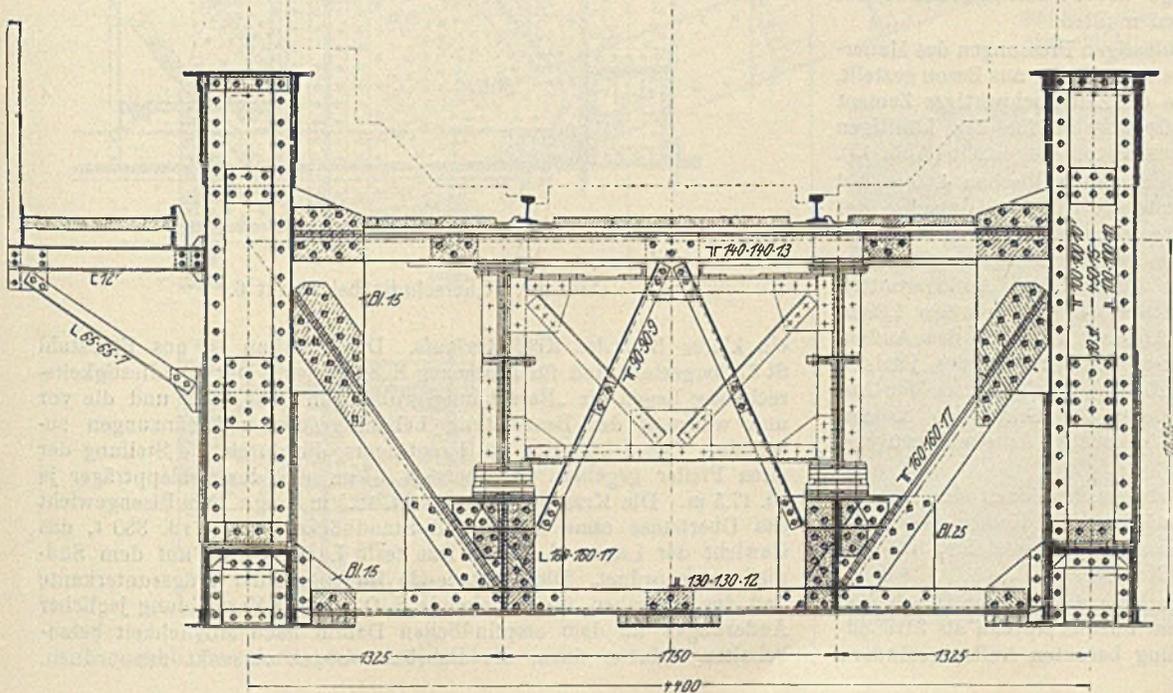


Abb. 16. Querschnitt bei Punkt I. (Endquerträger.)

stelligen. Erst nach Rammen einer weiteren Spundwand um die Steinpackung herum und nach Verfüllen des Zwischenraums zwischen beiden Spundwänden mit Dammerde gelang es, die Baugrube trocken-zulegen. Hierdurch trat eine mehrwöchige Verzögerung gegenüber dem Bauplan ein und damit auch eine Unterbrechung der bereits in Angriff genommenen Aufstellung des eisernen Überbaues.

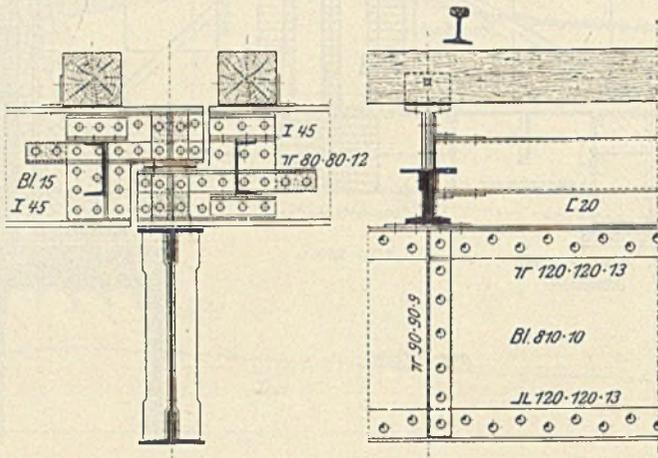


Abb. 17. Fahrbahnunterbrechung in Mitte der Hauptbrücke.

Mit der Herstellung der Pfeilerkuppen, d. h. des über dem Ringbeton liegenden Betonmauerwerks, konnte erst nach dem Abbruch der oberen Pfeilerteile der alten Pfeiler begonnen werden, und der Abbruch war erst möglich nach der Unterfangung des alten Überbaues. Die die Abfangträger stützenden eisernen Gerüstböcke wurden auf den Beton der Pfeilerringe aufgesetzt und erst unmittelbar vor dem Einschleiben des neuen Überbaues beseitigt, so daß die Betonarbeiten für die Pfeilerkuppen bis dahin hinausgeschoben werden mußten. Da das Einschleiben des neuen Überbaues nach dem ursprünglichen Bauplan auf Anfang Dezember 1924, also in die Frostzeit fiel, war vorgesehen, daß nach diesem Zeitpunkte auszuführende Betonarbeiten bis in das Frühjahr 1925 verschoben wurden. Außerdem wurde von der R. B. D. Schwerin großer Wert darauf gelegt, daß die Pfeilerkuppen für die ganzen Pfeiler in einem Stück hergestellt wurden, da gerade in Pfeilermitte eine satte fugenlose Umhüllung der hier dicht aneinander liegenden Auflagersteine im Interesse ihrer festen Lage anzustreben war. Schließlich sollte mit Rücksicht auf die starke Überbeanspruchung des alten Überbaues und den nicht ganz ungefährlichen und daher zeitlich möglichst zu begrenzenden Zustand der Abfangung der neue Überbau unmittelbar nach seiner Fertigstellung in Betrieb genommen werden, ohne daß die Beendigung der Betonarbeiten abgewartet wurde. Diese Gründe führten dazu, zwischen Oberkante Mauerwerk der abgebrochenen Pfeiler und den Überbau die sogenannten Standböcke einzuschalten, auf denen die Auflager des Überbaues angeordnet wurden. Die Höhe der Standböcke gleich dem Höhenunterschied zwischen Oberkante Mauerwerk und Auflager ergab sich aus der Höhenlage der Auflager, die durch die Ordinate des höchsten H. W. bestimmt war, und aus der Höhenlage der Pfeilerringe bzw. der Pfähle, deren Köpfe unter N. W. bleiben mußten.

Die Standböcke wurden, um die zulässigen Pressungen des Mauerwerks nicht zu überschreiten, auf besondere Koffer aus Beton gestellt, für deren Herstellung wegen der Kürze der Zeit hochwertiger Zement verwendet wurde (Abb. 14). Die Auflagersteine für den künftigen zweiten Überbau wurden aus bewehrtem Beton hergestellt (Abb. 15).

Da die Hauptträgerentfernung bei dem alten Überbau 4,60 m, bei dem neuen jedoch 4,40 m beträgt, wurde die Brückenlängsachse des neuen um 10 cm gegenüber der des alten nach außen verschoben, um den inneren Auflagersteinen des künftigen zweiten Überbaues günstigere Abmessungen geben zu können. Der Abstand der Auflagermitten der inneren Auflagersteine beträgt nunmehr 1,40 m (gegenüber 1,00 m bei denen des alten Überbaues). Der Abstand zwischen den Außenkanten der Gurtwandbleche der inneren Hauptträger (des jetzigen neuen und des künftigen zweiten Überbaues) beträgt unter der Annahme gleichartiger Querschnittausbildung der Gurtungen 85 cm, so daß für das Auswechseln von Nieten oder sonstige Arbeiten genügend Arbeitsraum verbleibt.

Alle Teile der Pfeiler und des Überbaues, bei denen eine etwaige spätere Verstärkung mit unverhältnismäßig hohen Kosten verbunden sein würde (Pfähle, Bewehrung des Ringes, Auflagersteine, Auflager des Überbaues), wurden für Lastenzug N bemessen.

c) Eiserner Überbau. Die Trägerform des eisernen Überbaues, die Abb. 18 erkennen läßt, gibt in ihrem offenen Aufbau als Strebenfachwerk mit den durch Rhombenbildung betonten Auflagerständern

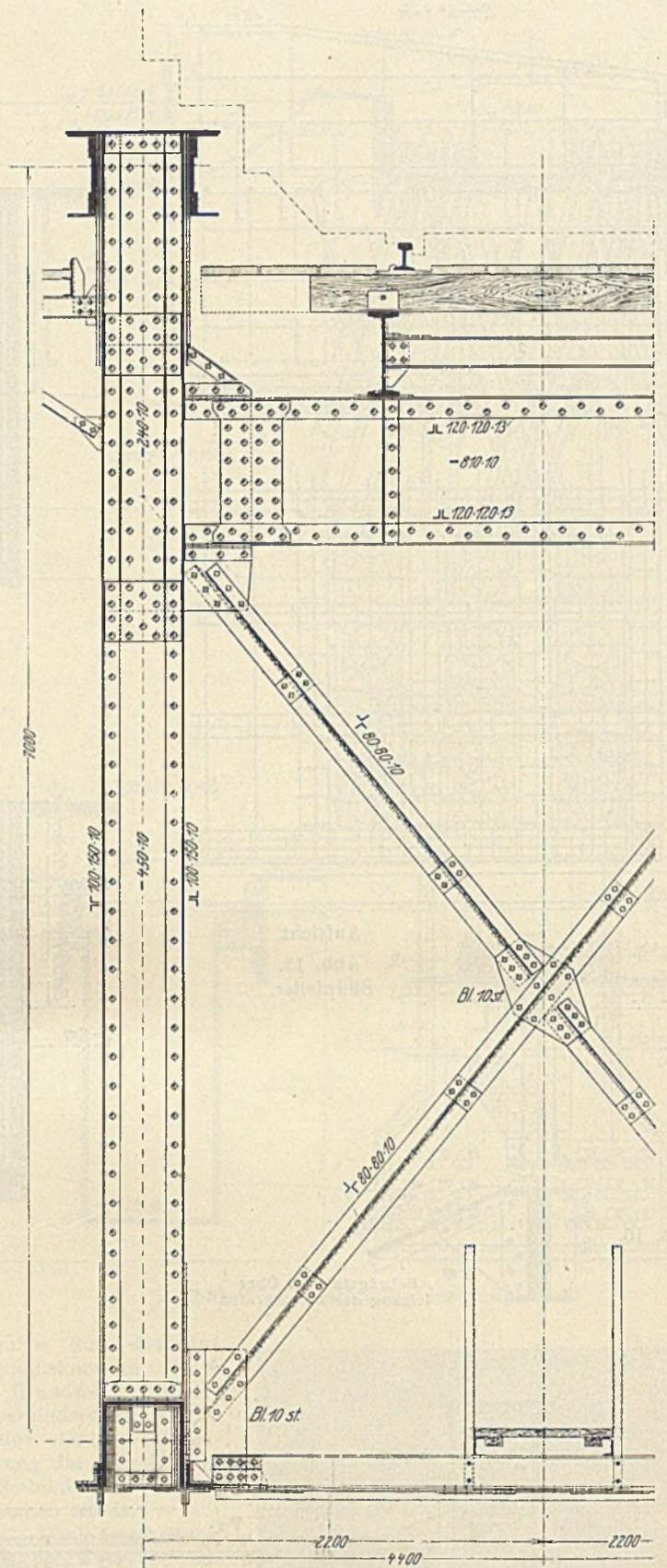


Abb. 19. Querschnitt bei Punkt 6.

ein klares Bild des Kräfteverlaufs. Der Überbau ist aus Flußstahl St 37 hergestellt und für Lastenzug E bemessen. Der Standfestigkeitsrechnung liegen die „Berechnungsgrundlagen“ von 1922 und die vor und während der Bearbeitung bekanntgegebenen Ergänzungen zugrunde. Die Stützweite des Kragträgers, die durch die Stellung der alten Pfeiler gegeben war, beträgt 67 m, die der Schleppträger je rd. 17,5 m. Die Kragarme sind je rd. 12,5 m lang. Das Eisengewicht des Überbaues ohne Lager und Standböcke beträgt rd. 380 t, das Gewicht der Lager rd. 11 t. Das feste Lager wurde auf dem Südpfeiler angeordnet. Die feststehende Höhenlage der Trägerunterkante und das Bestreben, die bestehende S. O. zwecks Vermeidung jeglicher Änderungen an dem empfindlichen Damm nach Möglichkeit beizubehalten, führten dazu, die Fahrbahn etwas versenkt anzuordnen.

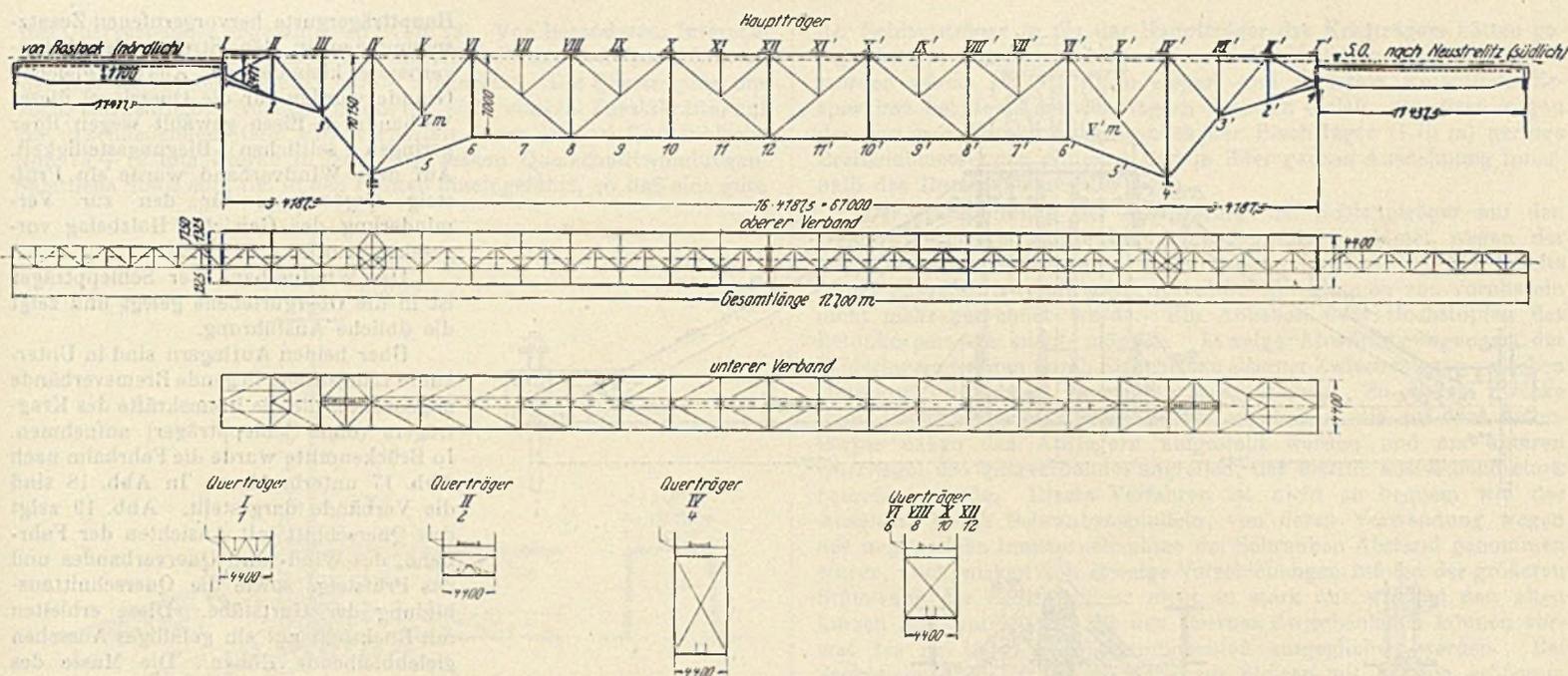


Abb. 18. Systemübersicht.

Damit wurde für diesen Baustoff eine für die günstige Ausbildung des Systems noch ausreichende Trägerhöhe von 7,00 m ($= \frac{1}{9,5} l$) bei einem Hauptträgerabstande von 4,40 m erzielt. Die Höhen über den Pfeilern ergeben sich dabei zu rd. 10,2 m ($= \frac{1}{6,5} l$). Durch Einschaltung eines Zwischenfachwerks wurde eine zweckmäßige Querträgerentfernung von rd. 4,2 m erzielt. Für die Längsträger konnten daher noch Walzprofile verwendet werden.

Die Schwellen von 22 cm Breite und 20 cm Höhe (bei 1,75 m Längsträgerentfernung) bestehen aus Kiefernholz, da E-Lasten auf dieser Strecke (G-Strecke), die zurzeit als Nebenbahn betrieben wird, in absehbarer Zeit nicht zu erwarten sind. Die später gegebenenfalls einzubauenden Hartholzschwellen erhalten die gleichen Abmessungen. Die Schwellen sind mit Schwellenwinkeln befestigt. Zwischen Schwellen

und Schwellenträgern wurden gepreßte Pappelholzplättchen eingeschaltet. Auf dem Überbau wurden Schienen der Form 15c von 18 m Länge verlegt. Auf dem Nordufer (bewegliches Auflager) wurde eine Schienenauszugvorrichtung eingebaut. Von der Anbringung von Entgleisungsschutzvorrichtungen wurde vorläufig abgesehen, doch steht ihrem etwaigen späteren Einbau nichts im Wege. Als Belag wurden Betonplatten nach der bekannten Musterzeichnung des E. Z. A. verwendet, die hier auch aus dem Grunde zweckmäßig waren, weil die an die Brücke anschließenden Streckengleise nach beiden Richtungen mit 1:125 teils auf größere Längen ansteigen und Brände des Belags auf dem alten Überbau, wohl durch starkes Arbeiten der Lokomotiven entstanden, wiederholt vorgekommen sind.

Die Längsträger bestehen aus Walzträgern I 45 und sind als durchlaufende Träger über den Querträgern angeordnet. Sie wurden mit den Querträgern erst nach Ausrüstung des Überbaues vernietet, um den Einfluß der Formänderungen der Hauptträger auf die Längsträger infolge des Eigengewichts auszuschalten. Zwischen den Schwellenträgern sind wagerechte Verbände in der üblichen Ausführung angeordnet. Landseitig sind die Längsträger in den Endfeldern des Kragträgers nach Abb. 16 auf Konsolen der Schleppträger aufgelagert.

Der Windverband des Kragträgers wurde mit Rücksicht auf die versenkte Fahrbahn in die Ebene des Untergurts verlegt. Der Obergurt ist gegen den Windverband an jedem zweiten Querträger ausgesteift. An den Gelenken ist der Windverband unterbrochen. Der Windverband wurde in K-Form ausgebildet, damit die durch die Dehnung der

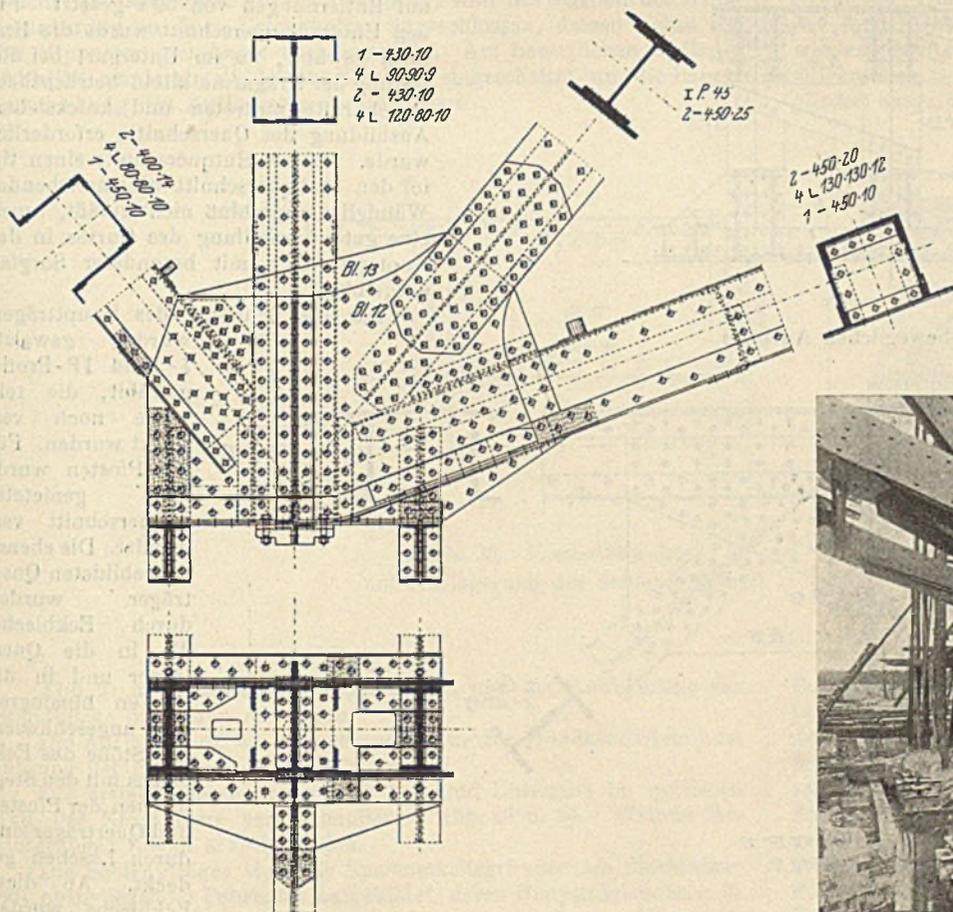


Abb. 20. Auflagerknotenpunkt 4.

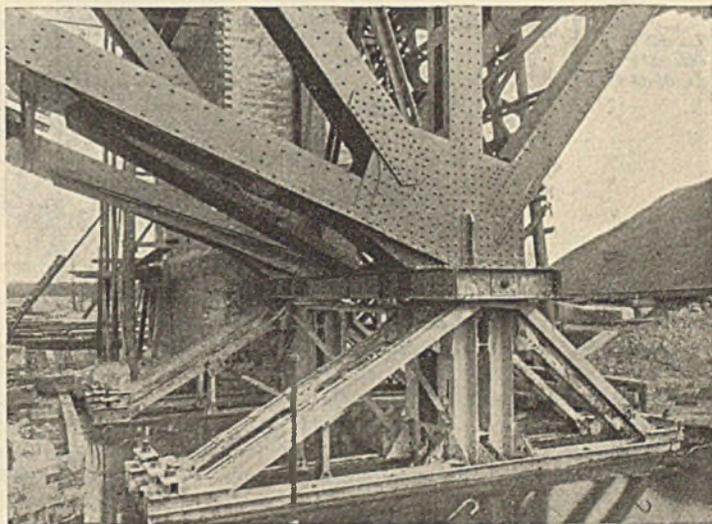


Abb. 21.

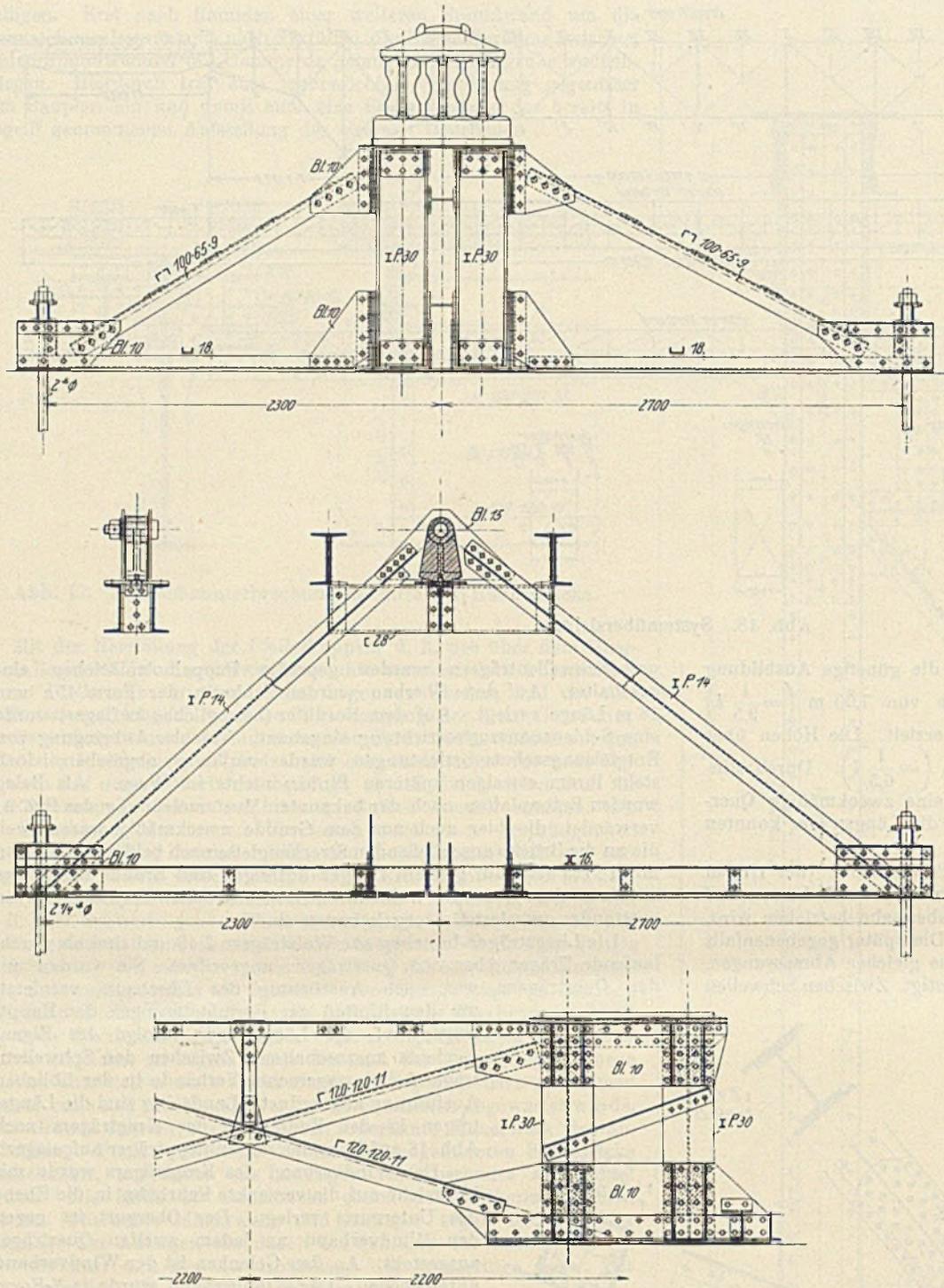


Abb. 22. Auflagerbock am beweglichen Auflager.

Hauptträgergurte hervorgerufenen Zusatzspannungen in den Streben des Windverbandes klein bleiben. Aus dem gleichen Grunde wurden für die Querriegel dieses Verbandes U-Eisen gewählt wegen ihrer geringen seitlichen Biegesteifigkeit. Auf dem Windverband wurde ein Prüfsteig angeordnet, für den zur Verminderung des Gewichts Holzbelag vorgesehen wurde.

Der Windverband der Schleppträger ist in die Obergurtebene gelegt und zeigt die übliche Ausführung.

Über beiden Auflagern sind in Unterkante Längsträger liegende Bremsverbände angeordnet, die die Bremskräfte des Kragträgers (ohne Schleppträger) aufnehmen. In Brückenmitte wurde die Fahrbahn nach Abb. 17 unterbrochen. In Abb. 18 sind die Verbände dargestellt. Abb. 19 zeigt den Querschnitt mit Ansichten der Fahrbahn, des Wind- und Querverbandes und des Prüfsteigs sowie die Querschnittausbildung der Gurtstäbe. Diese erhielten mit Rücksicht auf ein gefälliges Aussehen gleichbleibende Höhen. Die Masse des Querschnitts wurde in die Wandbleche gelegt. Die Verstärkung des Grundquerschnitts ist im wesentlichen durch Verstärkung der Wandbleche und Wahl größerer Winkeleisen bewirkt. In den Schwerpunktlagen der Querschnitte traten daher keine erheblichen Verschiedenheiten auf, und die Anschlüsse und die Kraftübertragung an die Knotenbleche ließen sich einwandfrei ermöglichen. Die Abstände der Bindebleche und der sogenannten Querschotten in den gedrückten Gurtstäben des mittleren Teils wurden rechnerisch ermittelt. In den gedrückten Untergurtstäben der Kragarme, die verhältnismäßig geringe Stabkräfte erhalten und daher wesentlich schwächere Abmessungen erhalten konnten, wurden die Bindebleche auf Entfernungen von 30 i gesetzt. Für den Untergurtquerschnitt wurde die Hutform gewählt, da im Untergurt bei Belastung der Kragarme allein beträchtliche Druckkräfte auftreten und knicksichere Ausbildung des Querschnitts erforderlich wurde. Da der Hutquerschnitt einen tief in den Stabquerschnitt hineinreichenden Wandgliederanschluß nicht zuläßt, wurde eine gute Aussteifung des Gurtes in den Knotenpunkten mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

Für die Schrägen des Hauptträgers wurden gewalzte I- und IP-Profile gewählt, die teilweise noch verstärkt wurden. Für die Pfosten wurde ein genieteter I-Querschnitt verwendet. Die ebenso ausgebildeten Querträger wurden durch Eckbleche, die in die Querträger und in die Pfosten hineingreifen, angeschlossen. Die Stöße des Eckblechs mit den Stegblechen der Pfosten und Querträger sind durch Laschen gedeckt. An diese Eckbleche wurden auch die Streben

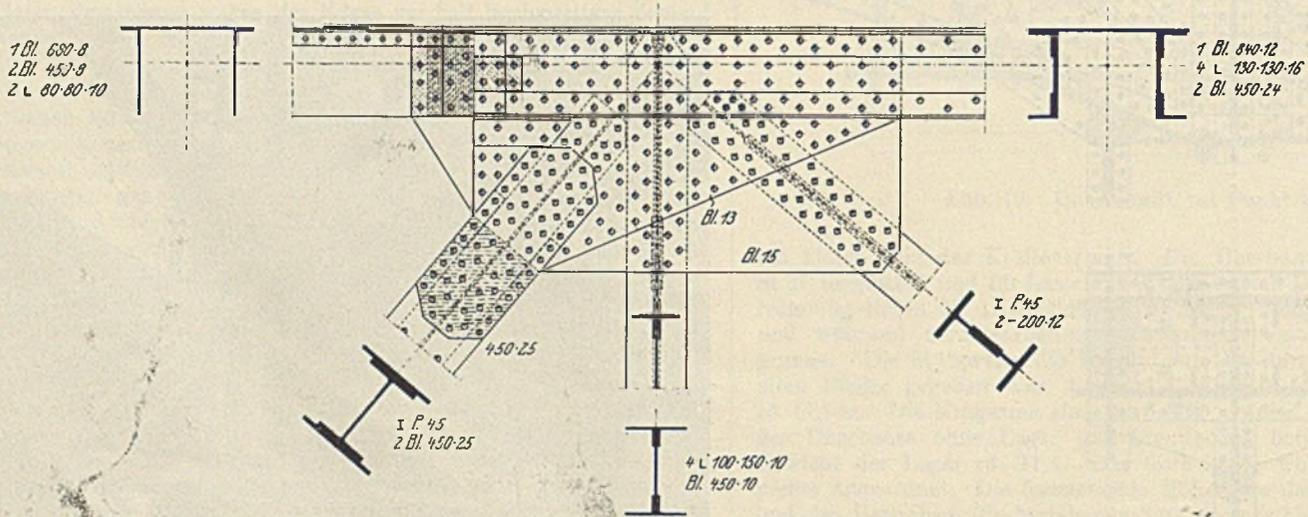


Abb. 23. Obergurtknotenpunkt VI.

des Querverbandes angeschlossen (Abb. 19). Von besonderem Interesse ist der Auflagerknotenpunkt, den die Abb. 20 mit den Querschnitten der hier zusammenlaufenden Stäbe wiedergibt. Die Übertragung des recht beträchtlichen Auflagerdrucks (rd. 600 t einschl. Zusatzkräfte) auf die anschließenden Stäbe wird vermittelt durch je zwei Knotenbleche von 13 + 12 mm Stärke in jeder der beiden Querschnittswandungen. Sämtliche Stäbe sind tief in den Knoten hineingeführt, so daß eine gute

der Schlepptträger in die der Hauptträger des Kragträgers hätten gelegt werden müssen und besondere Fahrbahnträger erforderlich geworden wären, rd. 20 t Eisen erspart und weiterhin wesentliche Ersparnisse bei den Landwiderlagern insofern erzielt, als diese wegen des geringen Hauptträgerabstandes der Blechträger (1,75 m) geringe Breitenabmessungen erhielten und in ihrer ganzen Ausdehnung innerhalb des Dammquerschnitts lagen.

Der Durchbildung der Auflagerung der Schlepptträger auf den Dammwiderlagern wurde besondere Sorgfalt gewidmet wegen der möglicherweise eintretenden Sackungen, wenngleich — wie bereits früher ausgeführt — mit wesentlichen Bewegungen von vornherein nicht mehr gerechnet wurde. Ein Anheben oder Hochstopfen des Betonkörpers ist nicht möglich. Etwaige Abwärtsbewegungen des Widerlagers werden durch Einschieben eiserner Zwischenlagen zwischen Untergurt und oberer Lagerplatte ausgeglichen. Zu diesem Zwecke wird der Schlepptträger mit Winden angehoben, die auf dem Betonkörper neben den Auflagern aufgestellt werden und am unteren Querriegel des Querverbandes angreifen, der hierfür ausreichend stark bemessen wurde. Dieses Verfahren ist nicht so bequem wie der Ausgleich durch Schraubenspindeln, von deren Verwendung wegen der ungünstigen Inanspruchnahme der Schrauben Abstand genommen wurde, doch wirken sich etwaige Verschiebungen infolge der größeren Stützweite der Schlepptträger nicht so stark aus wie bei den alten kurzen Schlepptträgern. Mit den eisernen Zwischenlagen können vorerst bis zu 150 mm Höhenunterschied ausgeglichen werden. Bei Sackungen über 150 mm werden neue Stelzen mit 150 mm größerem Durchmesser eingebaut und weiterhin Zwischenlagen, so daß hiermit bis zu 300 mm starke Sackungen ausgeglichen werden. Bei Setzungen über 300 mm wird ein neuer Auflagerstein von 300 mm Höhe eingebaut, wonach wieder, wie vorher angegeben, verfahren werden kann.

Falls ein Kippen des Betonkörpers infolge ungleichmäßigen Setzens eintreten sollte, können keilförmige Zwischenlagen eingebaut werden. Damit die obere Kante des Betonkörpers infolge einer Kippbewegung nicht gegen das Ende des Blechträgers stößt, ist bei letzterem das Stegblech mit einem Ausschnitt versehen worden (Abb. 25). Bei dem Kiesbettabschluß (Abb. 25) ist durch Anordnung mehrerer Ankerlöcher hintereinander ein Versetzen des Eisenkörpers nach rückwärts ermöglicht. Ferner wurde in der Anordnung der Schrauben zur Befestigung der oberen Lagerplatte des Auflagers die Möglichkeit einer Versetzung vorgesehen.

Die Schlepptträger sind auf dem Endquerträger des Kragträgers durch Einschaltung von Stahlglülagern üblicher Bauart aufgelagert (Abb. 16). Die wagerechten Kräfte aus den Schlepptträgern, die durch den in der Obergurtebene liegenden Windverband übertragen werden, werden durch knaggenartig ausgebildete, auf dem Blechträgerobergurt aufgenietete \perp -Eisenstücke unmittelbar an den Obergurtstab des gegliedert ausgeführten Endquerträgers abgegeben. Durch entsprechende

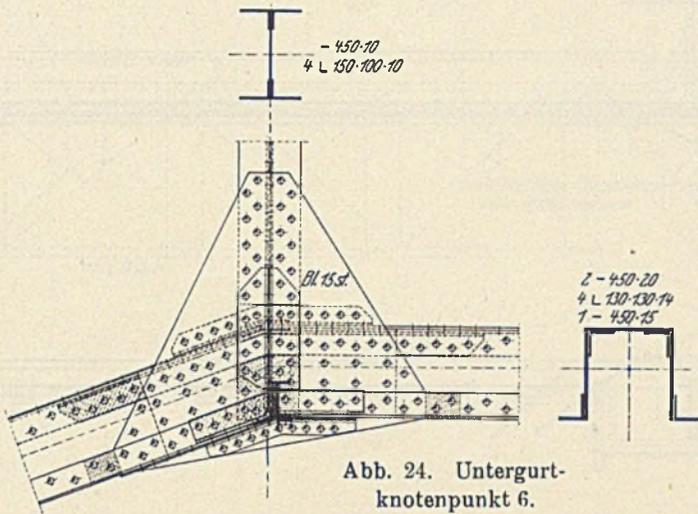


Abb. 24. Untergurtknotenpunkt 6.

Aussteifung des Knotenblechs gewährleistet ist. Die Verstärkungsbleche der ersten Schrägen stoßen stumpf gegen die Knotenbleche und sind durch Laschen angeschlossen. Die äußeren Winkel der Querschnitte sind mit Keilfutter auf die Knotenbleche geführt. Die inneren Winkel und Kopfplatten sind durch Beiwinkel angeschlossen, bei denen die abstehenden Schenkel den $1\frac{1}{2}$ -fachen Nietquerschnitt erhielten. Im Abstände von 615 mm zu beiden Seiten des Auflagerpunktes ist zwischen den Knotenblechen eine kräftige Querschotte eingebaut, da an diesen Punkten die Pressen für das Anheben des Überbaues bei der Aufstellung angesetzt wurden. Das 15 mm starke Stegblech dieser Querschotten ist durch einen Schlitz im Windverbandknotenblech nach unten durchgesteckt und dient dem Anschluß der unter den Knotenblechen über beide Auflagerknoten eines Pfeilers durchgehenden U-Eisen, an denen die Windverankerung nach Abb. 21 u. 22 angebracht ist. Am festen Auflager (Abb. 21) sind die Streben der Windverankerung an einen Gelenkbolzen angeschlossen, dessen Achse mit der Kippachse der Lager zusammenfällt. Am beweglichen Auflager (Abb. 22) wurde ein Pendel aus Stahlguß eingeschaltet, um die Längsverschiebung des Auflagers zu ermöglichen.

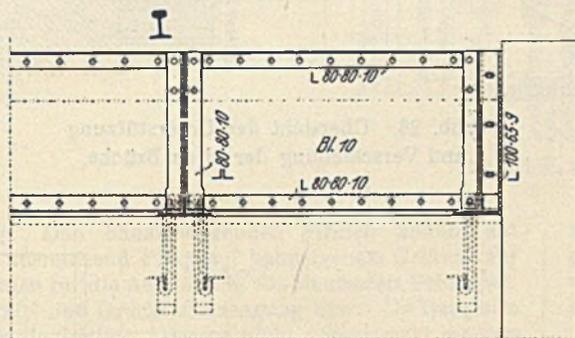


Abb. 25. Kiesbettabschluß mit Auflagerung des Schlepptträgers.

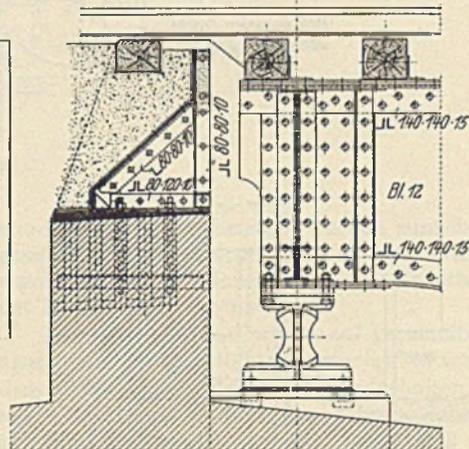


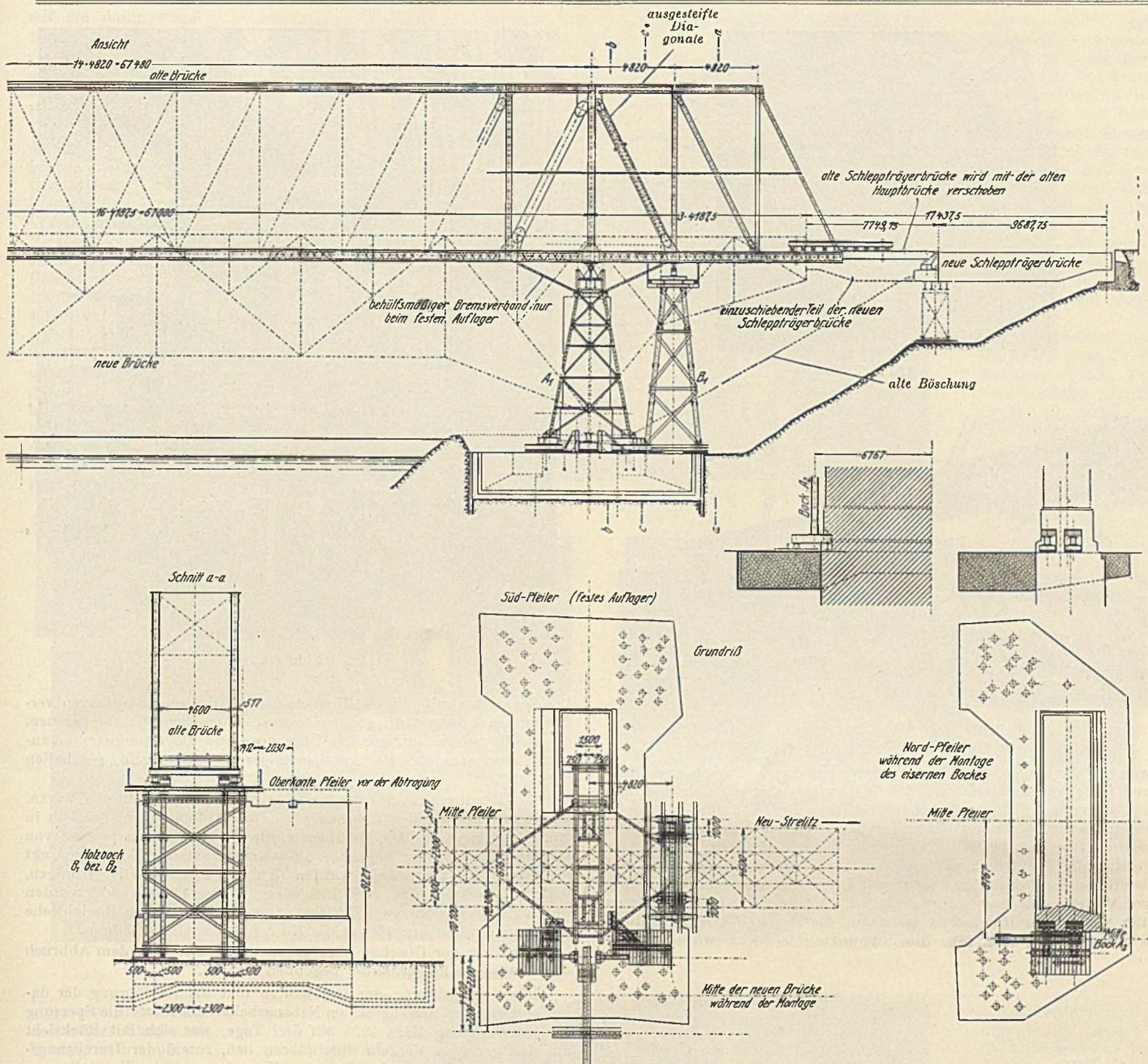
Abb. 21 u. 22 zeigen die Konstruktion und die Verankerung der Sandböcke unter den Auflagern.

