ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 83 Automatyka z.3 1963

ZDZISŁAW BUBNICKI

Katedra Maszyn Elektrycznych[x)]

NIEKTÓRE ZAGADNIENIA ANALIZY I SYNTEZY UKŁADÓW KWANTOWO-IMPULSOWYCH

Streszczenie. Układy regulacji z elementami cyfrowymi, a także niektóre układy impulsowe z nieciągłą charakterystyką sprowadza się do tzw. układów kwantowo-impulsowych. Do opisu własności dynamicznych układu zastosowano w pracy metodę schodkowych funkcji przejścia. Omówiono zagadnienie stabilności oraz drgań swobodnych układu. Podano metodę rekurencyjnego wyznaczania przebiegu regulacji. Rozpatrzono zadanie syntezy korekcyjnego elementu liniowego i nieliniowego dla założonego przebiegu regulacji.

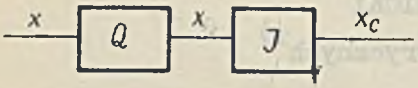
WSTĘP

Układami kwantowo-impulsowymi nazywamy takie układy automatycznej regulacji, w których występuje sygnał o charakterze dyskretnym kwantowany w czasie i w poziomie. Kwantowanie w czasie oznacza próbkowanie sygnału w pewnych zwykle równych odstępach czasowych, tzn. przejście sygnału przez element reagujący na jego wartości jedynie w chwilach $t = nT$, gdzie n jest naturalne, a T oznacza okres próbkowania. Taki rodzaj kwantowania ma miejsce w zwykłych układach impulsowych, w których impulsator wysyła impulsy w momentach $t = nT$, zależne od wartości jakie przybiera w tych momentach ciągły sygnał podawany na jego wejście. Przez kwantowanie w poziomie rozumiemy zaokrąglanie wartości sygnału do wielokrotności pewnej wartości zwanej kwantem. Odpowiedni element nieliniowy, który dokonuje kwantowania w poziomie, nazywać będziemy w dalszym ciągu kwantyzatorem (ang. quantizer).

---

x) Obecnie Kat. Automatyki i Telemechaniki Politechniki Wrocławskiej.

Szeregowy zestaw impulsator-kwantyzator (których kolejność jest w zasadzie dowolna), (rys.1) przekształca zatem sygnał o postaci ciągłej (analogowej) w postać dyskretną (cyfrową) stanowiącą ciąg impulsów o okresie impulsowania T, których wartość jest wielokrotnością pojedynczego kwantu q. Próbkowanie czasowe w liniowym idealnym impulsatorze wysyłającym impulsy bardzo krótkie w porównaniu z okresem impulsowania (impulsy δ Diraca) da się zapisać następująco

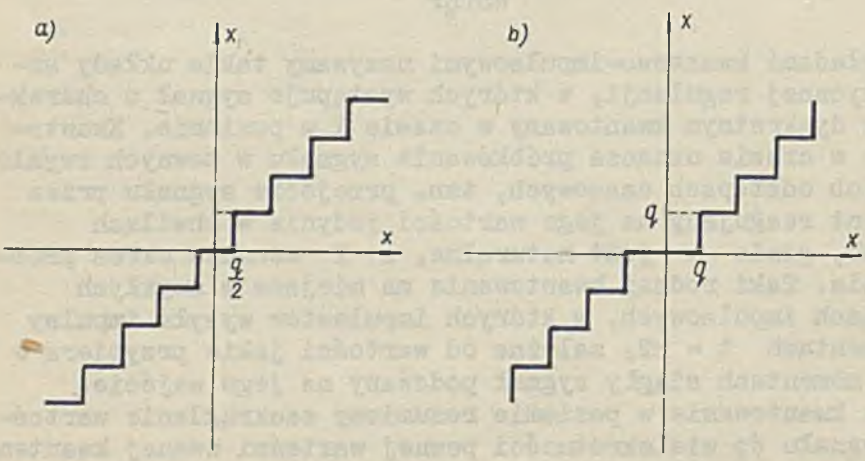


Rys.1. Przekształcenie sygnału ciągłego w sygnał cyfrowy

Q-kwantyzator, J-impulsator

$$x_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_q(kT)\delta(t-kT) \qquad (1)$$

Kwantowanie w poziomie odbywać się może w różny sposób, najczęściej jednak charakterystyki kwantyzatora są takie jak na rysunku 2.