Die Auflager sind als Linienklappager in der grundsätzlichen Ausführung der Normblattentwürfe hergestellt.

Die ersten Knotenpunkte im Ober- und Untergurt im mittleren Teil des Kragträgers veranschaulichen Abb. 23 u. 24. Weitere Erläuterungen hierzu erübrigen sich.

Die Schlepptträger sind aus Sparsamkeitsgründen als Blechträger mit oben liegender Fahrbahn ausgebildet, deren Hauptträgerachsen in den Achsen der Schwellenträger des Kragträgers liegen. Hierdurch wurden gegenüber fachwerkartiger Ausbildung, bei der die Achsen

Bearbeitung der \perp -Eisenstücke wird erreicht, daß die Kräfte genau in der Schwerlinie des Obergurtstabes übertragen werden. Dabei ist durch Belassung ausreichenden Spielraums die freie Bewegung des Schlepptträgers bei Durchbiegungen bzw. Verdrehungen in senkrechter und wagerechter Richtung gewahrt. Die Queraussteifung des Schlepptträgers über diesem Auflagerpunkte ist in zwei Verbände aufgelöst, die die mittleren Schrägen des gegliederten Endquerträgers zwischen sich fassen. Die Bremskräfte aus den Schlepptträgern werden durch Schrägstäbe, die an ein am Auflager befestigtes gebogenes Knotenblech angeschlossen sind, unmittelbar in den Windverband des Kragträgers geleitet (Abb. 16 u. 18).



Zu Abb. 26.

d) Bauvorgang. Den bauausführenden Firmen konnte auf beiden Warnowufern ausreichend Platz auf bahneigenem Gelände zur Verfügung gestellt werden für die Aufstellung von Baubuden, Schuppen, von Maschinen für Kraft- und Druckluftherzeugung usw. Da Baugleise wegen der hohen nur eingleisigen Dämme nicht vorgestreckt werden konnten, mußten sämtliche Baustoffe und Geräte in Zugpausen vom Betriebsgleis aus entladen werden. Der Zement wurde durch Rutschen in die am Dammfuß aufgestellten Zementschuppen befördert. Zum Abladen der schweren Bauteile wurde am Nordufer, von wo aus der Vorbau des Überbaues begann, ein fahrbarer Kran aufgestellt, der das Betriebsgleis und eine rd. 300 m² große Ladebühne bestrich.

Der Bauvorgang ist auf Abb. 26 im Zusammenhange dargestellt.

Die Arbeiten begannen im Juli 1924 mit dem Bau der Betonkörper für die Landwiderlager, die unter dem Schutze der Notbrücken hergestellt wurden. Darauf wurde an beiden Ufern die landseitige größere Hälfte der Schleppträger eingebaut. Diese reichte von den neuen Landwiderlagern bis zu einem Aufstellungsstoß, der an der Berührungsstelle mit den eisernen Sofas des alten Überbaues angeordnet wurde (Abb. 26).

Die Sofas wurden auf Konsolen abgesetzt, die an den bezeichneten Schleppträgern befestigt waren und durch Notbrücken unterstützt

wurden (Abb. 27). Letztere wurden zunächst auf Schwellenstapel abgesetzt, die nach Einbau eines eisernen Gerüstbockes wieder beseitigt wurden (Abb. 28). Danach wurden die Erdarbeiten für die Zurücksetzung der Dammköpfe begonnen.

Der neue Überbau wurde auf gerammten Gerüsten aufgestellt, in denen eine Schiffabrtöffnung von 8,40 m l. W. und 3,50 m Höhe über dem höchsten schiffbaren H.W. freigehalten wurde. Die Gerüste sind auf einigen später folgenden Bildern erkennbar. Die Arbeiten begannen am Nordufer mit der Aufstellung des nördlichen Kragarms, für dessen Zusammenbau ein auf dem Ufergelände aufgestellter Schwenkran mit langem Ausleger benutzt wurde. Die Bauteile für die Mittelloffnung wurden mit Rollwagen vorgefahren und mit Hilfe eines auf dem Obergurt laufenden fahrbaren Einbaukrans eingebaut (Abb. 29). Die Nietlöcher wurden auf der Baustelle mit elektrisch betriebenen Bohrmaschinen aufgerieben. Zum Vernieten dienten Drucklufthämmer. Die Aufstellung verlief ohne Zwischenfall.

Da die westlichen Pfeilerhälften, auf denen der alte Überbau gelagert war, unter diesem abgebrochen werden und der Überbau bis zur Inbetriebnahme des neuen ohne Einschränkung des Zugverkehrs benutzt werden mußte, wurde eine Unterfangung des alten Überbaues erforderlich, bei der mit besonderer Sorgfalt verfahren werden mußte. Für die Abfangung wurden besonders angefertigte Blechträger ver-

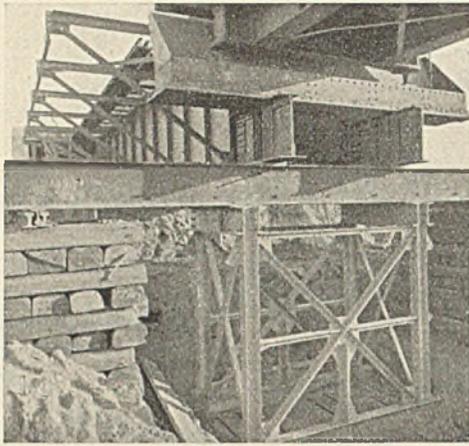


Abb. 27.

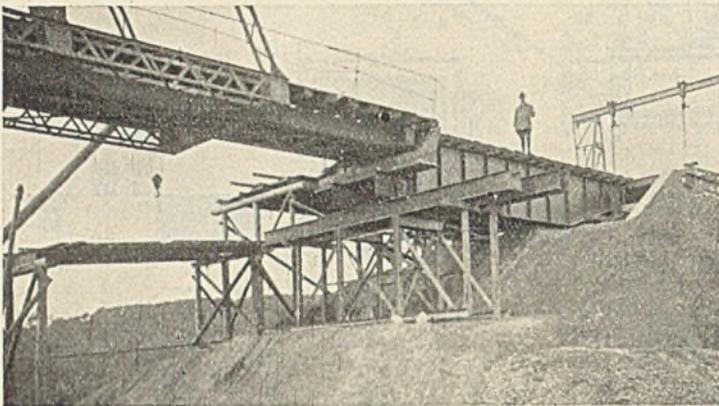


Abb. 28.

wendet; die Lager des Überbaues wurden durch eingezogene Quer- und Längsträger unterstützt. Die Blechträger stützten sich einerseits auf die vorläufig stehengebliebenen östlichen Pfeilerhälften, mit denen sie durch einbetonierte U-Eisen verankert wurden, und andererseits auf eiserne Bockgerüste (Abb. 30 u. 26). Diese sind auf Walzträger gesetzt, die den Druck teils auf das alte Pfeilermauerwerk, teils auf den Beton der Pfeilerringe übertragen. Dabei wurde durch Einschaltung von Verteilungsträgern Sorge getragen, daß die Druckübertragung an den Stellen des Ringbetons stattfand, die durch Pfähle unterstützt waren (Abb. 30, 31 u. 26). Die Fußpunkte der Böcke wurden durch

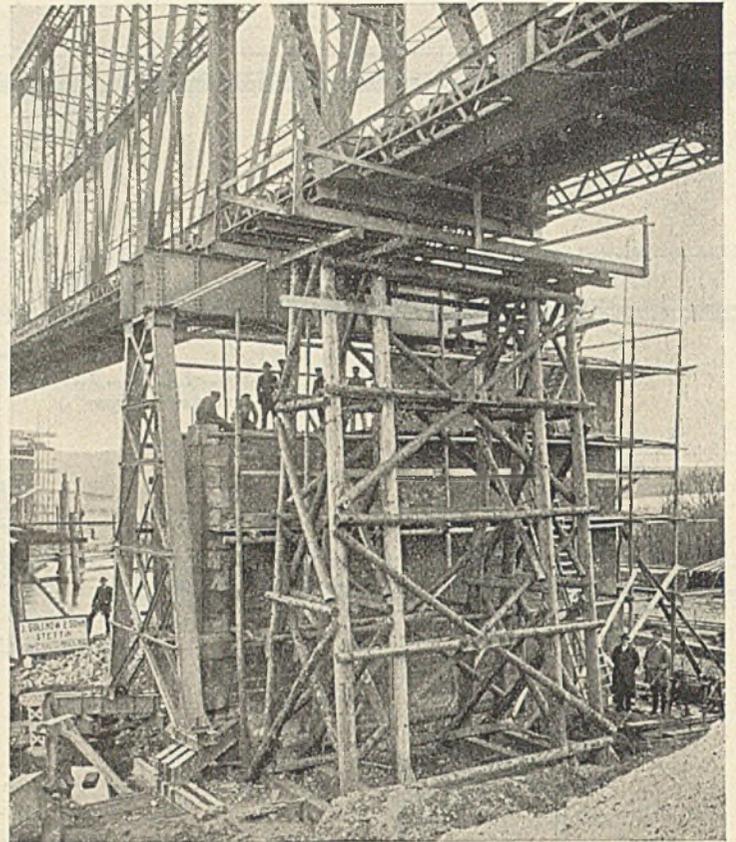


Abb. 30.

kräftige Anker mit den im Ringbeton angeordneten Ankerbarren verbunden. Am festen Auflager wurde durch Einziehen von vier Streben, die an die Schwellenträger des Überbaues und die Abfangträger angeschlossen wurden, ein behelfsmäßiger Bremsverband geschaffen (Abb. 26).

Die Beseitigung der Auflagersteine, die vorher freizulegen waren, und das Absetzen des Überbaues auf die Abfangträger geschah in einer Betriebspause. Der Überbau wurde mit Druckwasserpumpen von hölzernen Böcken angehoben, die unter dem ersten Knotenpunkt des Kragarms angeordnet wurden (Abb. 26 u. 30). Die Schrägen, deren Querschnitt aus zwei Flacheisen 612×12 bestand, wurden durch Einziehen von zwei U-Eisen ausgesteift, die durch Bindebleche verbunden waren und tief in die Knotenbleche hineinreichten.

Nachdem der Überbau abgefangen war, konnte mit dem Abbruch der westlichen Pfeilerhälften begonnen werden.

Die Auswechslung der Überbauten und die Ausführung der damit verbundenen umfangreichen Nebenarbeiten erforderte die Sperrung der Strecke Ende März 1925 auf drei Tage, was sich mit Rücksicht auf den geringen Verkehr durchführen ließ, zumal der Durchgangsverkehr umgeleitet werden konnte. Umsteigen an der Baustelle war nicht möglich.

Am ersten Tage wurde der alte Überbau ausgeschoben. Die aus zwei I-Trägern bestehende Verschiebbahn für den alten Überbau wurde



Abb. 29.

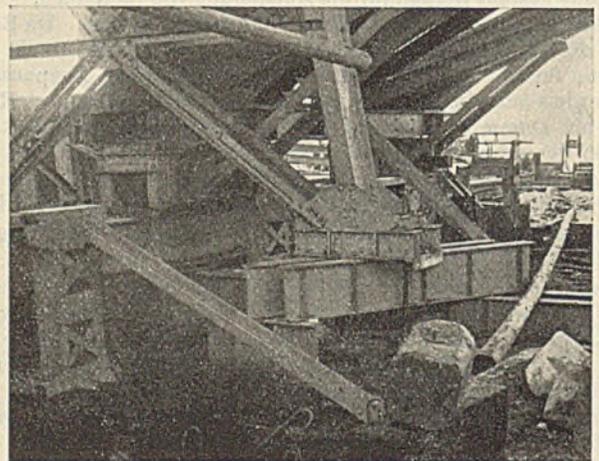


Abb. 31.

auf die dafür vorge-
schenen Querträger der
Abfanträger gelegt,
nachdem die Auflager
ausgebaut waren. Da-
bei wurde der alte
Überbau wieder von
den hölzernen Gerüst-
böcken aus angehoben.
Über den östlichen
Pfeilerhälften war die
Verschubbahn mit
Hartholzklotzen unter-
stützt (Abb. 26). Der
Überbau rollte auf Fluß-
stahlrollen, deren Ab-
stände voneinander ge-
wahrt wurden durch
Schellen, die über ge-
nau in Rollenmitte ein-
geschraubte Bolzen ge-
legt wurden. Die
hölzernen Gerüstböcke,
die mit Einbau der
Verschubbahn ihren
Zweck erfüllt hatten



Abb. 32.

regelten. Sofort nach
beendeter Verschie-
bung wurden die eiser-
nen Gerüste, auf denen
der alte Überbau ge-
stützt war, mit Hilfe
von Schwenkbäumen
abgebrochen, die vor-
her an den Auflager-
pfosten angebracht
waren (Abb. 32). Die
Beseitigung dieser ins-
gesamt rd. 50 t schwe-
ren Hilfskonstrukti-
onen beanspruchte auf
diese Weise nur einige
Stunden.

Am zweiten Tage
wurde der neue Über-
bau eingeschoben. Die
Verschubbahn wurde,
soweit sie nicht auf
dem Pfeilermauerwerk
auflag, durch ge-
rammte Pfähle unter-
stützt. Der Überbau

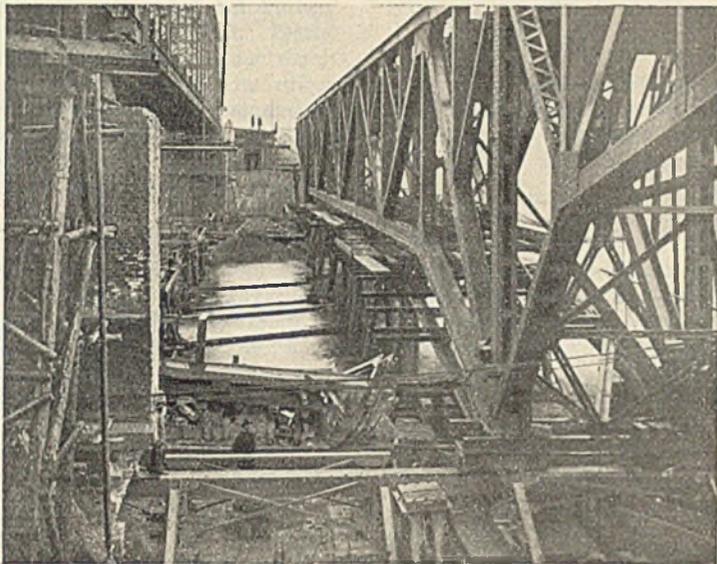


Abb. 33.

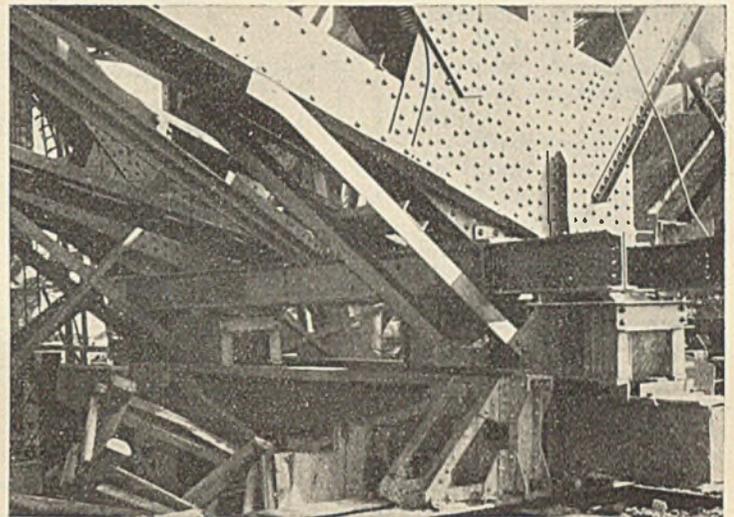


Abb. 34.

und vor Einschoben
des neuen Überbaues
beseitigt sein mußten,
wurden am alten Über-
bau aufgehängt und
mit diesem verschoben
(Abb. 32). Schlepp-
träger und Dammträger
wurden durch eine
einfache Vorrichtung
(Abb. 26) ebenfalls am
alten Überbau ange-
hängt. Der Verschiebe-
vorgang selbst dauerte
28 Min. Die Bewe-
gung geschah durch je
eine 3-t-Winde mit ein-
geschaltetem Flaschen-
zug auf jedem Ufer.
Die Gleichmäßigkeit
der Bewegung des
Überbaues wurde über-
wacht durch an beiden
Pfeilern angebrachte
Meßplatten, an denen
Beobachter standen
und durch Zuruf die
Arbeit an den Winden

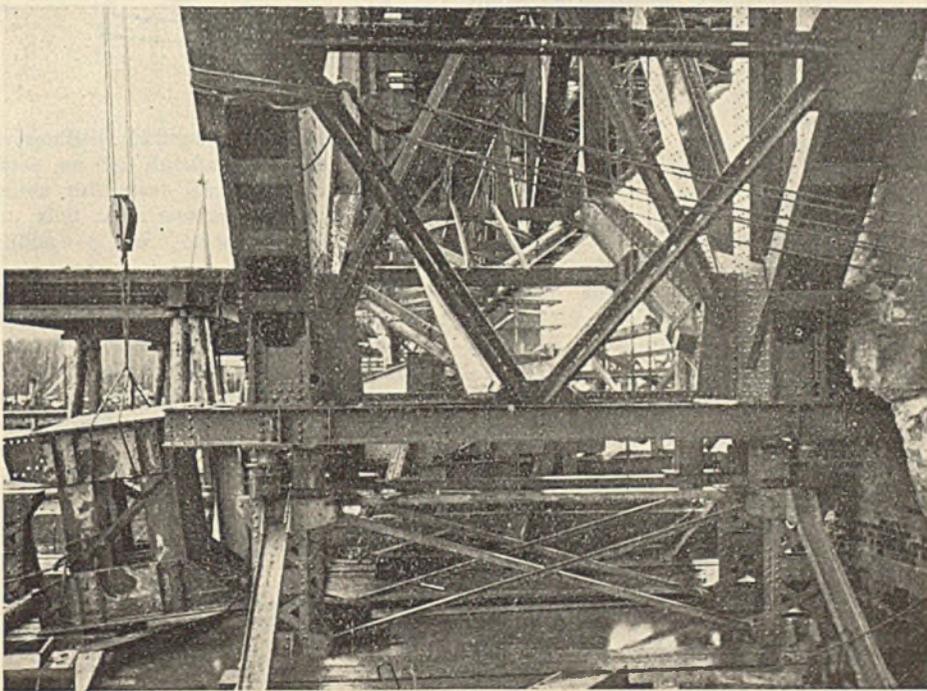


Abb. 35.

war auf besondere Ver-
schubwagen gesetzt³⁾
(Abb. 33 u. 34). Der
Antrieb geschah mit je
zwei 3-t-Winden mit
zwischengeschalteten
Flaschenzügen an
jedem Ufer, wodurch
eine außerordentlich
ruhige und gleich-
mäßige Bewegung des
Überbaues erzielt
wurde. Der Verschiebe-
vorgang dauerte eben-
falls nur eine knappe
halbe Stunde. Für
die Überwachung der
Gleichmäßigkeit der Be-
wegung waren die glei-
chen Maßnahmen ge-
troffen wie beim Ver-
schieben des alten Über-
baues. Die Schlepp-

³⁾ Beschreibung der
Verschubwagen siehe
„Die Bautechnik“ 1924,
Heft 52, S. 593.

trägereile vom Ende des Kragarms bis zum Aufstellungsstoß waren durch eine ähnliche Vorrichtung wie bei dem alten Überbau an den Kragarmen aufgehängt und wurden mit dem Überbau verschoben. Nach der Verschiebung wurden nach Beseitigung der Verschubbahn die Standböcke und die Lager eingebaut. Dabei wurde der Überbau mit den Pressen von den für diesen Zweck vorgesehenen Pumpenböcken aus angehoben (Abb. 35). Die Abbildung läßt auch die Aussteifung des Knotenblechs über dem Angriffspunkt der Pressen erkennen; neben den Pressen wurden Unterstützungen vorgesehen für den Fall, daß eine Presse versagen sollte. Auf dem Bilde links ist einer der Standböcke für die Unterstützung der Lager sichtbar. Zwischen Auflager und den Standböcken sowie zwischen letzteren und dem Widerlagermauerwerk wurden 5 mm starke Hartbleiplatten eingeschaltet.

Am dritten Tage wurden die Verstreben und Verankerungen an den Lagerböcken eingebaut, die Schleppträgerstöße vernietet und die restlichen Oberbauarbeiten ausgeführt.

Trotz des teilweise sehr ungünstigen Wetters gelang es, alle diese umfangreichen Arbeiten so zeitig zu beenden, daß am dritten Tage gegen Abend die Probelastung ausgeführt werden konnte, die ein in jeder Hinsicht befriedigendes Ergebnis hatte.

Die recht schwierigen und verwickelten Verschiebungsarbeiten verliefen dank der vorzüglichen Vorbereitungen der Firma J. Gollnow & Sohn planmäßig ohne jeden Zwischenfall. Der Einschiebung des neuen Überbaues wohnten die Herren Staatssekretär Kumbier und Dr.-Ing. ehr. Schaper sowie einige Herren von der Hauptverwaltung der Deutschen Reichsbahn-Gesellschaft und von der R. B. D. Schwerin bei.

Die technische Oberleitung des Baues lag in den Händen des Dezernenten für Brückenbau der R. B. D. Schwerin, Reichsbahnoberrat Wolgast. Die Sachbearbeitung oblag dem Verfasser. Die Bauleitung wurde durch den Vorstand des Ba. Rostock, Reichsbahnrat Felix Müller und die Bauaufsicht durch den Reichsbahnbauführer Schau ausgeübt.

Die Gesamtkosten beliefen sich auf rd. 500 000 Mark, wovon 240 000 Mark auf die Eisenkonstruktion einschl. Aufstellung entfallen.

Ein von der Firma J. Gollnow & Sohn angefertigtes Modell i. M. 1:50, das den Zustand unmittelbar vor Ausschlebung des alten Überbaues wiedergibt, ist auf der Verkehrsausstellung in München 1925 ausgestellt.

Die Berechnung von eisernen Überbauten mit drei Hauptträgern.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Reichsbahnrat Lowerenz, Königsberg i. Pr.

I. Einleitung.

Bei der Nachrechnung der älteren eisernen Eisenbahnbrücken stößt man zuweilen auf Brückensysteme, die nicht wie gewöhnlich aus zwei gleichen Tragwänden bestehen, sondern drei Tragwände enthalten, eine stärkere Mittelwand und zwei schwächere, aber einander gleiche Außenwände, eine Bauart, die auch bei Straßenbrücken bisweilen angewendet worden ist (Abb. 1). Oftmals mögen solche Systeme einer notwendig gewordenen Brückenverstärkung ihre Entstehung verdanken, die durch nachträglichen Einbau eines dritten Trägers bewirkt wurde. Häufig ist wohl die Ursache eine außergewöhnlich knappe Bauböhe gewesen, die eine Lösung mit möglichst geringer Querträgerhöhe und daher auch mit möglichst kurzen Querträgern verlangt hat. Heute ist man von dieser Lösung mehr abgekommen und zieht im allgemeinen vor, statt dessen zwei getrennte Überbauten nebeneinander zu legen. Immerhin kann es auch heute noch Fälle geben, z. B. wenn die Breite des Bauwerks aus örtlichen Gründen beschränkt werden muß, in denen sich die Anordnung von drei Trägern empfiehlt.

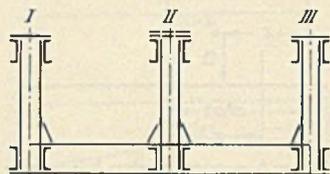


Abb. 1.

II. Allgemeine Beschreibung des Berechnungsganges.

Gewöhnlich findet man in den Berechnungen die Auffassung vertreten, daß der Mittelträger bei voller Belastung in ganzer Fahrbahnbreite durch Verkehrslasten das Doppelte eines Randträgers aufzunehmen hat, also die Hälfte der Gesamtlast. Dieser Auffassung kann nur dann unbedenklich zugestimmt werden, wenn ein oder beide Querträger am mittleren Hauptträger gelenkig angeschlossen sind. Hier kann jeder der beiden Querträger unabhängig als einfacher Balken auf zwei Stützen aufgefaßt werden (Abb. 2). Infolge der Gelenke können sich die drei Träger verschieden stark durchbiegen,

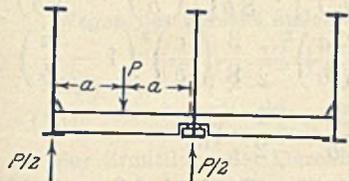


Abb. 2.

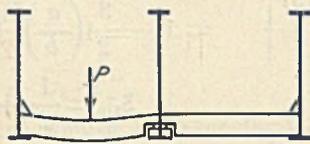


Abb. 3.

ohne daß in den Querträgern wesentliche Zwängungsspannungen auftreten. Die steifen Eckanschlüsse an den Randträgern, die ja auch bei den gewöhnlichen Überbauten mit zwei Hauptträgern im allgemeinen vernachlässigt werden, sind ohne wesentlichen Einfluß, da die Randträger sich bei Durchbiegung der Querträger nach innen neigen (Abb. 3).

Wesentlich anders liegen jedoch die Verhältnisse, wenn die Querträger ohne Gelenke angeschlossen sind. Wenn man von einer geringen, sehr schwer zu schätzenden Nachgiebigkeit der Niete absieht, so muß der Querträger hier zweifellos als durchgehender Träger auf drei Stützen aufgefaßt werden, denn ein Schrägstellen des Mittelträgers ist hier nicht möglich, namentlich nicht bei Belastung beider Querträgerhälften.

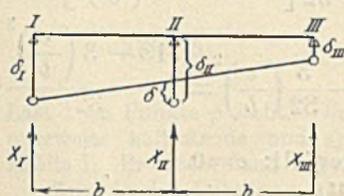


Abb. 4.

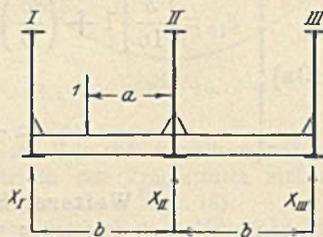


Abb. 5.

Nun darf bei Ermittlung der Stützenkräfte X_I, X_{II}, X_{III} nicht übersehen werden, daß die Durchbiegung der drei Hauptträger je nach dem Belastungsfall ganz verschieden ausfällt und daß die drei Stützpunkte eines Querträgers sich im allgemeinen nicht gleichmäßig senken. Die relative Durchbiegung der Mittelstütze des Querträgers zur Verbindungslinie der Außenstützen $\delta = \delta_{II} - \frac{1}{2}(\delta_I + \delta_{III})$ (Abb. 4) muß also bei Berechnung der X-Kräfte in Rechnung gestellt werden. Die Werte δ_I usw. sind aber wieder von der Belastung der einzelnen Hauptträger, demnach von den unbekanntem X-Kräften abhängig.

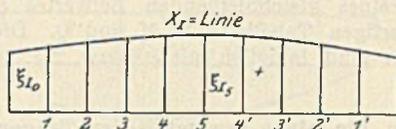


Abb. 6.

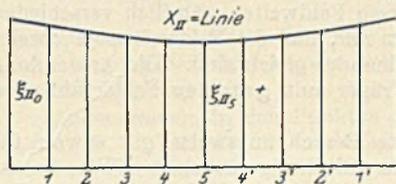


Abb. 7.

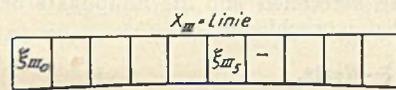


Abb. 8.

Es scheint daher, als ob die Lösung der Aufgabe, für eine gegebene Brückenbelastung die Knotenpunktlasten X der drei einzelnen Träger zu finden, auf große Schwierigkeiten stößt. Im folgenden wird jedoch gezeigt, wie man mit Hilfe gewisser vereinfachender Annahmen eine praktisch brauchbare Lösung erzielt.

Wir denken uns eine über die Brücke wandernde Einzellast von der Größe 1, die zwischen den Hauptträgern I und II im Abstände a von letzterem angreift, und ermitteln, wie in den späteren Abschnitten gezeigt wird, für jede Knotenpunktstellung dieser Last die statisch unbestimmte Größe X_{II} , woraus sich dann ohne weiteres

auch X_I und X_{III} ergeben (Abb. 5). Trägt man die gefundenen Werte für jeden Träger von einer Wagerechten aus in den einzelnen Knotenpunkten auf, so stellen die dadurch entstehenden Kurven die Einflußlinien der Knotenpunktlasten dar (Abb. 6 bis 8).

Bezeichnet man die Ordinaten dieser Linien mit $\xi_I, \xi_{II}, \xi_{III}$, so ist für einen beliebigen Knotenpunkt m

$$(1) \quad \xi_{Im} = \frac{b+a}{2b} - \frac{1}{2} \cdot \xi_{IIIm}$$

$$(2) \quad \xi_{IIIIm} = \frac{b-a}{2b} - \frac{1}{2} \cdot \xi_{IIIm}$$

$$(3) \quad \xi_{Im} + \xi_{IIIm} + \xi_{IIIIm} = 1.$$

max ξ_I tritt ein, wenn die Last nur zwischen den Trägern I und II steht, da eine Last zwischen II und III bekanntlich den Träger I entlastet. max ξ_{II} tritt ein, wenn beide Querträgerhälften belastet werden. Ist die Belastung symmetrisch zum Mittelträger angeordnet, so erhält dieser die Knotenpunktlast $2 \xi_{II}$.

Will man nun die Biegemomente und Querkräfte der Träger möglichst genau berechnen, so scheidet die Benutzung von fertigen Tabellen aus. Vielmehr müssen die Einflußlinien für M_m und Q_m neu ermittelt werden, indem die normalen Einflußordinaten der betreffenden Fläche mit $2 \xi_{IIIm}$ bzw. mit ξ_{IIIm} vervielfältigt werden. Mit Hilfe dieser reduzierten Einflußlinien sind dann die ungünstigsten Laststellungen und damit die Größtwerte der M_m und Q_m zu bestimmen. Z. B. zeigt Abb. 9 die alte und neue Einflußlinie für M_1 des Trägers II.

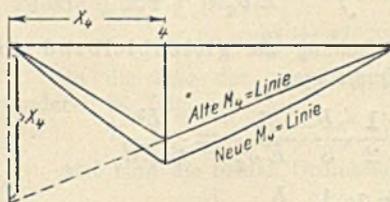


Abb. 9.

In den meisten Fällen sind die Linien der Abb. 6 bis 8 verhältnismäßig flache Kurven, so daß es unbedenklich ist, für sämtliche Knotenpunkte eines Trägers das gleiche ξ anzunehmen. Will man hierbei möglichst sicher gehen, so wählt man den Wert von ξ , der die ungünstigsten Werte für M und Q liefert. Ob dieser Wert am Auflager oder in der Mitte auftritt, kann je nach den Querschnittsabmessungen der Brücke verschieden sein. Will man dagegen einen zu großen Materialaufwand ersparen bzw. bei der Nachrechnung bestehender Brücken die Errechnung zu ungünstiger Beanspruchungen vermeiden, so empfiehlt sich die Bestimmung eines durchschnittlichen ξ -Wertes für jeden Träger. Bei der Bestimmung der Momente ist hierbei zu beachten, daß bei ungünstigster Laststellung die größten Lasten eines Zuges mehr in der Mitte des Trägers stehen, so daß die ξ -Werte in Trägermitte zur Festsetzung des Mittelwertes stärker heranzuziehen sind als die ξ -Werte an den Trägerenden. Bezeichnet ξ_0 den Wert über den Auflagern, ξ_M den Wert in Trägermitte, so empfiehlt es sich, für den durchschnittlichen Wert ξ' folgende Formel anzuwenden:

$$(4) \quad \xi' = \frac{\xi_0 + 4 \xi_M}{5}$$

Für den Träger II ist, wie oben ausgeführt, mit dem Beiwert $2 \xi'$ zu rechnen. Die Einführung eines gleichbleibenden Beiwertes ξ' gestattet die Benutzung der fertigen Tabellen für M und Q . Die aus diesen entnommenen Zahlen sind lediglich mit ξ' bzw. $2 \xi'$ zu vervielfältigen.

III. Berechnung der X -Linien für einen symmetrischen Träger.

Damit die Rechnung sowohl für Träger mit gerader wie auch mit ungerader Felderzahl gilt, wird ein Trägersystem mit ungerader Felderzahl zugrunde gelegt, dessen Feldweiten sämtlich verschieden sein können. Bedingung bleibt nur, daß die Feldweiten je zweier symmetrisch liegender Felder einander gleich sind. Die Anwendung der Rechnungsergebnisse auf Träger mit gerader Felderzahl wird später gezeigt.

Die nachstehend entwickelte Berechnungsweise gilt sowohl für Fachwerkbrücken wie auch für Blechträgerbrücken. Wie bereits erwähnt, sind die X -Linien gewöhnlich ziemlich flache Kurven. Zur Vereinfachung der Rechnung genügt es daher, den Wert ξ_0 am Auflager und ξ_M in Trägermitte zu berechnen und die Endpunkte der drei Ordinaten durch eine Parabel zu verbinden.

1. ξ_0 -Werte.

a) Da am Auflager keine Durchbiegung der Hauptträger in Frage kommt, kann der Endquerträger als Träger auf drei starren Stützen

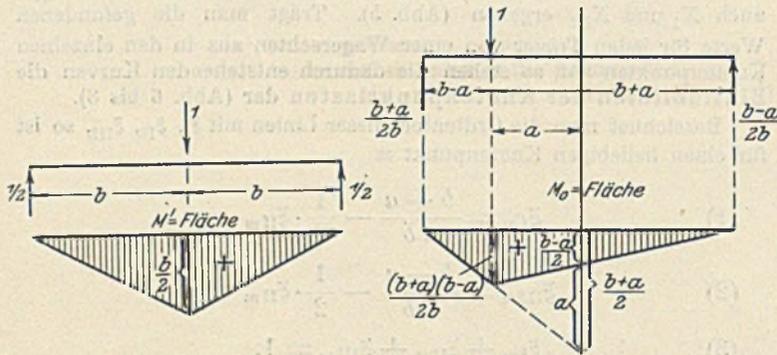


Abb. 10. Zustand $X' = -1$.

Abb. 11. Zustand $X' = 0$.

berechnet werden. Wenn X_{II} als statisch unbestimmte Größe X' eingeführt wird, so ist das statisch bestimmte Hauptsystem ein Träger auf zwei Stützen (Abb. 10 u. 11).

$$X' \int \frac{M'^2 dx}{E J_q} = \int \frac{M_0 M' dx}{E J_q}$$

J_q bedeutet das zur Vereinfachung als gleichbleibend angenommene Trägheitsmoment des Querträgers.

$$(5) \quad \int \frac{M'^2 dx}{E J_q} = 2b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{E J_q} = \frac{b^3}{6 E J_q}$$

$$\int \frac{M_0 M' dx}{E J_q} = b \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{E J_q}$$

$$+ b \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{E J_q} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{E J_q}$$

$$(6) \quad \int \frac{M_0 M' dx}{E J_q} = \frac{b^3}{6 E J_q} - \frac{a^2}{12} (3b-a) \frac{1}{E J_q}$$

$$X' = X_{II} = \frac{\int \frac{M_0 M' dx}{E J_q}}{\int \frac{M'^2 dx}{E J_q}} = 1 - \frac{a^2 (3b-a)}{12 b^3}$$

$$= 1 - \frac{a^2 (3b-a)}{2 b^3} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(3 - \frac{a}{b}\right)$$

$$(7) \quad X_{II} = \xi_{II0} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(3 - \frac{a}{b}\right)$$

$$X_I = \frac{b+a}{2b} - \frac{X_{II}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(3 - \frac{a}{b}\right)$$

$$(8) \quad X_I = \xi_{I0} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(3 - \frac{a}{b}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)$$

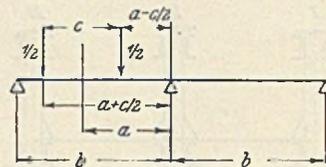


Abb. 12.

b) Wirkt die Last 1 nicht unmittelbar auf den Querträger, sondern durch Vermittlung von zwei Längsträgern im Abstände c , von denen jeder die Kraft $1/2$ überträgt, so berechnet sich $\int M_0 M' dx$ aus obiger Formel, indem man sie für jede der beiden Kräfte $1/2$ anwendet und die erhaltenen Werte zusammenzieht.

$$(8a) \quad \int M_0 M' dx = \frac{1b^3}{2 \cdot 6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}{12} \left[3b - \left(a + \frac{c}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{b^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a - \frac{c}{2}\right)^2}{12} \left[3b - \left(a - \frac{c}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{b^3}{6} - \frac{b}{16} (4a^2 + c^2) + \frac{a}{48} (4a^2 + 3c^2)$$

Folglich ist

$$\xi_{II0} = \frac{\int M_0 M' dx}{\int M'^2 dx}$$

$$(9) \quad \xi_{II0} = 1 - \frac{3}{8} \left[4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right] + \frac{1a}{8b} \left[4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3 \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{3}{8} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

$$\xi_{I0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \cdot \xi_{II0}$$

$$(10) \quad \xi_{I0} = \frac{3}{16} \left[4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right] + \frac{1}{16} \cdot \frac{a}{b} \left[8 - 4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3 \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{3}{16} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

Sonderfall: $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

$$(9a) \quad \xi_{II0} = 1 - \frac{3}{8} \left[1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right] + \frac{1}{16} \left[1 + 3 \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]$$

$$= \frac{11}{16} - \frac{3}{16} \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{11 - 3 \left(\frac{c}{b}\right)^2}{16}$$

$$(10a) \quad \xi_{I0} = \frac{3}{16} \left[1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right] + \frac{1}{32} \left[8 - 1 - 3 \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]$$

$$= \frac{13}{32} - \frac{3}{32} \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{13 - 3 \left(\frac{c}{b}\right)^2}{32}$$

Weiterer Sonderfall: $c=0$.

$$(9b) \quad \xi_{II0} = \frac{11}{16}$$

$$(10b) \quad \xi_{I0} = \frac{13}{32}$$

2. ξM -Werte.

a) Die Kraft 1 greife in Trägermitte zwischen den Trägern I und II an. Durch die Längsträger wird sie auf die zwei mittleren Quer-

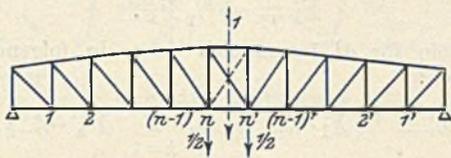


Abb. 13.

träger verteilt, so daß an jedem dieser beiden Querträger die Kraft $1/2$ wirkt (Abb. 13). In den Punkten n und n' werden in den drei Hauptträgern die unbekanntes Knotenlasten $1/2 X_I$, $1/2 X_{II}$, $1/2 X_{III}$ erzeugt.

Es darf nicht übersehen werden, daß auch in den übrigen Knotenpunkten der Träger Knotenlasten auftreten, obwohl hier keine äußeren Lasten vorhanden sind. Denn die drei Hauptträger biegen sich verschieden stark durch, so daß jeder Querträger der ungleichen Stützensenkung entsprechend verbogen wird. Dies ist aber nur möglich, wenn Stützendrücke auftreten.

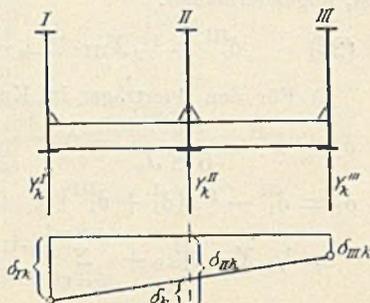


Abb. 14.

Bezeichnet man für einen beim Knotenpunkt k liegenden Querträger die Stützendrücke mit Y_k^I , Y_k^{II} , Y_k^{III} , die Stützensenkungen mit δ_{Ik} , δ_{IIk} , δ_{IIIk} und die relative Stützensenkung der Mittelstütze mit δ_k (Abb. 14), so ist

$$\delta_k = \int \frac{M_0 M'}{E J_q} dx - Y_k^{II} \int \frac{M'^2}{E J_q} dx$$

$$\int \frac{M_0 M'}{E J_q} dx = 0, \text{ da äußere Kräfte fehlen.}$$

$$\int \frac{M'^2}{E J_q} dx = \frac{b^3}{6 E J_q} \text{ (vergl. Formel 5).}$$

$$(11) \quad \delta_k + Y_k^{II} \cdot \frac{b^3}{6 E J_q} = 0.$$

$$(12) \quad \delta_k = \delta_k^{II} - 1/2 (\delta_k^I + \delta_k^{III}).$$

Wegen des Fehlens äußerer Kräfte ist ferner

$$Y_k^I + Y_k^{II} + Y_k^{III} = 0.$$

Also folgt

$$(13) \quad Y_k^I = Y_k^{III} = -1/2 \cdot Y_k^{II}.$$

Zur Ermittlung der Durchbiegungen werden in bekannter Weise mit Hilfe der W -Gewichte die Einflußlinien für δ_k^I , δ_k^{II} , δ_k^{III} berechnet, die ja gleichbedeutend sind mit den Biegelinien für den Fall, daß die Kraft 1 in den Knotenpunkten k_I , k_{II} oder k_{III} angreift.

b) Bevor wir auf die Berechnung der δ_k -Werte im einzelnen eingehen, werde ein allgemein gültiger Satz entwickelt, der geeignet ist, die folgende Rechnung wesentlich zu vereinfachen.

Bekanntlich gilt der Satz, daß die Durchbiegung δ_{pq} eines Punktes p , die von einer im Punkte q auftretenden Last 1 herrührt, ebenso groß ist wie die Durchbiegung δ_{qp} des Punktes q , wenn die

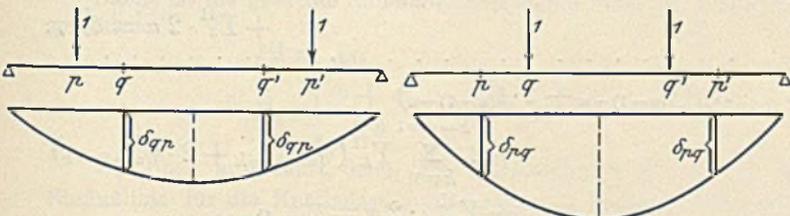


Abb. 15.

Abb. 16.

Last 1 im Punkte p steht. Dieser Satz läßt sich erweitern auf zwei paarweise auftretende und symmetrisch zur Trägermitte stehende Kräfte 1. Er lautet dann folgendermaßen (Abb. 15 u. 16):

Zwei in den Punkten p und p' symmetrisch angreifende Lasten 1 rufen in den Punkten q und q' die gleiche Durchbiegung hervor, wie

zwei in den Punkten q und q' wirkende Lasten 1 sie in den Punkten p und p' erzeugen. Der Beweis ist mit Hilfe der bekannten Arbeitsgleichung

$$\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$$

sehr einfach.

Zunächst nimmt man Q und S aus dem ersten (Abb. 15), δ und Δs aus dem zweiten Belastungsfall (Abb. 16).

Es ergibt sich

$$2 \cdot 1 \delta_{pq} = \Sigma S_p \Delta s_q = \Sigma S_p \cdot \frac{S_q s}{E F}.$$

Jetzt nimmt man Q und S aus dem zweiten, δ und Δs aus dem ersten Belastungsfall:

$$2 \cdot 1 \delta_{qp} = \Sigma S_q \Delta s_p = \Sigma S_q \cdot \frac{S_p s}{E F}.$$

$$(14) \quad \begin{aligned} 2 \delta_{pq} &= 2 \delta_{qp} \\ \delta_{pq} &= \delta_{qp}. \end{aligned}$$

In Abb. 17 u. 18 seien für einen beliebigen Träger die Einflußlinien für δ_p und δ_q gezeichnet. Die Ordinaten dieser Linien werden mit η

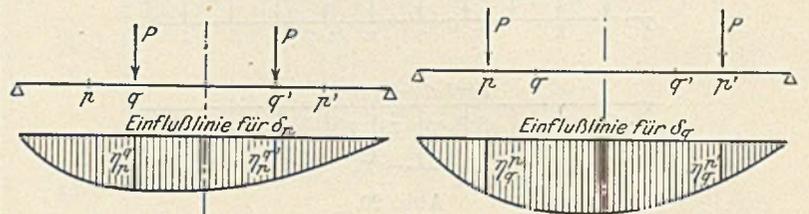


Abb. 17.

Abb. 18.

bezeichnet, der untere Index von η kennzeichnet den Punkt, dessen Durchbiegung bestimmt werden soll, der obere Index den Punkt, in dem die Last angreift.

Angenommen, in den Punkten q und q' wirken zwei gleich große Lasten P , so ist die dadurch in den Punkten p und p' hervorgerufene Durchbiegung nach Abb. 17:

$$\delta_{pq} = P (\eta_p^q + \eta_p^{q'}).$$

Angenommen, die Lasten P greifen in den Punkten p und p' an, so ist die dadurch in den Punkten q und q' entstehende Durchbiegung nach Abb. 18:

$$\delta_{qp} = P (\eta_q^p + \eta_q^{p'}).$$

Da aber, wie vorher bewiesen, $\delta_{pq} = \delta_{qp}$ sein muß, so folgt:

$$(15) \quad \eta_p^q + \eta_p^{q'} = \eta_q^p + \eta_q^{p'}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\eta_p^q + \eta_p^{q'} = \eta_{p-q}$$

$$\eta_q^p + \eta_q^{p'} = \eta_{q-p}$$

Es folgt demnach:

$$(16) \quad \eta_{p-q} = \eta_{q-p}.$$

Der Ausdruck η_{p-q} läßt sich noch in anderer Weise deuten.

Denken wir uns die beiden Einflußlinien für die Durchbiegung in p und p' übereinander aufgetragen, so erhalten wir eine neue, und zwar symmetrisch verlaufende Linie (Abb. 19). Die Ordinate dieser Linie unterhalb der Punkte q und q' ist

$$\eta_p^q + \eta_p^{q'} = \eta_p^{q'} + \eta_p^q.$$

Da die eine der ursprünglichen Linien das Spiegelbild der anderen ist, folgt

$$\eta_p^q = \eta_p^{q'} \text{ und } \eta_p^{q'} = \eta_p^q.$$

Also sind die beiden Ordinaten der dritten Linie

$$= \eta_p^q + \eta_p^q, \text{ d. h. } = \eta_{p-q}.$$

Die neue Linie ist die Einflußlinie für die Durchbiegung der Punkte p und p' , wenn über den Träger in symmetrischer Stellung zueinander zwei Kräfte 1 wandern.

Der Ausdruck η_{p-q} bedeutet die Ordinate dieser Einflußlinie in den Punkten q und q' .

Wir erhalten diese Linie als die Summe der beiden übereinander gelagerten Biegungslinien für den Angriff der Kraft 1 im Punkte p bzw. p' .

Statt dessen kann man diese Linie noch einfacher als die Biegungslinie des Trägers finden, wenn in beiden Punkten p und p' die Last 1 angreift (symmetrischer Belastungsfall).

c) Die vorstehende Entwicklung wenden wir nun auf die vorliegende Aufgabe an, wobei die η_{p-q} -Werte der drei Hauptträger zur Kennzeichnung den Index I, II oder III erhalten.

Aus der vollen Gleichheit der Träger I und III folgt ohne weiteres

$$(17) \quad \eta_{p-q}^I = \eta_{p-q}^{III}$$

Wir ermitteln zunächst die Durchbiegungen des Trägers II. Die Belastung mit den noch unbekanntenen Knotenlasten zeigt Abb. 20.

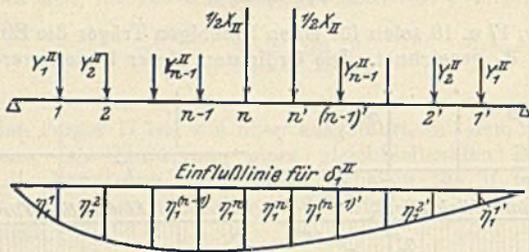


Abb. 20.

Wegen der Symmetrie der äußeren Belastung der Brücke (Last 1 in Brückenmitte) müssen je zwei symmetrisch stehende Knotenlasten Y einander gleich sein.

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_1^{II} &= \delta_1^{II'} = Y_1^{II} \cdot \eta_{1-1}^{II} + Y_2^{II} \cdot \eta_{1-2}^{II} + Y_3^{II} \cdot \eta_{1-3}^{II} \\ &+ \dots + Y_{n-1}^{II} \cdot \eta_{1-(n-1)}^{II} + 1/2 X^{II} \cdot \eta_{1-n}^{II} \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeuten (unter vorübergehender Fortlassung des Index II):

$$\begin{aligned} \eta_{1-1} &= \eta_1^I + \eta_1^{I'} \\ \eta_{1-2} &= \eta_2^I + \eta_2^{I'} = \eta_2^I + \eta_2^{I'} \\ \eta_{1-3} &= \eta_3^I + \eta_3^{I'} = \eta_3^I + \eta_3^{I'} \text{ usw.,} \\ \eta_{1-n} &= \eta_n^I + \eta_n^{I'} = \eta_n^I + \eta_n^{I'} \end{aligned}$$

Der Ausdruck δ_1^{II} läßt sich in folgende abgekürzte Form bringen:

$$(19) \quad \delta_1^{II} = 1/2 X_{II} \cdot \eta_{1-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{1-k}^{II}$$

Entsprechend ergeben sich für die übrigen δ^{II} -Werte nachstehende Formeln:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2^{II} &= 1/2 X_{II} \cdot \eta_{2-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{2-k}^{II} \\ \delta_3^{II} &= 1/2 X_{II} \cdot \eta_{3-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{3-k}^{II} \\ &\dots \\ \delta_{n-1}^{II} &= 1/2 X_{II} \cdot \eta_{(n-1)-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{(n-1)-k}^{II} \\ \delta_n^{II} &= 1/2 X_{II} \cdot \eta_{n-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{n-k}^{II} \end{aligned} \right.$$

Diese Gruppe von n Gleichungen läßt sich in sehr einfacher Weise durch eine einzige Formel, wie folgt, ersetzen:

$$(20) \quad \delta_r^{II} = 1/2 X_{II} \cdot \eta_{r-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^{II}$$

in der r alle ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft.

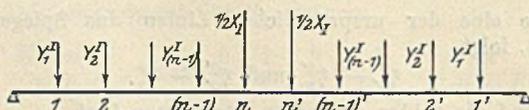


Abb. 21.

Jetzt wenden wir uns zur Ermittlung der Durchbiegungen für den Träger I. Der Belastungszustand ist aus Abb. 21 ersichtlich.

Die Werte δ^I erhält man auf sehr einfache Weise, indem man in den obigen Formeln den Index II durch I ersetzt.

Nach Gl. 13 ist

$$Y_k^I = -1/2 Y_k^{II}$$

Die Formeln für δ^I lassen sich daher in folgender Gleichung zusammenfassen:

$$(21) \quad \delta_r^I = 1/2 X_I \cdot \eta_{r-n}^I - 1/2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^I$$

wo r wieder alle Werte von 1 bis n annimmt.

Die entsprechende Gleichung für δ^{III} des Trägers III lautet, wenn man beachtet, daß

$$Y_k^{III} = -1/2 Y_k^{II} \text{ und } \eta_k^{III} = \eta_k^I$$

ist, folgendermaßen:

$$(22) \quad \delta_r^{III} = 1/2 X_{III} \cdot \eta_{r-n}^I - 1/2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^I$$

d) Für den Querträger im Knotenpunkte 1 ist nach Gl. 11 u. 12

$$\delta_1 + Y_1^{II} \cdot \frac{b^3}{6 E J_q} = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_1^{II} - 1/2 (\delta_1^I + \delta_1^{III}) \\ &= 1/2 X_{II} \cdot \eta_{1-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{1-k}^{II} - 1/4 \cdot \eta_{1-n}^I (X_I + X_{III}) \\ &\quad + 1/2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{1-k}^I \end{aligned}$$

$$X_I + X_{III} = 1 - X_{II} \text{ (Abb. 22)}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1/2 X_{II} (\eta_{1-n}^{II} + 1/2 \cdot \eta_{1-n}^I) + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{1-k}^{II} + 1/2 \cdot \eta_{1-k}^I) \\ &\quad - 1/4 \cdot \eta_{1-n}^I \\ &= 1/2 X_{II} (\eta_{1-n}^{II} + 1/2 \cdot \eta_{1-n}^I) + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{1-k}^{II} + 1/2 \cdot \eta_{1-k}^I) \\ &\quad + Y_1^{II} \cdot \frac{b^3}{6 E J_q} = 1/4 \cdot \eta_{1-n}^I \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird mit 4 multipliziert.

$$\begin{aligned} X_{II} (\eta_{1-n}^I + 2 \cdot \eta_{1-n}^{II}) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{1-k}^I + 2 \cdot \eta_{1-k}^{II}) \\ + Y_1^{II} \cdot \frac{2 b^3}{3 E J_q} = \eta_{1-n}^I \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(23) \quad \alpha = \frac{b^3}{3 E J_q}$$

Die Gleichungen für die verschiedenen Querträger bei 1, 2 usw. bis $(n-1)$ lauten dann, wie folgt:

$$\begin{aligned} X_{II} (\eta_{1-n}^I + 2 \cdot \eta_{1-n}^{II}) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{1-k}^I + 2 \cdot \eta_{1-k}^{II}) \\ + Y_1^{II} \cdot 2 \alpha = \eta_{1-n}^I \\ X_{II} (\eta_{2-n}^I + 2 \cdot \eta_{2-n}^{II}) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{2-k}^I + 2 \cdot \eta_{2-k}^{II}) \\ + Y_2^{II} \cdot 2 \alpha = \eta_{2-n}^I \\ X_{II} (\eta_{3-n}^I + 2 \cdot \eta_{3-n}^{II}) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{3-k}^I + 2 \cdot \eta_{3-k}^{II}) \\ + Y_3^{II} \cdot 2 \alpha = \eta_{3-n}^I \\ \dots \\ X_{II} (\eta_{(n-1)-n}^I + 2 \cdot \eta_{(n-1)-n}^{II}) \\ + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{(n-1)-k}^I + 2 \cdot \eta_{(n-1)-k}^{II}) \\ + Y_{n-1}^{II} \cdot 2 \alpha = \eta_{(n-1)-n}^I \end{aligned}$$

Diese $(n-1)$ Gleichungen lassen sich in folgender Formel zusammenfassen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{II} (\eta_{r-n}^I + 2 \eta_{r-n}^{II}) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{r-k}^I + 2 \cdot \eta_{r-k}^{II}) \\ + Y_r^{II} \cdot 2 \alpha = \eta_{r-n}^I \end{aligned} \right.$$

r durchläuft hier alle ganzen Zahlen von 1 bis $(n-1)$.

Für die beiden mittleren Querträger (Knotenpunkte n und n') gilt folgende Gleichung:

$$(25) \quad \delta_n = \int \frac{M_0 M' dx}{E J_q} - X' \int \frac{M'^2 dx}{E J_q}$$

$\int \frac{M_0 M' dx}{E J_q}$ werde zur Abkürzung mit $\frac{\beta}{4}$ bezeichnet.

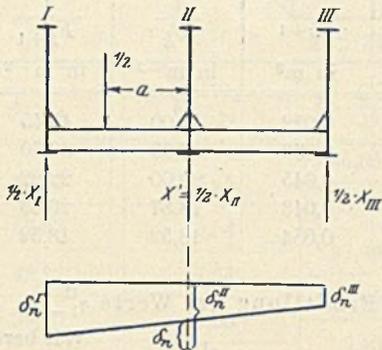


Abb. 22.

Die Auswertung von β geschieht später.
Nach Gl. 5 u. 23 ist

$$\int \frac{M'^2 dx}{E J_q} = \frac{b^3}{6 E J_q} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \delta_n &= \delta_n^{II} - \frac{1}{2} (\delta_n^I + \delta_n^{III}) \\ &= \frac{1}{2} X_{II} \cdot \eta_{n-n}^{II} + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{n-k}^{II} - \frac{1}{4} \cdot \eta_{n-n}^I (X_I + X_{III}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{n-k}^I \\ &= \frac{1}{2} X_{II} (\frac{1}{2} \cdot \eta_{n-n}^I + \eta_{n-n}^{II}) + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\frac{1}{2} \cdot \eta_{n-k}^I + \eta_{n-k}^{II}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot \eta_{n-n}^I \end{aligned}$$

Wenn man beachtet, daß $X' = \frac{1}{2} X_{II}$ ist, so folgt aus Gl. 25

$$\frac{1}{2} X_{II} (\frac{1}{2} \cdot \eta_{n-n}^I + \eta_{n-n}^{II}) + \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\frac{1}{2} \cdot \eta_{n-k}^I + \eta_{n-k}^{II}) - \frac{1}{4} \cdot \eta_{n-n}^I + X_{II} \cdot \frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{4}$$

Diese Gleichung wird mit 4 multipliziert.

$$(26) \quad \begin{cases} X_{II} (\alpha + \eta_{n-n}^I + 2 \cdot \eta_{n-n}^{II}) \\ + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{n-k}^I + 2 \cdot \eta_{n-k}^{II}) = \beta + \eta_{n-n}^I \end{cases}$$

Die Gruppengleichung 24 zusammen mit Gl. 26 sind n Gleichungen mit den n Unbekannten

$$X_{II} \text{ sowie } Y_1^{II} \text{ bis } Y_{(n-1)}^{II},$$

die sämtlich nur in der ersten Potenz vorkommen.

Die Lösung der Aufgabe ist also auf die Lösung von n Gleichungen mit n Unbekannten zurückgeführt.

Damit ist die gesuchte Einflußordinate in der Mitte des Trägers II gefunden.

$$\begin{aligned} \xi_{II}^{II} &= X_{II} \\ \xi_{II}^I &= \frac{b+a}{2b} - \frac{1}{2} X_{II} \end{aligned}$$

Wie oben ausgeführt, kann aus den Ordinaten ξ_0^{II} und ξ_{II}^{II} die Einflußlinie für die Knotenlasten des Trägers II durch Einschaltung einer Parabel gefunden werden (Abb. 23). Entsprechend läßt sich aus den Ordinaten ξ_0^I und ξ_{II}^I die Einflußlinie für die Knotenlasten der Träger I ermitteln.

e) In vielen Fällen wird die Annahme zulässig sein, daß das Verhältnis des Trägheitsmomentes des Trägers II zu dem des Trägers I für alle Knotenpunkte

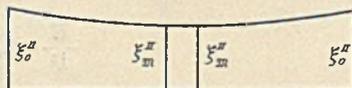


Abb. 23.

gleich ist. Bei Fachwerkträgern wäre hierbei als Trägheitsmoment im Punkte k angenähert

$$J_k = 2 F_k \cdot \frac{h_k^2}{4} = \frac{F_k h_k^2}{2}$$

anzunehmen, wo F_k den Inhalt des Gurtquerschnitts und h_k die Trägerhöhe beim Punkte k bedeutet. Nennen wir das gleichbleibende

Verhältnis $\frac{J_k^{II}}{J_k^I} = \varphi$, so müssen die Ordinaten der Biegelinie des

Trägers I für jeden beliebigen Belastungsfall das φ -fache der entsprechenden Ordinate des Trägers II sein, da ja bekanntlich die Größe der Durchbiegung eines Trägers umgekehrt proportional zur Größe seines Trägheitsmomentes ist. Daraus folgt allgemein

$$\begin{aligned} \eta^I &= \varphi \cdot \eta^{II} \\ \eta_{p-q}^I &= \varphi \cdot \eta_{p-q}^{II} \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichungen für die X - und Y -Werte nehmen dann folgende vereinfachte Fassung an:

$$(27) \quad \begin{cases} X_{II} \cdot \eta_{r-n}^{II} + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^{II} \\ + Y_r^{II} \cdot \frac{2\alpha}{2+\varphi} = \frac{\varphi}{2+\varphi} \cdot \eta_{r-n}^{II} \end{cases} \quad \begin{matrix} r \\ \text{zwischen} \\ 1 \text{ u. } (n-1). \end{matrix}$$

$$(28) \quad \begin{cases} X_{II} \left(\eta_{n-n}^{II} + \frac{\alpha}{2+\varphi} \right) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{n-k}^{II} = \frac{\beta}{2+\varphi} \\ + \frac{\varphi}{2+\varphi} \cdot \eta_{n-n}^I \end{cases}$$

f) Bestimmung von β .

Nimmt man den allgemeinen Fall an, daß die Kraft $\frac{1}{2}$ nicht unmittelbar, sondern durch Vermittlung von zwei Längsträgern im Abstände c am Querträger angreift, so überträgt jeder dieser Längsträger die Kraft $\frac{1}{4}$.

Der Wert von $\int M_0 M' dx$ muß daher halb so groß sein wie der in Gl. 8a, denn bei Entwicklung dieser Gleichung waren zwei Kräfte $\frac{1}{2}$ angenommen. Folglich ist

$$\begin{aligned} \beta &= 4 \int \frac{M_0 M' dx}{E J_q} \\ &= \frac{2}{E J_q} \cdot \frac{b^3}{6} - \frac{2}{E J_q} \cdot \frac{b}{16} (4a^2 + c^2) + \frac{2}{E J_q} \cdot \frac{a}{48} (4a^2 + 3c^2) \\ &= \frac{1}{E J_q} \left[\frac{b^3}{3} - \frac{b}{8} (4a^2 + c^2) + \frac{a}{24} (4a^2 + 3c^2) \right] \\ (29) \quad \beta &= \frac{8b^3 - 3b(4a^2 + c^2) + a(4a^2 + 3c^2)}{24 E J_q} \end{aligned}$$

Sonderfall: $a = \frac{b}{2}$.

$$\beta = \frac{8b^3 - 3b(b^2 + c^2) + \frac{b}{2}(b^2 + 3c^2)}{24 E J_q} = \frac{\frac{11}{2} b^3 - \frac{3}{2} b c^2}{24 E J_q}$$

$$(29a) \quad \beta = \frac{11 b^3 - 3 b c^2}{48 E J_q}$$

Sonderfall: $c=0, a=a$.

$$(29b) \quad \beta = \frac{8b^3 - 12a^2 b + 4a^3}{24 E J_q} = \frac{2b^3 - 3a^2 b + a^3}{6 E J_q}$$

Sonderfall: $c=0, a = \frac{b}{2}$.

$$(29c) \quad \beta = \frac{11 b^3}{48 E J_q}$$

g) Träger mit gerader Felderzahl.

Um die vorstehend entwickelten Gl. 24, 26, 27, 28 auf Träger mit gerader Felderzahl anwenden zu können, denken wir uns den

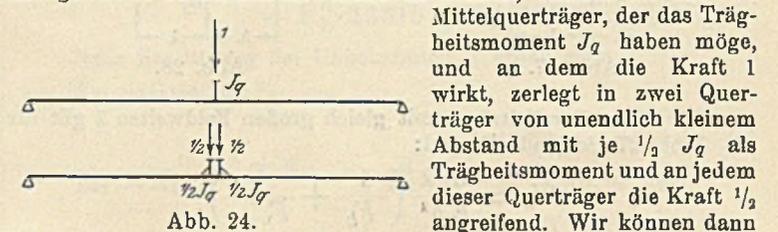


Abb. 24.

Mittelquerträger, der das Trägheitsmoment J_q haben möge, und an dem die Kraft 1 wirkt, zerlegt in zwei Querträger von unendlich kleinem Abstand mit je $\frac{1}{3} J_q$ als Trägheitsmoment und an jedem dieser Querträger die Kraft $\frac{1}{2}$ angreifend. Wir können dann

das System als Träger von ungerader Felderzahl auffassen, dessen Mittelfeld die Feldweite 0 hat (Abb. 24).

Die Gl. 24 darf daher unverändert Anwendung finden. Die Elastizitätsgleichung für den Mittelquerträger erhält man aus Gl. 26, indem man J_q durch $\frac{1}{2} J_q$ ersetzt. Statt $\int \frac{M'^2 dx}{E J_q}$ muß daher $2 \int \frac{M'^2 dx}{E J_q}$ und statt $\int \frac{M_0 M' dx}{E J_q}$ muß $2 \int \frac{M_0 M' dx}{E J_q}$ gesetzt werden. Führt man die Abkürzungswerte α und β in gleicher Weise wie oben ein, so muß in Gl. 26 2α an die Stelle von α und 2β an die Stelle von β treten. Die Gleichung lautet demnach:

$$(26a) \quad \begin{cases} X_{II} (2\alpha + \eta_{n-n}^I + 2 \cdot \eta_{n-n}^{II}) \\ + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} (\eta_{n-k}^I + 2 \cdot \eta_{n-k}^{II}) = 2\beta + \eta_{n-n}^I \end{cases}$$

Entsprechend bleibt Gl. 27 unverändert, während Gl. 28 folgende Gestalt annimmt:

$$(28a) \quad \begin{cases} X_{II} \left(\eta_{n-n}^{II} + \frac{2\alpha}{2+\varphi} \right) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{n-k}^{II} \\ = \frac{2\beta}{2+\varphi} + \frac{\varphi}{2+\varphi} \cdot \eta_{n-n}^{II} \end{cases}$$

IV. Zahlenbeispiel für eine Fachwerkbrücke.

Die Hauptträger seien Parallelträger von 3,3 m Höhe und 30 m Stützweite mit 10 gleichen Feldern von 3 m Feldweite.

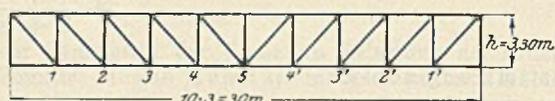


Abb. 25.

Abstand der Hauptträger $2 \times 5,0$ m (Abb. 25 u. 26).

1. Berechnung der Werte ξ_0 .
Nach Formel 9a u. 10a

$$\xi_{110} = \frac{11 - 3 \cdot 0,36^2}{16} = 0,6632$$

$$\xi_{10} = \frac{13 - 3 \cdot 0,36^2}{32} = 0,3941.$$

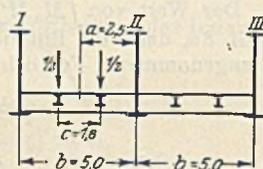


Abb. 26.

2. Berechnung der Werte ξ_{21} .

Es wird angenommen, daß die im Knotenpunkt 5 wirkende Last 1 nicht unmittelbar am Querträger angreift, sondern durch Vermittlung der beiden Längsträger in zwei Kräfte $\frac{1}{2}$ zerlegt wird, die in einem Abstände von $c = 1,8$ m wirken. Daher ist nach Gl. 29a

$$\beta = \frac{11 b^3 - 3 b c^2}{48 E J_q}$$

$$b = 5 \text{ m}, \quad c = 1,8 \text{ m}$$

$$J_q = 150\,000 \text{ cm}^4 = \frac{150\,000}{100\,000\,000} \text{ m}^4 = \frac{15}{10\,000} \text{ m}^4$$

$$\beta = \frac{11 \cdot 125 - 3 \cdot 5 \cdot 3,24}{E \cdot 48 \cdot \frac{15}{10\,000}} = \frac{1326,4 \cdot 10\,000}{E \cdot 720}$$

$$= \frac{18\,422,22}{E} \text{ m}^{-1}.$$

Die η -Werte werden mit Hilfe der w -Gewichte ermittelt.

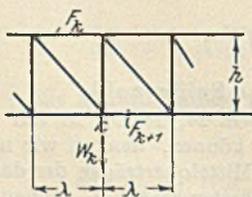


Abb. 27.

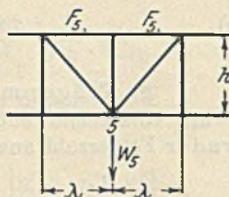


Abb. 28.

Für einen Parallelträger mit gleich großen Feldweiten λ gilt für W_k (Abb. 27) folgende Formel:

$$W_k = \frac{M_k \lambda}{E h^2} \left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}} \right).$$

Für die Mitte des Trägers gilt die Formel

$$W_5 = \frac{M_5 \lambda}{E h^2} \cdot \frac{2}{F_5} \quad (\text{Abb. 28}).$$

Zunächst werde der Träger II betrachtet. Die Klammerwerte $\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}} \right)$ sind in nachstehender Tafel zusammengestellt.

k	F_k in m ²	F_{k+1} in m ²	$\frac{1}{F_k}$ in m ⁻²	$\frac{1}{F_{k+1}}$ in m ⁻²	$\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}$ in m ⁻²
1	0,025	0,022	40,00	45,45	85,45
2	0,037	0,033	27,03	30,30	57,33
3	0,050	0,045	20,00	22,22	42,22
4	0,053	0,048	18,87	20,83	39,70
5	0,054	0,054	18,52	18,52	37,04

Ermittlung der Werte η_{1-k}^{II} .

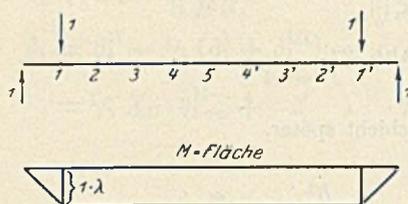


Abb. 29.

Wir berechnen, wie oben ausgeführt, die Biegelinie des Trägers für die Belastung mit zwei Kräften 1, die in den Punkten 1 und 1' angreifen (Abb. 29). Die Ordinaten dieser Linie sind dann die gesuchten Werte η_{1-k}^{II} .

Mit Hilfe nachfolgender Tafel werden die mit dem

gleichbleibenden Faktor $\frac{E}{\lambda^3}$ multiplizierten Werte η_{1-k}^{II} ermittelt.

k	$\frac{M_k}{\lambda}$	$\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}$	$\frac{E \cdot W_k}{\lambda^2} = \frac{M_k}{\lambda h^2} \left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}} \right)$	$\frac{E}{\lambda^2} \cdot Q_w$	$\frac{E}{\lambda^3} \cdot M_w = \frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{1-k}^{II}$
1	1	85,45	7,85	22,35	22,35
2	1	57,33	5,27	14,50	36,85
3	1	42,22	3,88	9,23	46,08
4	1	39,70	3,65	5,35	51,43
5	1	37,04	3,40	1,70	53,13

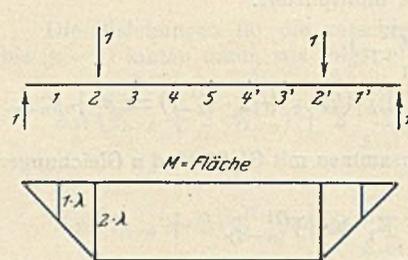


Abb. 30.

Ermittlung der Werte $\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{2-k}^{II}$. (Abb. 30.)

k	$\frac{M_k}{\lambda}$	$\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}$	$\frac{E \cdot W_k}{\lambda^2}$	$\frac{E}{\lambda^2} \cdot Q_w$	$\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{2-k}^{II}$
1	1	85,45	7,85	36,85	36,85
2	2	57,33	10,54	29,00	65,85
3	2	42,22	7,76	18,46	84,31
4	2	39,70	7,30	10,70	95,01
5	2	37,04	6,80	3,40	98,41

$$\begin{aligned} \frac{E}{\lambda^2} \cdot A_w &= 33,45 \\ &+ 3,40 \\ &= 36,85. \end{aligned}$$

Ermittlung der Werte

$$\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{3-k}^{II} \quad (\text{Abb. 31.})$$

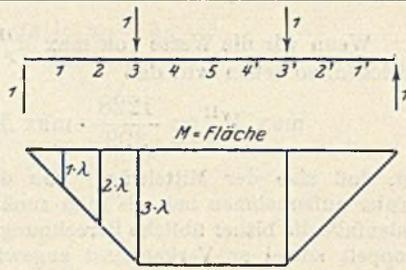


Abb. 31.

k	$\frac{M_k}{\lambda}$	$\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}$	$E \cdot \frac{W_k}{\lambda^2}$	$E \cdot \frac{Q_w}{\lambda^3}$	$\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{3-k}^{II}$
1	1	85,45	7,85	46,08	46,08
2	2	57,33	10,54	38,23	84,31
3	3	42,22	11,64	27,69	112,00
4	3	39,70	10,95	16,05	128,05
5	3	37,04	10,20	5,10	133,15

$$\frac{E}{\lambda^2} \cdot A_w = 40,98 + 5,10 = 46,08.$$

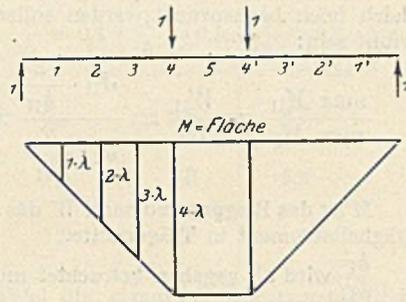


Abb. 32.

Ermittlung der Werte

$$\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{4-k}^{II} \quad (\text{Abb. 32.})$$

k	$\frac{M_k}{\lambda}$	$\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k-n}}$	$E \cdot \frac{W_k}{\lambda^2}$	$E \cdot \frac{Q_w}{\lambda^3}$	$\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{4-k}^{II}$
1	1	85,45	7,85	51,43	51,43
2	2	57,33	10,54	43,58	95,01
3	3	42,22	11,64	33,04	128,05
4	4	39,70	14,60	21,40	149,45
5	4	37,04	13,60	6,80	156,25

$$\frac{E}{\lambda^2} \cdot A_w = 44,63 + 6,80 = 51,43.$$

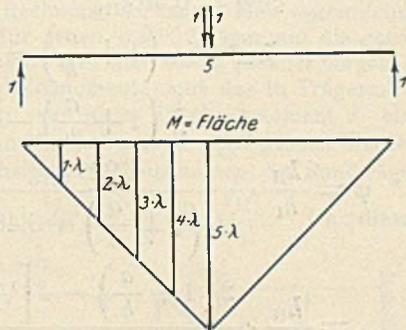


Abb. 33.

Ermittlung der Werte

$$\eta_{n-k}^{II} = \eta_{5-k}^{II} \quad (\text{Abb. 33.})$$

Die beiden Lasten 1 treffen jetzt am Querträger 5 zusammen.

k	$\frac{M_k}{\lambda}$	$\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}$	$E \cdot \frac{W_k}{\lambda^2}$	$E \cdot \frac{Q_w}{\lambda^2}$	$\frac{E}{\lambda^3} \cdot \eta_{5-k}^{II}$
1	1	85,45	7,85	53,13	53,13
2	2	57,33	10,54	45,28	98,41
3	3	42,22	11,64	34,74	133,15
4	4	39,70	14,60	23,10	156,25
5	5	37,04	17,00	8,50	164,75

$$\frac{E}{\lambda^2} \cdot A_w = 44,63 + 8,50 = 53,13.$$

Ein Blick auf die errechneten Zahlenwerte bestätigt die Richtigkeit der oben entwickelten Formel $\eta_{p-q} = \eta_{q-p}$.

Zum Beispiel nach der Tabelle für η_{2-3} ist $\eta_{2-3} = \frac{\lambda^3}{E} \cdot 84,31$; nach der Tabelle für η_{3-2} ist η_{3-2} ebenfalls $= \frac{\lambda^3}{E} \cdot 84,31$.

Man sieht ferner, daß die entwickelte Berechnungsweise für die η -Werte außerordentlich einfach und übersichtlich ist.

Die Berechnung der η -Werte für den Träger I erübrigt sich, da hier die Gl. 27 u. 28a angewendet werden können.

$$J_q = 150000 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{b^3}{3 E J_q (2 + \varphi)} = \frac{125}{3 E \cdot \frac{15}{10000} \cdot 4,2} = \frac{6613,757 \text{ m}^{-1}}{E}$$

$$\frac{\beta}{2 + \varphi} = \frac{18422,22}{E \cdot 4,2} = \frac{4386,24 \text{ m}^{-1}}{E}$$

$$\frac{\varphi}{2 + \varphi} = \frac{2,2}{4,2} = 0,5238.$$

Die Gl. 27 u. 28a denken wir uns mit $\frac{E}{2 \lambda^2}$ multipliziert. Nach Einsetzen der η -Werte lauten die Gleichungen, wie folgt:

$$X_{II} \cdot \frac{53,13}{2} + Y_1^{II} \cdot 22,35 + Y_2^{II} \cdot 36,85 + Y_3^{II} \cdot 46,08 + Y_4^{II} \cdot 51,43 + Y_1^{II} \cdot \frac{6613,757}{27} = 0,5238 \cdot \frac{53,13}{2}$$

$$X_{II} \cdot \frac{98,41}{2} + Y_1^{II} \cdot 36,85 + Y_2^{II} \cdot 65,85 + Y_3^{II} \cdot 84,31 + Y_4^{II} \cdot 95,01 + Y_2^{II} \cdot \frac{6613,757}{27} = 0,5238 \cdot \frac{98,41}{2}$$

$$X_{II} \cdot \frac{133,15}{2} + Y_1^{II} \cdot 46,08 + Y_2^{II} \cdot 84,31 + Y_3^{II} \cdot 112,00 + Y_4^{II} \cdot 128,05 + Y_3^{II} \cdot \frac{6613,757}{27} = 0,5238 \cdot \frac{133,15}{2}$$

$$X_{II} \cdot \frac{156,25}{2} + Y_1^{II} \cdot 51,43 + Y_2^{II} \cdot 95,01 + Y_3^{II} \cdot 128,05 + Y_4^{II} \cdot 149,45 + Y_4^{II} \cdot \frac{6613,757}{27} = 0,5238 \cdot \frac{156,25}{2}$$

$$X_{II} \left(\frac{164,75}{2} + \frac{6613,757}{27} \right) + Y_1^{II} \cdot 53,13 + Y_2^{II} \cdot 98,41 + Y_3^{II} \cdot 133,15 + Y_4^{II} \cdot 156,25 = \frac{4386,24}{27} + 0,5238 \cdot \frac{164,75}{2}$$

Sämtliche Gleichungen werden mit 100 multipliziert.

$$X_{II} \cdot 2656,5 + Y_1^{II} \cdot 2235 + Y_2^{II} \cdot 3685 + Y_3^{II} \cdot 4608 + Y_4^{II} \cdot 5143 + Y_1^{II} \cdot 24495 = 1391$$

$$X_{II} \cdot 4920,5 + Y_1^{II} \cdot 3685 + Y_2^{II} \cdot 6585 + Y_3^{II} \cdot 8431 + Y_4^{II} \cdot 9501 + Y_2^{II} \cdot 24495 = 2577$$

$$X_{II} \cdot 6657,5 + Y_1^{II} \cdot 4608 + Y_2^{II} \cdot 8431 + Y_3^{II} \cdot 11200 + Y_4^{II} \cdot 12805 + Y_3^{II} \cdot 24495 = 3487$$

$$X_{II} \cdot 7812,5 + Y_1^{II} \cdot 5143 + Y_2^{II} \cdot 9501 + Y_3^{II} \cdot 12805 + Y_4^{II} \cdot 14945 + Y_4^{II} \cdot 24495 = 4092$$

$$X_{II} (8237,5 + 24495) + Y_1^{II} \cdot 5313 + Y_2^{II} \cdot 9841 + Y_3^{II} \cdot 13315 + Y_4^{II} \cdot 15625 = 20560,13$$

Nach Beseitigung der Unbekannten Y erhält man

$$X_{II} = 0,645 = \xi_{II}^{II}$$

$$\xi_{II}^I = X_I = \frac{b+a}{2b} - \frac{1}{2} \cdot \xi_{II}^{II} = \frac{b}{2b} - \frac{1}{2} \cdot \xi_{II}^{II} = 0,75 - 0,3225 = 0,4275.$$

3. Ermittlung der parabelförmigen Einflußlinien für X_{Im} und $X_{II m}$.

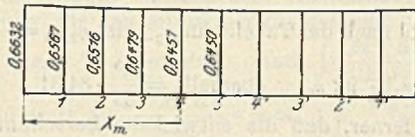


Abb. 34.

Einflußlinie für $X_{II m}$ (Abb. 34.)

$$\xi_{II m} = \xi_{II 0} + (\xi_{II 0} - \xi_{II 5}) \left(1 - \frac{x_m}{5 \lambda}\right)^2$$

$$= 0,645 + 0,0182 \left(1 - \frac{x_m}{5 \lambda}\right)^2$$

$$\xi_{II 1} = \xi_{II 1}' = 0,645 + 0,0182 \left(1 - \frac{\lambda}{5 \lambda}\right)^2$$

$$= 0,645 + 0,0182 \cdot \frac{16}{25} = 0,65665$$

$$\xi_{II 2} = \xi_{II 2}' = 0,645 + 0,0182 \cdot \frac{9}{25} = 0,65155$$

$$\xi_{II 3} = \xi_{II 3}' = 0,645 + 0,0182 \cdot \frac{4}{25} = 0,64791$$

$$\xi_{II 4} = \xi_{II 4}' = 0,645 + 0,0182 \cdot \frac{1}{25} = 0,64573$$

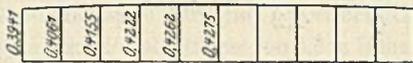


Abb. 35.

Einflußlinie für $X_{I m}$ (Abb. 35.)

$$\xi_{I m} = \xi_{I 0} - (\xi_{I 0} - \xi_{I 5}) \left(1 - \frac{x_m}{5 \lambda}\right)^2$$

$$= 0,4275 - 0,0334 \left(1 - \frac{x_m}{5 \lambda}\right)^2$$

$$\xi_{I 1} = \xi_{I 1}' = 0,4275 - 0,0334 \cdot \frac{16}{25} = 0,40612$$

$$\xi_{I 2} = \xi_{I 2}' = 0,4275 - 0,0334 \cdot \frac{9}{25} = 0,41548$$

$$\xi_{I 3} = \xi_{I 3}' = 0,4275 - 0,0334 \cdot \frac{4}{25} = 0,42216$$

$$\xi_{I 4} = \xi_{I 4}' = 0,4275 - 0,0334 \cdot \frac{1}{25} = 0,42616$$

Ermittlung der größten Momente im Punkt 5 infolge Verkehrslast (Lastenzug G).

Die Einflußlinie für $M_{II 5}$ ergibt sich aus der gewöhnlichen M -Linie (Abb. 36) durch Multiplikation der Ordinaten dieser Linie mit $2 \xi_m$. Bezeichnen wir die neuen Ordinaten mit $\eta_{II m}$, so ist (abgerundet auf drei Dezimalstellen):

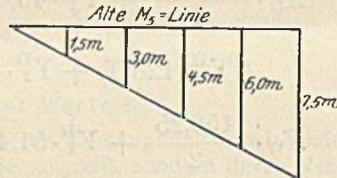


Abb. 36.

$$\eta_{II 1} = 1,5 \cdot 2 \cdot 0,65665 = 1,970 \text{ m}$$

$$\eta_{II 2} = 3 \cdot 2 \cdot 0,65155 = 3,909 \text{ „}$$

$$\eta_{II 3} = 4,5 \cdot 2 \cdot 0,64791 = 5,831 \text{ „}$$

$$\eta_{II 4} = 6 \cdot 2 \cdot 0,64573 = 7,749 \text{ „}$$

$$\eta_{II 5} = 7,5 \cdot 2 \cdot 0,64500 = 9,675 \text{ „}$$

Der größte Wert für das Moment ergibt sich zu $\max M_p^{II} = 1226 \text{ mt.}$

Wendet man das Näherungsverfahren des gleichbleibenden Beiwertes an, so wird dieser:

$$2 \xi_{II}' = \frac{\xi_{II 0} + 4 \xi_{II 5} \cdot 2}{5} = \frac{0,6632 + 2,580}{5}$$

$$= \frac{2 \cdot 3,2432}{5} = 1,297.$$

Mit Benutzung des Tabellenwertes für M aus den „Berechnungsgrundlagen“ wird

$$\max M_p^{II} = 947 \cdot 1,297 = 1228 \text{ mt.}$$

Wie man sieht, stimmt diese Zahl mit der obigen gut überein, man rechnet bei Anwendung des ξ -Wertes noch etwas sicherer. Andererseits hat eine größere Genauigkeit keinen Wert mit Rücksicht darauf, daß das ganze Rechnungsverfahren auf gewissen vereinfachenden Annahmen beruht.

Zur Berechnung von $\max M_p^I$ wenden wir daher dieses abgekürzte Verfahren an:

$$\xi_1' = \frac{\xi_{I 0} + 4 \cdot \xi_{I 5}}{5} = \frac{0,3941 + 1,7100}{5} = \frac{2,1041}{5} = 0,421$$

$$\max M_p^I = 0,421 \cdot 947 = 399 \text{ mt.}$$

Wenn wir die Werte von $\max M_p^{II}$ und $\max M_p^I$ miteinander vergleichen, so sehen wir, daß

$$\max M_p^{II} = \frac{1228}{399} \cdot \max M_p^I = 3,08 \cdot \max M_p^I$$

ist, daß also der Mittelträger von den Verkehrslasten erheblich mehr aufzunehmen hat, als man zunächst annehmen sollte, und daß jedenfalls die bisher übliche Berechnungsweise, nach der dem Träger II doppelt soviel an Verkehrslast zugewiesen wird wie dem Träger I, ganz unzutreffend ist. Im anliegenden Rechnungsbeispiel war bekanntlich das Verhältnis der Trägheitsmomente des mittleren und des Randträgers $\varphi = 2,2$ eingesetzt. Handelt es sich nun um eine bestehende Brücke, bei der dieses Verhältnis 2,2 wirklich vorhanden ist, so ist zu erwarten, daß entweder die Randträger bei ihrer Beanspruchung schlecht ausgenutzt sind, oder daß der Mittelträger über das zulässige Maß hinaus beansprucht wird.

Liegt eine neu zu entwerfende Brücke vor, so muß man einen anderen Wert für φ einsetzen und die Berechnung wiederholen.

Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren gezeigt, wie man durch eine sehr einfache Näherungsberechnung φ so ermitteln kann, daß die beiden Träger einigermassen gleichmäßig ausgenutzt werden.

V. Überschnägliche Bestimmung von φ für neue Brücken.

Wenn alle drei Hauptträger bei der ungünstigsten Belastung gleich hoch beansprucht werden sollen, so muß folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\max M_{II}}{\max M_I} = \frac{W_{II}}{W_I} = \frac{J_{II} \cdot \frac{2}{h_{II}}}{J_I \cdot \frac{2}{h_I}} = \frac{J_{II}}{J_I} \cdot \frac{h_I}{h_{II}} = \varphi \cdot \frac{h_I}{h_{II}}$$

M ist das Biegemoment, W das Widerstandsmoment und J das Trägheitsmoment in Trägermitte.