Rys.2. Charakterystyki statyczne kwantyzatorów

Dla charakterystyki a:

$$x_q = Q_a[x] = kq \quad \text{dla} \quad (k-\tfrac{1}{2})q \leqslant x \leqslant (k+\tfrac{1}{2})q; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

Dla charakterystyki b:

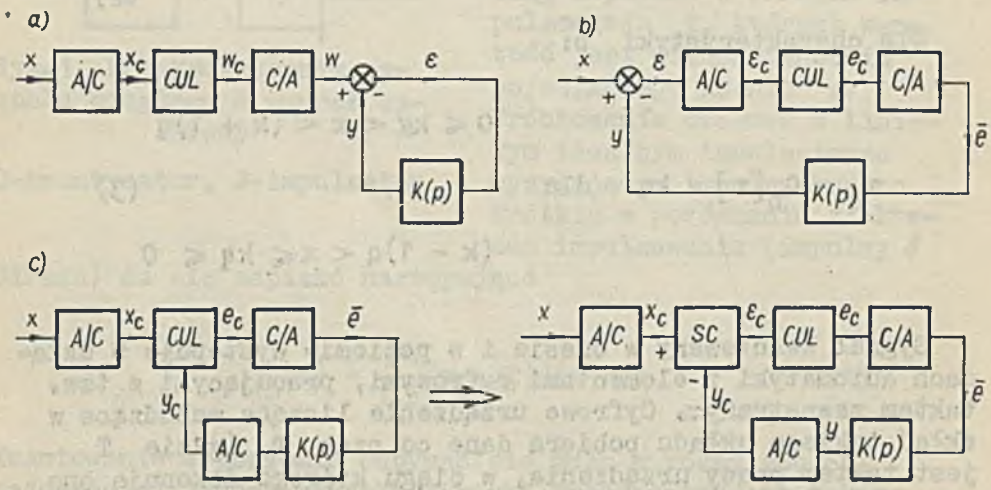
$$x_q = Q_b[x] = kq \quad \text{dla} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant kg < x < (k+1)q \\ (k-1)q < x \leqslant kq \leqslant 0 \end{array} \tag{3}$$

Sygnał kwantowany w czasie i w poziomie występuje w układach automatyki z elementami cyfrowymi, pracującymi z tzw. taktem zewnętrznym. Cyfrowe urządzenie liczące wchodzące w skład takiego układu pobiera dane co czas T (gdzie T jest taktem pracy urządzenia, w ciągu którego dokonuje ono odpowiednich obliczeń), przy czym dane te wchodzą do urządzenia w postaci odpowiednio zarejestrowanych liczb (z reguły w postaci elektrycznej, najczęściej zakodowane w systemie dwójkowym).

Element przekształcający sygnał analogowy w postać cyfrową podawaną następnie na cyfrowe urządzenie liczące nazywamy konwertorem analogowo-cyfrowym. Jest to zatem element dokonujący kwantowania w czasie i w poziomie, który zastąpić możemy szeregowym zestawem kwantyzator-impulsator. Sygnał cyfrowy opuszczający urządzenie liczące zostaje w konwertorze cyfrowo-analogowym przekształcony w postać analogową i w takiej postaci oddziaływuje na ciągły układ dynamiczny. Zasadnicze rodzaje prostych układów automatycznej regulacji z elementami cyfrowymi [2] przedstawione są na rysunku 3.

W układzie typu c sygnały cyfrowe x_c i y_c odejmowane są najczęściej w sumatorze cyfrowym SC, a wynik odejmowania, tj. błąd regulacji w postaci cyfrowej może jeszcze zostać przekształcony przez cyfrowe urządzenie liczące CUL. Zwykle sumator cyfrowy jest w tego typu układach jedynym urządzeniem liczącym, a wynik odejmowania jest wprost podawany na konwertor cyfrowo-analogowy. Cyfrowe urządzenie

liczące o wejściu $x_c = \sum_{n=0}^{\infty} x_q(nT)\delta(t-nT)$ i wyjściu $y_c = \sum_{n=0}^{\infty} y_q(nT)\delta(t-nT)$ traktować można jak element przekształcający sygnały cyfrowe według odpowiedniego programu.