$\frac{h_I}{h_{II}}$ wird als gegeben betrachtet und für alle Knotenpunkte gleich angenommen. Wenn man vom Einfluß der ruhenden Belastung absieht, so ist

$$\frac{\max M_{II}}{\max M_I} = \frac{\max X_{II}}{\max X_I} = \frac{2 \xi_{II 0}}{\xi_{I 5}}$$

Folglich:

$$\varphi \cdot \frac{h_I}{h_{II}} = \frac{2 \xi_{II 0}}{\xi_{I 5}}$$

$$\varphi = \frac{2 \xi_{II 0}}{\xi_{I 5}} \cdot \frac{h_{II}}{h_I}$$

$\xi_{II 0}$ ist im allgemeinen etwas kleiner als $\xi_{II 0}$, näherungsweise setzen wir durchschnittlich:

$$\xi_{II 0} = 0,96 \xi_{II 0}$$

$$\xi_{I 5} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b}\right) - \frac{1}{2} \cdot \xi_{II 0} \text{ (s. Gl. 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b}\right) - 0,48 \cdot \xi_{II 0}$$

$$\varphi = \frac{h_{II}}{h_I} \cdot \frac{1,92 \cdot \xi_{II 0}}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b}\right) - 0,48 \cdot \xi_{II 0}}$$

$$= \frac{h_{II}}{h_I} \cdot \frac{2 \left(1 + \frac{a}{b}\right) - 4 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b}\right) - 0,48 \cdot \xi_{II 0}\right]}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b}\right) - 0,48 \cdot \xi_{II 0}}$$

$$= \frac{h_{II}}{h_I} \cdot \left[\frac{4 \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{1 + \frac{a}{b} - 0,96 \cdot \xi_{II 0}} - 4 \right]$$

Für $\xi_{II 0}$ wird der Ausdruck nach Gl. 9 eingesetzt. Dann folgt

$$(30) \left[\frac{4 h_{II}}{h_I} \cdot \frac{1 + \frac{a}{b}}{0,04 + \frac{a}{b} + 1,44 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 0,48 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 0,36 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)} - 1 \right]$$

Sonderfall: $h_{II} = h_I$.

$$(30a) \quad 1. \quad \frac{a}{b} = 0,5$$

$$\varphi = \frac{6}{0,84 + 0,18 \left(\frac{c}{b}\right)^2} - 4$$

$$(30b) \quad 2. \quad \frac{a}{b} = 0,55$$

$$\varphi = \frac{6,2}{0,946 + 0,162 \left(\frac{c}{b}\right)^2} - 4$$

$$(30c) \quad 3. \quad \frac{a}{b} = 0,6$$

$$\varphi = \frac{6,4}{1,055 + 0,144 \left(\frac{c}{b}\right)^2} - 4$$

Für verschiedene Werte von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ sind die abgerundeten Werte von φ in folgender Tafel zusammengestellt:

	$\frac{c}{b} = 0,3$	$\frac{c}{b} = 0,4$	$\frac{c}{b} = 0,5$	$\frac{c}{b} = 0,6$
$\frac{a}{b} = 0,5$	3,0	2,9	2,8	2,6
$\frac{a}{b} = 0,55$	2,5	2,4	2,3	2,2
$\frac{a}{b} = 0,6$	2,0	1,9	1,8	1,78

Man erkennt aus dieser Tafel die eigentlich selbstverständliche Tatsache, daß der Wert φ desto kleiner wird, je größer $\frac{a}{b}$ wird; d. h. je weiter die Belastung von Träger II nach dem Träger I hin rückt, desto kleiner ist der Lastanteil des Trägers II zu dem des Trägers I. Zwar wird sich das Verhältnis $\frac{a}{b} = 0,6$ wohl kaum praktisch verwirklichen lassen, weil dadurch die Brückenbreite merklich vergrößert wird. Immerhin empfiehlt es sich, bei Neukonstruktion derartiger Brücken zur Entlastung des Trägers II die Gleisachse nicht in die Mitte zwischen den Trägern zu legen, sondern soweit vom Mittelträger abzurücken, als es die sonstigen Konstruktionsrücksichten gestatten.

VI. Entwicklung vereinfachter Formeln für Blechträgerbrücken.

a) Zur Vereinfachung der Rechnung darf man ohne wesentlichen Fehler das Trägheitsmoment für jeden der 3 Träger auf die ganze Länge als gleichbleibend ansehen. Will man etwas genauer vorgehen, so empfiehlt es sich, als Trägheitsmoment nicht das in Trägermitte vorhandene $\max J$, sondern ein reduziertes Trägheitsmoment J' einzuführen, das etwa gleich dem 0,9-fachen von $\max J$ gesetzt werden kann. Bezeichnen wir das reduzierte Trägheitsmoment der Randträger mit J'_I , das des Mittelträgers mit J'_{II} , so ist $\varphi = \frac{J'_{II}}{J'_I}$. Da dieses

Verhältnis gleichbleibend ist, so dürfen hier die Formeln 27, 28 bzw. 28a angewandt werden.

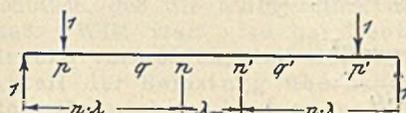


Abb. 37.

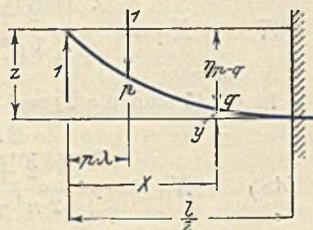


Abb. 38.

Wir betrachten zunächst einen Blechträger mit 2n gleichen Feldern von der Weite λ und einem Mittelfeld von beliebiger Weite λm, das gegebenenfalls auch = 0 werden kann. Gesucht ist der Wert η_{p-q} . Wie wir oben gesehen haben, ist η_{p-q} gleich der Durchbiegung der Punkte q und q' unter der Wirkung zweier in p und p' angreifenden Lasten l (Abb. 37).

Zur Ermittlung dieser Durchbiegung denken wir uns den Träger in der Mitte eingespannt und mit dem Kräftepaar vom Moment 1 p λ belastet (Abb. 38).

$$EJz = \frac{l^3}{24} - \frac{\left(\frac{l}{2} - p\lambda\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{l}{2} - p\lambda\right)^2}{2} \cdot p\lambda$$

$$= \frac{p\lambda l^2}{8} - \frac{p^3 \lambda^3}{6}$$

Der Krümmungshalbmesser ρ muß zwischen p und p' konstant sein, da das Moment hier überall konstant ist. Die Biegungslinie ist also hier kreisförmig.

$$\rho = \frac{EJ}{M} = \frac{EJ}{p\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = \frac{p\lambda}{2EJ} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2$$

$$EJy = \frac{p\lambda}{2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2$$

$$EJ\eta_{p-q} = EJz - EJy = \frac{p\lambda l^2}{8} - \frac{p^3 \lambda^3}{6} - \frac{p\lambda}{2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = \frac{p\lambda}{6} (3lx - 3x^2 - p^2 l^2)$$

Für x wird q λ gesetzt.

$$\eta_{p-q} = \frac{p\lambda}{6EJ} (3lq\lambda - 3q^2 l^2 - p^2 l^2)$$

$$(31) \quad \eta_{p-q} = \frac{p\lambda^2}{6EJ} [3ql - \lambda(p^2 + 3q^2)]$$

Zu beachten ist, daß in dieser Formel stets $p \leq q$ sein muß, was schon daraus hervorgeht, daß die Ausdrücke p und q nicht miteinander vertauscht werden können, ohne daß der Wert sich ändert. Trotzdem läßt sich die Formel für beliebige Zahlen p und q anwenden, da $\eta_{q-p} = \eta_{p-q}$ ist. Wenn z. B. die Berechnung von η_{6-3} verlangt wird, so kann man $\eta_{6-3} = \eta_{3-6}$ setzen, es ist also $p=3$ und $q=6$ anzunehmen, oder allgemein: p muß immer die kleinere der beiden Indexzahlen sein.

Mit Hilfe vorstehender Formel bestimmen wir nun die η -Werte der Gl. 27 usw.

Wenn man beachtet, daß r stets $< n$ ist, so ist

$$\eta_{r-n}^{II} = \frac{r\lambda^2}{6EJ_{II}} [3nl - \lambda(r^2 + 3n^2)]$$

$$l = 2n\lambda + \lambda_m$$

$$(32) \quad \eta_{r-n}^{II} = \frac{r\lambda^2}{6EJ_{II}} [\lambda(3n^2 - r^2) + 3n\lambda_m]$$

In dem Wert η_{r-k}^{II} durchläuft k alle Werte von 1 bis n-1, kann also sowohl kleiner als auch größer als r sein. Wir zerlegen daher den Summenausdruck

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^{II}$$

in zwei Summenausdrücke und zwar in

$$\sum_{k=1}^{k=r-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^{II} + \sum_{k=r}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \eta_{r-k}^{II}$$

In der ersten Summe ist $k < r$. η_{r-k}^{II} für $k < r$ erhält man also aus obiger Formel für η_{p-q} , indem man p durch k und q durch r ersetzt.

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{r-k}^{II} \text{ (für } k < r) &= \frac{k\lambda^2}{6EJ_{II}} [3rl - \lambda(k^2 + 3r^2)] \\ &= \frac{k\lambda^2}{6EJ_{II}} [\lambda(6rn - k^2 - 3r^2) + 3r\lambda_m] \end{aligned} \right.$$

Im zweiten Summenausdruck ist $k \geq r$, in dem Ausdruck für η_{p-q} ist daher p durch r und q durch k zu ersetzen.

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{r-k}^{II} \text{ (} k \geq r) &= \frac{r\lambda^2}{6EJ_{II}} [3kl - \lambda(r^2 + 3k^2)] \\ &= \frac{r\lambda^2}{6EJ_{II}} [\lambda(6kn - r^2 - 3k^2) + 3k\lambda_m] \end{aligned} \right.$$

Wenn man beide Summenausdrücke miteinander vergleicht, so erkennt man, daß der eine Ausdruck aus dem anderen durch Vertauschen von r und k entsteht.

η_{n-k}^{II} ist, da k stets $< n$,

$$= \frac{k\lambda^2}{6EJ_{II}} [3nl - \lambda(k^2 + 3n^2)]$$

$$(35) \quad \eta_{n-k}^{II} = \frac{k \lambda^2}{6 E J_{II}} [\lambda (3 n^2 - k^2) + 3 n \lambda_m]$$

$$\eta_{n-n}^{II} = \frac{n \lambda^2}{6 E J_{II}} (\lambda \cdot 2 n^2 + 3 n \lambda_m).$$

$$(36) \quad \eta_{n-n}^{II} = \frac{n^2 \lambda^2}{6 E J_{II}} (2 n \lambda + 3 \lambda_m).$$

Gl. 27 nimmt nun folgende Form an:

$$X_{II} \cdot \frac{r \lambda^2}{6 E J_{II}} [\lambda (3 n^2 - r^2) + 3 n \lambda_m] + 2 \sum_{k=1}^{k=r-1} Y_k^{II} \frac{k \lambda^2}{6 E J_{II}} [\lambda (6 r n - k^2 - 3 r^2) + 3 r \lambda_m] + 2 \sum_{k=r}^{k=n-1} Y_k^{II} \frac{r \lambda^2}{6 E J_{II}} [\lambda (6 k n - r^2 - 3 k^2) + 3 k \lambda_m] + Y_r^{II} \cdot \frac{2 \alpha}{2 + \varphi} = \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot \frac{r \lambda^2}{6 E J_{II}} [\lambda (3 n^2 - r^2) + 3 n \lambda_m].$$

Beide Seiten der Gleichung werden mit $\frac{6 E J_{II}}{\lambda^3}$ multipliziert.

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{II} r \left(3 n^2 - r^2 + 3 n \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) + 2 \sum_{k=1}^{k=r-1} Y_k^{II} \cdot k \left(6 p n - k^2 - 3 r^2 + 3 r \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) + 2 \sum_{k=r}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot r \left(6 k n - r^2 - 3 k^2 + 3 k \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) + Y_r^{II} \varphi &= \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot r \left(3 n^2 - r^2 + 3 n \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right). \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist $\varphi = \frac{2 \alpha}{2 + \varphi} \cdot \frac{6 E J_{II}}{\lambda^3}$.

$$(38) \quad \varphi = \frac{2 b^3}{3 E J_q (2 + \varphi)} \cdot \frac{6 E J_{II}}{\lambda^3} = \frac{4}{2 + \varphi} \cdot \frac{b^3}{\lambda^3} \cdot \frac{J_{II}}{J_q}$$

r durchläuft die Werte von 1 bis (n-1).

Gl. 28 nimmt folgende Gestalt an:

$$X_{II} \left[\frac{n^2 \lambda^2}{6 E J_{II}} (2 n \lambda + 3 \lambda_m) + \frac{\alpha}{2 + \varphi} \right] + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \frac{k \lambda^2}{6 E J_{II}} [\lambda (3 n^2 - k^2) + 3 n \lambda_m] = \frac{\beta}{2 + \varphi} + \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot \frac{n^2 \lambda^2}{6 E J_{II}} (2 n \lambda + 3 \lambda_m).$$

Beide Seiten der Gleichung werden mit $\frac{12 E J_{II}}{\lambda^3}$ multipliziert.

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{II} \left(4 n^3 + 6 n^2 \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} + \varphi \right) + 4 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot k \left(3 n^2 - k^2 + 3 n \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) &= \chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^2 \left(2 n + 3 \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} \right). \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist

$$(39a) \quad \chi = \frac{\beta}{2 + \varphi} \cdot \frac{12 E J_{II}}{\lambda^3} \quad (\beta \text{ s. Gl. 29}).$$

Die Gl. 37 u. 39 stellen wieder zusammen n Gleichungen mit n Unbekannten dar, aus denen die Unbekannte X_{II} zu berechnen ist. Dann ist:

$$\xi_{II} \varpi = X_{II} \\ \xi_{I} \varpi = \frac{b+a}{2b} - \frac{1}{2} X_{II}.$$

1. Sonderfall: $\lambda_m = \lambda$.

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{II} r (3 n^2 + 3 n - r^2) + 2 \sum_{k=1}^{k=r-1} Y_k^{II} \cdot k (6 r n + 3 r - k^2 - 3 r^2) + 2 \sum_{k=r}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot r (6 k n + 3 k - r^2 - 3 k^2) + Y_r^{II} \cdot \varphi &= \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot r (3 n^2 + 3 n - r^2). \end{aligned} \right.$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{II} (4 n^3 + 6 n^2 + \varphi) + 4 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot k (3 n^2 + 3 n - k^2) &= \chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^2 (2 n + 3). \end{aligned} \right.$$

2. Sonderfall: $\lambda_m = 0$.

Gl. 37 erhält folgende Form:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{II} r (3 n^2 - r^2) + 2 \sum_{k=1}^{k=r-1} Y_k^{II} \cdot k (6 r n - k^2 - 3 r^2) + 2 \sum_{k=r}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot r (6 k n - r^2 - 3 k^2) + Y_r^{II} \cdot \varphi &= \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot r (3 n^2 - r^2). \end{aligned} \right.$$

Die letzte Gleichung wird aus Gl. 28a abgeleitet:

$$(43) \quad \eta_{n-n}^{II} = \frac{n^2 \lambda^2}{6 E J_{II}} \cdot 2 n \lambda = \frac{n^3 \lambda^3}{3 E J_{II}}$$

$$\eta_{n-k}^{II} = \frac{k \lambda^2}{6 E J_{II}} \cdot \lambda (3 n^2 - k^2)$$

$$(44) \quad \eta_{n-k}^{II} = \frac{k \lambda^3 (3 n^2 - k^2)}{6 E J_{II}}$$

$$X_{II} \left(\frac{n^3 \lambda^3}{3 E J_{II}} + \frac{2 \alpha}{2 + \varphi} \right) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot \frac{k \lambda^3 (3 n^2 - k^2)}{6 E J_{II}} = \frac{2 \beta}{2 + \varphi} + \frac{\varphi}{2 + \varphi} \cdot \frac{n^3 \lambda^3}{3 E J_{II}}$$

Beide Seiten der Gleichung werden mit $\frac{6 E J_{II}}{\lambda^3}$ multipliziert.

$$(45) \quad X_{II} (2 n^3 + \varphi) + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} Y_k^{II} \cdot k (3 n^2 - k^2) = \chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^3.$$

b) Weitergehende Vereinfachung für Blechträger.

Wie das Zahlenbeispiel des folgenden Abschnitts zeigt, sind die Kräfte Y_k im Verhältnis zur Kraft X_{II} außerordentlich klein. Man begeht daher keinen großen Fehler, wenn man die Kräfte Y_k ganz vernachlässigt.

Zur Ermittlung der Kraft X_{II} genügt dann jedesmal die letzte der n-Gleichungen vorstehender Gruppen, d. h. die Elastizitätsgleichung für den mittleren Querträger.

1. Allgemeiner Fall mit Mittelfeld von der Weite λ_m.

In Gl. 39 sind sämtliche Y_k = 0 zu setzen.

$$X_{II} \left(4 n^3 + 6 n^2 \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} + \varphi \right) = \chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^2 \left(2 n + 3 \frac{\lambda_m}{\lambda} \right).$$

$$(46) \quad X_{II} = \frac{\chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^2 \left(2 n + 3 \frac{\lambda_m}{\lambda} \right)}{4 n^3 + 6 n^2 \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda} + \varphi}$$

2. λ_m = λ.

$$(47) \quad X_{II} = \frac{\chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^2 (2 n + 3)}{4 n^3 + 6 n^2 + \varphi}$$

3. λ_m = 0.

In Gl. 45 sind die Y_k = 0 zu setzen.

$$(48) \quad X_{II} = \frac{\chi + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^3}{2 n^3 + \varphi} = \frac{\frac{\beta}{2 + \varphi} \cdot \frac{12 E J_{II}}{\lambda^3} + \frac{2 \varphi}{2 + \varphi} \cdot n^3}{\frac{4}{2 + \varphi} \cdot \frac{b^3}{\lambda^3} \cdot \frac{J_{II}}{J} + 2 n^3} = \frac{48 \beta E J_{II} + \varphi l^3}{16 b^3 \cdot \frac{J_{II}}{J} + (2 + \varphi) l^3}$$

$$\beta = \frac{8 b^3 - 3 b (4 a^2 + c^2) + a (4 a^2 + 3 c^2)}{24 E J_q} \quad (\text{s. Gl. 29})$$

$$48 \beta E J_{II} = \beta' \cdot \frac{J_{II}}{J}$$

$$(49) \quad \beta' = 16 b^3 - 6 b (4 a^2 + c^2) + 2 a (4 a^2 + 3 c^2).$$

$$(50) X_{II} = \frac{\beta' \cdot \frac{J_{II}}{J_q} + \varphi l^3}{16 b^3 \cdot \frac{J_{II}}{J_q} + (2 + \varphi) l^3}$$

c) Untersuchung des Einflusses der Trägerhöhe des Mittelträgers auf X_{II} .

Wir legen einen Blechträger mit gerader Anzahl gleicher Felder zugrunde und denken uns die Brücke für einen bestimmten Lastenzug berechnet. Dabei betrachten wir verschiedene Lösungen, die sich darin unterscheiden, daß der Mittelträger jedesmal eine andere Trägerhöhe erhält, während die Randträger unverändert bleiben (Abb. 39).

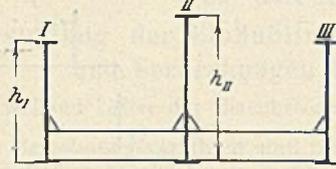


Abb. 39.

$J_{II} = W_{II} \cdot \frac{h_{II}^3}{2}$, wo W_{II} das Widerstandsmoment des Trägers II ist.

$$W_{II} = \frac{\max M_{II}}{\sigma_{zul}} = \frac{\max M_{II}'}{\sigma_{zul}} \cdot X_{II}$$

Hierbei bedeutet $\max M_{II}'$ das größte Biegemoment, das der Träger II erhalten würde, wenn die Belastung von zwei Gleisen unmittelbar auf ihn wirken würde. Das diesem Belastungsfall entsprechende erforderliche Widerstandsmoment bezeichnen wir mit W_{II}' .

$$W_{II}' = \frac{\max M_{II}'}{\sigma_{zul}}$$

$$W_{II} = W_{II}' \cdot X_{II}$$

$$J_{II} = \frac{h_{II} W_{II}' X_{II}}{2}$$

$$\frac{J_{II}}{X_{II}} = \frac{h_{II} W_{II}'}{2}$$

W_{II}' ist von h_{II} unabhängig.

Gl. 50 umgeformt lautet, wenn man $\varphi = \frac{J_{II}}{J_1}$ setzt, folgendermaßen:

$$16 b^3 \cdot \frac{J_{II}}{J_q} + 2 l^3 + \frac{J_{II}}{J_1} \cdot l^3 = \frac{J_{II}}{X_{II}} \left(\frac{\beta'}{J_q} + \frac{l^3}{J_1} \right)$$

Gleichung mit J_q multipliziert.

$$J_{II} \left(16 b^3 + \frac{J_q}{J_1} \cdot l^3 \right) + 2 l^3 J_q = \frac{h_{II} W_{II}'}{2} \left(\beta' + l^3 \cdot \frac{J_q}{J_1} \right)$$

$$\frac{h_{II} W_{II}' X_{II}}{2} \left(16 b^3 + \frac{J_q}{J_1} \cdot l^3 \right) = \frac{h_{II} W_{II}'}{2} \left(\beta' + l^3 \cdot \frac{J_q}{J_1} \right) - 2 l^3 \cdot J_q$$

$$(51) X_{II} = \frac{\beta' + \frac{J_q}{J_1} \cdot l^3}{16 b^3 + \frac{J_q}{J_1} \cdot l^3} - \frac{4 l^3 J_q}{h_{II} W_{II}' \left(16 b^3 + \frac{J_q}{J_1} \cdot l^3 \right)}$$

Fassen wir in dieser Formel X_{II} und h_{II} als veränderlich auf, so sehen wir, daß X_{II} mit zunehmender Höhe des Mittelträgers größer wird. Diese Erscheinung, die natürlich ebenso an Fachwerkträgern auftritt, läßt sich sehr leicht dadurch erklären, daß der Mittelträger bei zunehmender Höhe im Verhältnis zu den Randträgern steifer wird; das bedeutet für den Querträger, daß seine Mittelstütze gegenüber den Außenstützen weniger nachgibt. Daraus folgt aber bekanntlich, daß der Auflagerdruck der Mittelstütze größer werden muß. Will man also bei Neuberechnung einer solchen Brücke vermeiden, daß der Mittelträger einen zu großen Anteil der Belastung übernehmen muß, so empfiehlt es sich, ihn nicht zu hoch zu machen, sondern wenn möglich, für ihn die gleiche Höhe zu wählen wie für die Außenträger.

VII. Zahlenbeispiel für eine Blechträgerbrücke.

Die Brücke ist für Lastenzug G bemessen; sie hat eine

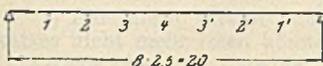


Abb. 40.

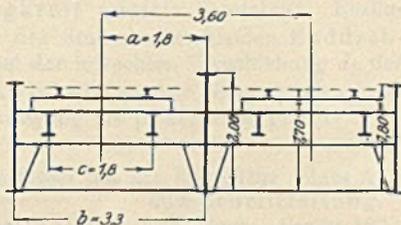


Abb. 41.

Stützweite von 20 m, bestehend aus acht Feldern von je 2,5 m Weite. Die beiden Gleise haben einen gegenseitigen Abstand von 3,60 m.

Infolge der geringen Bauböhe muß die Fahrbahn halbversenkt ausgeführt werden. Die übrigen Maße sind aus Abb. 40 u. 41 zu ersehen.

a) Bestimmung von ξ_0

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{1,8}{3,3} = \frac{6}{11} = 0,5455$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 = \left(\frac{c}{b} \right)^2 = 0,2975$$

$$\xi_{10} = 1 - \frac{3}{8} [4 \cdot 0,2975 + 0,2975]$$

$$+ \frac{1}{8} \cdot 0,5455 [4 \cdot 0,2975 + 3 \cdot 0,2975] = 0,5842 \text{ (s. Gl. 9)}$$

$$\xi_{10} = 0,5 + 0,2727 - 0,2921 = 0,4806$$

b) Bestimmung von ξ_{III}

Wir wenden die Formeln 42 u. 45 an.

$$n = 4 \quad || \quad \lambda = 2,5 ||$$

$$J_{II} = 6\,000\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_1 = 2\,500\,000 \text{ cm}^4$$

$$J_q = 40\,000 \text{ cm}^4$$

$$\varphi = \frac{J_{II}}{J_1} = \frac{60}{25} = 2,4$$

$$W = \frac{4}{4,4} \cdot \frac{3,3^3}{2,5^3} \cdot \frac{6\,000\,000}{40\,000} = 313,632 \text{ (s. Gl. 38)}$$

$$\beta = \frac{8 \cdot 3,3^3 - 3 \cdot 3,3 (4 \cdot 1,8^2 + 1,8^2) + 1,8 (4 \cdot 1,8^2 + 3 \cdot 1,8^2)}{24 E J_q} = \frac{167,94 \text{ m}^3}{24 E J_q} \text{ (s. Gl. 29)}$$

$$\lambda = \frac{167,94 \text{ m}^3}{24 E J_q} \cdot \frac{12 E J_{II}}{4,4 \cdot 2,5^3} = 183,207 \text{ (s. Gl. 39a)}$$

$$X_{II} \cdot 1 (3 \cdot 25 - 1^2) + 2 Y_1^{II} \cdot 1 (6 \cdot 1 \cdot 5 - 1^2 - 3 \cdot 1^2) + 2 Y_2^{II} \cdot 1 (6 \cdot 2 \cdot 5 - 1^2 - 3 \cdot 2^2) + 2 Y_3^{II} \cdot 1 (6 \cdot 3 \cdot 5 - 1^2 - 3 \cdot 3^2) + Y_4^{II} \cdot 313,632 = \frac{2,4}{4,4} \cdot 1 (3 \cdot 5^2 - 1^2)$$

$$X_{II} \cdot 2 (3 \cdot 25 - 2^2) + 2 Y_1^{II} \cdot 1 (6 \cdot 2 \cdot 5 - 1^2 - 3 \cdot 2^2) + 2 Y_2^{II} \cdot 2 (6 \cdot 2 \cdot 5 - 2^2 - 3 \cdot 2^2) + 2 Y_3^{II} \cdot 2 (6 \cdot 3 \cdot 5 - 2^2 - 3 \cdot 3^2) + Y_4^{II} \cdot 313,632 = \frac{2,4}{4,4} \cdot 2 (3 \cdot 25 - 2^2)$$

$$X_{II} \cdot 3 (3 \cdot 25 - 3^2) + 2 Y_1^{II} \cdot 1 (6 \cdot 3 \cdot 5 - 1^2 - 3 \cdot 3^2) + 2 Y_2^{II} \cdot 2 (6 \cdot 3 \cdot 5 - 2^2 - 3 \cdot 3^2) + 2 Y_3^{II} \cdot 3 (6 \cdot 3 \cdot 5 - 3^2 - 3 \cdot 3^2) + Y_4^{II} \cdot 313,632 = \frac{2,4}{4,4} \cdot 3 (3 \cdot 25 - 3^2)$$

$$X_{II} (2 \cdot 5^3 + 313,632) + 2 Y_1^{II} \cdot 1 (3 \cdot 25 - 1^2) + 2 Y_2^{II} \cdot 2 (3 \cdot 25 - 2^2) + 2 Y_3^{II} \cdot 3 (3 \cdot 25 - 3^2) = 183,207 + \frac{4,8}{4,4} \cdot 5^3$$

$$\begin{cases} X_{II} \cdot 74 + Y_1^{II} \cdot 365,632 + Y_2^{II} \cdot 94 + Y_3^{II} \cdot 124 = 40,3636 \\ X_{II} \cdot 142 + Y_1^{II} \cdot 94 + Y_2^{II} \cdot 489,632 + Y_3^{II} \cdot 236 = 77,4545 \\ X_{II} \cdot 198 + Y_1^{II} \cdot 124 + Y_2^{II} \cdot 236 + Y_3^{II} \cdot 637,632 = 108,000 \\ X_{II} \cdot 563,632 + Y_1^{II} \cdot 148 + Y_2^{II} \cdot 284 + Y_3^{II} \cdot 396 = 319,571 \end{cases}$$

$$a) X_{II} \cdot 0,5968 + Y_1^{II} \cdot 2,9486 + Y_2^{II} \cdot 0,7581 + Y_3^{II} = 0,3255$$

$$b) X_{II} \cdot 0,6017 + Y_1^{II} \cdot 0,3983 + Y_2^{II} \cdot 2,0747 + Y_3^{II} = 0,3282$$

$$c) X_{II} \cdot 0,3105 + Y_1^{II} \cdot 0,1945 + Y_2^{II} \cdot 0,3701 + Y_3^{II} = 0,1694$$

$$d) X_{II} \cdot 1,4233 + Y_1^{II} \cdot 0,3737 + Y_2^{II} \cdot 0,7172 + Y_3^{II} = 0,8070$$

$$\begin{aligned} \text{a-c) } & X_{II} \cdot 0,2863 + Y_1^{II} \cdot 2,7541 + Y_2^{II} \cdot 0,3880 = 0,1561 \\ \text{b-c) } & X_{II} \cdot 0,2912 + Y_1^{II} \cdot 0,2038 + Y_2^{II} \cdot 1,7046 = 0,1588 \\ \text{d-c) } & X_{II} \cdot 1,1128 + Y_1^{II} \cdot 0,1792 + Y_2^{II} \cdot 0,3471 = 0,6376 \\ \text{e) } & X_{II} \cdot 0,7379 + Y_1^{II} \cdot 7,0982 + Y_2^{II} = 0,4023 \\ \text{f) } & X_{II} \cdot 0,1708 + Y_1^{II} \cdot 0,1196 + Y_2^{II} = 0,0933 \\ \text{g) } & X_{II} \cdot 3,2060 + Y_1^{II} \cdot 0,5163 + Y_2^{II} = 1,8369 \\ \text{e-f) } & X_{II} \cdot 0,5671 + Y_1^{II} \cdot 6,9786 = 0,3090 \\ \text{g-f) } & X_{II} \cdot 3,0352 + Y_1^{II} \cdot 0,3967 = 1,7436 \\ \text{h) } & X_{II} \cdot 0,0813 + Y_1^{II} = 0,0443 \\ \text{i) } & X_{II} \cdot 7,6509 + Y_1^{II} = 4,3953 \\ \text{i-h) } & X_{II} \cdot 7,5696 = 4,3510 \\ & X_{II} = \frac{4,3510}{7,5696} = 0,5748. \end{aligned}$$

Die angenäherte Berechnung von X_{II} nach Abschnitt VI c ergibt, wenn die Y-Werte in der letzten der vier Bestimmungsgleichungen = 0 gesetzt werden:

$$X_{II} = \frac{319,571}{563,632} = 0,5670.$$

Die Abweichung vom genauen Wert ist $0,0078 = 1,35$ vH des genauen Wertes, also unbedeutend.

Aus wissenschaftlichem Interesse sind nachfolgend auch die Y-Kräfte ermittelt, obwohl sie keine praktische Bedeutung haben.

$$\begin{aligned} Y_1^{II} &= 4,3953 - X_{II} \cdot 7,6509 = -0,0024 \\ Y_2^{II} &= 1,8369 - X_{II} \cdot 3,206 - Y_1^{II} \cdot 0,5163 = -0,0071 \\ Y_3^{II} &= 0,807 - X_{II} \cdot 1,4233 - Y_1^{II} \cdot 0,3737 \\ &\quad - Y_2^{II} \cdot 0,7172 = -0,0171. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß die Y-Kräfte im Verhältnis zu X sehr klein sind, z. B. ist Y_3^{II} dem absoluten Werte nach $= 0,03 \cdot X^{II}$. Die Y-Kräfte werden für Träger II negativ; dies bedeutet, daß bei Belastung der Brücke mit einer Kraft in Brückenmitte sich die Mittelstütze (Träger II) der unbelasteten Querträger 1, 2 und 3 relativ zur Verbindungslinie der Außenstützen (Träger I und III) senkt.

$$\xi_{II\text{M}} = 0,5748$$

$$\xi_{I\text{M}} = \frac{b+a}{2b} - \frac{1}{2} X_{II} = 0,5 + 0,2727 - 0,2874 = 0,4853.$$

Berechnung von J_{II} und J_I in Trägermitte.
Lastenzug G.

Träger II:

Unter Anwendung der Formel 4 folgt

$$M_{p5}^{II} = 2 \cdot \frac{\xi_{II0} + 4 \cdot \xi_{II\text{M}}}{5} \cdot 459 = (0,5842 + 4 \cdot 0,5748) 183,6 = 529,39 \text{ mt}$$

Ruhende Last für ein Gleis

$$g = 2,2 \text{ t/m}$$

$$M_{g5}^{II} = 2 \cdot \frac{\xi_{II0} + 4 \cdot \xi_{II\text{M}}}{5} \cdot \frac{2,2 \cdot 20^2}{8} = 126,87 \text{ mt}$$

$$\max M_5^{II} = M_{g5}^{II} + \text{Stoßzahl} \cdot M_{p5}^{II} = 126,87 + 1,51 \cdot 529,39 = 799,38 \text{ mt}$$

$$W_{\text{erf}}^{II} = \frac{79\,938 \text{ tcm}}{1,4 \text{ t/cm}^2} \approx 57\,100 \text{ cm}^3$$

$$J_{\text{erf}}^{II} = W_{II} \cdot 100 \approx 5\,710\,000 \text{ cm}^4$$

Träger I:

Das größte Moment tritt bei Belastung eines Gleises auf:

$$M_{p5}^I = \frac{\xi_{I0} + 4 \xi_{I\text{M}}}{5} \cdot 459 = \frac{0,4806 + 4 \cdot 0,4853}{5} \cdot 459 = 222,32 \text{ mt.}$$

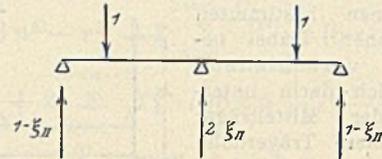


Abb. 42.

Bei Berechnung von M_{g5}^I ist zu beachten, daß die ruhende Last auf beide Querträgerhälften wirkt. Die Einflußordinate für die Knotenlast des Randträgers ist daher $= 1 - \xi_{II}$ (Abb. 42).

$$\begin{aligned} M_{g5}^I &= \frac{1 - \xi_{II0} + 4(1 - \xi_{II\text{M}})}{5} \cdot \frac{2,2 \cdot 20^2}{8} \\ &= \frac{5 - 0,5842 - 2,2992}{5} \cdot 2,2 \cdot 50 = 46,57 \text{ mt} \end{aligned}$$

$$\max M_5^I = 46,57 + 1,51 \cdot 222,32 = 382,27 \text{ mt}$$

$$W_{5\text{erf}}^I = \frac{38\,227}{1,4} \approx 27\,360 \text{ cm}^3$$

$$J_{5\text{erf}}^I = 90 \cdot 27\,360 \approx 2\,462\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{J_{II}}{J_I} = \varphi = \frac{5\,710\,000}{2\,462\,000} = 2,32.$$

Wie man sieht, stimmt dieser Wert mit dem angenommenen Wert 2,4 ziemlich gut überein.

VIII. Zusammenfassung.

Die statischen Verhältnisse von Tragwerken mit drei Hauptträgern werden eingehend untersucht. Hierbei wird folgendes festgestellt:

1. Fast immer wird der Mittelträger stärker beansprucht, als man bisher bei der üblichen Berechnungsart angenommen hat.

2. Zur genaueren Berechnung solcher Systeme werden für symmetrische Brücken allgemeine Gleichungen für die Verteilung der Knotenlasten auf die drei Träger entwickelt. (Siehe die Gl. 24 u. 26, bzw. 26a, 27 u. 28, bzw. 28a, 37 u. 39, 40 u. 41, 42 u. 45.) Wenn auch deren Ableitung anscheinend etwas verwickelt ist, so ist ihre Anwendung nicht besonders schwierig, wie an zwei Zahlenbeispielen (einer Fachwerk- und einer Blechträgerbrücke) gezeigt wird.

3. Für kleinere Brücken (namentlich Blechträger) werden vereinfachende Annahmen gemacht, die zu erheblich einfacheren Formeln führen. Siehe die Gl. 46, 47 u. 50. Die Auflösung von mehreren Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten wird dadurch erspart.

4. Beim Neuentwerfen derartiger Brückensysteme empfiehlt es sich, die Gleisachse nicht genau in die Mitte zwischen Rand- und Mittelträger zu legen, sondern etwas vom Mittelträger abzurücken. Dadurch wird eine Vermehrung der Belastung der Randträger zugunsten des Mittelträgers erreicht.

5. Es ist im allgemeinen nicht zweckmäßig, den Mittelträger wesentlich höher anzunehmen als die Randträger. Je steifer der Mittelträger ausgebildet wird, desto mehr Belastung muß er übernehmen.

Alle Rechte vorbehalten.

Der durchlaufende Träger.

Eine neue analytische Darstellung der Einflußlinien für die Biegemomente, Querkräfte, Durchbiegungen und Verdrehungen bei durchlaufenden Trägern.

Von Ing. Artur Julius Fahnauer, weiland Leiter der Eisenbetonarbeiten am Neubau der Königl. Sommerresidenz in Dedinje bei Belgrad.¹⁾

Bei dem nachfolgend erörterten Berechnungsverfahren sind nicht die Stützenmomente, sondern die sinnlich wahrnehmbaren, meßbaren Verdrehungen der Querschnitte über den Stützen als statisch unbekannte Größen eingeführt. Daß diese von Gehler²⁾ stammende Annahme eine glückliche zu nennen ist, beweist die Einfachheit der Formeln, zu denen man durch sie gelangt. Selbst die sonst so umständliche Ermittlung der Durchbiegung an beliebiger Stelle und bei verwickelter Belastung des durchlaufenden Trägers über mehrere Öffnungen mit ungleichen Stützweiten reduziert sich hier auf die Auswertung einer sehr einfach gebauten Formel.

Der bewegende Gedanke dieser Abhandlung besteht in der Darstellung der Biegemomente, Querkräfte, Durchbiegungen und Verdrehungen (alle diese statischen Größen beziehbar auf jeden Punkt des Tragwerks) als analytische Funktionen zweier Argumente, und zwar

1. gewisser Koeffizienten γ und
2. der Hilfsmomente m , die sich auf die vollkommen eingespannt gedachten Öffnungen beziehen.

Erstere kennzeichnen die Formgebung, letztere die Belastung des Tragwerks.

I. Ableitung der Grundgleichungen.

Wir betrachten einen zunächst gewichtlosen, irgendwie eben gekrümmten Stab ($K-1$), K mit einem Trägheitsmoment J_k , welches umgekehrt proportional dem Kosinus des Tangentenwinkels ω (Abb. 1) ist. $J_k \cos \omega = \text{konst.}$ An den beiden Stabenden wirken die Biegemomente $M_{k-1,k}$ und $M_{k,k-1}$. Sie seien positiv bezeichnet, wenn ihre Kräftepaare eine rechts drehende Bewegung verursachen. Die

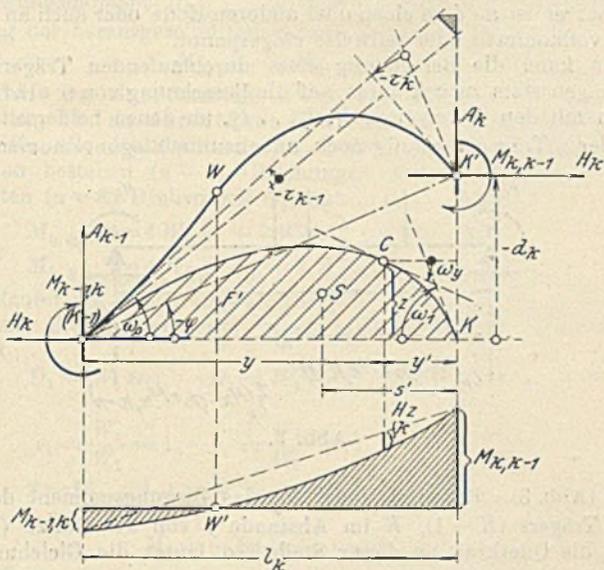


Abb. 1.

Bogenkraft H_k werde als Zugkraft positiv bezeichnet. Bezüglich der bei der Formänderung des Stabes entstehenden Enddrehwinkel τ_A und τ_B sowie des bei der lotrechten Verschiebung d_k der Endpunkte entstehenden Drehwinkels φ der Bogensehne sei wieder eine rechtsdrehende Bewegung als positiv festgelegt.

¹⁾ Der jüngst verstorbene Verfasser hat die Korrektur seines Aufsatzes nicht mehr lesen können. Die Schriftleitung.
²⁾ Dr.-Ing. W. Gehler, Der Rahmen, 3. Auflage. Berlin 1925. Wilhelm Ernst & Sohn.

Man kann die beiden Biegemomente $M_{k-1,k}$ und $M_{k,k-1}$, die man die Einspannmomente des Stabes nennt, als Funktionen der Belastung, der Wärmeänderung, dann der lotrechten und wagenrechten Verschiebung und der Verdrehung der beiden Endquerschnitte im Punkte ($K-1$) und K darstellen. Es ist nämlich nach O. Mohr (Abb. 1) die lotrechte Verschiebung

$$(1) \quad \begin{cases} -(d_k - \tau_{k-1} \cdot l_k \sec \omega_0 \cos \omega_0) \\ = \frac{l_k^2}{6 E J_{k_s}} (2 M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) + H_k \cdot \frac{F'}{E J_{k_s}} \cdot s', \end{cases}$$

wobei $J_{k_s} = J_k \cos \omega = \text{konst.}$,
 F' die von der Stabachse und Stabsehne eingeschlossene Fläche,
 s' den Abstand des Schwerpunktes der Fläche F' vom Endpunkte K

bedeutet.

Wirken noch beliebige Schwerkräfte auf den Stab und ist F'' der Inhalt der Momentenfläche des einfachen Balkens für diese Belastung und s'' der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche F'' vom Endpunkte K , so lautet Gl. 1 allgemeiner:

$$(2) \quad \begin{cases} \tau_{k-1} l_k - d_k = \frac{l_k^2}{6 E J_{k_s}} (2 M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) \\ + \frac{F''}{E J_{k_s}} \cdot s'' + H_k \frac{F'}{E J_{k_s}} \cdot s'. \end{cases}$$

Berücksichtigt man ferner, daß die Änderung der Neigung der Tangente an die elastische Linie des Bogens vom Ende K gegen den Anfang ($K-1$) des Stabes gleich ist $-\tau_k - (-\tau_{k-1}) = \tau_{k-1} - \tau_k$ und nach Mohr durch den Inhalt aller drei Momentenflächen ausgedrückt werden kann, so findet man die Gleichung:

$$(3) \quad \begin{cases} \tau_{k-1} - \tau_k = \frac{l_k}{2 E J_{k_s}} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) \\ + \frac{F''}{E J_{k_s}} + \frac{F'}{E J_{k_s}} \cdot H_k. \end{cases}$$

Durch Vereinigung der beiden Gl. 2 u. 3 und mit Einführung der Bezeichnungen:

$$(4) \quad \begin{cases} W_k = \frac{J_{k_s}}{l_k}, \quad \phi_k = E \frac{d_k}{l_k}; \\ \theta_{k-1} = E \tau_{k-1} \quad \text{und} \quad \theta_k = E \tau_k, \end{cases}$$

wobei

E das Elastizitätsmaß des Baustoffes,
 ϕ_k den mit E vervielfachten Drehwinkel der Stabsehne,
 θ_{k-1} und θ_k die mit E vervielfachten Drehwinkel der beiden Endquerschnitte

bedeuten, entsteht die Gleichung für das Einspannmoment im Punkte ($K-1$):

$$(5) \quad \begin{cases} M_{k-1,k} = 2 W_k (2 \theta_{k-1} + \theta_k - 3 \phi_k) \\ - \frac{2 F''}{l_k^2} (3 s'' - l_k) - H_k \cdot \frac{2 F'}{l_k^2} (3 s' - l_k) \end{cases}$$

und durch Vertauschung der Zeiger ($k-1$) und k , dann der Wert s' bzw. s'' mit $(l_k - s')$ bzw. $(l_k - s'')$ sowie mit Rücksicht auf die Verschiedenheit des Biegeganges bei Annahme positiver Einspannmomente entsteht die analoge Gleichung für das Einspannmoment im Punkte K :

$$(6) \quad \begin{cases} M_{k,k-1} = 2 W_k (\theta_{k-1} + 2 \theta_k - 3 \phi_k) \\ + \frac{2 F''}{l_k^2} (2 l_k - 3 s'') + H_k \cdot \frac{2 F'}{l_k^2} (2 l_k - 3 s'). \end{cases}$$

Ist die Stabachse eine Gerade, so ist $F'' = \Theta$ und Gl. 5 u. 6 reduzieren sich auf:

$$M_{k-1,k} = 2W_k(2\Theta_{k-1} + \Theta_k - 3\Phi_k) - \frac{2F''}{l_k^2}(3s'' - l_k)$$

$$M_{k,k-1} = 2W_k(\Theta_{k-1} + 2\Theta_k - 3\Phi_k) + \frac{2F''}{l_k^2}(2l_k - 3s'')$$

Ist der gerade Stab vollkommen eingespannt und ist eine lotrechte Bewegung der Auflagerpunkte ($K-1$) und K infolge der Belastung ausgeschlossen, so wird

$\Theta_{k-1} = \Theta_k = 0$ und $\Phi_k = 0$

und

$$(7) \quad \begin{cases} m_{k-1,k} = -\frac{2F''}{l_k^2}(3s'' - l_k) \\ m_{k,k-1} = +\frac{2F''}{l_k^2}(2l_k - 3s'') \end{cases}$$

sind die Momente bei Belastung des beiderseits vollkommen eingespannten geraden Stabes.

Ist der gerade Stab im Punkte ($K-1$) teilweise eingespannt, hingegen im Punkte K frei drehbar gelagert, so bestehen gleichzeitig die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} M_{k-1,k} = 4W_k\Theta_{k-1} + 2W_k\Theta_k - 6W_k\Phi_k - \frac{2F''}{l_k^2}(3s'' - l_k) \\ 0 = W_k\Theta_{k-1} + 2W_k\Theta_k - 3W_k\Phi_k + \frac{F''}{l_k^2}(2l_k - 3s'') \end{cases}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man

$$M_{k-1,k} = 3W_k\Theta_{k-1} - 3W_k\Phi_k - \frac{3F''s''}{l_k^2}$$

Ähnlich erhält man für das Einspannmoment eines im Punkte K teilweise eingespannten, im Punkte ($K-1$) frei drehbar gelagerten Trägers:

$$M_{k,k-1} = 3W_k\Theta_k - 3W_k\Phi_k + \frac{3F''(l_k - s'')}{l_k^2}$$

Bei vollkommener Einspannung des geraden Stabes im Punkte ($K-1$) oder K und bei Ausschluß lotrechter Auflagerbewegungen wird

$\Theta_{k-1} = 0$ oder $\Theta_k = 0$ und $\Phi_k = 0$

und

$$(8) \quad \begin{cases} m'_{k-1,k} = -\frac{3F''s''}{l_k^2} \\ m'_{k,k-1} = +\frac{3F''(l_k - s'')}{l_k^2} \end{cases}$$

sind die Momente bei Belastung des nur einseitig vollkommen eingespannten geraden Stabes.

Für eine über den Träger ($K-1$), K sich bewegende Last 1 im Abstände x vom Punkte ($K-1$) und x' vom Punkte K ist

$$F'' = \frac{1}{2} \cdot x x' \quad \text{und} \quad s'' = \frac{1}{3}(2l_k - x),$$

und die Gl. 7 nehmen mit der Bezeichnung

$$\zeta = \frac{x}{l_k} \quad \text{und} \quad \zeta' = 1 - \zeta$$

die Gestalt an

$$(9) \quad \begin{cases} m_{k-1,k} = -\zeta \zeta'^2 l_k = \psi_r l_k \\ m_{k,k-1} = +\zeta'^2 \zeta l_k = \psi_l l_k \end{cases}$$

während die Gl. 8 lauten

$$(10) \quad \begin{cases} m'_{k-1,k} = -\frac{1}{2} \cdot \zeta \zeta'(1 + \zeta) l_k = \psi_r' l_k \\ m'_{k,k-1} = +\frac{1}{2} \cdot \zeta \zeta'(1 + \zeta) l_k = \psi_l' l_k \end{cases}$$

Bei Berücksichtigung partieller gleichförmiger Lasten p innerhalb der Laststrecke (x_1, x_2) führt man in die Gl. 9 u. 10 die Differentiallast $p dx = p l d\zeta$ ein und integriert im Intervall (ζ_1, ζ_2). Man findet so:

$$(11) \quad \begin{cases} m_{k-1,k} = -\left\{ \zeta^2 [6 - \zeta(8 - 3\zeta)] \right\}_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cdot \frac{p l_k^2}{12} = w_r \cdot \frac{p l_k^2}{12} \\ m_{k,k-1} = +\left\{ \zeta^3 (4 - 3\zeta) \right\}_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cdot \frac{p l_k^2}{12} = w_l \cdot \frac{p l_k^2}{12} \end{cases}$$

Insbesondere ist für eine gleichförmige, über den ganzen Träger sich erstreckende Last p

$$w_r = -w_l = -1 \quad \text{und deshalb} \quad m_{k-1,k} = -m_{k,k-1} = -\frac{p l_k^2}{12}$$

Ferner findet man

$$(12) \quad \begin{cases} m'_{k-1,k} = -\left\{ \zeta^2 [4(1 - \zeta) + \zeta^2] \right\}_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cdot \frac{p l_k^2}{8} = w_r' \cdot \frac{p l_k^2}{8} \\ m'_{k,k-1} = +\left\{ \zeta^2 (2 - \zeta^2) \right\}_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cdot \frac{p l_k^2}{8} = w_l' \cdot \frac{p l_k^2}{8} \end{cases}$$

Für eine gleichförmige, über den ganzen Träger sich erstreckende Last p ist in diesem Falle $w_r' = w_l' = -1$ und deshalb

$$m'_{k-1,k} = -m_{k,k-1} = -\frac{p l_k^2}{8}$$

Tabelle der Funktionen ψ .

$\zeta = \frac{x}{l_k}$	ψ_r	ψ_l	ψ_r'	ψ_l'
0,05	-0,045 13	+0,002 375	-0,046 31	+0,024
0,10	-0,081	+0,009	-0,085 5	+0,049 5
0,15	-0,108 38	+0,019 125	-0,117 94	+0,073 32
0,20	-0,128	+0,032	-0,144	+0,096
0,25	-0,140 63	+0,046 375	-0,164 06	+0,117 19
0,30	-0,147	+0,063	-0,178 5	+0,136 5
0,35	-0,147 88	+0,079 625	-0,187 69	+0,153 56
0,40	-0,144	+0,096	-0,192	+0,168
0,45	-0,136 13	+0,111 375	-0,191 81	+0,179 44
0,50	-0,125	+0,125	-0,187 5	+0,187 5
0,55	-0,111 375	+0,136 13	-0,179 44	+0,191 81
0,60	-0,096	+0,144	-0,168	+0,192
0,65	-0,079 625	+0,147 88	-0,153 56	+0,187 69
0,70	-0,063	+0,147	-0,136 5	+0,178 5
0,75	-0,046 375	+0,140 63	-0,117 19	+0,164 06
0,80	-0,032	+0,128	-0,096	+0,144
0,85	-0,019 125	+0,108 38	-0,073 32	+0,117 94
0,90	-0,009	+0,081	-0,049 5	+0,085 5
0,95	-0,002 375	+0,045 13	-0,024 94	+0,046 31

II. Darstellung der Stützdrehwinkel $\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{n-1}$ als Funktionen der Belastung.

Ein durchlaufender Träger (Abb. 2) auf $(n+1)$ Stützen besitzt bekanntlich n Öffnungen mit den Längen $l_1, l_2 \dots l_n$. Zur Vermeidung wagerechter Verschiebungen bei Angriff schräg gerichteter Kräfte

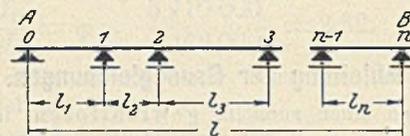


Abb. 2.

muß eine Stütze ein festes Auflager haben, alle anderen Stützen können als Rollenlager ausgebildet sein. An den Trägerenden o und n ist der durchlaufende Träger entweder frei drehbar gelagert, oder aber er ist an dem einen oder anderen Ende oder auch an beiden Enden vollkommen oder teilweise eingespannt.

Man kann die Berechnung eines durchlaufenden Trägers über n Öffnungen stets zurückführen auf die Berechnung von n einfachen Trägern mit den Stützweiten $l_1, l_2 \dots l_n$, an denen beiderseits ein jeder der n Träger vorläufig noch unbekannte Biegemomente an-

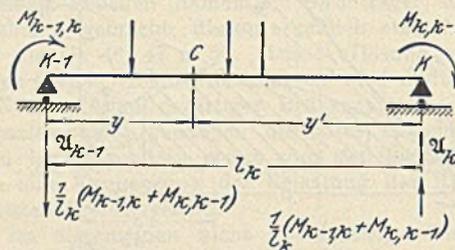


Abb. 3.

greifen (Abb. 3). Bedeutet dabei M_y das Biegemoment des einfachen Trägers ($K-1$), K im Abstände y von der Stütze ($K-1$) und Q_y die Querkraft an dieser Stelle, so lautet die Gleichung zur Bestimmung des Biegemomentes an der Stelle y :

$$M_y = M_y + M_{k-1,k} - \frac{1}{l_k} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) y$$

oder mit den Bezeichnungen

$$(13) \quad \chi = \frac{y}{l_k} \quad \text{und} \quad \chi' = 1 - \chi$$

$$(14) \quad M_y = \chi' M_{k-1,k} - \chi M_{k,k-1} + M_y$$

und die Querkraft daselbst

$$(15) \quad Q_y = Q_y - \frac{1}{l_k} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1})$$

Kennt man demnach die Momente $M_{k-1,k}$ und $M_{k,k-1}$ an den Stützpunkten aller n einfachen Trägers, die sog. Stützenmomente

des durchlaufenden Trägers, so wird mit Hilfe der Gl. 14 u. 15 der gesamte Verlauf der Biegemomente und Querkräfte bekannt.

Wenn man vorläufig von lotrechten Stützensenkungen absieht, so lauten nach den Ausführungen des I. Abschnitts die Gleichungen für die Stützenmomente der k ten Öffnung infolge $\psi_k = 0$:

$$(16) \quad M_{k-1,k} = 2W_k(2\Theta_{k-1} + \Theta_k) + m_{k-1,k}$$

$$(17) \quad M_{k,k-1} = 2W_k(\Theta_{k-1} + 2\Theta_k) + m_{k,k-1}$$

Besonders erwähnt seien noch die Endöffnungen.

Es werden hier zwei Fälle unterschieden:

1. die Endöffnung ist einerseits frei drehbar gelagert und
2. " " " " " vollkommen eingespannt.

Endöffnung frei drehbar gelagert.

Das Stützenmoment für die 1. Öffnung $k=1$ lautet:

$$(18) \quad M_{1,0} = 3W_1\Theta_1 + m'_{1,0},$$

für die k te Öffnung $k=n$:

$$(19) \quad M_{n-1,n} = 3W_n\Theta_{n-1} + m'_{n-1,n}$$

Endöffnung vollkommen eingespannt.

Für $k=1$ ist das Biegemoment

$$(20) \quad \text{an der Stütze 0: } M_{0,1} = 2W_1\Theta_1 + m_{0,1}$$

$$(21) \quad \text{" " " " 1: } M_{1,0} = 4W_1\Theta_1 + m_{1,0}$$

Für $k=n$ ist das Biegemoment

$$(22) \quad \text{an der Stütze } (n-1): M_{n-1,n} = 4W_n\Theta_{n-1} + m_{n-1,n}$$

$$(23) \quad \text{" " " " n: } M_{n,n-1} = 2W_n\Theta_{n-1} + m_{n,n-1}$$

Aus allen diesen Gl. 16 bis 23, die zur Bestimmung der Stützenmomente dienen, erkennt man, daß diese von den Drehwinkeln $\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{n-1}$, die proportional

den Verdrehungen der Stützenquerschnitte sind, sowie von den bereits bekannten Hilfsmomenten m , die sich auf die vollkommen eingespannten Trägerteile 0-1, 1-2, ... (n-1)-n beziehen, abhängig sind.

Denkt man sich die k te Stütze aus dem Tragwerk herausgeschnitten, und bringt man an den beiden unendlich nahe dieser Stütze K gelegenen Schnittflächen das daselbst wirkende Kräfteispiel an (Abb. 4), also an die linke Schnittfläche die Querkraft $Q_k^{(l)}$ und das Biegemoment $M_{k,k-1}$, an die rechte Schnittfläche die Querkraft $Q_k^{(r)}$ und das Biegemoment $M_{k,k+1}$, so erfordert das Gleichgewicht gegen Drehung der herausgeschnitten gedachten Stütze, daß

$$(24) \quad M_{k,k-1} + M_{k,k+1} = 0$$

sein muß. Da eine derartige Gleichung, die man die Summengleichung der an der Stütze K wirkenden Stützenmomente nennt, für alle Mittelstützen 1, 2 ... (n-1) angeschrieben werden kann, so bestehen (n-1) Gleichungen zur Bestimmung der unbekannt (n-1) Drehwinkel $\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_{n-1}$. Da

$$M_{k,k-1} = 4W_k\Theta_k + 2W_k\Theta_{k-1} + m_{k,k-1}$$

$$M_{k,k+1} = 4W_{k+1}\Theta_k + 2W_{k+1}\Theta_{k+1} + m_{k,k+1}$$

ist, so lautet die Summengleichung 24 für die an der k ten Stütze wirkenden Biegemomente, wenn man vorher die Bezeichnungen einführt

$$(25) \quad D_1 = W_1\Theta_1, \quad D_2 = W_1\Theta_2 \dots D_{n-1} = W_1\Theta_{n-1}$$

und

$$(26) \quad \nu_1 = \frac{W_1}{W_1} = 1, \quad \nu_2 = \frac{W_2}{W_1} \dots \nu_n = \frac{W_n}{W_1}$$

$$(27) \quad 2\nu_k D_{k-1} + 4(\nu_k + \nu_{k+1}) D_k + 2\nu_{k+1} D_{k+1} = M_k,$$

wobei

$$(28) \quad M_k = -(m_{k,k-1} + m_{k,k+1})$$

bedeutet.

Für die Endfelder erhält man als Summengleichungen:

Endfeld frei drehbar gelagert.

für $k=1$:

$$(29) \quad \begin{cases} (3 + 4\nu_2) D_1 + 2\nu_2 D_2 = M_1 \\ M_1 = -(m'_{1,0} + m_{1,2}) \end{cases}$$

für $k=(n-1)$:

$$(30) \quad \begin{cases} (4\nu_{n-1} + 3\nu_n) D_{n-1} + 2\nu_{n-1} D_{n-2} = M_{n-1} \\ M_{n-1} = -(m_{n-1,n-2} + m'_{n-1,n}) \end{cases}$$

Endfeld vollkommen eingespannt.

für $k=1$:

$$(31) \quad \begin{cases} 4(1 + \nu_2) D_1 + 2\nu_2 D_2 = M_1 \\ M_1 = -(m_{1,0} + m_{1,2}) \end{cases}$$

für $k=n$:

$$(32) \quad \begin{cases} 4(\nu_{n-1} + \nu_n) D_{n-1} + 2\nu_{n-1} D_{n-2} = M_{n-1} \\ M_{n-1} = -(m_{n-1,n-2} + m'_{n-1,n}) \end{cases}$$

Substituiert man

$$(33a) \quad \begin{cases} \varrho_1 = 4(1 + \nu_2) \\ \varrho_1' = 3 + 4\nu_2 \\ \varrho_3 = 4(\nu_2 + \nu_3) \\ \varrho_5 = 4(\nu_3 + \nu_4) \\ \dots \\ \varrho_{2n-3} = 4(\nu_{n-1} + \nu_n) \\ \varrho_{2n-3}' = 4\nu_{n-1} + 3\nu_n \end{cases} \quad \begin{cases} \varrho_2 = 2\nu_2 \\ \varrho_4 = 2\nu_3 \\ \varrho_6 = 2\nu_4 \\ \dots \\ \varrho_{2n-4} = 2\nu_{n-1} \end{cases}$$

wobei ϱ_1 und ϱ_{2n-3} sich auf eine vollkommene Einspannung der Endöffnungen, hingegen ϱ_1' und ϱ_{2n-3}' sich auf eine frei drehbare Lagerung der Endöffnungen beziehen.

Es besteht somit zur Bestimmung der (n-1) unbekannt Drehmaße der Stützen das Gleichungssystem

$$(33) \quad \begin{cases} \varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2 = M_1 \\ \varrho_2 D_1 + \varrho_3 D_2 + \varrho_4 D_3 = M_2 \\ \dots \\ \varrho_{2k-2} D_{k-1} + \varrho_{2k-1} D_k + \varrho_{2k} D_{k+1} = M_k \\ \dots \\ \varrho_{2n-4} D_{n-2} + \varrho_{2n-3} D_{n-1} = M_{n-1} \end{cases}$$

Aus diesem Gleichungssystem können alle unbekannt Drehmaße als Funktionen der von der Belastung abhängigen Hilfsmomente $M_1, M_2 \dots M_{n-1}$ derart dargestellt werden, daß für das k te Drehmaß die Entwicklungsgleichung

$$(34) \quad D_k = \gamma_k^{(1)} M_1 + \gamma_k^{(2)} M_2 + \dots + \gamma_k^{(n-1)} M_{n-1}$$

gilt, wobei die Koeffizienten $\gamma_k^{(1)}, \gamma_k^{(2)} \dots \gamma_k^{(n-1)}$ Funktionen von $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_{2n-3}$, also von der Belastung unabhängig und nur von der Formung des Tragwerks abhängig sind.

Es mögen nun für einige praktisch oft vorkommende Fälle die Koeffizienten γ allgemein berechnet werden.

A. Der durchlaufende Träger auf drei Stützen (Abb. 5).

Unbekannt ist hier nur das Drehmaß D_1 . Es entfallen somit in der Gleichungsgruppe 33: $D_2, D_3 \dots D_{n-1}$, und man erhält die Gleichung

$$\varrho_1 D_1 = M_1 \text{ oder } D_1 = \frac{1}{\varrho_1} M_1; \text{ es ist also } \gamma_1^{(1)} = \frac{1}{\varrho_1}$$

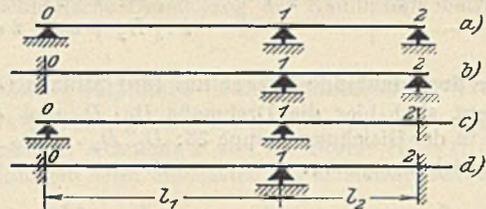


Abb. 5.

Man erhält also mit Hilfe der Werte ϱ (Gl. 33a):

$$(34) \quad \begin{cases} \text{für den Fall in Abb. 5 a: } D_1 = \frac{M_1}{3(1 + \nu_2)} = \frac{m'_{1,0} + m'_{1,2}}{3(1 + \nu_2)} \\ \text{" " " " " 5 b: } D_1 = \frac{M_1}{4 + 3\nu_2} = \frac{m_{1,0} + m'_{1,2}}{4 + 3\nu_2} \\ \text{" " " " " 5 c: } D_1 = \frac{M_1}{3 + 4\nu_2} = \frac{m'_{1,0} + m_{1,2}}{3 + 4\nu_2} \\ \text{" " " " " 5 d: } D_1 = \frac{M_1}{4(1 + \nu_2)} = \frac{m_{1,0} + m_{1,2}}{4(1 + \nu_2)} \end{cases}$$

Tabelle für die Stützenmomente.

	Fall in Abb. 5 a	Fall in Abb. 5 b	Fall in Abb. 5 c	Fall in Abb. 5 d
$M_{0,1}$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$
$M_{1,0}$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$
$M_{2,1}$	—	—	$2\nu_2 D_1 + m_{2,1}$	$2\nu_2 D_1 + m_{2,1}$

Setzt man für D_1 die Werte aus Gl. 34 ein, so erscheinen die Stützenmomente nur mehr als Funktionen der Hilfsmomente m oder als Funktionen der Werte ψ (vgl. Gl. 9 u. 10). Durch Variation von ψ

können die Einflußlinien aller Stützente Momente schnell gezeichnet werden. So ist beispielsweise für den Fall der Abb. 5a:

$$(35) \quad M_{1,0} = -\frac{m'_{1,0} + m'_{1,2}}{1 + \nu_2} + m'_{1,0};$$

für den Zweig der Einflußlinie in der 1. Öffnung ist $m'_{1,2} = 0$, daher

$$M_{1,0} = -\frac{m'_{1,0}}{1 + \nu_2} + m'_{1,0} = \frac{\nu_2 l_1}{1 + \nu_2} \cdot \psi'_1;$$

erteilt man ψ'_1 der Reihe nach die in der Tabelle der Funktionen ψ angegebenen Werte, so erhält man die Einflußordinaten für die 1. Öffnung.

B. Der durchlaufende Träger auf vier Stützen (Abb. 6).

Unbekannt sind hier die Drehmaße D_1 und D_2 . Es entfallen somit in der Gleichungsgruppe 33 die Drehmaße $D_3, D_4 \dots D_{n-1}$, und man erhält das Gleichungssystem:

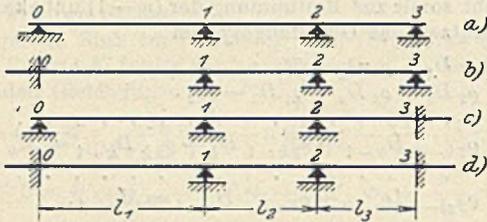


Abb. 6.

$$\begin{cases} \varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2 = M_1 \\ \varrho_2 D_1 + \varrho_3 D_2 = M_2 \end{cases}$$

Für $n = 3$ ist nach der Gleichungsgruppe 33 a:

$$\begin{aligned} \varrho_{2n-3} = \varrho_3 = 4(\nu_2 + \nu_3) & \quad \varrho_2 = 2\nu_2 & \quad \varrho_1 = 4(1 + \nu_2) \\ \varrho'_{2n-3} = \varrho'_3 = 4\nu_2 + 3\nu_3 & & \quad \varrho'_1 = 3 + 4\nu_2 \end{aligned}$$

und mit der Substitution $N = \varrho_1 \varrho_3 - \varrho_2^2$ ist:

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{\varrho_3}{N}; \quad \gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)} = -\frac{\varrho_2}{N}; \quad \gamma_2^{(2)} = \frac{\varrho_1}{N}.$$

Die Drehmaße sind:

$$D_1 = \gamma_1^{(1)} M_1 + \gamma_1^{(2)} M_2 \quad \text{und} \quad D_2 = \gamma_2^{(1)} M_1 + \gamma_2^{(2)} M_2.$$

Tabelle für die Stützente Momente.

	Fall in Abb. 6a	Fall in Abb. 6b	Fall in Abb. 6c	Fall in Abb. 6d
$M_{0,1} =$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$
$M_{1,0} =$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$
$M_{2,3} =$	$3 \nu_3 D_2 + m'_{2,3}$	$3 \nu_3 D_2 + m'_{2,3}$	$4 \nu_3 D_2 + m_{2,3}$	$4 \nu_3 D_2 + m_{2,3}$
$M_{3,2} =$	—	—	$2 \nu_3 D_2 + m_{3,2}$	$2 \nu_3 D_2 + m_{3,2}$

C. Der durchlaufende Träger auf fünf Stützen (Abb. 7).

Unbekannt sind hier die Drehmaße D_1, D_2 und D_3 . Es entfallen somit in der Gleichungsgruppe 33: $D_4, D_5 \dots D_{n-1}$, und man erhält das Gleichungssystem:

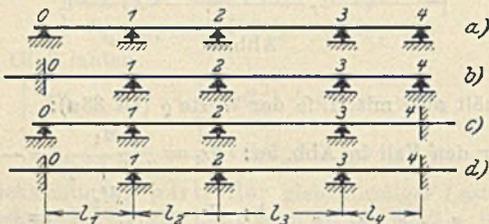


Abb. 7.

$$\begin{cases} \varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2 = M_1 \\ \varrho_2 D_1 + \varrho_3 D_2 + \varrho_4 D_3 = M_2 \\ \varrho_4 D_2 + \varrho_5 D_3 = M_3 \end{cases}$$

Für $n = 4$ ist nach Gl. 33 a:

$$\begin{aligned} \varrho_{2n-3} = \varrho_5 = 4(\nu_3 + \nu_4) & \quad \varrho_4 = 2\nu_3 & \quad \varrho_2 = 2\nu_2 & \quad \varrho_1 = 4(1 + \nu_2) \\ \varrho'_{2n-3} = \varrho'_5 = 4\nu_3 + 3\nu_4 & & & \quad \varrho'_1 = 3 + 4\nu_2 \end{aligned}$$

Für Abb. 7a gilt: ϱ'_1 und ϱ'_5 ; für Abb. 7c gilt: ϱ'_1 und ϱ_5 ,
 „ „ 7b „ ϱ_1 „ ϱ_5 ; „ „ 7d „ ϱ_1 „ ϱ_5 .

Mit der Substitution: $N = \varrho_1 (\varrho_3 \varrho_5 + \varrho_4^2) - \varrho_2^2 \varrho_5$ ist

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(1)} = \frac{\varrho_3 \varrho_5 - \varrho_4^2}{N} & \quad \gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)} = -\frac{\varrho_2 \varrho_5}{N} & \quad \gamma_1^{(3)} = \gamma_3^{(1)} = \frac{\varrho_3 \varrho_4}{N} \\ \gamma_2^{(2)} = \frac{\varrho_1 \varrho_5}{N} & \quad \gamma_2^{(3)} = \gamma_3^{(2)} = -\frac{\varrho_1 \varrho_4}{N} & \quad \gamma_3^{(3)} = \frac{\varrho_1 \varrho_3 - \varrho_2^2}{N} \end{aligned}$$

Die Drehmaße sind:

$$\begin{aligned} D_1 = \gamma_1^{(1)} M_1 + \gamma_1^{(2)} M_2 + \gamma_1^{(3)} M_3; & \quad D_2 = \gamma_2^{(1)} M_1 + \gamma_2^{(2)} M_2 + \gamma_2^{(3)} M_3; \\ D_3 = \gamma_3^{(1)} M_1 + \gamma_3^{(2)} M_2 + \gamma_3^{(3)} M_3. \end{aligned}$$

Tabelle für die Stützente Momente.

	Fall in Abb. 7a	Fall in Abb. 7b	Fall in Abb. 7c	Fall in Abb. 7d
$M_{0,1} =$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$
$M_{1,0} =$	$3 D_1 + m_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$
$M_{2,3} =$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2)$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2)$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2)$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2)$
	$+ m_{2,1}$	$+ m_{2,1}$	$+ m_{2,1}$	$+ m_{2,1}$
$M_{3,4} =$	$3 \nu_4 D_3 + m_{3,4}$	$3 \nu_4 D_3 + m'_{3,4}$	$4 \nu_4 D_3 + m_{3,4}$	$4 \nu_4 D_3 + m_{3,4}$
$M_{4,3} =$	—	—	$2 \nu_4 D_3 + m_{4,3}$	$2 \nu_4 D_3 + m_{4,3}$

D. Der durchlaufende Träger auf sechs Stützen (Abb. 8).

Unbekannt sind hier die Drehmaße D_1, D_2, D_3 und D_4 . Es entfallen somit in der Gleichungsgruppe 33: $D_5, D_6 \dots D_{n-1}$, und man erhält das Gleichungssystem:



Abb. 8.

$$\begin{cases} \varrho_1 D_1 + \varrho_2 D_2 = M_1 \\ \varrho_2 D_1 + \varrho_3 D_2 + \varrho_4 D_3 = M_2 \\ \varrho_4 D_3 + \varrho_5 D_4 + \varrho_6 D_5 = M_3 \\ \varrho_6 D_4 + \varrho_7 D_5 = M_4 \end{cases}$$

Für $n = 5$ ist:

$$\begin{aligned} \varrho_{2n-3} = \varrho_7 = 4(\nu_4 + \nu_5) & \quad (\text{Abb. 8c und 8d}) & \quad \varrho_6 = 2\nu_4 \\ \varrho'_{2n-3} = \varrho'_7 = 4\nu_4 + 3\nu_5 & \quad (\text{ „ 8a „ 8b) } & \quad \varrho_4 = 2\nu_3 \\ \varrho_5 = 4(\nu_3 + \nu_4) & & \quad \varrho_2 = 2\nu_2 \\ \varrho_3 = 4(\nu_2 + \nu_3) & & \\ \varrho_1 = 4(1 + \nu_2) & \quad (\text{Abb. 8b und 8d}) & \\ \varrho'_1 = 3 + 4\nu_2 & \quad (\text{ „ 8a „ 8c) } & \end{aligned}$$

und mit der Substitution:

$$N = \varrho_1 [\varrho_3 (\varrho_5 \varrho_7 - \varrho_6^2) - \varrho_4^2 \varrho_7] - \varrho_2^2 (\varrho_5 \varrho_7 - \varrho_6^2)$$

werden die Koeffizienten:

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{1}{N} [\varrho_3 (\varrho_5 \varrho_7 - \varrho_6^2) - \varrho_4^2 \varrho_7]$$

$$\gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)} = -\frac{1}{N} \cdot \varrho_2 (\varrho_5 \varrho_7 - \varrho_6^2)$$

$$\gamma_1^{(3)} = \gamma_3^{(1)} = \frac{1}{N} \cdot \varrho_3 \varrho_4 \varrho_7$$

$$\gamma_1^{(4)} = \gamma_4^{(1)} = -\frac{1}{N} \cdot \varrho_2 \varrho_4 \varrho_6$$

$$\gamma_2^{(2)} = \frac{1}{N} \cdot \varrho_1 (\varrho_5 \varrho_7 - \varrho_6^2)$$

$$\gamma_2^{(3)} = \gamma_3^{(2)} = -\frac{1}{N} \cdot \varrho_1 \varrho_4 \varrho_7$$

$$\gamma_2^{(4)} = \gamma_4^{(2)} = \frac{1}{N} \cdot \varrho_1 \varrho_4 \varrho_6$$

$$\gamma_3^{(3)} = \frac{1}{N} \cdot \varrho_7 (\varrho_1 \varrho_3 - \varrho_2^2)$$

$$\gamma_3^{(4)} = \gamma_4^{(3)} = -\frac{1}{N} \cdot \varrho_6 (\varrho_1 \varrho_3 - \varrho_2^2)$$

$$\gamma_4^{(4)} = \frac{1}{N} [\varrho_5 (\varrho_1 \varrho_3 - \varrho_2^2) - \varrho_1 \varrho_1^2].$$

Die Drehmaße sind:

$$D_1 = \gamma_1^{(1)} M_1 + \gamma_1^{(2)} M_2 + \gamma_1^{(3)} M_3 + \gamma_1^{(4)} M_4$$

$$D_2 = \gamma_2^{(1)} M_1 + \gamma_2^{(2)} M_2 + \gamma_2^{(3)} M_3 + \gamma_2^{(4)} M_4$$

$$D_3 = \gamma_3^{(1)} M_1 + \gamma_3^{(2)} M_2 + \gamma_3^{(3)} M_3 + \gamma_3^{(4)} M_4$$

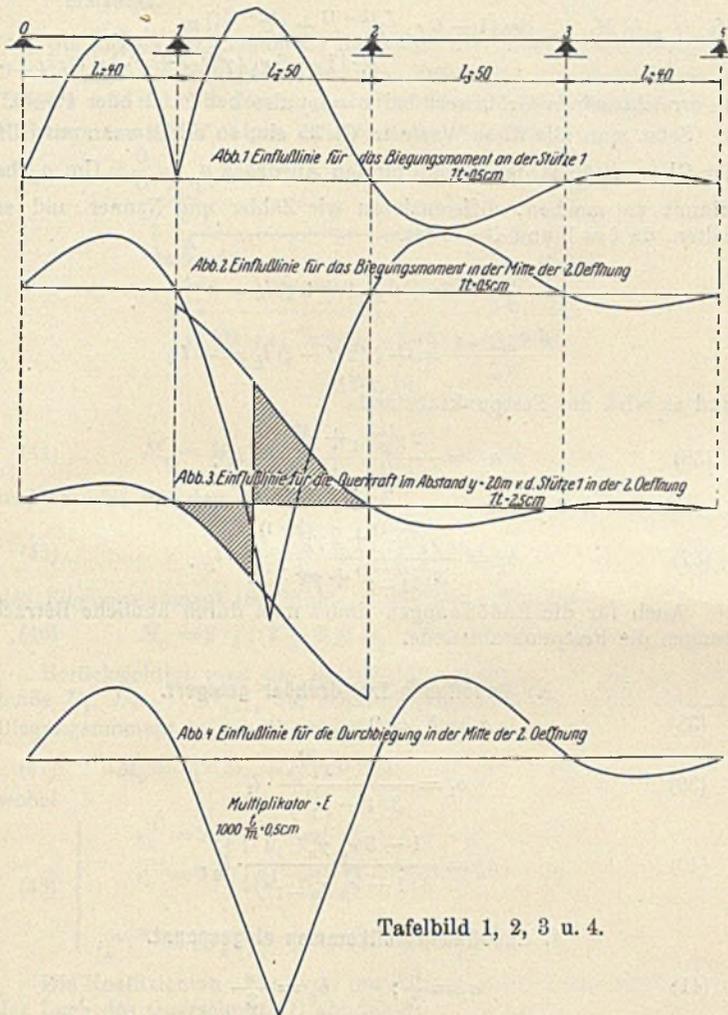
$$D_4 = \gamma_4^{(1)} M_1 + \gamma_4^{(2)} M_2 + \gamma_4^{(3)} M_3 + \gamma_4^{(4)} M_4.$$

Die Stützenmomente sind:

	Fall in Abb. 8a	Fall in Abb. 8b	Fall in Abb. 8c	Fall in Abb. 8d
$M_{0,1} =$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$	—	$2 D_1 + m_{0,1}$
$M_{1,0} =$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$	$3 D_1 + m'_{1,0}$	$4 D_1 + m_{1,0}$
$M_{2,1} =$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2) + m_{2,1}$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2) + m_{2,1}$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2) + m_{2,1}$	$2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2) + m_{2,1}$
$M_{3,4} =$	$2 \nu_4 (2 D_3 + D_4) + m_{3,4}$	$2 \nu_4 (2 D_3 + D_4) + m_{3,4}$	$2 \nu_4 (2 D_3 + D_2) + m_{3,4}$	$2 \nu_4 (2 D_3 + D_4) + m_{3,4}$
$M_{4,5} =$	$3 \nu_5 D_4 + m'_{4,5}$	$3 \nu_5 D_4 + m'_{4,5}$	$4 \nu_5 D_4 + m_{4,5}$	$4 \nu_5 D_4 + m_{4,5}$
$M_{5,4} =$	—	—	$2 \nu_5 D_4 + m_{5,4}$	$2 \nu_5 D_4 + m_{5,4}$

1. Zahlenbeispiel. (Tafelbild 1.)

Darstellung der Einflußlinie für das Biegemoment an der Stütze 1 für den in dem Werke „Anwendungen der graphischen Statik“,



Tafelbild 1, 2, 3 u. 4.

3. Teil, von Prof. Dr. W. Ritter, Zürich, behandelten durchlaufenden Träger mit vier Öffnungen von 40, 50, 50 und 40 m. Eigengewicht $g = 1,6 \text{ t/m}$. Trägheitsmoment konstant $= 0,2313 \text{ m}^4$. Elastizitätsmaß $E = 2100 \text{ t/cm}^2$. Endöffnungen frei drehbar gelagert.

Nach Gl. 26 ist $\nu_1 = \nu_4 = 1$ und $\nu_2 = \nu_3 = \frac{W_2}{W_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{40}{50} = 0,8$.

Nach Gl. 33a ist $q_1' = q_5' = 3 + 4 \nu_2 = 3 + 4 \cdot 0,8 = 6,2$;
 $q_2 = q_4 = 2 \nu_2 = 2 \cdot 0,8 = 1,6$; $q_3 = 4 (\nu_2 + \nu_3) = 8 \nu_2 = 8 \cdot 0,8 = 6,4$.

Für einen durchlaufenden Träger auf fünf Stützen ist:

$$N = q_1' (q_3 q_5' - q_4^2) - q_2^2 q_5' = 6,2 (6,4 \cdot 6,2 - 1,6^2) - 1,6^2 \cdot 6,2 = 214,272$$

$$\gamma_1^{(1)} = \gamma_3^{(3)} = \frac{1}{N} (q_3 q_5' - q_4^2) = \frac{1}{214,272} (6,4 \cdot 6,2 - 1,6^2) = 0,1734$$

$$\gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)} = \gamma_2^{(3)} = \gamma_3^{(2)} = -\frac{q_2 q_5'}{N} = -\frac{1,6 \cdot 6,2}{214,272} = -0,0463$$

$$\gamma_1^{(3)} = \gamma_3^{(1)} = \frac{q_2^2}{N} = \frac{1,6^2}{214,272} = 0,0119$$

$$\gamma_2^{(2)} = \frac{q_1'^2}{N} = \frac{6,2^2}{214,272} = 0,1794$$

Das Biegemoment an der Stütze 1 hat die Gleichung

$$M_{1,0} = 3 D_1 + m'_{1,0} = 3 [\gamma_1^{(1)} M_1 + \gamma_1^{(2)} M_2 + \gamma_1^{(3)} M_3] + m'_{1,0}$$

Steht die Last innerhalb der ersten Öffnung, so wird $M_2 = M_3 = 0$, und man erhält

$$M_{1,0} = -3 \gamma_1^{(1)} m'_{1,0} + m'_{1,0} = (1 - 3 \gamma_1^{(1)}) m'_{1,0} \text{ oder}$$

$$\eta_1 = (1 - 3 \gamma_1^{(1)}) l_1 \psi_l' = (1 - 3 \cdot 0,1734) \cdot 40 \cdot \psi_l' = 19,192 \cdot \psi_l'$$

Man findet demnach folgende Einflußordinaten:

für $\zeta = 0,1$: $\eta_1 = +0,950$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_1 = +3,598$
" $\zeta = 0,2$: $\eta_1 = +1,832$	" $\zeta = 0,6$: $\eta_1 = +3,684$
" $\zeta = 0,3$: $\eta_1 = +2,620$	" $\zeta = 0,7$: $\eta_1 = +3,425$
" $\zeta = 0,4$: $\eta_1 = +3,223$	" $\zeta = 0,8$: $\eta_1 = +2,763$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_1 = +1,641$.	

Steht die Last innerhalb der zweiten Öffnung, so wird $M_3 = 0$, und man erhält

$$M_{1,0} = -3 [\gamma_1^{(1)} m_{1,2} + \gamma_1^{(2)} m_{2,1}] \text{ oder}$$

$$\eta_2 = -3 l_2 [\gamma_1^{(1)} \psi_r + \gamma_1^{(2)} \psi_l] = -3 \cdot 50 [0,1734 \psi_r - 0,0463 \psi_l] = -26,01 \psi_r + 6,945 \psi_l$$

Man findet folgende Einflußordinaten:

für $\zeta = 0,1$: $\eta_2 = +2,168$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_2 = +4,121$
" $\zeta = 0,2$: $\eta_2 = +3,451$	" $\zeta = 0,6$: $\eta_2 = +3,497$
" $\zeta = 0,3$: $\eta_2 = +4,262$	" $\zeta = 0,7$: $\eta_2 = +2,655$
" $\zeta = 0,4$: $\eta_2 = +4,413$	" $\zeta = 0,8$: $\eta_2 = +1,722$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_2 = +0,797$.	

Steht die Last innerhalb der dritten Öffnung, so ist $M_1 = 0$, und man erhält

$$M_{1,0} = -3 [\gamma_1^{(2)} m_{2,3} + \gamma_1^{(3)} m_{3,2}] \text{ oder}$$

$$\eta_3 = -3 l_3 [\gamma_1^{(2)} \psi_r + \gamma_1^{(3)} \psi_l] = -3 \cdot 50 [-0,0463 \psi_r + 0,0119 \psi_l] = +6,945 \psi_r - 1,785 \psi_l$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta = 0,1$: $\eta_3 = -0,578$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_3 = -1,092$
" $\zeta = 0,2$: $\eta_3 = -0,947$	" $\zeta = 0,6$: $\eta_3 = -0,924$
" $\zeta = 0,3$: $\eta_3 = -1,131$	" $\zeta = 0,7$: $\eta_3 = -0,701$
" $\zeta = 0,4$: $\eta_3 = -1,170$	" $\zeta = 0,8$: $\eta_3 = -0,458$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_3 = -0,206$.	

Steht die Last endlich in der vierten Öffnung, so ist $M_1 = M_2 = 0$, und man erhält

$$M_{1,0} = -3 \gamma_1^{(3)} m'_{3,4} \text{ oder}$$

$$\eta_4 = -3 \gamma_1^{(3)} l_4 \psi_r' = -3 \cdot 0,0119 \cdot 40 \psi_r' = -1,428 \psi_r'$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta = 0,1$: $\eta_4 = +0,122$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_4 = +0,267$
" $\zeta = 0,2$: $\eta_4 = +0,206$	" $\zeta = 0,6$: $\eta_4 = +0,239$
" $\zeta = 0,3$: $\eta_4 = +0,254$	" $\zeta = 0,7$: $\eta_4 = +0,195$
" $\zeta = 0,4$: $\eta_4 = +0,274$	" $\zeta = 0,8$: $\eta_4 = +0,136$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_4 = +0,071$.	

Die zeichnerische Darstellung der Einflußlinie betrachte man in Tafelbild 1.

III. Die Festpunkte des durchlaufenden Trägers.

In der k ten Öffnung eines durchlaufenden Trägers stehe die Last 1 im veränderlichen Abstände x von der Stütze $(K-1)$ (Abb. 9). Alle anderen Öffnungen seien unbelastet. Es entstehen dann mit Beachtung

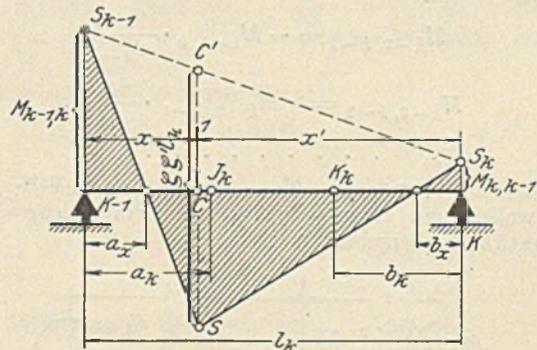


Abb. 9.

der Vorzeichenregel für die Biegemomente an der Stütze $(K-1)$ das negative Biegemoment $M_{k-1,k}$ und an der Stütze K das positive Moment $M_{k,k-1}$. Setzen wir diese Stützenmomente als bekannt voraus und tragen das Moment $M_{k-1,k}$ vom Stützpunkte $(K-1)$ nach Punkt S_{k-1} und das Moment $M_{k,k-1}$ vom Stützpunkte K nach Punkt S_k , so erhält man durch Verbindung dieser beiden Punkte S_{k-1} und S_k die Momentenfläche $(K-1)$, S_{k-1} , S_k , K für die Belastung des einfachen Trägers $(K-1)$, K mit den Stützenmomenten $M_{k-1,k}$

und $M_{k,k-1}$. Bringt man ferner die Wirkungslinie der Kraft 1 mit der Geraden S_{k-1}, S_k zum Schnitte im Punkte C' und trägt daselbst das positive Moment $\zeta' l_k$ infolge Belastung des einfachen Trägers $(K-1), K$ mit der Einheitslast nach abwärts ab, wodurch man zum Punkte S gelangt, so erhält man durch Verbindung dieses Punktes S mit den Punkten S_{k-1} und S_k die dreieckförmige Momentenfläche S_{k-1}, S, S_k des einfachen Trägers infolge Wirkung der Einheitslast. Durch algebraische Addition der Momentenfläche $(K-1), S_{k-1}, S_k, K$ und der Momentenfläche S_{k-1}, S, S_k erhält man schließlich die in Abb. 9 schraffierte Momentenfläche.

Jeder Stellung der Einheitslast innerhalb der Öffnung l_k , also jedem Werte x sind hiernach zwei Momentennullpunkte J_x und K_x zugeordnet (Abb. 9). Der Punkt J_x habe den Abstand a_x vom Punkte $(K-1)$, der Punkt K_x den Abstand b_x vom Punkte K . Bewegt sich die Einheitslast von der Stütze $(K-1)$ gegen die Stütze K , wobei x der Reihe nach alle Werte von 0 bis l_k annimmt, dann sind auch die Momentennullpunkte J_x und K_x in beständiger Bewegung, und zwar bewegen sich J_x und K_x gleichzeitig in derselben Richtung, in der der Angriffspunkt C der Einheitslast auf der Trägerachse fortschreitet. Je mehr sich die Last der Stütze K nähert, desto größer wird demnach der Abstand a_x und desto kleiner der Abstand b_x , und es erreicht a_x seinen Größtwert a_k , b_x seinen Kleinstwert $b_x=0$, wenn die Einheitslast der Stütze K unendlich nahe gekommen ist. Überschreitet die Einheitslast die Stütze K und wandert weiter über die Öffnung $l_{k+1}, l_{k+2} \dots l_n$, so bleibt beständig $a_x = a_k$ und $b_x = 0$. Dem Werte a_k entspricht der Punkt J_{k-1} , der also unbewegt oder fest bleibt, während die Last von der Stütze K nach rechts über sämtliche Öffnungen wandert. Analog entspricht dem Werte b_k der Punkt K_k , der beständig fest bleibt, während die Last von der Stütze $(K-1)$ nach links sämtliche Öffnungen überschreitet.

Man nennt daher diese beiden ausgezeichneten Punkte J_k und K_k die Festpunkte der k ten Öffnung eines durchlaufenden Trägers. Ist beispielsweise in Abb. 10 die k te Öffnung belastet, so hat man nur die Kenntnis der beiden Stützenmomente $M_{k-1,k}$ und $M_{k,k-1}$ nötig. Alle anderen Stützenmomente erhält man zeichnerisch in der

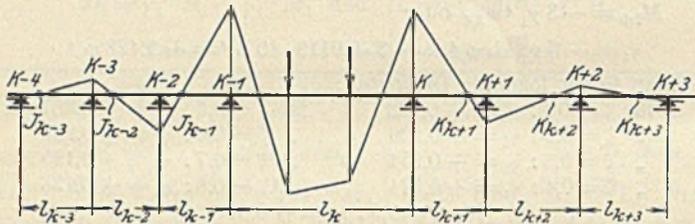


Abb. 10.

Weise, daß man Punkt S_{k-1} mit J_{k-1} verbindet, wodurch man zum Punkte S_{k-2} gelangt, dann diesen Punkt mit J_{k-2} verbindet, wodurch man zum Punkte S_{k-3} gelangt usw. Analoges gilt für die andere Seite des Trägers. Rechnerisch erhält man die Stützenmomente nach den Gleichungen

$$M_{k-2,k-1} = -M_{k-1,k} \cdot \frac{a_{k-1}}{a'_{k-1}}$$

$$M_{k-3,k-2} = -M_{k-2,k-1} \cdot \frac{a_{k-2}}{a'_{k-2}}$$

wobei $a'_{k-1} = l_{k-1} - a_{k-1}$, $a'_{k-2} = l_{k-2} - a_{k-2}$ usw.

Wir wollen nun zur analytischen Ermittlung der Festpunktabstände übergehen.

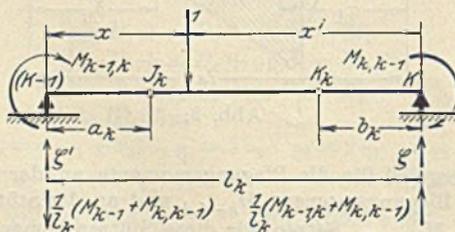


Abb. 11.

Aus der Abb. 11 ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den linken Momentennullpunkt J_x aus der Beziehung:

$$M_{k-1,k} - \left[\frac{1}{l_k} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) - \zeta' \right] a_x = 0.$$

Es ist somit der Abstand des Nullpunktes J_x :

$$(35) \quad a_x = \frac{M_{k-1,k}}{\frac{1}{l_k} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) - \zeta'}$$

Nach Gl. 34 ist in diesem Falle

$$D_{k-1} = -\gamma_{k-1}^{(k-1)} m_{k-1,k} - \gamma_{k-1}^{(k)} m_{k,k-1}$$

$$D_k = -\gamma_k^{(k-1)} m_{k,k-1} - \gamma_k^{(k)} m_{k,k-1}$$

Die Stützenmomente sind:

$$M_{k-1,k} = 2 \nu_k [2 D_{k-1} + D_k] + m_{k-1,k}$$

$$= [1 - 2 \nu_k (2 \gamma_{k-1}^{(k-1)} + \gamma_k^{(k-1)})] m_{k-1,k}$$

$$- 2 \nu_k (2 \gamma_{k-1}^{(k)} + \gamma_k^{(k)}) m_{k,k-1}$$

$$M_{k,k-1} = -2 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(k-1)} + 2 \gamma_k^{(k-1)}) m_{k-1,k}$$

$$- [2 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(k)} + 2 \gamma_k^{(k)}) - 1] m_{k,k-1}$$

Man erhält demnach

$$M_{k-1,k} + M_{k,k-1} = [1 - 6 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(k-1)} + \gamma_k^{(k-1)})] m_{k-1,k}$$

$$+ [1 - 6 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(k)} + \gamma_k^{(k)})] m_{k,k-1}$$

a_x erreicht seinen Größtwert bei $x = l_k$, also bei $\zeta = 1$ oder $\zeta' = 0$.

Setzt man alle diese Werte in Gl. 35 ein, so erhält man mit Hilfe der Gl. 9 zunächst den unbestimmten Ausdruck $a_x = \frac{0}{0}$. Um a_x bestimmt zu machen, differenzieren wir Zähler und Nenner und erhalten, da $\zeta = 1$ und $\zeta' = 0$ ist,

$$\frac{d m_{k-1,k}}{d \zeta} = -\zeta' (1 + 3 \zeta) l_k = 0$$

$$\frac{d m_{k,k-1}}{d \zeta} = +\zeta (2 \zeta' - \zeta) l_k = -l_k$$

und es wird der Festpunktabstand

$$(36) \quad a_k = \frac{2 \gamma_{k-1}^{(k)} + \gamma_k^{(k)}}{3 (\gamma_{k-1}^{(k)} + \gamma_k^{(k)})} \cdot l_k$$

Ähnlich findet man

$$(37) \quad b_k = \frac{\gamma_{k-1}^{(k-1)} + 2 \gamma_k^{(k-1)}}{3 (\gamma_{k-1}^{(k-1)} + \gamma_k^{(k-1)})} \cdot l_k$$

Auch für die Endöffnungen findet man durch ähnliche Betrachtungen die Festpunktabstände.

α) Endöffnung frei drehbar gelagert.

$$(38) \quad a_1 = b_n = 0$$

$$(39) \quad b_1 = \frac{1 - 3 \gamma_1^{(1)}}{3 (1 - \gamma_1^{(1)})} \cdot l_1$$

$$(40) \quad a_n = \frac{1 - 3 \nu_n \gamma_n^{(n-1)}}{3 (1 - \nu_n \gamma_n^{(n-1)})} \cdot l_n$$

β) Endöffnung vollkommen eingespannt.

$$(41) \quad a_1 = \frac{l_1}{3}; \quad b_n = \frac{l_n}{3}$$

$$(42) \quad b_1 = \frac{1 - 4 \gamma_1^{(1)}}{3 (1 - 2 \gamma_1^{(1)})} \cdot l_1 \quad (43) \quad a_n = \frac{1 - 4 \nu_n \gamma_n^{(n-1)}}{3 (1 - 2 \nu_n \gamma_n^{(n-1)})} \cdot l_n$$

2. Zahlenbeispiel.

Bestimmung der Festpunkte des im 1. Beispiel (auf S. 573) behandelten Trägers über fünf Stützen.

Nach Gl. 38 ist $a_1 = 0$; nach Gl. 39 ist

$$b_1 = \frac{1 - 3 \gamma_1^{(1)}}{3 (1 - \gamma_1^{(1)})} \cdot l_1 = \frac{1 - 3 \cdot 0,1734}{3 (1 - 0,1734)} \cdot 40 = 7,75;$$

nach Gl. 36 ist

$$a_2 = \frac{2 \gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)}}{3 (\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)})} \cdot l_2 = \frac{-2 \cdot 0,0463 + 0,1794}{3 (-0,0463 + 0,1794)} \cdot 50 = 10,85 \text{ m};$$

nach Gl. 37 ist

$$b_2 = \frac{\gamma_1^{(1)} + 2 \gamma_2^{(1)}}{3 (\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)})} \cdot l_2 = \frac{0,1734 - 2 \cdot 0,0463}{3 (0,1734 - 0,0463)} \cdot 50 = 10,6 \text{ m}.$$

Alle übrigen Festpunkte liegen symmetrisch zu den eben berechneten.

IV. Einflußlinien für die Biegemomente.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, die Ordinaten der Einflußlinie für das Biegemoment eines im veränderlichen Abstände y von der Stütze $(K-1)$ in der k ten Öffnung gelegenen Querschnitts C eines über n Öffnungen durchlaufenden Trägers zu berechnen, wird man zweckmäßig jeden der drei besonderen Abschnitte des Trägers gesondert betrachten, und zwar:

- α) die beiden Abschnitte der Einflußlinie, die links und rechts außerhalb der Querschnittsöffnung l_k sich vom Trägeranfang 0 bis zur Stütze $(K-1)$ und dann mit Überspringung der Querschnittsöffnung l_k von der Stütze K bis zum Trägerende n erstrecken,
- β) den Abschnitt der Einflußlinie innerhalb der Querschnittsöffnung l_k , der sich von der Stütze $(K-1)$ bis zum Querschnitt C erstreckt, und endlich
- γ) den Abschnitt der Einflußlinie innerhalb der Querschnittsöffnung l_k , der sich vom Querschnitt C bis zum Stützpunkte K erstreckt.

α) Die Zweige der Einflußlinie außerhalb der Querschnittsöffnung l_k . Solange die Einheitslast in allen Öffnungen des durchlaufenden Trägers außerhalb der Querschnittsöffnung l_k sich bewegt, ist das Biegemoment M_c eines beliebigen Querschnitts C (Abb. 12):

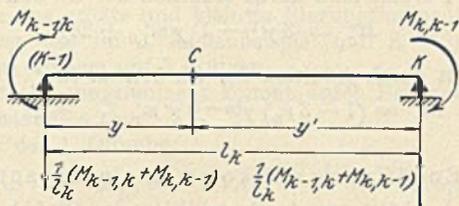


Abb. 12.

$$(44) \quad M_c = M_{k-1,k} - \frac{1}{l_k} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) y$$

und es wird mit den Bezeichnungen

$$(45) \quad \chi = \frac{y}{l_k} \quad \text{und} \quad \chi' = 1 - \chi$$

das Biegemoment im Punkte C der k ten Öffnung:

$$(46) \quad M_c = 2 \nu_k [(2 - 3\chi) D_{k-1} + (1 - 3\chi') D_k].$$

Berücksichtigt man die Entwicklungsgleichung 34 für die Drehmaße $D_1, D_2 \dots D_{n-1}$ der Stützenquerschnitte, so erhält man das Biegemoment in der übersichtlichen Form:

$$(47) \quad M_c = \epsilon_k^{(1)} M_1 + \epsilon_k^{(2)} M_2 + \dots + \epsilon_k^{(n-1)} M_{n-1},$$

wobei

$$(48) \quad \begin{cases} \epsilon_k^{(1)} = 2 \nu_k [\gamma_{k-1}^{(1)} + (1 - 3\chi) (\gamma_{k-1}^{(1)} + \gamma_k^{(1)})] \\ \epsilon_k^{(2)} = 2 \nu_k [\gamma_{k-1}^{(2)} + (1 - 3\chi) (\gamma_{k-1}^{(2)} + \gamma_k^{(2)})] \\ \dots \\ \epsilon_k^{(n-1)} = 2 \nu_k [\gamma_{k-1}^{(n-1)} + (1 - 3\chi) (\gamma_{k-1}^{(n-1)} + \gamma_k^{(n-1)})]. \end{cases}$$

Die Koeffizienten ϵ sind von der Formung des Tragwerks und von der Lage des Querschnitts C abhängig.

Erteilt man in der Gleichungsgruppe 48 der Größe χ der Reihe nach Werte im Intervall $(0,1)$, so erhält man für eine bestimmte Öffnung l_k mit Hilfe der Gl. 47 das Biegemoment M_c sämtlicher Punkte des Tragwerks, jedoch nur für Belastungen außerhalb der Querschnittsöffnung l_k . Die Gl. 47 stellt das Biegemoment eines beliebigen Querschnitts als Funktion der die Belastung allein berücksichtigenden Hilfsmomente $M_1, M_2 \dots M_{n-1}$, also auch als Funktionen der Größen ψ_r und ψ_l dar, mit deren Variation alle $(n-1)$ Zweige der Einflußlinie außerhalb der Querschnittsöffnung l_k bekannt werden.

Wird für die Endöffnungen $k=1$ bzw. $k=n$ gesetzt, so erscheinen in der Gleichungsgruppe 48 die unbekannt Koeffizienten $\gamma_0^{(1)}, \gamma_0^{(2)} \dots \gamma_0^{(n-1)}$ bzw. $\gamma_n^{(1)}, \gamma_n^{(2)} \dots \gamma_n^{(n-1)}$. Man hat dabei zwei Fälle zu unterscheiden, und zwar:

1. die frei drehbar gelagerte Endöffnung,
2. die vollkommen eingespannte Endöffnung.

Endöffnung frei drehbar gelagert.

Bei $k=1$ ist $M_{k-1,k} = M_{0,1} = 0$ und $M_{k,k-1} = M_{1,0} = 3 D_1$, so daß mit Hilfe der Gl. 44:

$$M_c = -3 \chi D_1$$

wird. Die Koeffizienten ϵ haben daher hier die Gestalt:

$$(48a) \quad \begin{cases} \epsilon_1^{(1)} = -3 \chi \gamma_1^{(1)}; \\ \epsilon_1^{(2)} = -3 \chi \gamma_1^{(2)} \dots; \dots \epsilon_1^{(n-1)} = -3 \chi \gamma_1^{(n-1)}. \end{cases}$$

Ähnlich sind bei $k=n$ die Koeffizienten

$$(48a') \quad \begin{cases} \epsilon_n^{(1)} = 3 \nu_n \chi' \gamma_{n-1}^{(1)}; \\ \epsilon_n^{(2)} = 3 \nu_n \chi' \gamma_{n-1}^{(2)} \dots; \dots \epsilon_n^{(n-1)} = 3 \nu_n \chi' \gamma_{n-1}^{(n-1)}. \end{cases}$$

Endöffnung vollkommen eingespannt.

Bei $k=1$ ist der Drehwinkel $\Theta_{k-1} = \Theta_0 = 0$ und nach Gl. 46

$$M_c = 2 (1 - 3 \chi) D_1$$

und die Koeffizienten:

$$(48b) \quad \begin{cases} \epsilon_1^{(1)} = 2 (1 - 3 \chi) \gamma_1^{(1)}; \\ \epsilon_1^{(2)} = 2 (1 - 3 \chi) \gamma_1^{(2)}; \dots \epsilon_1^{(n-1)} = 2 (1 - 3 \chi) \gamma_1^{(n-1)}. \end{cases}$$

Ähnlich sind bei $k=n$ die Koeffizienten

$$(48b') \quad \begin{cases} \epsilon_n^{(1)} = 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_{n-1}^{(1)}; \epsilon_n^{(2)} = 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_{n-1}^{(2)}; \\ \dots \epsilon_n^{(n-1)} = 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_{n-1}^{(n-1)}. \end{cases}$$

β) Abschnitt der Einflußlinie innerhalb der Querschnittsöffnung l_k von der Stütze $(K-1)$ bis zum Querschnitt C .

Wenn die Einheitslast (Abb. 13) innerhalb der Querschnittsöffnung l_k sich bewegt, kann man sich das Biegemoment M_c im Abstände y von der Stütze $(K-1)$ stets durch Superposition zweier

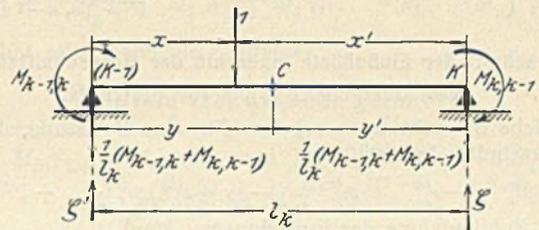


Abb. 13.

Teilmomente M_c' und M_c'' entstanden denken. M_c' bezieht sich auf den Beitrag infolge der Drehmaße D_{k-1} und D_k und wurde bereits unter α) mit

$$(49) \quad \begin{cases} M_c' = \epsilon_k^{(k-1)} M_{k-1} + \epsilon_k^{(k)} M_k \\ = -[\epsilon_k^{(k-1)} m_{k-1, k}^{(l)} + \epsilon_k^{(k)} m_{k, k-1}^{(l)}] \end{cases}$$

gefunden, wobei der den Hilfsmomenten m oben angefügte Zeiger ${}^{(l)}$ andeuten soll, daß es sich hier nur um eine Belastung links vom Querschnitt C handelt.

Das Teilmoment M_c'' hingegen berücksichtigt den Einfluß der Belastung in der Querschnittsöffnung l_k , bezieht sich also auf die Hilfsmomente $m_{k-1, k}^{(l)}$ und $m_{k, k-1}^{(l)}$, sowie auf die durch die Belastung des einfachen Balkens $(K-1), K$ mit der Einheitslast entstehenden Stützendrucke $\zeta^{(l)}$ und $\zeta'^{(l)}$.

Es ist deshalb konform der Gl. 44:

$$(50) \quad \begin{cases} M_c'' = m_{k-1, k}^{(l)} - \chi (m_{k-1, k}^{(l)} + m_{k, k-1}^{(l)}) + \zeta^{(l)} \chi' l_k \\ = \chi' m_{k-1, k}^{(l)} - \chi m_{k, k-1}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_k \end{cases}$$

Insgesamt ist daher das Biegemoment

$$(51) \quad \begin{cases} M_c = M_c' + M_c'' = (\chi' - \epsilon_k^{(k-1)}) m_{k-1, k}^{(l)} \\ - (\chi + \epsilon_k^{(k)}) m_{k, k-1}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_k \end{cases}$$

oder mit Zuhilfenahme der Funktionen ψ_r und ψ_l

$$(51') \quad M_c = l_k [(\chi' - \epsilon_k^{(k-1)}) \psi_r - (\chi + \epsilon_k^{(k)}) \psi_l + \zeta \chi'].$$

Endöffnung frei drehbar gelagert.

Bei $k=1$ ist nach Gl. 49 und mit Hilfe der Gl. 48a

$$M_c' = -\epsilon_1^{(1)} m_{1,0}^{(l)} = 3 \chi \gamma_1^{(1)} m_{1,0}^{(l)},$$

weil ja $m_{0,1}^{(l)} = 0$ ist. Nach Gl. 50 ist

$$M_c'' = -\chi m_{1,0}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_1.$$

Insgesamt ist daher das Moment

$$(51a) \quad M_c = (3 \gamma_1^{(1)} - 1) \chi m_{1,0}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_1.$$

Bei $k=n$ ist nach Gl. 49 und mit Hilfe der Gl. 48a'

$$M_c' = -\varepsilon_n^{(n-1)} m_{n-1, n}^{(l)} = -3 \nu_n \gamma_n^{(n-1)} m_{n-1, n}^{(l)}$$

weil $m_{n, n-1}^{(l)} = 0$ ist. Nach Gl. 50 ist

$$M_c'' = \chi' m_{n-1, n}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_n.$$

Die Addition der Teilmomente ergibt:

$$(51a) \quad M_c = (1 - 3 \nu_n \gamma_n^{(n-1)}) \chi' m_{n-1, n}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_n.$$

Endöffnung vollkommen eingespannt.

Bei $k=1$ ist nach Gl. 47 und mit Hilfe der Gl. 48b

$$M_c' = \varepsilon_1^{(1)} M_1 = -\varepsilon_1^{(1)} m_{1,0}^{(l)} = -2(1 - 3 \chi) \gamma_1^{(1)} m_{1,0}^{(l)}$$

und nach Gl. 50 ist

$$M_c'' = \chi' m_{0,1}^{(l)} - \chi m_{1,0}^{(l)} + \zeta \chi' l_1.$$

Die Addition der Teilmomente ergibt:

$$(51b) \quad M_c = \chi' m_{0,1}^{(l)} - [2(1 - 3 \chi) \gamma_1^{(1)} + \chi] m_{1,0}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_1.$$

Bei $k=n$ ist nach Gl. 47 und mit Hilfe der Gl. 48b'

$$M_c' = \varepsilon_n^{(n-1)} M_{n-1} = -\varepsilon_n^{(n-1)} m_{n-1, n}^{(l)} = -2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_n^{(n-1)} m_{n-1, n}^{(l)}$$

und nach Gl. 50 ist

$$M_c'' = \chi' m_{n-1, n}^{(l)} - \chi m_{n, n-1}^{(l)} + \zeta^{(l)} \chi' l_n.$$

Die Addition der beiden Teilmomente ergibt:

$$(51b') \quad \left\{ \begin{aligned} M_c &= [\chi' - 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_n^{(n-1)}] m_{n-1, n}^{(l)} \\ &\quad - \chi m_{n, n-1}^{(l)} + \zeta \chi' l_n. \end{aligned} \right.$$

γ) Abschnitt der Einflußlinie innerhalb der Querschnittsöffnung vom Querschnitt C bis zur Stütze K.

Ähnliche Betrachtungen ergeben für eine Belastung, die rechts vom Querschnitt C angreift,

$$(52) \quad M_c (\chi' - \varepsilon_k^{(k-1)}) m_{k-1, k}^{(r)} - (\chi + \varepsilon_k^{(k)}) m_{k, k-1}^{(r)} + \zeta^{(r)} \chi' l_k$$

oder mit Zuhilfenahme der Funktionen ψ_r und ψ_l

$$(52') \quad M_c = [(\chi' - \varepsilon_k^{(k-1)}) \psi_r - (\chi + \varepsilon_k^{(k)}) \psi_l + \zeta^{(r)} \chi'] l_k.$$

Ist die Endöffnung frei drehbar gelagert, dann ist bei $k=1$:

$$(52a) \quad M_c = (3 \gamma_1^{(1)} - 1) \chi' m_{1,0}^{(r)} + \zeta^{(r)} \chi' l_1$$

oder mit Zuhilfenahme der Funktionen ψ_r und ψ_l

$$M_c = [(3 \gamma_1^{(1)} - 1) \chi' \psi_l' + \zeta \chi'] l_1.$$

Bei $k=n$ ist:

$$(52a') \quad M_c = (1 - 3 \nu_n \gamma_n^{(n-1)}) \chi' m_{n-1, n}^{(r)} + \zeta^{(r)} \chi' l_n$$

bzw. $M_c = [(1 - 3 \nu_n \gamma_n^{(n-1)}) \chi' \psi_r' + \zeta \chi'] l_n.$

Endöffnung vollkommen eingespannt.

Bei $k=1$:

$$(52b) \quad M_c = \chi' m_{0,1}^{(r)} - [2(1 - 3 \chi) \gamma_1^{(1)} + \chi] m_{1,0}^{(r)} + \zeta^{(r)} \chi' l_1$$

bzw. $M_c = \{\chi' \psi_r - [2(1 - 3 \chi) \gamma_1^{(1)} + \chi] \psi_l + \zeta \chi'\} l_1.$

Bei $k=n$:

$$(52b') \quad \left\{ \begin{aligned} M_c &= [\chi' - 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_n^{(n-1)}] m_{n-1, n}^{(r)} \\ &\quad - \chi m_{n, n-1}^{(r)} + \zeta^{(r)} \chi' l_n \end{aligned} \right.$$

bzw. $M_c = \{\chi' - 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_n^{(n-1)}\} \psi_r - \chi \psi_l + \zeta \chi' l_n.$

δ) Biegemoment irgend eines Querschnitts bei beliebiger Belastung eines durchlaufenden Trägers.

Es hat einen großen praktischen Wert, einfache Formeln für das Biegemoment an beliebiger Stelle eines durchlaufenden Trägers bei beliebiger Belastung zu kennen. Solche Formeln sollen nun im nachstehenden abgeleitet werden.

Für alle Belastungen außerhalb der Querschnittsöffnung l_k bedient man sich hierzu der Gl. 47 und erhält mit ihr als Beitrag zum Biegemoment M_c das Teilmoment

$$(52a) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{c_k}' &= -[\varepsilon_k^{(1)} (m_{1,0}' + m_{1,2}') + \varepsilon_k^{(2)} (m_{2,1}' + m_{2,3}') + \dots \\ &\quad + \varepsilon_k^{(n-1)} (m_{n-1, n-2}' + m_{n-1, n}')], \end{aligned} \right.$$

falls es sich um einen Querschnitt der k ten Öffnung handelt und die Trägerenden frei drehbar gelagert sind, hingegen

$$(52b) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{c_k}' &= -[\varepsilon_k^{(1)} (m_{1,0}' + m_{1,2}') + \varepsilon_k^{(2)} (m_{2,1}' + m_{2,3}') + \dots \\ &\quad + \varepsilon_k^{(n-1)} (m_{n-1, n-2}' + m_{n-1, n}')], \end{aligned} \right.$$

wenn die Trägerenden vollkommen eingespannt sind.

Für die Belastung der Querschnittsöffnung l_k selbst hat man die Ergebnisse der Abschnitte β und γ sinngemäß zu addieren und erhält als zweiten Beitrag zum Biegemoment M_c das Teilmoment

$$(53) \quad M_{c_k}'' = (\chi' - \varepsilon_k^{(k-1)}) m_{k-1, k} - (\chi + \varepsilon_k^{(k)}) m_{k, k-1} + \mathfrak{M}_c,$$

wobei \mathfrak{M}_c das Biegemoment des einfachen Balkens ($K-1$), K im Punkte C bedeutet, und wenn man berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} m_{k-1, k}^{(l)} + m_{k-1, k}^{(r)} &= m_{k-1, k} \\ m_{k, k-1}^{(l)} + m_{k, k-1}^{(r)} &= m_{k, k-1} \end{aligned}$$

ist, und daß der Ausdruck $(\zeta^{(l)} \chi' + \zeta^{(r)} \chi) l_k$ offenbar das Biegemoment des einfachen Balkens ($K-1$), K im Punkte C für die wandernde Einheitslast bedeutet.

Durch Addition der Teilmomente M_{c_k}' und M_{c_k}'' erhält man schließlich das gesuchte Biegemoment $M_{c_k} = M_{c_k}' + M_{c_k}''$.

Erwähnenswert sind noch die belasteten Endöffnungen.

Endöffnung frei drehbar gelagert.

Bei $k=1$ erhält man durch Addition der Gl. 51a u. 52a

$$(53a) \quad M_{c_1}'' = (3 \gamma_1^{(1)} - 1) \chi' m_{1,0}' + \mathfrak{M}_c.$$

Bei $k=n$ durch Addition der Gl. 51a' u. 52a'

$$(53b) \quad M_{c_n}'' = (1 - 3 \nu_n) \gamma_n^{(n-1)} \chi' m_{n-1, n}' + \mathfrak{M}_c.$$

Endöffnung vollkommen eingespannt.

Bei $k=1$ erhält man durch Addition der Gl. 51b u. 52b

$$(53c) \quad M_{c_1}'' = \chi' m_{0,1}' - [2(1 - 3 \chi) \gamma_1^{(1)} + \chi] m_{1,0}' + \mathfrak{M}_c.$$

Bei $k=n$ durch Addition der Gl. 51b' u. 52b'

$$(53d) \quad M_{c_n}'' = [\chi' - 2 \nu_n (2 - 3 \chi) \gamma_n^{(n-1)}] m_{n-1, n}' - \chi m_{n, n-1}' + \mathfrak{M}_c.$$

3. Zahlenbeispiel. (Tafelbild 2.)

Darstellung der Einflußlinie für das Biegemoment in der Mitte der zweiten Öffnung des im 1. Beispiel (auf S. 573) behandelten Trägers auf fünf Stützen.

Nach Gl. 48 ist für $k=2$ und $\chi = \chi' = \frac{1}{2}$

$$\varepsilon_2^{(1)} = \nu_2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)}) = 0,8 (0,1734 + 0,0463) = 0,176$$

$$\varepsilon_2^{(2)} = \nu_2 (\gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(2)}) = 0,8 (-0,0463 - 0,1794) = -0,180$$

$$\varepsilon_2^{(3)} = \nu_2 (\gamma_1^{(3)} - \gamma_2^{(3)}) = 0,8 (0,0119 + 0,0463) = 0,046$$

Solange die Einheitslast sich in der ersten Öffnung bewegt, berechnet man die Ordinaten nach Gl. 47

$$M_{c_2} = \varepsilon_2^{(1)} M_1 = -\varepsilon_2^{(1)} m_{1,0}' = -\varepsilon_2^{(1)} l_1 \psi_l' = -0,176 \cdot 40 \psi_l' = -7,04 \psi_l'.$$

Man findet folgende Ordinaten

für $\zeta = 0,1$: $\eta_1 = -0,349$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_1 = -1,320$
„ $\zeta = 0,2$: $\eta_1 = -0,676$	„ $\zeta = 0,6$: $\eta_1 = -1,352$
„ $\zeta = 0,3$: $\eta_1 = -0,960$	„ $\zeta = 0,7$: $\eta_1 = -1,257$
„ $\zeta = 0,4$: $\eta_1 = -1,182$	„ $\zeta = 0,8$: $\eta_1 = -1,014$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_1 = -0,602$.	

Solange die Last 1 in der Querschnittsöffnung l_2 sich links von der Mitte des Trägers bewegt, sind nach Gl. 51'

$$\begin{aligned} \eta_2 &= l_2 [(0,5 - \varepsilon_2^{(1)}) \psi_r - (0,5 + \varepsilon_2^{(2)}) \psi_l + 0,5 \zeta] \\ &= 50 [(0,5 - 0,176) \psi_r - (0,5 - 0,18) \psi_l + 0,5 \zeta] \\ &= 16,2 \psi_r - 16 \psi_l + 25 \zeta. \end{aligned}$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta = 0,1$: $\eta_2 = +1,056$	für $\zeta = 0,3$: $\eta_2 = +4,111$
„ $\zeta = 0,2$: $\eta_2 = +2,734$	„ $\zeta = 0,4$: $\eta_2 = +6,131$
für $\zeta = 0,5$: $\eta_2 = +8,475$.	

Steht die Einheitslast rechts von der Mitte des Trägers, so wird nach Gl. 52'

$$\eta_2 = 16,2 \psi_r - 16 \psi_l + 25 \zeta.$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta = 0,6$: $\eta_2 = +6,141$	für $\zeta = 0,8$: $\eta_2 = +2,434$
„ $\zeta = 0,7$: $\eta_2 = +4,127$	„ $\zeta = 0,9$: $\eta_2 = +1,058$.

Bewegt sich die Einheitslast in der 3. Öffnung, so ist nach Gl. 47:

$$M_c = \varepsilon_2^{(2)} M_2 + \varepsilon_2^{(3)} M_3 = - [\varepsilon_2^{(2)} m_{2,3} + \varepsilon_2^{(3)} m_{3,2}]$$

$$= - [\varepsilon_2^{(2)} \psi_r + \varepsilon_2^{(3)} \psi_l] l_3 = - [-0,18 \psi_r + 0,046 \psi_l] 50$$

$$= 9 \psi_r - 2,3 \psi_l$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta = 0,1$: $\eta_3 = -0,750$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_3 = -1,413$
" $\zeta = 0,2$: $\eta_3 = -1,226$	" $\zeta = 0,6$: $\eta_3 = -1,195$
" $\zeta = 0,3$: $\eta_3 = -1,468$	" $\zeta = 0,7$: $\eta_3 = -0,905$
" $\zeta = 0,4$: $\eta_3 = -1,517$	" $\zeta = 0,8$: $\eta_3 = -0,582$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_3 = -0,267$.	

Bewegt sich die Einheitslast in der 4. Öffnung, so ist nach Gl. 47:

$$M_c = \varepsilon_2^{(3)} M_3 = -\varepsilon_2^{(3)} m'_{3,4} = -\varepsilon_2^{(3)} l_4 \psi_r'$$

$$= -0,046 \cdot 40 \psi_r' = -1,84 \psi_r'$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\xi = 0,1$: $\eta_4 = +0,157$	für $\zeta = 0,5$: $\eta_4 = +0,345$
" $\zeta = 0,2$: $\eta_4 = +0,265$	" $\zeta = 0,6$: $\eta_4 = +0,308$
" $\zeta = 0,3$: $\eta_4 = +0,328$	" $\zeta = 0,7$: $\eta_4 = +0,251$
" $\zeta = 0,4$: $\eta_4 = +0,354$	" $\zeta = 0,8$: $\eta_4 = +0,177$
für $\zeta = 0,9$: $\eta_4 = +0,091$.	

4. Zahlenbeispiel.

Die ständige Last $g = 1,6$ t/m, die veränderliche Last $p = 3$ t/m. Man berechne das größte und kleinste Biegemoment in der Mitte der 2. Öffnung des im 1. Zahlenbeispiel (auf S. 573) behandelten durchlaufenden Trägers auf 5 Stützen.

Das größte Biegemoment kommt durch Belastung der 2. und 4. Öffnung zustande.

Belastung der 1. Öffnung:

$$M_{c_1} = -\varepsilon_2^{(1)} m'_{1,0} = -0,176 \cdot \frac{1,6 \cdot 40^2}{8} = -56,4 \text{ tm.}$$

Belastung der 2. Öffnung: (Querschnittsöffnung) nach Gl. 53

$$M_{c_2} = (\gamma' - \varepsilon_2^{(1)}) m_{1,2} - (\gamma + \varepsilon_2^{(2)}) m_{2,1} + M_c$$

$$= -(0,5 - 0,176) \frac{4,6 \cdot 50^2}{12} - (0,5 - 0,18) \frac{4,6 \cdot 50^2}{12}$$

$$+ \frac{4,6 \cdot 50^2}{8} = +824 \text{ tm.}$$

Belastung der 3. Öffnung:

$$M_{c_3} = -\varepsilon_2^{(2)} m_{2,3} - \varepsilon_2^{(3)} m_{3,2} = (\varepsilon_2^{(2)} - \varepsilon_2^{(3)}) m_{3,2}$$

$$= (-0,18 - 0,046) \frac{1,6 \cdot 50^2}{12} = -75,5 \text{ tm.}$$

Belastung der 4. Öffnung:

$$M_{c_4} = -\varepsilon_2^{(3)} m'_{3,4} = +0,046 \cdot \frac{4,6 \cdot 40^2}{8} = +42,3 \text{ tm.}$$

Durch Addition der Teilmomente erhält man:

$$M_c = M_{c_1} + M_{c_2} + M_{c_3} + M_{c_4} = -56,4 + 824$$

$$- 75,5 + 42,3 = +734,4 \text{ tm.}$$

Im Querschnitt in der Mitte der 2. Öffnung kommt das kleinste Biegemoment durch Belastung der 1. und 3. Öffnung zustande.

Belastung der 1. Öffnung: $M_{c_1} = -56,4 \cdot \frac{4,6}{1,6} = -162 \text{ tm}$

" " 2. " $M_{c_2} = +824 \cdot \frac{1,6}{4,6} = +287 \text{ "}$

" " 3. " $M_{c_3} = -75,5 \cdot \frac{4,6}{1,6} = -217 \text{ "}$

" " 4. " $M_{c_4} = +42,3 \cdot \frac{1,6}{4,6} = +14,7 \text{ "}$

Durch Addition der Teilmomente erhält man:

$$M_c = -162 + 287 - 217 + 14,7 = -77 \text{ tm.}$$

V. Einflußlinien für die Querkraft.

Um die Querkraft Q_y für einen im veränderlichen Abstände y von der Stütze ($K-1$) in der k ten Öffnung gelegenen Querschnitt C zu erhalten, führt man durch C einen zur Stabachse senkrechten ideellen Schnitt und bringt an dieser Schnittfläche eine Kraft von solcher Größe und Richtung an, daß alle Einzelkräfte, die am linken Trägerfragment wirken, parallel zur Schnittfläche ein Gleichgewichtssystem bilden. Diese im Querschnitt C anzubringende, zur Stabachse senkrechte Kraft nennt man die Querkraft an der Schnittstelle C . Überträgt man sie nach dem Wechselwirkungsgesetz an das anschließende Balkenelement (Abb. 14), so gerät dieses unter den Einfluß des Kräftepaars $Q \cdot dy$, das die beiden Schnittflächen des Balkenelementes parallel zueinander zu verschieben trachtet. Geschieht diese

Verschiebung in der Weise, daß die rechte Schnittfläche gegen die linke nach abwärts verschoben wird, so sei die Querkraft positiv bezeichnet. Es dreht demnach bei einer positiven Quer-

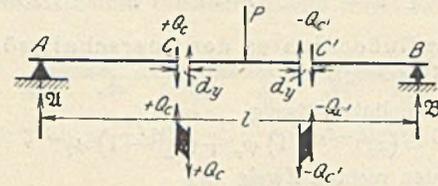


Abb. 14.

kraft das am Balkenelement angreifende Querkraftepaar $Q_y \cdot dy$ im Sinne des Uhrzeigers.

Solange die Einheitslast außerhalb der Querschnittsöffnung l_k sich bewegt, ist die Querkraft Q_y für jeden Querschnitt C der Öffnung l_k (Abb. 12)

$$Q_y = -\frac{1}{l_k} (M_{k-1,k} + M_{k,k-1}) = -\frac{6 \nu_k}{l_k} (D_{k-1} + D_k).$$

Mit der Entwicklungsgleichung 34 und den Substitutionen

$$(54) \begin{cases} x_k^{(1)} = 6 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(1)} + \gamma_k^{(1)}) \\ x_k^{(2)} = 6 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(2)} + \gamma_k^{(2)}) \\ \dots \\ x_k^{(n-1)} = 6 \nu_k (\gamma_{k-1}^{(n-1)} + \gamma_k^{(n-1)}) \end{cases}$$

erhält man dann die Gleichung für die Querkraft in der Form

$$(55) Q_y = -\frac{1}{l_k} [x_k^{(1)} M_1 + x_k^{(2)} M_2 + \dots + x_k^{(n-1)} M_{n-1}].$$

Erwähnt seien noch die Endfelder.

Endfeld frei drehbar gelagert.

Bei $k=1$ ist

$$M_{k-1,k} = M_{0,1} = 0 \text{ und } M_{k,k-1} = M_{1,0} = 3 D_1$$

$$= 3 (\gamma_1^{(1)} M_1 + \gamma_1^{(2)} M_2 + \dots + \gamma_1^{(n-1)} M_{n-1}).$$

Die Koeffizienten x lauten daher

$$(54a) x_1^{(1)} = 3 \gamma_1^{(1)}, x_1^{(2)} = 3 \gamma_1^{(2)} \dots x_1^{(n-1)} = 3 \gamma_1^{(n-1)}.$$

Bei $k=n$ ist

$$M_{k-1,k} = M_{n-1,n} = 3 \nu_n D_{n-1}$$

$$= 3 \nu_n (\gamma_{n-1}^{(1)} M_1 + \gamma_{n-1}^{(2)} M_2 + \dots + \gamma_{n-1}^{(n-1)} M_{n-1})$$

und $M_{k,k-1} = M_{n,n-1} = 0$.

Die Koeffizienten x lauten daher:

$$(54b) x_n^{(1)} = 3 \nu_n \gamma_{n-1}^{(1)}, x_n^{(2)} = 3 \nu_n \gamma_{n-1}^{(2)} \dots x_n^{(n-1)} = 3 \nu_n \gamma_{n-1}^{(n-1)}.$$

Endfeld vollkommen eingespannt.

Bei $k=1$ ist

$$D_{k-1} = D_0 = 0, \text{ folglich } Q_y = -\frac{6}{l_1} D_1;$$

man hat also

$$(54c) x_1^{(1)} = 6 \gamma_1^{(1)}, x_1^{(2)} = 6 \gamma_1^{(2)} \dots x_1^{(n-1)} = 6 \gamma_1^{(n-1)}.$$

Bei $k=n$ ist

$$D_k = D_n = 0, \text{ folglich } Q_y = -\frac{6 \nu_n}{l_n} D_{n-1}; \text{ also}$$

$$(54d) x_n^{(1)} = 6 \nu_n \gamma_{n-1}^{(1)}, x_n^{(2)} = 6 \nu_n \gamma_{n-1}^{(2)} \dots x_n^{(n-1)} = 6 \nu_n \gamma_{n-1}^{(n-1)}.$$

Aus Gl. 55 leitet man dann die allen Querschnitten C der Öffnung l_k gemeinsamen, außerhalb der Querschnittsöffnung l_k verlaufenden $(n-1)$ Zweige der Einflußlinie für die Querkraft Q_y der k ten Öffnung ab.

Tritt jedoch die Einheitslast in die Querschnittsöffnung l_k ein (Abb. 13), so gilt, solange die Einheitslast links vom Querschnitt C angreift, für die Querkraft Q_y nach Gl. 55:

$$Q_y' = \frac{1}{l_k} [x_k^{(k-1)} m_{k-1,k}^{(k-1)} + x_k^{(k)} m_{k,k-1}^{(k)}]$$

und infolge der Belastung der Querschnittsöffnung l_k

$$Q_y'' = -\frac{1}{l_k} [m_{k-1,k}^{(k)} + m_{k,k-1}^{(k)}] - \zeta^{(k)}.$$

Durch Addition dieser beiden Teilquerkraften erhält man dann

$$Q_y^{(k)} = Q_y' + Q_y'' = \frac{1}{l_k} [(x_k^{(k-1)} - 1) m_{k-1,k}^{(k-1)} + (x_k^{(k)} - 1) m_{k,k-1}^{(k)}] - \zeta^{(k)}.$$

Ähnlich erhält man die Querkraft Q_y , wenn die Einheitslast rechts vom Querschnitt C angreift:

$$Q_y^{(r)} = \frac{1}{l_k} [(x_k^{(k-1)} - 1) m_{k-1,k}^{(r)} + (x_k^{(k)} - 1) m_{k,k-1}^{(r)}] + \zeta^{(r)}$$

Für die Einflußordinaten der Querschnittsöffnung l_k hat man also die Gleichungen

$$(55) \begin{cases} \text{für den linken Zweig} \\ \eta_k^{(l)} = (x_k^{(k-1)} - 1) \psi_r + (x_k^{(k)} - 1) \psi_l - \zeta \\ \text{für den rechten Zweig} \\ \eta_k^{(r)} = (x_k^{(k-1)} - 1) \psi_r + (x_k^{(k)} - 1) \psi_l + \zeta \end{cases}$$

Abb. 15 veranschaulicht den Verlauf der beiden Zweige und die Einflußfläche für die Querkraft an der Stelle C . Während die

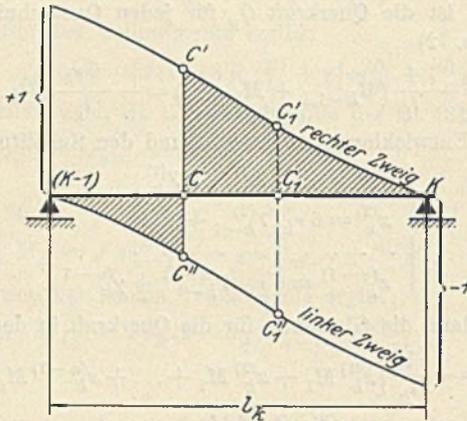


Abb. 15.

Einflußfläche der Querkraft im Punkte C vom Linienzug $(K-1), C'', C, K, C', C$ eingeschlossen wird, umgibt der Linienzug $(K-1), C_1'', C_1, K, C_1', C_1$ die entsprechende Fläche für den Punkt C_1 .

Es lassen sich leicht die Gleichungen für die Endöffnungen ableiten.

Endöffnung frei drehbar gelagert.

Bei $k=1$ ist

$$(55a) \begin{cases} \text{für den linken Zweig} & \eta_1^{(l)} = (x_1^{(1)} - 1) \psi_l - \zeta \\ \text{„ „ rechten „} & \eta_1^{(r)} = (x_1^{(1)} - 1) \psi_l + \zeta \end{cases}$$

Bei $k=n$ ist

$$(55b) \begin{cases} \text{für den linken Zweig} & \eta_n^{(l)} = (x_n^{(n-1)} - 1) \psi_r - \zeta \\ \text{„ „ rechten „} & \eta_n^{(r)} = (x_n^{(n-1)} - 1) \psi_r + \zeta \end{cases}$$

Endöffnung vollkommen eingespannt.

Bei $k=1$ ist:

$$(55c) \begin{cases} \text{für den linken Zweig} & \eta_1^{(l)} = (x_1^{(1)} - 1) \psi_l - \psi_r - \zeta \\ \text{„ „ rechten „} & \eta_1^{(r)} = (x_1^{(1)} - 1) \psi_l - \psi_r + \zeta \end{cases}$$

Bei $k=n$ ist:

$$(55d) \begin{cases} \text{für den linken Zweig:} & \eta_n^{(l)} = (x_n^{(n-1)} - 1) \psi_r - \psi_l - \zeta \\ \text{„ „ rechten „} & \eta_n^{(r)} = (x_n^{(n-1)} - 1) \psi_r - \psi_l + \zeta \end{cases}$$

5. Zahlenbeispiel. (Tafelbild 3.)

Es ist die Einflußlinie für die Querkraft im Abstände $y=20$ m von der Stütze 1 in der 2. Öffnung darzustellen mit den Angaben der vorigen Beispiele.

Nach Gl. 54:

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= 6 \nu_2 (\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)}) = 6 \cdot 0,8 (0,1734 - 0,0463) = 0,61 \\ x_2^{(2)} &= 6 \nu_2 (\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)}) = 6 \cdot 0,8 (-0,0463 + 0,1794) = 0,638 \\ x_2^{(3)} &= 6 \nu_2 (\gamma_1^{(3)} + \gamma_2^{(3)}) = 6 \cdot 0,8 (0,0119 - 0,0463) = -0,165 \end{aligned}$$

Zweig der Einflußlinie in der 1. Öffnung:

Nach Gl. 55 ist $Q_2 = \frac{1}{l_2} \cdot x_2^{(1)} m'_{1,0}$ oder

$$\eta_1 = \frac{l_1}{l_2} \cdot x_2^{(1)} \psi_l' = \frac{40}{50} \cdot 0,61 \psi_l' = +0,485 \psi_l'$$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta=0,1$: $\eta_1 = +0,023$	für $\zeta=0,5$: $\eta_1 = +0,09$
„ $\zeta=0,2$: $\eta_1 = +0,045$	„ $\zeta=0,6$: $\eta_1 = +0,093$
„ $\zeta=0,3$: $\eta_1 = +0,065$	„ $\zeta=0,7$: $\eta_1 = +0,086$
„ $\zeta=0,4$: $\eta_1 = +0,081$	„ $\zeta=0,8$: $\eta_1 = +0,07$
für $\zeta=0,9$: $\eta_1 = +0,04$.	

Berechnung des linken Zweiges in der 2. Öffnung:

Nach Gl. 55: $\eta_2^{(l)} = (x_2^{(1)} - 1) \psi_r + (x_2^{(2)} - 1) \psi_l' - \zeta$
 $= (0,61 - 1) \psi_r + (0,638 - 1) \psi_l' - \zeta = -0,39 \psi_r - 0,362 \psi_l' - \zeta$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta=0,1$: $\eta_2 = -0,072$	für $\zeta=0,6$: $\eta_2 = -0,624$
„ $\zeta=0,2$: $\eta_2 = -0,163$	„ $\zeta=0,7$: $\eta_2 = -0,728$
„ $\zeta=0,3$: $\eta_2 = -0,266$	„ $\zeta=0,8$: $\eta_2 = -0,852$
„ $\zeta=0,4$: $\eta_2 = -0,378$	„ $\zeta=0,9$: $\eta_2 = -0,923$
„ $\zeta=0,5$: $\eta_2 = -0,496$	„ $\zeta=1,0$: $\eta_2 = -1$

Zweig der Einflußlinie in der 3. Öffnung:

Nach Gl. 55 ist $Q_2 = \frac{1}{l_2} [x_2^{(2)} m_{2,3} + x_2^{(3)} m_{3,2}]$ oder
 $\eta_3 = \frac{l_3}{l_2} [x_2^{(2)} \psi_r + x_2^{(3)} \psi_l] = 0,638 \psi_r - 0,165 \psi_l$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta=0,1$: $\eta_3 = -0,053$	für $\zeta=0,5$: $\eta_3 = -0,101$
„ $\zeta=0,2$: $\eta_3 = -0,087$	„ $\zeta=0,6$: $\eta_3 = -0,084$
„ $\zeta=0,3$: $\eta_3 = -0,103$	„ $\zeta=0,7$: $\eta_3 = -0,064$
„ $\zeta=0,4$: $\eta_3 = -0,105$	„ $\zeta=0,8$: $\eta_3 = -0,041$
für $\zeta=0,9$: $\eta_3 = -0,019$.	

Zweig der Einflußlinie in der 4. Öffnung:

Nach Gl. 55 ist $Q_2 = \frac{1}{l_2} \cdot x_2^{(3)} m'_{3,4}$ oder
 $\eta_4 = \frac{l_4}{l_1} \cdot x_2^{(3)} \psi_r' = -\frac{40}{50} \cdot 0,165 \psi_r' = -0,132 \psi_r'$

Man findet folgende Ordinaten:

für $\zeta=0,1$: $\eta_4 = +0,011$	für $\zeta=0,5$: $\eta_4 = +0,024$
„ $\zeta=0,2$: $\eta_4 = +0,018$	„ $\zeta=0,6$: $\eta_4 = +0,022$
„ $\zeta=0,3$: $\eta_4 = +0,023$	„ $\zeta=0,7$: $\eta_4 = +0,018$
„ $\zeta=0,4$: $\eta_4 = +0,025$	„ $\zeta=0,8$: $\eta_4 = +0,013$
für $\zeta=0,9$: $\eta_4 = +0,006$.	

VI. Die ungünstigsten Belastungen.

A. Querkräfte.

Wir führten die Berechnung der Querkräfte eines über n Öffnungen durchlaufenden Trägers auf die n einfacher Balken auf je zwei Stützen zurück, auf die die wandernde Einheitslast und die beiden Einspannmomente $M_{k-1,k}$ und $M_{k,k-1}$ einwirken (Abb. 12).

Die Größe und das Vorzeichen der Querkraft eines im veränderlichen Abstände y von der Stütze $(K-1)$ entfernten Querschnitts hängt demnach von drei Einflüssen ab, und zwar:

1. von der Stellung x der Einheitslast,
2. von der Größe und dem Vorzeichen des Momentes $M_{k-1,k}$ und
3. von der Größe und dem Vorzeichen des Momentes $M_{k,k-1}$.

Wir werden diese drei, die Größe und das Vorzeichen der Querkraft bedingenden Einflüsse gesondert betrachten.

1. Ungünstigste Stellung der Last 1.

In Abb. 16 ist die Querkraft im Abstände y von der Stütze $(K-1)$:

$$Q_y = +\zeta'$$

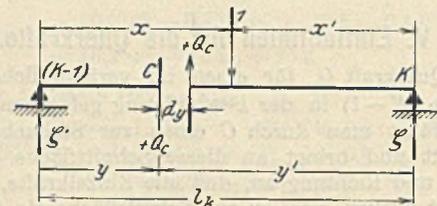


Abb. 16.

solange die Einheitslast rechts vom Querschnitt C angreift, hingegen

$$Q_y = -\zeta$$

solange sie links vom Querschnitt C sich bewegt.

Man darf also sagen:

Die Querkraft Q_y wird positiv, wenn die Last rechts vom Querschnitt C , sie wird negativ, wenn sie links von C sich bewegt. Soll nun die positive Querkraft möglichst groß werden, so hat man die Öffnung l_k links vom Querschnitt C zu entlasten, rechts davon hingegen zu belasten.

2. Ungünstigste Wirkung des Momentes $M_{k-1, k}$.

Das Gleichgewicht des einfachen Trägers $(K-1), K$ gegen Drehung infolge Angriffes des Momentes $M_{k-1, k}$ erfordert Auflagerreaktionen, deren Resultante ein dem Momente $M_{k-1, k}$ entgegengesetzt drehendes

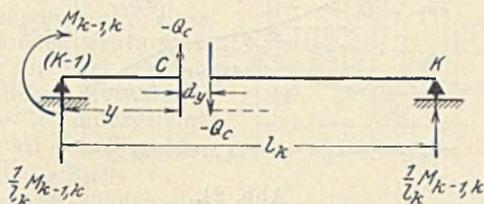


Abb. 17.

Kräftepaar gleicher Größe ergibt. In Abb. 17 wird demnach bei positivem Moment $M_{k-1, k}$ die Querkraft

$$Q_y = -\frac{1}{l_k} \cdot M_{k-1, k}.$$

Soll die Querkraft positiv werden, so muß das Moment $M_{k-1, k}$ negativ werden. Aus der Form der Einflußlinie für $M_{k-1, k}$ wird dieses Moment aber negativ, wenn die Öffnungen l_{k-1}, l_{k-3}, \dots bzw. l_{k+2}, l_{k+4}, \dots belastet, hingegen die Öffnungen l_{k-2}, l_{k-4}, \dots bzw. l_{k+1}, l_{k+3}, \dots entlastet werden.

3. Ungünstigste Wirkung des Momentes $M_{k, k-1}$.

Hier ist die Querkraft im Punkte C :

$$Q_y = -\frac{1}{l_k} \cdot M_{k, k-1}.$$

Soll die Querkraft positiv werden, so muß das Moment $M_{k, k-1}$ negativ werden. Mit Beachtung der Vorzeichenregel für die Spannungsmomente erkennt man aus der Form der Einflußlinie, daß dieses Moment negativ wird, wenn die Öffnungen l_{k-1}, l_{k-3}, \dots bzw. l_{k+2}, l_{k+4}, \dots belastet, hingegen die Öffnungen l_{k+1}, l_{k+3}, \dots bzw. l_{k-2}, l_{k-4}, \dots entlastet werden. Die Momente $M_{k-1, k}$ und $M_{k, k-1}$ haben somit einen gleichgerichteten Einfluß auf das Vorzeichen der Querkraft.

Fassen wir alle diese Ergebnisse zusammen, so ergibt sich die Regel:

Soll für einen Querschnitt C der k ten Öffnung die positive Querkraft möglichst groß werden, so ist diese Öffnung links vom Punkte C zu entlasten, rechts davon zu belasten; die

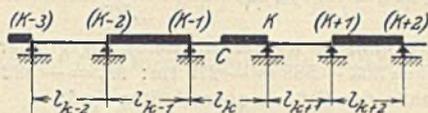


Abb. 18.

übrigen Öffnungen sind abwechselnd zu belasten und zu entlasten in der Weise, daß sich an den entlasteten Teil der Öffnung l_k eine belastete, an den belasteten Teil eine entlastete Öffnung anschließt (Abb. 18).

Die entgegengesetzte Belastung ergibt die kleinste Querkraft im Punkte C der k ten Öffnung.

B. Biegemomente.

Man pflegt die Strecke innerhalb der beiden Festpunkte J und K einer Öffnung die „Innenstrecke“, hingegen die beiden Strecken außerhalb der Innenstrecke innerhalb einer Öffnung die „Außenstrecken“ zu nennen.

a) Der Querschnitt C liegt in der Innenstrecke.

Nimmt bei der Bewegung der Einheitslast in der Öffnung l_k die Größe ζ der Reihe nach Werte im Intervall $(0,1)$ an, so liegen die Momentennullpunkte J_x und K_x stets in den Außenstrecken, so daß in allen Querschnitten C , die in der Innenstrecke liegen, nur positive Biegemomente entstehen können. Soll das positive Biegemoment möglichst groß werden, so muß man trachten, die

Belastung außerhalb der Querschnittsöffnung so zu verteilen, daß in die Stütze $(K-1)$ ein positives Moment $M_{k-1, k}$ und in die Stütze K ein negatives Moment $M_{k, k-1}$ eingeleitet wird. Aus der Form der Einflußlinien dieser beiden Stützenmomente ergibt sich aber, daß zu

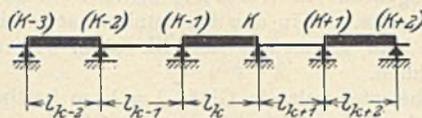


Abb. 19.

diesem Zwecke die Öffnungen l_{k-2}, l_{k-4}, \dots bzw. l_{k+2}, l_{k+4}, \dots zu belasten, die Öffnungen l_{k-1}, l_{k-3}, \dots bzw. l_{k+1}, l_{k+3}, \dots zu entlasten sind (Abb. 19).

Die entgegengesetzte Belastung des Trägers ergibt die kleinsten Biegemomente.

β) Der Querschnitt C liege in einer der Außenstrecken.

Liegt der Querschnitt C in der linken Außenstrecke der k ten Öffnung (Abb. 20), so fällt der Momentennullpunkt J_x dann mit dem Punkte C zusammen, wenn sich die Last 1 in einem bestimmten Ab-

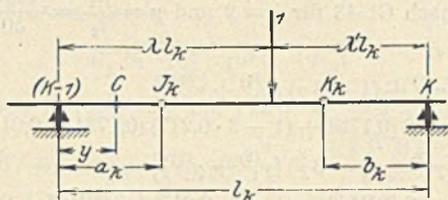


Abb. 20.

stande λl_k befindet. Für alle Laststellungen $\zeta < \lambda$ liegen die Momentennullpunkte links von C , so daß im Punkte C positive Biegemomente entstehen. Bei allen Laststellungen $\zeta > \lambda$ liegen hingegen die Momentennullpunkte rechts von C , und es entstehen negative Biegemomente.

Um also in einem Punkte C der linken Außenstrecke das größte Biegemoment zu erzeugen, belastet man die Öffnung längs der Strecke λl_k und entlastet sie längs der Strecke $\lambda' l_k$.

Alle übrigen Öffnungen sind nach den vorigen Betrachtungen wieder abwechselnd zu belasten und zu entlasten in der Weise, daß

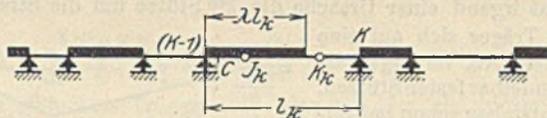


Abb. 21.

sich an den entlasteten Teil der Öffnung l_k eine belastete, an den belasteten Teil eine entlastete Öffnung anschließt (Abb. 21).

Entsprechendes gilt für den Fall, daß der Querschnitt C in der rechten Außenstrecke sich befindet (Abb. 22).

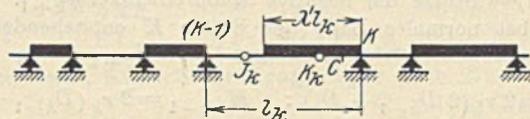


Abb. 22.

Wir schreiten nun zur Berechnung des in der Theorie der durchlaufenden Träger sehr verwendbaren Wertes λ .

Der Querschnitt C liege in der linken Außenstrecke; es gilt dann zur Bestimmung des Wertes λ gemäß Gl. 52' die Beziehung:

$$(\chi' - \epsilon_k^{(k-1)}) \psi_r - (\chi + \epsilon_k^{(k)}) \psi_l + \lambda' \chi = 0$$

oder mit Zuhilfenahme der Gl. 9:

$$-(\chi' - \epsilon_k^{(k-1)}) \lambda \lambda' - (\chi + \epsilon_k^{(k)}) \lambda^2 + \chi = 0$$

oder, wenn diese Gleichung nach fallenden Potenzen von λ geordnet wird,

$$(56) \quad (\chi - \chi' + \epsilon_k^{(k-1)} + \epsilon_k^{(k)}) \lambda^2 + (\chi' - \epsilon_k^{(k-1)}) \lambda - \chi = 0.$$

Diese in λ quadratische Gleichung bestimmt durch Variation der Größe χ bzw. χ' die allen Punkten der linken Außenstrecke zugeordneten Werte λ .

Ähnlich bestimmt die Gleichung

$$(56a) \quad (\chi' - \chi - \epsilon_k^{(k-1)} - \epsilon_k^{(k)}) \lambda'^2 + (\chi + \epsilon_k^{(k)}) \lambda' - \chi' = 0$$

durch Variation der Größe χ bzw. χ' die allen Punkten der rechten Außenstrecke zugeordneten Werte λ' .

Für Querschnitte, die in den Festpunkten selbst liegen, ist $\lambda = 1$ bzw. $\lambda' = 1$. Man kann also aus Gl. 56 u. 56a alle Festpunktabstände berechnen.

Setzt man beispielsweise in Gl. 56 $\lambda = 1$, so bestimmt χ den Abstand a_k des linken Festpunktes J_k der k ten Öffnung. In der Tat wird mit $\lambda = 1$ aus Gl. 56

$$\epsilon_k^{(k)} = 0$$

und daher nach Gl. 48

$$\chi l_k = a_k = \frac{2 \gamma_{k-1}^{(k)} + \gamma_k^{(k)}}{3 (\gamma_{k-1}^{(k)} + \gamma_k^{(k)})} \cdot l_k$$

in Übereinstimmung mit Gl. 36.

6. Zahlenbeispiel.

Für einen Querschnitt, der im linken Festpunkte der 2. Öffnung des in den vorigen Beispielen behandelten Tragwerkes liegt, möge der zugeordnete Wert von λ berechnet werden.

Es sind nach Gl. 48 für $k=2$ und $\chi = \frac{a_2}{l_2} = \frac{10,85}{50} = 0,217$ die Koeffizienten ϵ :

$$\epsilon_2^{(1)} = 2 \nu_2 [\gamma_1^{(1)} + (1 - 3 \chi) (\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)})] = 2 \cdot 0,8 [0,1734 + (1 - 3 \cdot 0,217) (0,1734 - 0,0463)] = 0,349$$

$$\epsilon_2^{(2)} = 2 \nu_2 [\gamma_1^{(2)} + (1 - 3 \chi) (\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)})] = 2 \cdot 0,8 [0,0463 + (1 - 3 \cdot 0,217) (-0,0463 + 0,1794)] = 0$$

$$\epsilon_2^{(3)} = 2 \nu_2 [\gamma_1^{(3)} + (1 - 3 \chi) (\gamma_1^{(3)} + \gamma_2^{(3)})] = 2 \cdot 0,8 [0,0119 + (1 - 3 \cdot 0,217) (0,0119 - 0,0463)] = 0.$$

Nach Gl. 56 wird

$$(0,217 - 0,783 + 0,349) \lambda^2 + (0,783 - 0,349) \lambda - 0,217 = 0$$

oder $\lambda^2 - 2 \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$
woraus $\lambda = +1$ folgt.

VII. Einfluß der Stützensenkungen.

Es wurde bisher vorausgesetzt, daß bei der Belastung des durchlaufenden Trägers alle Stützen unwandelbar fest seien. Senkt sich jedoch aus irgend einer Ursache die k te Stütze um die Strecke d_k , so wird der Träger sich auf eine ganz andere Art verbiegen als bei unwandelbar festen Stützen.

Es entstehen schon bei verhältnismäßig kleinen Senkungen einer Stütze wesentlich andere Biegemomente, deren Berechnung uns jetzt beschäftigen soll.

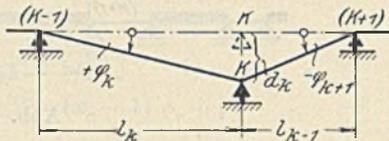


Abb. 23.

Durch die Senkung der k ten Stütze entsteht bei Betrachtung der Abb. 23 in der K ten Öffnung der positive Stabdrehwinkel ϕ_k und in der $(k+1)$ ten Stütze der negative Stabdrehwinkel ϕ_{k+1} .

Die bei normaler Lage der Stütze K entstehenden Stützenmomente der unbelasteten Öffnungen l_k und l_{k+1}

$$M_{k-1,k} = 2 \nu_k (2 D_{k-1} + D_k); \quad M_{k,k-1} = 2 \nu_k (D_{k-1} + 2 D_k);$$

$$M_{k+1,k} = 2 \nu_{k+1} (2 D_{k+1} + D_k)$$

verwandeln sich nun in die Biegemomente

$$(57) \quad \begin{cases} M_{k-1,k} = 2 \nu_k (2 D_{k-1} + D_k) - 6 W_k \phi_k \\ M_{k,k-1} = 2 \nu_k (D_{k-1} + 2 D_k) - 6 W_k \phi_k \\ M_{k+1,k} = 2 \nu_{k+1} (D_k + 2 D_{k+1}) - 6 W_{k+1} \phi_{k+1}, \end{cases}$$

wobei

$$(58) \quad \phi_k = +E \frac{d_k}{l_k} \quad \text{und} \quad \phi_{k+1} = -E \frac{d_k}{l_k}.$$

In Gl. 57 erscheinen die Momente $6 W_k \phi_k$ bzw. $6 W_{k+1} \phi_{k+1}$ an jenen Stellen, wo sonst die Hilfsmomente $m_{k-1,k}$, $m_{k,k-1}$ bzw. $m_{k+1,k}$ aufzutreten pflegen. Ähnlich wie wir die Hilfsmomente m als Belastungsgrößen aufgefaßt haben, werden diese hier durch die Momente $6 W_k \phi_k$ bzw. $6 W_{k+1} \phi_{k+1}$ dargestellt.

Weichen mehrere Stützen von der normalen Lage ab (Abb. 24), so entsteht in der

$$(k-1)\text{ten Öffnung der Stabdrehwinkel } \phi_{k-1} = E \frac{d_{k-1} - d_{k-2}}{l_{k-1}}$$

$$k \text{ " " " " } \phi_k = E \frac{d_k - d_{k-1}}{l_k}$$

$$(k+1) \text{ " " " " } \phi_{k+1} = E \frac{d_{k+1} - d_k}{l_{k+1}}$$

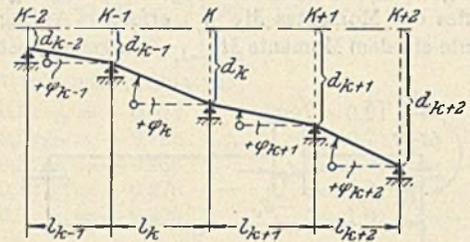


Abb. 24.

usw. Diese Stabdrehwinkel hat man dann in die Gleichungen für die Stützenmomente

$$M_{k-2,k-1} = 2 \nu_{k-1} (D_{k-1} + 2 D_{k-2}) - 6 W_{k-1} \phi_{k-1}$$

$$M_{k-1,k} = 2 \nu_k (D_{k-1} + 2 D_k) - 6 W_k \phi_k$$

$$M_{k,k+1} = 2 \nu_{k+1} (2 D_k + D_{k+1}) - 6 W_{k+1} \phi_{k+1}$$

usw. einzuführen.

7. Zahlenbeispiel. (Abb. 25.)

Die Stütze 1 des in den vorigen Beispielen behandelten Tragwerkes habe sich um 5 cm gesenkt. Man berechne die durch diese Senkung entstehenden Biegemomente.

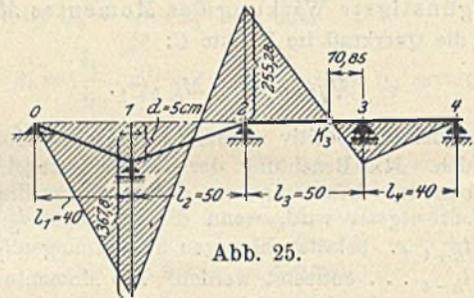


Abb. 25.

Es entstehen die Zusatzmomente: für die 1. Öffnung (freiauflegend!)

$$-3 W_1 \phi_1 = -3 \frac{EJ d_1}{l_1^2} = -3 \cdot 0,2313 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 0,05 / 40^2 = -303 \text{ tm}$$

für die 2. Öffnung (eingespannt!)

$$-6 W_2 \phi_2 = +6 \frac{EJ d_1}{l_2^2} = +6 \cdot 0,2313 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 0,05 / 50^2 = +582 \text{ tm.}$$

Diese Zusatzmomente werden als Belastungsglieder aufgefaßt, und man erhält: $M_1 = 303 - 582 = -279 \text{ tm}$; $M_2 = -582 \text{ tm}$.

Die Drehmaße der Stützenquerschnitte sind:

$$D_1 = \gamma_1^{(1)} M_1 + \gamma_1^{(2)} M_2 = -0,1734 \cdot 279 + 0,0463 \cdot 582 = -21,6 \text{ tm}$$

$$D_2 = \gamma_2^{(1)} M_1 + \gamma_2^{(2)} M_2 = +0,0463 \cdot 279 - 0,1794 \cdot 582 = -91,3 \text{ tm.}$$

Die Querschnitte über den Stützen 1 u. 2 drehen sich daher bei der Senkung entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers.

Die Stützenmomente sind

an der Stütze 1

$$M_{1,0} = 3 D_1 - 3 W_1 \phi_1 = 3 (-21,6) - 303 = -367,8 \text{ tm (Zugzone unten)}$$

an der Stütze 2

$$M_{2,1} = 2 \nu_2 (D_1 + 2 D_2) - 6 W_2 \phi_2 = 2 \cdot 0,8 (-21,6 - 2 \cdot 91,3) + 582 = +255,28 \text{ tm (Zugzone oben)}$$

an der Stütze 3

$$M_{3,2} = M_{2,1} \cdot \frac{b_3}{l_3} = 255,28 \cdot \frac{10,85}{50} = 55,5 \text{ tm (Zugzone unten).}$$

VIII. Die Durchbiegung durchlaufender Träger.

Man berechnet die Durchbiegung durchlaufender Träger insbesondere anlässlich der Belastungsprobe des Tragwerkes, um die gemessene Durchbiegung mit der berechneten vergleichen zu können und ferner auch noch bisweilen zur Bestimmung der Überhöhung der Eisenbahnbrücken, die um ein solches Maß vorgenommen wird, daß

das Gleis unter der Wirkung der Eigenlast vermehrt um die Hälfte der zufälligen Last eine wagerechte Lage einnimmt.

Allerdings darf in allen diesen Fällen der Einfluß der Schubkräfte nicht vernachlässigt werden, wenn man einigermaßen zutreffende Ergebnisse erzielen will, doch kann dieser Beitrag zur Durchbiegung nach sehr einfachen Formeln zusätzlich berechnet werden. Ich verweise hierzu auf das Werk von Prof. Dr. W. Ritter „Anwendungen der graphischen Statik“, 3. Teil, Seite 4, 18 u. 65.

Wir schreiten nun zur Berechnung der Durchbiegung d eines Tragwerks infolge Einflusses der Biegemomente.

Vorerst möge die Berechnung der Durchbiegung eines beliebig belasteten einfachen Trägers AB auf zwei Stützen im veränderlichen Abstände y vom Punkte A durchgeführt werden. M_y sei das Biegemoment an dieser Stelle.

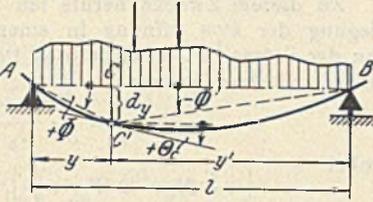


Abb. 26.

Ich fasse (Abb. 26) den einfachen Träger AB als einen durchlaufenden Träger auf drei Stützen A, C und B auf, dessen Stütze C sich um die fragliche Durchbiegung d_y gesenkt hat, und dessen Stützenmoment im Punkte C gleich ist dem gegebenen Biegemoment M_y .

Es entsteht dann in der Öffnung y das positive Stabdrehmaß $\phi = +E \cdot \frac{d_y}{y}$ und in der Öffnung y' das negative Stabdrehmaß $\phi' = -E \cdot \frac{d_y}{y'}$.

Bei dieser Auffassung bestehen dann gleichzeitig die Gleichungen

$$\begin{cases} M_{C,A} = -M_y = 3W_y \Theta_c - 3W_y \phi + m'_{C,A} \\ M_{C,B} = +M_y = 3W_{y'} \Theta_c - 3W_{y'} \phi' + m'_{C,B} \end{cases}$$

und nach Division der 1. Gleichung durch $3W_y$ bzw. der 2. Gleichung durch $3W_{y'}$ erhält man das Gleichungspaar

$$\begin{cases} \Theta_c - E \cdot \frac{d_y}{y} = \psi_A \\ \Theta_c + E \cdot \frac{d_y}{y'} = \psi_B \end{cases}$$

wobei

$$(59) \quad \psi_A = \frac{-M_y - m'_{C,A}}{3W_y} \quad \text{und} \quad \psi_B = \frac{M_y - m'_{C,B}}{3W_{y'}}$$

ist und wodurch die beiden unbekannt, auf den Punkt C bezogenen Größen Θ_c [= die mit dem Elastizitätsmaß E multiplizierte Verdrehung des Querschnittes im Punkte C] und d_y [= die Durchbiegungsstrecke im Punkte C] bekannt werden.

Man erhält auf diese Weise zur Bestimmung der Verdrehung des Querschnittes C die Gleichung

$$(60) \quad \Theta_c = \frac{y \psi_A + y' \psi_B}{l}$$

und zur Bestimmung der Durchbiegung die Gleichung

$$(61) \quad d_y = \frac{y y'}{E l} (\psi_B - \psi_A)$$

Ist der Träger im Punkte A teilweise eingespannt, in B hingegen frei drehbar gelagert, dann besteht, wenn M_y das Biegemoment des statisch unbestimmten Systems bedeutet, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} M_{C,A} &= -M_y = 2W_y \Theta_A + 4W_y \Theta_c - 6W_c \phi + m_{C,A} \\ M_{C,B} &= +M_y = 3W_{y'} \Theta_c - 3W_{y'} \phi' + m'_{C,B} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{cases} \Theta_c - \frac{3}{2} \cdot \frac{E}{y} \cdot d_y = \psi_A \\ \Theta_c + \frac{E}{y'} \cdot d_y = \psi_B \end{cases}$$

wobei

$$(62) \quad \psi_A = -\frac{M_y + 2W_y \Theta_A + m_{C,A}}{4W_y} \quad \psi_B = \frac{M_y - m'_{C,B}}{3W_{y'}}$$

Man erhält daraus das unbekannte Drehmaß

$$\Theta_c = \frac{2y \psi_A + 3y' \psi_B}{2y + 3y'}$$

und die unbekannte Durchbiegung

$$(63) \quad d_y = \frac{2y y'}{(2y + 3y') E} (\psi_B - \psi_A)$$

Die Gl. 62 u. 63 gelten auch für vollkommene Einspannung des Trägers am Auflager A , wenn in Gl. 62 das Drehmaß $\Theta_A = 0$ gesetzt wird.

Ist der Träger in B teilweise eingespannt, in A frei drehbar gelagert, so gelten die Gleichungen

$$(64) \quad \Theta_c = \frac{3y \psi_A + 2y' \psi_B}{3y + 2y'}$$

$$(65) \quad d_y = \frac{2y y'}{(3y + 2y') E} (\psi_B - \psi_A)$$

wobei

$$(66) \quad \psi_A = -\frac{M_y + m'_{C,A}}{3W_y}, \quad \psi_B = \frac{M_y - 2W_{y'} \Theta_B - m_{C,B}}{4W_{y'}}$$

Ist der Träger in A und B teilweise eingespannt, so ist

$$(67) \quad \begin{cases} \psi_A = -\frac{M_y + 2W_y \Theta_A + m_{C,A}}{4W_y} \quad \text{und} \\ \psi_B = \frac{M_y - 2W_{y'} \Theta_B - m_{C,B}}{4W_{y'}} \end{cases}$$

Das Drehmaß wird:

$$(68) \quad \Theta_c = \frac{y \psi_A + y' \psi_B}{l}$$

und die Durchbiegungsstrecke

$$(69) \quad d_y = \frac{2y y'}{3 E l} (\psi_A - \psi_B)$$

Beispielsweise ist für $y' = l$ und $y = 0$: $M_y = M_{A,B}$, $m_{C,B} = m_{A,B}$

$$W_{y'} = W, \quad \Theta_c = \Theta_A = \psi_B = \frac{M_{A,B} - 2W \Theta_B - m_{A,B}}{4W}$$

und man gelangt so zu der bekannten Gleichung für das Einspannmoment im Punkte A

$$M_{A,B} = 4W \Theta_A + 2W \Theta_B + m_{A,B}$$

Insbesondere hat man in den Gl. 67 bei vollkommener Einspannung des Trägers in den Punkten A und B $\Theta_A = \Theta_B = 0$ zu setzen.

Beispielsweise ist die größte Durchbiegung eines einfachen Trägers AB , der in der Mitte mit der Einzellast P belastet ist, folgendermaßen zu berechnen:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{4} \cdot P l; \quad m'_{C,A} = m'_{C,B} = 0; \quad \psi_A = -\psi_B = -\frac{M_y}{3W_y} \\ &= -\frac{P \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2}}{3J} = -P \cdot \frac{l^2}{24J} \end{aligned}$$

$$d_y = \frac{2 \psi_B y y'}{E l} = 2P \cdot \frac{l^2}{24J} \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1}{E l} = P \cdot \frac{l^3}{48 E J}$$

oder eines einfachen Trägers AB , der mit der gleichförmigen Last von A bis B belastet ist:

$$M_y = \frac{1}{8} \cdot p l^2 \quad m'_{C,A} = -m'_{C,B} = \frac{p \left(\frac{l}{2}\right)^2}{8} = \frac{p l^2}{32};$$

$$\psi_A = -\psi_B = -\frac{p \cdot \frac{l^2}{8} + p \cdot \frac{l^2}{32}}{3J} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{5 p l^3}{192 J};$$

$$d_y = \frac{2 \psi_B y y'}{E l} = \frac{+2}{E l} \cdot \frac{5 p l^3}{192 J} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{5 p l^4}{384 E J}$$

Erwähnenswert ist noch der Kragträger (Abb. 27).

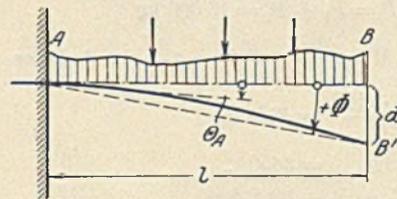


Abb. 27.

M_A sei das Kragmoment.

Ich fasse den Kragträger als einen im Punkte A teilweise eingespannten, im Punkte B frei drehbar gelagerten Balken auf zwei Stützen auf, bei dem das Einspannmoment in A gleich ist dem Kragmoment M_A und bei dem sich die Stütze B um die Durchbiegungsstrecke d gesenkt hat.

Es entsteht bei dieser Auffassung das positive Stabdrehmaß $\phi = +E \cdot \frac{d}{l}$, und man gelangt zur Gleichung

$$M_{A,B} = M_A = 3W \Theta_A - 3W \phi + m'_{A,B}$$

aus der sich unmittelbar

$$\phi = E \cdot \frac{d}{l} = (-M_A + m'_{A,B}) \frac{1}{3W} + \Theta_A$$

oder die Durchbiegungsstrecke:

$$d = \frac{l^2}{3 E J} (-\mathfrak{M}_A + m'_{A,B}) + \frac{l}{E} \cdot \Theta_A$$

oder da $\Theta_A = E \tau_A$ ist

$$(70) \quad d = \frac{l^2}{3 E J} (-\mathfrak{M}_A + m'_{A,B}) + l \tau_A$$

ergibt.

Beispielsweise ist für einen Kragträger AB , der im Punkte A vollkommen eingespannt ist und im Punkte B die Last P trägt:

$$\mathfrak{M}_A = -Pl; \quad m'_{A,B} = 0; \quad \tau_A = 0 \text{ und daher}$$

$$d = \frac{l^2}{3 E J} \cdot Pl = P \cdot \frac{l^3}{3 E J}$$

8. Zahlenbeispiel.

Eine Spannweite von 6 m (Abb. 28) wird durch drei nebeneinander liegende I-Träger NP 36 ($J_1 = 19\,766 \text{ cm}^4$) in gleichen Abständen von 1 m überdeckt. In der Mitte sind die Träger durch einen Querträger NP 20 ($J_2 = 2162 \text{ cm}^4$) verbunden. Welche Last P darf man an der mittleren Kreuzungsstelle E anbringen, wenn die Spannung σ an keiner Stelle 1000 kg/cm^2 überschreiten soll. Vom Eigengewicht der Träger darf abgesehen werden.

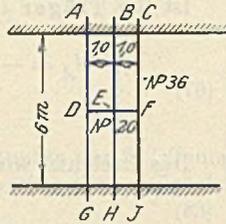


Abb. 28.

Von der fraglichen Last P überträgt sich ein Anteil P_1 auf den Querträger DF und der andere Anteil $P_2 = P - P_1$ auf den mittleren Hauptträger BH . In D und F werden demnach vom Querträger DF auf die Hauptträger AG und CJ je ein Auflagerdruck $= \frac{P_1}{2}$ übertragen.

Es ist: $M_{DA} = 3W_1 \phi_{DA} = \frac{1}{4} \cdot P_1 l_1$; die Senkung des Punktes D

ist: $E d_D = \phi_{DA} \cdot l_1 = P_1 \cdot \frac{l_1^2}{12 W_1}$; $M_{ED} = 3W_2 \phi_{ED} = \frac{1}{2} \cdot P_1 l_2$; die

relative Senkung des Punktes E in bezug auf Punkt D ist: $E d'_E = \phi_{ED} l_2 = P_1 \cdot \frac{l_2^2}{6 W_2}$; die absolute Senkung des Punktes E ist:

$E d_E = E d_D + E d'_E = \frac{1}{12} \cdot P_1 \left[\frac{l_1^2}{W_1} + \frac{2 l_2^2}{W_2} \right]$, $M_{EB} = 3W_1 \phi_{EB}$

$= \frac{1}{2} \cdot P_2 l_1$. Man erhält durch Gleichsetzung der beiden gefundenen

Werte für $E d_E$: $\frac{1}{12} \cdot P_1 \left[\frac{l_1^2}{W_1} + \frac{2 l_2^2}{W_2} \right] = \frac{1}{6 W_1} P_2 l_1^2$ oder in anderer

Darstellung mit Hilfe der Beziehungen: $W_1 = \frac{J_1}{l_1}$ und $W_2 = \frac{J_2}{l_2}$:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{0,5 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \frac{J_1}{J_2}}$$

In unserem Zahlenbeispiel ist $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{0,5 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{19\,766}{2162}} = 0,838$

Für den mittleren Hauptträger BH ist $M_{EB} = \frac{1}{2} \cdot P_2 l_1 = \sigma \cdot \frac{J_1}{e_1}$

und daher $P_2 = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 19\,766}{18 \cdot 300} = 7\,300 \text{ kg}$

$P_1 = \frac{1}{0,838} \cdot 7\,300 = 8\,700 \text{ „}$

$P = P_1 + P_2 = 16\,000 \text{ kg.}$

Für den Querträger DF ist $M_{ED} = \frac{1}{2} \cdot P_1 l_2 = \sigma \cdot \frac{J_2}{e_2}$ und daher

$P_1 = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 2162}{10 \cdot 100} = 4\,324 \text{ kg}$

$P_2 = 0,838 \cdot 4\,324 = 3\,650 \text{ „}$

$P = P_1 + P_2 = 8\,000 \text{ kg.}$

Die äußeren Hauptträger kommen infolge der sichtlich geringen Beanspruchung nicht in Frage.

Die aufzubringende Last darf wegen des schwachen Querträgers nur $8\,000 \text{ kg}$ betragen.

Wir fanden die Senkung im Punkte E mit $d_E = \frac{P_2 l_1^2}{6 W_1 E}$, die Durchbiegung des Tragwerks ist daher im Punkte E bei einem Elastizitätsmaß $E = 2150 \text{ t/cm}^2$

$$d_E = \frac{3\,650 \cdot 300^2}{6 \cdot 19\,766 \cdot 2\,150\,000} = 0,39 \text{ cm.}$$

(Vergl. die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe des Begriffes der Formänderungsarbeit in dem Werke „Vorlesungen über technische Mechanik“ von Prof. Dr. Aug. Föppl, III. Bd., S. 187.)

IX. Einflußlinien für die Durchbiegungen durchlaufender Träger.

In allen Fällen, in denen eine wechselnde Belastung (bewegter Eisenbahnzug) zu berücksichtigen ist, empfiehlt es sich, die Einflußlinie für die Durchbiegung der gewünschten Trägerstelle zu zeichnen.

Zu diesem Zwecke berufe ich mich zur Berechnung der Durchbiegung der k ten Öffnung in einem im veränderlichen Abstände y von der Stütze ($K-1$) entfernten Punkte C auf die Formeln 67 u. 69 (S. 581), die hier lauten:

$$E d_{ky} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y y'}{l_k} (\psi'_B - \psi'_A),$$

wobei

$$\psi'_A = \frac{-M_y - 2W_{ky} \Theta_{k-1} - m_{c,k-1}}{4W_{ky}};$$

$$\psi'_B = \frac{M_y - 2W_{ky} \Theta_k - m_{c,k}}{4W_{ky}}.$$

Mit Einführung der Bezeichnungen $\chi = \frac{y}{l_k}$ und $\chi' = 1 - \chi$ erhält

man: $\psi'_B - \psi'_A = \frac{1}{4W_k} \cdot [M_y - 2\nu_k D_k + 2\nu_k D_{k-1} - \chi' m_{c,k} + \chi m_{c,k-1}]$

und es wird

$$(71) \quad \begin{cases} E d_{ky} = \frac{\chi \chi' l_k}{6W_k} \\ \cdot [M_y - 2\nu_k (D_k - D_{k-1}) - \chi' m_{c,k} + \chi m_{c,k-1}]. \end{cases}$$

a) Die beiden Abschnitte der Einflußlinie außerhalb der Querschnittsöffnung l_k .

Hier ist $m_{c,k} = m_{c,k-1} = 0$, weil die Einheitslast außerhalb der Querschnittsöffnung sich bewegt.

Das Biegemoment in einem im Abstände y von der Stütze ($K-1$) entfernten Punkte C ist nach Gl. 46

$$M_y = 2\nu_k [(2 - 3\chi) D_{k-1} + (1 - 3\chi) D_k]$$

und man erhält aus Gl. 71 die Durchbiegungsgleichung

$$E d_{ky} = \frac{\chi \chi' l_k}{W_1} (\chi' D_{k-1} - \chi D_k).$$

Mit Berücksichtigung der Entwicklungsgleichung 34 für die Drehmaße D und mit den Substitutionen:

$$(72) \quad \begin{cases} \delta_k^{(1)} = \chi \chi' [\chi' \gamma_{k-1}^{(1)} - \chi \gamma_k^{(1)}] \\ \delta_k^{(2)} = \chi \chi' [\chi' \gamma_{k-1}^{(2)} - \chi \gamma_k^{(2)}] \\ \dots \\ \delta_k^{(n-1)} = \chi \chi' [\chi' \gamma_{k-1}^{(n-1)} - \chi \gamma_k^{(n-1)}] \end{cases}$$

erhält man die Durchbiegung mittels der übersichtlichen Gleichung

$$(73) \quad \left\{ d_{ky} = \frac{l_k}{E W_1} [\delta_k^{(1)} M_1 + \delta_k^{(2)} M_2 + \dots + \delta_k^{(i-1)} M_{i-1} + \delta_k^{(i)} M_i + \dots + \delta_k^{(n-1)} M_{n-1}] \right\}.$$

Den innerhalb der i ten Öffnung verlaufenden Zweig der Einflußlinie für die Durchbiegung eines in der k ten Öffnung gelegenen Punktes findet man daher zufolge Gl. 73 aus

$$d_{ky} = \frac{l_k}{E W_1} [\delta_k^{(i-1)} M_{i-1} + \delta_k^{(i)} M_i]$$

und da

$$M_{i-1} = -m_{i-1}, \quad i = -l_i \psi_r \text{ und } M_i = -m_i, \quad i = -l_i \psi_l$$

ist, so wird

$$(74) \quad d_{ky} = -\frac{l_i l_k}{E W_1} [\delta_k^{(i-1)} \psi_r + \delta_k^{(i)} \psi_l].$$

Durch entsprechende Variation der beiden Indizes i und k , sowie von χ bzw. χ' erhält man alle Einflußlinienzweige außerhalb der Querschnittsöffnungen.

Für $i=1$ und $i=n$ erscheinen die in Gleichungsgruppe 72 nicht vorgesehenen Koeffizienten $\delta_k^{(0)}$ und $\delta_k^{(n)}$, doch erkennt man aus der Entwicklungsgleichung 73, daß diese Koeffizienten gleich Null sein müssen.

β) Abschnitt der Einflußlinie innerhalb der Querschnittsöffnung l_k vom Punkte (K-1) bis C.

Hier ist $m_{c,k} = 0$ und nach Gl. 51

$$M_y = (\chi' - \epsilon_k^{(k-1)}) m_{k-1,k}^{(l)} - (\chi + \epsilon_k^{(k)}) m_{k,k-1}^{(l)} + \zeta^{(i)} \chi' l_k.$$

Ferner ist

$$D_k - D_{k-1} = -(\gamma_k^{(k-1)} - \gamma_{k-1}^{(k-1)}) \psi_r - (\gamma_k^{(k)} - \gamma_{k-1}^{(k)}) \psi_l$$

und nach Gl. 71 mit Berücksichtigung der Gleichungsgruppe 48 wird mit den Bezeichnungen

$$(75) \quad \begin{cases} d_r^{(l)} = (1 - 6 \nu_k \gamma_{k-1}^{(k-1)}) \chi' + 6 \nu_k \gamma_k^{(k-1)} \chi \\ d_l^{(l)} = (\chi' - 6 \nu_k \gamma_k^{(k)}) \chi + 6 \nu_k \gamma_{k-1}^{(k)} \chi' \end{cases}$$

die Durchbiegung

$$(76) \quad d_{ky}^{(l)} = \frac{y y'}{6 E \nu_k W_1} [d_r^{(l)} \psi_r - d_l^{(l)} \psi_l + \zeta \chi']$$

Durch entsprechende Variation von ψ_r , ψ_l , ζ , χ und χ' erhält man für alle Punkte der k ten Öffnung den linken Zweig der Einflußlinie für die Durchbiegung.

γ) Abschnitt der Einflußlinie innerhalb der Querschnittsöffnung l_k vom Punkte C bis zur Stütze K.

Auf ähnliche Weise findet man

$$(77) \quad d_{ly}^{(r)} = \frac{y y'}{6 E \nu_k W_1} [d_r^{(r)} \psi_r - d_l^{(r)} \psi_l + \zeta' \chi']$$

wobei

$$(78) \quad \begin{cases} d_r^{(r)} = (\chi - 6 \nu_k \gamma_{k-1}^{(k-1)}) \chi' + 6 \nu_k \gamma_k^{(k-1)} \chi \\ d_l^{(r)} = (1 - 6 \nu_k \gamma_k^{(k)}) \chi + 6 \nu_k \gamma_{k-1}^{(k)} \chi' \end{cases} \text{ ist.}$$

δ) Durchbiegung der beliebig belasteten Öffnung l_k in einem ihrer Punkte C.

Man hat die Ergebnisse unter den Abschnitten β und γ sinngemäß zu addieren und findet so:

$$(79) \quad \begin{cases} d_k = \frac{y y'}{6 E J_k} \\ \cdot [\delta_r m_{k-1,k} - \delta_l m_{k,k-1} + \chi m_{c,k-1} - \chi' m_{c,k} + 2 M_y] \end{cases}$$

wobei

$$(80) \quad \begin{cases} \delta_r = (1 - 6 \nu_k \gamma_{k-1}^{(k-1)}) \chi' + 6 \nu_k \gamma_k^{(k-1)} \chi \\ \delta_l = (1 - 6 \nu_k \gamma_k^{(k)}) \chi + 6 \nu_k \gamma_{k-1}^{(k)} \chi' \end{cases}$$

A. Endfeld frei drehbar gelagert.

α) Zweige außerhalb der Querschnittsöffnung.

Bei $k=1$ geht man von Gl. 65 aus und findet

$$(81) \quad \begin{cases} d_{1y} = \frac{\chi \chi' l_1}{6(2+\chi) E W_1} \\ \cdot [M_y (3+\chi) - 6 D_1 + 4 \chi m'_{c,0} - 3 \chi' m_{c,1}] \end{cases}$$

Man hat hier $M_y = -3 \chi D_1$; $m'_{c,0} = m_{c,1} = 0$ und erhält mit den Bezeichnungen:

$$(82) \quad \begin{cases} d_1^{(1)} = \frac{\chi \chi'}{2(2+\chi)} [\chi (3+\chi) + 2] \gamma_1^{(1)} \\ d_1^{(2)} = \frac{\chi \chi'}{2(2+\chi)} [\chi (3+\chi) + 2] \gamma_1^{(2)} \\ \dots \\ d_1^{(n-1)} = \frac{\chi \chi'}{2(2+\chi)} [\chi (3+\chi) + 2] \gamma_1^{(n-1)} \end{cases}$$

die Durchbiegung

$$(83) \quad \begin{cases} d_{1y} = \frac{l_1}{E W_1} [d_1^{(1)} M_1 + d_1^{(2)} M_2 + \dots + d_1^{(i-1)} M_{i-1} \\ + d_1^{(i)} M_i + \dots + d_1^{(n-1)} M_{n-1}]. \end{cases}$$

Den innerhalb der i ten Öffnung verlaufenden Zweig der Einflußlinie für die Durchbiegung eines in der 1. Öffnung gelegenen Punktes findet man daher aus der Gleichung:

$$(84) \quad d_{1y} = -\frac{l_1 l_i}{E W_1} [d_1^{(i-1)} \psi_r + d_1^{(i)} \psi_l].$$

Für $i=n$ ist wieder $d_1^n = 0$ zu setzen.

Bei $k=n$ ist mit den Substitutionen:

$$(85) \quad \begin{cases} d_n^{(1)} = \frac{\chi \chi'}{2(2+\chi')} [\chi' (3+\chi') + 2] \gamma_{n-1}^{(1)} \\ d_n^{(2)} = \frac{\chi \chi'}{2(2+\chi')} [\chi' (3+\chi') + 2] \gamma_{n-1}^{(2)} \\ \dots \\ d_n^{(n-1)} = \frac{\chi \chi'}{2(2+\chi')} [\chi' (3+\chi') + 2] \gamma_{n-1}^{(n-1)} \end{cases}$$

die Durchbiegung

$$(86) \quad \begin{cases} d_{ny} = \frac{l_n}{E W_1} [d_n^{(1)} M_1 + d_n^{(2)} M_2 + \dots + d_n^{(i-1)} M_{i-1} \\ + d_n^{(i)} M_i + \dots + d_n^{(n-1)} M_{n-1}]. \end{cases}$$

Den innerhalb der i ten Öffnung verlaufenden Zweig der Einflußlinie für die Durchbiegung in einem in der n ten Öffnung gelegenen Punkte findet man daher aus der Gleichung:

$$(87) \quad d_{ny} = -\frac{l_i l_n}{E W_1} [d_n^{(i-1)} \psi_r + d_n^{(i)} \psi_l].$$

Für $i=1$ hat man $d_n^0 = 0$ zu setzen.

β) Der linke Zweig in den beiden Endfeldern.

Man findet bei $k=1$:

$$(88) \quad \begin{cases} d_{1y}^{(l)} = \frac{\chi \chi' l_1}{6(2+\chi) E W_1} \{ [3(2+\chi(3+\chi))] \gamma_1^{(l)} \\ - \chi(3+\chi) \} m'_{1,0} + 4 \chi m'_{c,0} + \chi'(3+\chi) l_1 \zeta^{(l)} \} \end{cases}$$

oder

$$(89) \quad d_{1y}^{(l)} = \frac{y y'}{6(2+\chi) E W_1} [d_l^{(l)} \psi_l' + (3+\chi) \chi' \zeta']$$

wobei

$$(90) \quad d_l^{(l)} = 3 \{ [\chi(3+\chi) + 2] \gamma_1^{(l)} - \chi \chi' \}.$$

Man findet bei $k=n$:

$$(91) \quad \begin{cases} d_{ny}^{(l)} = \frac{\chi \chi' l_n}{6(3-\chi) W_n} \{ [3 \nu_n \{ \chi' (\chi-1) - 2 \} \gamma_{n-1}^{(n-1)} \\ + \chi' (4-\chi) \} m'_{n-1,n} + 3 \chi m_{c,n-1} + (4-\chi) \chi' \zeta^{(l)} l_n \} \end{cases}$$

oder

$$(92) \quad d_{ny}^{(l)} = \frac{y y'}{6(3-\chi) W_n} [d_r^{(l)} \psi_r' + 3 \chi^2 \psi_l + (4-\chi) \chi' \zeta']$$

wobei

$$(93) \quad d_r^{(l)} = \chi' (4-\chi) - 3 \nu_n [(\chi-1) \chi' + 2] \gamma_{n-1}^{(n-1)}.$$

γ) Der rechte Zweig in den beiden Endfeldern.

Man findet bei $k=1$:

$$(94) \quad \begin{cases} d_{1y}^{(r)} = \frac{\chi \chi' l_1}{6(2+\chi) E W_1} \{ [3(2+\chi(3+\chi))] \gamma_1^{(r)} \\ - \chi(3+\chi) \} m'_{1,0} - 3 \chi' m_{c,1} + \chi(3+\chi) l_1 \zeta^{(r)} \} \end{cases}$$

oder

$$(95) \quad d_{1y}^{(r)} = \frac{y y'}{6(2+\chi) E W_1} [d_l^{(r)} \psi_l' - 3 \chi^2 \psi_r + \chi(3+\chi) \zeta']$$

wobei

$$(96) \quad d_l^{(r)} = 3 [2 + \chi(3+\chi)] \gamma_1^{(r)} - \chi(3+\chi).$$

Man findet bei $k=n$:

$$(97) \quad \begin{cases} d_{ny}^{(r)} = \frac{\chi \chi' l_n}{6(3-\chi) E W_n} \{ [\chi' (4-\chi) \\ - 3 \nu_n \{ \chi' (4-\chi) + 2 \} \gamma_{n-1}^{(n-1)}] m'_{n-1,n} - 4 \chi' m'_{c,n} \\ + (4-\chi) \chi' l_n \zeta' \} \end{cases}$$

oder

$$(98) \quad d_{ny}^{(r)} = \frac{y y'}{6(3-\chi) E W_n} [d_r^{(r)} \psi_r' + (4-\chi) \chi' \zeta'],$$

wobei

$$(99) \quad d_r^{(r)} = 3 \{ \chi \chi' - \nu_n [\chi' (4-\chi) + 2] \gamma_{n-1}^{(n-1)} \}.$$

δ) Beliebige Vollbelastung der 1. Öffnung.

Man hat die Gl. 88 u. 94 sinngemäß zu addieren und findet

$$(100) \quad \begin{cases} d_{1y} = \frac{y y'}{6(2+\chi) E J_1} \{ [3(2+\chi(3+\chi))] \gamma_1^{(l)} \\ - \chi(3+\chi) \} m'_{1,0} + 4 \chi m'_{c,0} - 3 \chi' m_{c,1} + (3+\chi) 2 M_y \} \end{cases}$$

ε) Beliebige Vollbelastung der n^{ten} Öffnung.

Man hat die Gl. 91 u. 97 zu addieren und findet

$$(101) \left\{ \begin{aligned} d_{ny} &= \frac{y y'}{6(3-\chi) E J_n} \left\{ [\chi'(4-\chi) \right. \\ &\quad \left. - 3 r_n (\chi' \{4-\chi\} + 2) \gamma_{n-1}^{(n-1)}] m_{n-1, n} + 3 \chi m_{c, n-1} \right. \\ &\quad \left. - 4 \chi' m'_{c, n} + (4-\chi) \mathfrak{M}_y \right\}. \end{aligned} \right.$$

B. Endfeld vollkommen eingespannt.

α) Zweige außerhalb der Querschnittsöffnung.

Bei k=1 findet man mit den Substitutionen

$$(102) \left\{ \begin{aligned} j_1^{(1)} &= -\chi^2 \chi' \gamma_1^{(1)} \\ j_1^{(2)} &= -\chi^2 \chi' \gamma_1^{(2)} \\ &\dots \\ j_1^{(n-1)} &= -\chi^2 \chi' \gamma_1^{(n-1)} \end{aligned} \right.$$

den in der i^{ten} Öffnung verlaufenden Zweig der Einflußlinie für die Durchbiegung in einem in der n^{ten} Öffnung gelegenen Punkte nach der Gleichung

$$(103) \quad d_{1y} = -\frac{l_1 l_i}{E W_1} \left[j_1^{(i-1)} \psi_r + j_1^{(i)} \psi_l \right].$$

Ist i=n, so wird bei frei drehbarer Lagerung der Öffnung l_n:

$$(104) \quad d_{1y} = -\frac{l_1 l_n}{E W_1} \cdot j_1^{(n-1)} \psi_r'$$

bei vollkommener Einspannung der Öffnung l_n:

$$(105) \quad d_{1y} = -\frac{l_1 l_n}{E W_1} \cdot j_1^{(n-1)} \psi_r.$$

Bei k=n findet man mit den Substitutionen

$$(106) \left\{ \begin{aligned} j_n^{(1)} &= \chi \chi'^2 \gamma_{n-1}^{(1)} \\ j_n^{(2)} &= \chi \chi'^2 \gamma_{n-1}^{(2)} \\ &\dots \\ j_n^{(n-1)} &= \chi \chi'^2 \gamma_{n-1}^{(n-1)} \end{aligned} \right.$$

den in der i^{ten} Öffnung verlaufenden Zweig der Einflußlinie für die Durchbiegung in einem in der n^{ten} Öffnung gelegenen Punkte nach der Gleichung

$$(107) \quad d_{ny} = -\frac{l_i l_n}{E W_1} \left[j_n^{(i-1)} \psi_r + j_n^{(i)} \psi_l \right].$$

Ist i=1, so wird bei frei drehbarer Lagerung der Öffnung l₁:

$$(108) \quad d_{ny} = -\frac{l_1 l_n}{E W_1} \cdot j_n^{(1)} \psi_l'$$

bei vollkommener Einspannung der Öffnung l₁:

$$(109) \quad d_{ny} = -\frac{l_1 l_n}{E W_1} \cdot j_n^{(1)} \psi_l.$$

β) Der linke Zweig in den beiden Endfeldern.

Bei k=1 findet man

$$(110) \quad d_{1y}^{(l)} = \frac{y y'}{6 E W_1} \left[(\psi_r + \zeta) \chi' - j_l^{(l)} \psi_l \right],$$

wobei

$$(111) \quad j_l^{(l)} = (\chi' - 6 \gamma_1^{(1)}) \chi.$$

Bei k=n findet man

$$(112) \quad d_{1y}^{(l)} = \frac{y y'}{6 E r_n W_1} \left[j_r^{(l)} \psi_r + \chi' (\zeta - \chi \psi_l) \right],$$

wobei

$$(113) \quad j_r^{(l)} = (1 - 6 r_n \gamma_{n-1}^{(n-1)}) \chi'.$$

γ) Der rechte Zweig in den beiden Endfeldern.

Bei k=1 findet man die Durchbiegung

$$(114) \quad d_{1y}^{(r)} = \frac{y y'}{6 E W_1} \left[(\chi' \psi_r + \zeta) \chi - j_l^{(r)} \psi_l \right]$$

wobei

$$(115) \quad j_l^{(r)} = (1 - 6 \gamma_1^{(1)}) \chi.$$

Bei k=n findet man

$$(116) \quad d_{1y}^{(r)} = \frac{y y'}{6 E r_n W_1} \left[j_r^{(r)} \psi_r + \chi (\zeta' - \psi_l) \right].$$

δ) Beliebige Vollbelastung der 1. Öffnung.

$$(117) \left\{ \begin{aligned} d_{1y} &= \frac{y y'}{6 E J_1} \left\{ (m_{0,1} - m_{c,1}) \chi' \right. \\ &\quad \left. + [m_{c,0} + (6 \gamma_1^{(1)} - 1) m_{1,0}] \chi + \mathfrak{M}_y \right\}. \end{aligned} \right.$$

ε) Beliebige Vollbelastung der n^{ten} Öffnung.

$$(118) \left\{ \begin{aligned} d_{ny} &= \frac{y y'}{6 E J_n} \left\{ [(1 - 6 r_n \gamma_{n-1}^{(n-1)}) m_{n-1, n} - m_{c, n}] \chi' \right. \\ &\quad \left. + (m_{c, n-1} - m_{n, n-1}) \chi + \mathfrak{M}_y \right\}. \end{aligned} \right.$$

9. Zahlenbeispiel. (Tafelbild 4.)

Darstellung der Einflußlinie für die Durchbiegung in der Mitte der 2. Öffnung des in den vorigen Beispielen behandelten Tragwerks.

Die Gleichungsgruppe 72 ergibt für k=2 und $\chi = \chi' = \frac{1}{2}$

$$j_2^{(1)} = \frac{1}{8} [\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)}] = \frac{1}{8} [0,1734 + 0,0463] = +0,0274$$

$$j_2^{(2)} = \frac{1}{8} [\gamma_1^{(2)} - \gamma_2^{(2)}] = \frac{1}{8} [-0,0463 - 0,1794] = -0,0282$$

$$j_2^{(3)} = \frac{1}{8} [\gamma_1^{(3)} - \gamma_2^{(3)}] = \frac{1}{8} [0,0119 + 0,0463] = +0,00728.$$

Zweig der Einflußlinie innerhalb der 1. Öffnung:

Nach Gl. 74 ist:

$$E d_1 = -\frac{l_1 l_2}{W_1} \cdot j_2^{(1)} \psi_l' = -\frac{40 \cdot 50 \cdot 0,0274}{0,00578} \cdot \psi_l' = -9500 \psi_l'.$$

Man findet folgende Einflußordinaten:

für ζ=0,05: η ₁ = - 236,93	für ζ=0,50: η ₁ = - 1781,25
„ ζ=0,10: η ₁ = - 470,25	„ ζ=0,55: η ₁ = - 1822,20
„ ζ=0,15: η ₁ = - 696,54	„ ζ=0,60: η ₁ = - 1824,00
„ ζ=0,20: η ₁ = - 912,00	„ ζ=0,65: η ₁ = - 1783,06
„ ζ=0,25: η ₁ = - 1113,31	„ ζ=0,70: η ₁ = - 1695,75
„ ζ=0,30: η ₁ = - 1296,75	„ ζ=0,75: η ₁ = - 1558,57
„ ζ=0,35: η ₁ = - 1458,82	„ ζ=0,80: η ₁ = - 1368,00
„ ζ=0,40: η ₁ = - 1596,00	„ ζ=0,85: η ₁ = - 1120,43
„ ζ=0,45: η ₁ = - 1704,68	„ ζ=0,90: η ₁ = - 812,25
für ζ=0,95: η ₁ = - 439,95.	

Zweig der Einflußlinie innerhalb der 2. Öffnung links von der Mitte. Nach Gl. 75 ist für k=2 und $\chi = \chi' = \frac{1}{2}$

$$j_r^{(l)} = \chi [1 - 6 r_2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)})] = 0,5 [1 - 6 \cdot 0,8 (0,1734 + 0,0463)] = -0,0275$$

$$j_l^{(l)} = \chi [\chi' - 6 r_2 (\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)})] = 0,5 [0,5 - 6 \cdot 0,8 (0,1794 + 0,0463)] = -0,291.$$

Nach Gl. 76 ist:

$$E d_2 = \frac{25^2}{6 \cdot 0,8 \cdot 0,00578} [-0,0275 \psi_r + 0,291 \psi_l + 0,5 \zeta] = -621 \psi_r - 6560 \psi_l + 11275 \zeta.$$

Man findet folgende Ordinaten:

für ζ=0,05: η ₂ = + 607,35	für ζ=0,30: η ₂ = + 3887,07
„ ζ=0,10: η ₂ = + 1236,84	„ ζ=0,35: η ₂ = + 4560,42
„ ζ=0,15: η ₂ = + 1884,01	„ ζ=0,40: η ₂ = + 5229,18
„ ζ=0,20: η ₂ = + 2544,41	„ ζ=0,45: η ₂ = + 5888,90
„ ζ=0,25: η ₂ = + 3213,57	„ ζ=0,50: η ₂ = + 6535,13.

Zweig der Einflußlinie innerhalb der 2. Öffnung rechts von der Mitte. Nach Gl. 78 ist für k=2 und $\chi = \chi' = \frac{1}{2}$

$$j_r^{(r)} = \chi [\chi - 6 r_2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)})] = 0,5 [0,5 - 6 \cdot 0,8 (0,1734 + 0,0463)] = -0,277$$

$$j_l^{(r)} = \chi [1 - 6 r_2 (\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)})] = 0,5 [1 - 6 \cdot 0,8 (0,1794 + 0,0463)] = -0,042.$$

Nach Gl. 77 ist:

$$E d_2 = 22550 [-0,277 \psi_r + 0,042 \psi_l + 0,5 \zeta] = -6250 \psi_r + 947 \psi_l + 11275 \zeta.$$

Man findet folgende Ordinaten:

für ζ=0,55: η ₂ = + 5898,74	für ζ=0,75: η ₂ = + 3244,87
„ ζ=0,60: η ₂ = + 5246,37	„ ζ=0,80: η ₂ = + 2576,22
„ ζ=0,65: η ₂ = + 4583,92	„ ζ=0,85: η ₂ = + 1913,40
„ ζ=0,70: η ₂ = + 3915,46	„ ζ=0,90: η ₂ = + 1260,46
für ζ=0,95: η ₂ = + 621,32.	

Zweig der Einflußlinie in der 3. Öffnung. Nach Gl. 74 ist

$$E d_3 = - \frac{l_2 l_3}{W_1} [j_2^{(2)} \psi_r + j_2^{(3)} \psi_l] = - \frac{50^3}{0,00578} [-0,0282 \psi_r + 0,00728 \psi_l] = 12200 \psi_r - 3150 \psi_l.$$

Man findet folgende Einflußordinaten:

für $\zeta = 0,05$: $\eta_3 = -558,01$	für $\zeta = 0,50$: $\eta_3 = -1918,75$
" $\zeta = 0,10$: $\eta_3 = -1016,55$	" $\zeta = 0,55$: $\eta_3 = -1787,57$
" $\zeta = 0,15$: $\eta_3 = -1382,42$	" $\zeta = 0,60$: $\eta_3 = -1624,80$
" $\zeta = 0,20$: $\eta_3 = -1662,40$	" $\zeta = 0,65$: $\eta_3 = -1437,23$
" $\zeta = 0,25$: $\eta_3 = -1863,28$	" $\zeta = 0,70$: $\eta_3 = -1231,65$
" $\zeta = 0,30$: $\eta_3 = -1991,85$	" $\zeta = 0,75$: $\eta_3 = -1014,84$
" $\zeta = 0,35$: $\eta_3 = -2054,89$	" $\zeta = 0,80$: $\eta_3 = -712,60$
" $\zeta = 0,40$: $\eta_3 = -2059,20$	" $\zeta = 0,85$: $\eta_3 = -574,71$
" $\zeta = 0,45$: $\eta_3 = -2010,93$	" $\zeta = 0,90$: $\eta_3 = -364,95$
für $\zeta = 0,95$: $\eta_3 = -171,12$.	

Zweig der Einflußlinie in der 4. Öffnung. Nach Gl. 74 ist

$$E d_4 = - \frac{l_2 l_4}{W_1} \cdot j_2^{(3)} \psi_r = - \frac{50 \cdot 40 \cdot 0,00728}{0,00578} \cdot \psi_r = -2520 \psi_r.$$

Man findet folgende Einflußordinaten:

für $\zeta = 0,05$: $\eta_4 = +116,71$	für $\zeta = 0,50$: $\eta_4 = +472,50$
" $\zeta = 0,10$: $\eta_4 = +215,46$	" $\zeta = 0,55$: $\eta_4 = +452,19$
" $\zeta = 0,15$: $\eta_4 = +297,21$	" $\zeta = 0,60$: $\eta_4 = +423,36$
" $\zeta = 0,20$: $\eta_4 = +362,88$	" $\zeta = 0,65$: $\eta_4 = +386,97$
" $\zeta = 0,25$: $\eta_4 = +413,43$	" $\zeta = 0,70$: $\eta_4 = +343,98$
" $\zeta = 0,30$: $\eta_4 = +449,82$	" $\zeta = 0,75$: $\eta_4 = +295,32$
" $\zeta = 0,35$: $\eta_4 = +472,98$	" $\zeta = 0,80$: $\eta_4 = +241,92$
" $\zeta = 0,40$: $\eta_4 = +483,84$	" $\zeta = 0,85$: $\eta_4 = +184,77$
" $\zeta = 0,45$: $\eta_4 = +483,37$	" $\zeta = 0,90$: $\eta_4 = +124,74$
für $\zeta = 0,95$: $\eta_4 = +62,85$	

10. Zahlenbeispiel.

Probebelastung mit der Nutzlast $p = 3 \text{ t/m}$.

Auf Grund der vorhin dargestellten Einflußlinie für die Durchbiegung in der Mitte der 2. Öffnung hat man zur Erzielung der größten Durchbiegung die 2. und 4. Öffnung mit der Nutzlast p zu belasten.

Die Hilfsmomente sind

$$m_{1,2} = -m_{2,1} = -p \frac{l_2^2}{12} = -\frac{3 \cdot 50^2}{12} = -624 \text{ tm};$$

$$m_{3,4} = -\frac{1}{8} p l_4^2 = -\frac{3 \cdot 40^2}{8} = -600 \text{ tm}$$

$$m_{c,1} = -m_{c,2} = +p \frac{l_2^2}{48} = +\frac{3 \cdot 50^2}{48} = +156 \text{ tm};$$

$$M_y = \frac{1}{3} p l^2 = \frac{3}{8} \cdot 50^2 = +936 \text{ tm}$$

$$j_r = z [1 - 6 \nu_2 (\gamma_1^{(1)} - \gamma_2^{(1)})] = 0,5 [1 - 6 \cdot 0,8 (0,1734 + 0,0463)] = -0,0275$$

$$j_l = z [1 - 6 \nu_2 (\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)})] = 0,5 [1 - 6 \cdot 0,8 (0,1794 + 0,0463)] = -0,0420.$$

Nach Gl. 79

$$d_2' = \frac{y y'}{6 E J_2} [(j_r + j_l) m_{1,2} + m_{c,1} + M_y]$$

$$= \frac{25^2}{6 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 0,2313} [(0,0275 + 0,0420) 624 + 156 + 936] = 0,0245 \text{ m}$$

ohne Berücksichtigung des Einflusses der Schubkräfte, der, wie erwähnt, nach den Formeln Prof. Dr. W. Ritters, Zürich, sehr schnell zusätzlich berechnet werden kann.

Durch die Belastung der 4. Öffnung wird nach Gl. 74

$$d_2'' = - \frac{l_2}{E W_1} j_2^{(3)} m_{3,4} = + \frac{50 \cdot 0,00728 \cdot 600}{21 \cdot 10^6 \cdot 0,00578} = 0,0018 \text{ m}.$$

Insgesamt ist die Durchbiegung in der Mitte der 2. Öffnung infolge Einflusses der Biegemomente

$$d_2 = d_2' + d_2'' = 0,0245 + 0,0018 = 0,0263 \text{ m}.$$

X. Der durchlaufende Träger auf vielen Stützen.

Wird die Anzahl der Stützen größer als 6, ein Fall, der in der Praxis wohl nur sehr selten vorkommen wird, so ist die Ermittlung des Koeffizienten γ mit Hilfe des Gleichungssystems 33 schon recht lästig und zeitraubend.

Sehr schnell und dabei auch recht genau lassen sich bekanntlich die Festpunkte nach den Lehren der graphischen Statik ermitteln. Hat man auf diese Weise alle Festpunktabstände in der Zeichnung gemessen, dann können mit Hilfe der Gl. 36 bis 43 alle jene Ko-

effizienten γ berechnet werden, deren absolute Indizesdifferenz kleiner als 2 ist. Man erhält so die Koeffizienten

$$\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)}; \gamma_2^{(2)}, \gamma_2^{(3)} = \gamma_3^{(2)}; \gamma_3^{(3)}, \gamma_3^{(4)} = \gamma_4^{(3)} \text{ usw.}$$

Hingegen alle jene Koeffizienten γ , deren Indizesdifferenz gleich 2 oder größer als 2 ist, lassen sich auf diese Art nicht ermitteln.

Um dennoch zu ihnen zu gelangen, sei folgendes einfaches Verfahren mitgeteilt.

Zur Bestimmung eines beliebigen Koeffizienten $\gamma_i^{(k+1)} = \gamma_{k+1}^{(i)}$, wobei aber

$$k+1 > i \text{ und } k+1-i \geq 2$$

ist, belaste ich die $(k+1)$ te Öffnung mit einer irgendwie symmetrisch verteilten Last (Abb. 29) von solcher Größe, daß die Hilfsmomente $m_{k,k+1} = -m_{k+1,k} = -1$ entstehen, und schreibe dann die Summengleichung für die k te Stütze an. Dabei ist jedoch auf eine gewisse

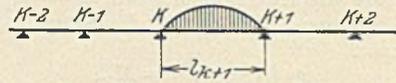


Abb. 29.

Reihenfolge der zur Berechnung gelangenden Koeffizienten γ zu achten. Man muß mit der Ermittlung jener Koeffizienten γ beginnen, deren Indizesdifferenz gleich 2 ist, sodann nimmt man die Berechnung der Koeffizienten γ mit der Indizesdifferenz gleich 3 vor usw., bis schließlich nur mehr ein einziger Koeffizient übrigbleibt, nämlich $\gamma_1^{(n-1)}$ mit der absolut größten Indizesdifferenz gleich $(n-2)$, der durch Belastung der $(n-1)$ ten Öffnung und der Summengleichung für die $(n-2)$ te Stütze bekannt wird.

Beispielsweise hat man zur Bestimmung des Koeffizienten $\gamma_6^{(8)} = \gamma_8^{(6)}$, bei welchem $k+1 = 8$ ist, die $(k+1)$ te = 8 te Öffnung zu belasten und für die k te = 7 te Öffnung die Summengleichung anzuschreiben.

Es ist in diesem Fall

$$m_{k,k+1} = m_{7,8} = -1 \text{ und } m_{k+1,k} = m_{8,7} = +1,$$

folglich sind

$$M_1 = M_2 = \dots = M_6 = 0; M_7 = -M_8 = +1$$

und man erhält zufolge der Gl. 33 für $k = 7$ die Gleichung

$$e_{13} D_6 + e_{13} D_7 + e_{14} D_8 = M_7.$$

Die Drehmaße sind zufolge der Entwicklungsgleichung 34

$$D_6 = \gamma_6^{(7)} M_7 + \gamma_6^{(8)} M_8 = \gamma_6^{(7)} - \gamma_6^{(8)}$$

$$D_7 = \gamma_7^{(7)} M_7 + \gamma_7^{(8)} M_8 = \gamma_7^{(7)} - \gamma_7^{(8)}$$

$$D_8 = \gamma_8^{(7)} M_7 + \gamma_8^{(8)} M_8 = \gamma_8^{(7)} - \gamma_8^{(8)}.$$

Man erhält so die Gleichung

$$e_{13} (\gamma_6^{(7)} - \gamma_6^{(8)}) + e_{13} (\gamma_7^{(7)} - \gamma_7^{(8)}) + e_{14} (\gamma_8^{(7)} - \gamma_8^{(8)}) = 1,$$

in der nur mehr der Koeffizient $\gamma_6^{(8)}$ unbekannt ist, weil alle anderen Koeffizienten eine Indizesdifferenz kleiner als 2 besitzen und daher schon vorher ermittelt werden mußten.

XI. Der durchlaufende Träger mit veränderlichem Trägheitsmoment.

Die Biegemomente, Querkräfte, Verdrehungen der Querschnitte und die Durchbiegungen an jeder Stelle des Tragwerks wurden als Funktionen zweier Argumente dargestellt, und zwar:

1. der Koeffizienten γ ,
2. der Hilfsmomente m , die sich auf die vollkommen eingespannte Öffnung beziehen und daher leicht und schnell berechnet werden können.

Erstere kennzeichnen ähnlich den Festpunktabständen, mit denen sie mittels der Gl. 36 bis 43 in einem verwandtschaftlichen Verhältnis stehen, die Formgebung des Tragwerks, letztere kennzeichnen dessen Belastungszustand.

Es wurde bisher bei allen Ableitungen die Voraussetzung gemacht, daß das Trägheitsmoment des durchlaufenden Trägers zwar von Öffnung zu Öffnung sich ändern kann, daß es aber doch innerhalb einer Öffnung konstant bleibt.

Wo diese Voraussetzung jedoch nicht mehr angängig ist, muß man, um die bisherigen Ergebnisse dennoch benutzen zu können, ein graphisch-analytisches Verfahren anwenden. Ich beschränke jedoch die Anwendung der graphischen Statik nur auf die Ermittlung der Festpunkte und kehre dann sofort wieder zum analytischen Verfahren zurück.

Einige Beispiele sollen dieses Verfahren erläutern.

Es sei ein durchlaufender Träger auf drei Stützen (Abb. 5a) mit veränderlichem Trägheitsmoment und ungleichen Öffnungen l_1 und l_2 zu berechnen.

Man bestimmt zuerst nach den Lehren der graphischen Statik die Festpunktlagen und berechnet sodann aus Gl. 39 den Koeffizienten $\gamma_1^{(1)}$, sodann aus Gl. 40 das unbekannte Verhältnis $\nu_2 = \frac{W_2}{W_1}$.

Jetzt lassen sich schon mit Hilfe der Gl. 34 und 35 alle Stützmomente und Querkräfte auf dieselbe Weise berechnen, wie es bisher bei Trägern mit konstantem Trägheitsmoment geschehen ist.

Bei einem Träger auf vier Stützen hat man folgendermaßen vorzugehen. Nachdem die Festpunkte zeichnerisch ermittelt wurden, berechnet man aus Gl. 39 den Koeffizienten $\gamma_1^{(1)}$, dann aus Gl. 37 $\gamma_1^{(2)} = \gamma_2^{(1)}$ und aus Gl. 36 $\gamma_2^{(2)}$. Endlich erhält man aus Gl. 40 das unbekannte Verhältnis $\nu_3 = \frac{W_3}{W_1}$. Noch fehlt aber das Verhältnis ν_2 .

ν_2 hat den Index 2; ich belaste die 2. Öffnung mit einer symmetrischen Last, die die Hilfsmomente $m_{1,2} = -m_{2,1} = -1$ erzeugt, und schreibe die Summgleichung für die Stütze 2 an und erhalte nach Gl. 33 für $k=2$

$$e_2 D_1 + e_3 D_2 = M_2.$$

Wegen $M_1 = -M_2 = -1$ sind die Drehmaße nach Gl. 34

$$D_1 = \gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)} \text{ und } D_2 = \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)},$$

folglich hat man die Gleichung

$$e_2 (\gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}) + e_3 (\gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)}) = 1,$$

oder mit Hilfe der Gl. 32

$$2 \nu_2 (\gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}) + (4 \nu_2 + 3 \nu_3) (\gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)}) = 1,$$

aus der ν_2 berechnet werden kann.

XII. Der durchlaufende Träger auf elastisch drehbaren Stützen.

Wiewohl das Tragwerk in Abb. 30 jenem in Abb. 33 bei oberflächlicher Betrachtung völlig gleichwertig erscheint, besteht dennoch in statischer Hinsicht ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden, einander so ähnlichen Tragwerken.

Wenn man vom Einfluß der Längskräfte auf die Formänderung der Stäbe und von Senkungen der Säulen infolge Nachgebens der Fundamente absieht, zeichnet sich nämlich das Tragwerk in Abb. 30 dadurch aus, daß dessen Knotenpunkte 1, 2... (n-1) bei Einwirkung aller möglichen wagerechten und lotrechten Kräfte nach keiner Richtung hin sich bewegen können, weil sie an dieser Bewegung durch die feste Stütze 0 gehindert werden.

Hingegen die Knotenpunkte 1, 2... (n-1) des Tragwerks in Abb. 33 bewegen sich infolge der Formänderung des Tragwerks bei Einwirkung lotrechter, ganz besonders aber wagerechter Kräfte, weil sie an dieser Bewegung durch die an den Trägerenden 0 und n wirkenden Rollenlager in keiner Weise behindert sind.

Die Stabdrehwinkel sind deshalb bei der Formänderung des Tragwerks in Abb. 30 durchweg Null, während bei der Formänderung des Tragwerks in Abb. 33 infolge der wagerechten Verschiebbarkeit

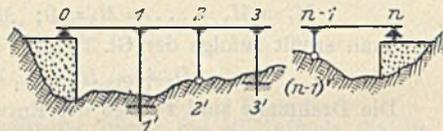


Abb. 30.

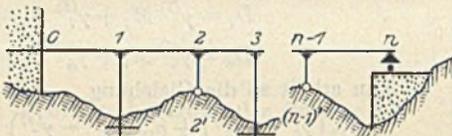


Abb. 31.

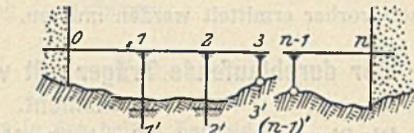


Abb. 32.

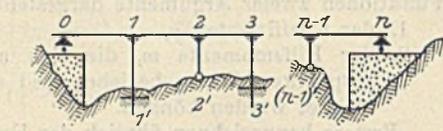


Abb. 33.

der Knoten 0, 1... n Stabdrehwinkel von oft bedeutender Größe entstehen.

Tragwerke von der in den Abb. 30, 31 u. 32 dargestellten Art sind deshalb in statischer Hinsicht den durchlaufenden Trägern mit Spitzenlagerung nahe verwandt, während solche von der in Abb. 33 dargestellten Art in das Gebiet der sog. „durchlaufenden Rahmen-tragwerke“ gehören.

Es wurde bisher immer angenommen, daß der durchlaufende Träger über allen Mittelstützen frei drehbar gelagert sei und daß der Verdrehung der Stützenquerschnitte bei der Formänderung kein Widerstand entgegengesetzt werde.

Wird jedoch diese Verdrehung eines Stützenquerschnitts infolge Widerstandes der stützenden Säule in erheblichem Maße beeinflusst, dann muß man auch auf diese Hemmung Rücksicht nehmen, um richtige Rechenergebnisse zu erzielen.

Eine solche Hemmung der Verdrehung der Stützenquerschnitte tritt besonders dann in Erscheinung, wenn ein durchlaufender Träger mit Säulen, auf denen er ruht, fest verbunden ist, weil jede Verdrehung des lotrechten Stützenquerschnitts auch dieselbe Verdrehung des wagerechten Querschnitts am Säulenkopf im Gefolge hat.

Man spricht in diesem Falle von einem monolithen Verbunde des Trägers mit den Säulen, der insbesondere im Eisenbetonbau eine hervorragende Rolle spielt.

Bei Verwendung starrer Säulen wird die Hemmung der Verdrehung der Stützenquerschnitte naturgemäß unendlich groß, so daß an den Stützen eine vollkommene Einspannung entsteht.

Im allgemeinen wird jedoch der Stützenquerschnitt irgend eine Mittelstellung zwischen der bei frei drehbarer Auflagerung und der bei vollkommener Einspannung annehmen.

Die Berechnung der bei dieser Mittelstellung der Stützenquerschnitte zustande kommenden Biegemomente, Querkräfte und Durchbiegungen geschieht auf folgende Weise (Abb. 34).

Die Biegemomente, die am k^{ten} Knoten wirken, haben folgende Gleichungen:

$$M_{k,k-1} = 2 \nu_k (2 D_k + D_{k-1}) + m_{k,k-1}$$

$$M_{k,k+1} = 2 \nu_{k+1} (2 D_k + D_{k+1}) + m_{k,k+1}$$

$$M_{k,k'} = 4 \nu_{k_s} D_k + m_{k,k'}$$

Das Gleichgewicht gegen Drehung des herausgeschnitten gedachten Knotens K (Abb. 34) erfordert die Gleichung

$$M_{k,k-1} + M_{k,k+1} + M_{k,k'} = 0.$$

Man gelangt mit ihr zur Summgleichung der Momente für den k^{ten} Knoten

$$(119) \quad 2 \nu_k D_{k-1} + 4 (\nu_k + \nu_{k+1} + \nu_{k_s}) D_k + 2 \nu_{k+1} D_{k+1} = M_k$$

wobei

$$(120) \quad M_k = - (m_{k,k-1} + m_{k,k+1} + m_{k,k'}) \text{ ist.}$$

Ist die Säule gelenkig gelagert, so lautet die Summgleichung für den k^{ten} Knoten

$$(121) \quad 2 \nu_k D_{k-1} + [4 (\nu_k + \nu_{k+1}) + 3 \nu_{k_s}] D_k + 2 \nu_{k+1} D_{k+1} = M_k'$$

wobei

$$(122) \quad M_k = - (m_{k,k-1} + m_{k,k+1} + m_{k,k'}).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit der Summgleichung 25, so erkennt man, daß sich bei der Behandlung des durchlaufenden Trägers auf elastisch drehbaren Stützen nur die Koeffizienten e_{2k-1} und bei wagerechtem Lastangriff auf die Säulen auch das Belastungs-glied M_k bzw. M_k' ändern.

Es kommt darauf hinaus, daß sich nur die Koeffizienten γ ändern, so daß alles über die Einflußlinien der Biegemomente, Querkräfte, Verdrehungen und Durchbiegungen Gesagte auch für jede Stelle dieser Tragwerksgattung unverändert Geltung hat.

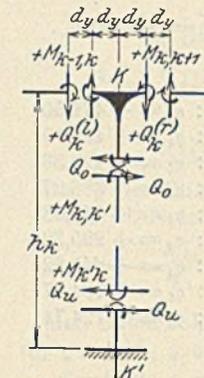


Abb. 34.