Rys.3. Układy automatycznej regulacji z elementami cyfrowymi A/C-konwertor analogowo-cyfrowy, CUL-cyfrowe urządzenie liczące, C/A-konwertor cyfrowo-analogowy, SC-sumator cyfrowy, K(p)-liniowy człon dynamiczny

Jeśli przekształcenie to jest liniowe, to funkcje schodkowe x_{qn} i y_{qn} związane są liniowym równaniem różnicowym i własności dynamiczne CUL opisać można jego schodkową funkcją przejścia:

$$K_{cr}(p) = \frac{Y_{qr}(p)}{X_{qr}(p)} \tag{4}$$

gdzie $Y_{qr}(p)$ i $X_{qr}(p)$ oznaczają transformaty operatorowe odpowiednich funkcji schodkowych.

Przekształcenie ciągu impulsów w sygnał ciągły może się odbywać wprost w elemencie wykonawczym o funkcji przejścia $\frac{1}{p}$, czyli o schodkowej funkcji przejścia $\frac{e^p}{e^p-1}$ [12], lub też

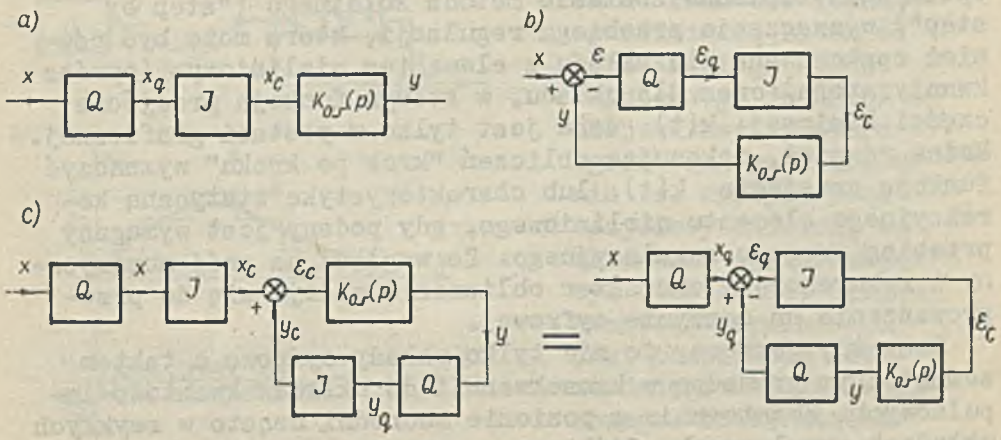
w tzw. ekstrapolatorze. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do ekstrapolatora zerowego rzędu o funkcji przejścia

$$K_e(p) = \frac{1-e^{-P}}{e^{P}} \quad [11].$$

Jeśli przez $x_c = \sum_{n=0}^{\infty} x_q(nT)\delta(t-nT)$ i $\bar{x}$ oznaczymy odpowiednio sygnał wejściowy i wyjściowy tego elementu, to

$$\bar{x} = x_q(nT) \quad \text{dla} \quad nT \leqslant t < (n+1)T.$$

Jak widać funkcje schodkowe $\bar{x}_n$ i x_{qn} są identyczne, a zatem schodkowa funkcja przejścia ekstrapolatora zerowego rzędu $K_{e\mathcal{L}}(p) = 1$. Własności dynamiczne członu $K(p)$ opisuje w układzie impulsowym schodkowa funkcja przejścia tego elementu $K_{\mathcal{L}}(p) \hat{=} k_n$, gdzie k_n jest funkcją schodkową odpowiadającą funkcji przejścia $k(t) \hat{=} K(p)$, czyli $k_n = k(nT)$. W ten sposób układy cyfrowe przedstawione na rysunku 3 sprowadzić można do odpowiednich układów kwantowo-impulsowych (rys.4), w których $K_{o\mathcal{L}}(p)$ oznacza schodkową funkcję przejścia układu otwartego. Dla układu a jest to



Rys.4. Schematy blokowe układów kwantowo-impulsowych

iloczyn schodkowych funkcji przejścia ekstrapolatora oraz zamkniętego układu ciągłego (w tym wypadku elementy cyfrowe nie wchodzą w skład zamkniętego układu), dla układów b i c - iloczyn schodkowych funkcji przejścia urządzenia liczącego, ekstrapolatora i liniowego członu dynamicznego. Kwantyzator Q ma w tych układach charakterystykę taką jak na rysunku 2a. Oba równoważne układy c (rys.4) odpowiadają prawemu układowi z rysunku 3c.

W ten sposób badanie układów cyfrowych z określonym rytmem pracy (a więc z kwantowaniem sygnału w czasie i w poziomie) sprowadzić można do badania układów kwantowo-impulsowych. Analiza układu typu a nie różni się niczym od analizy zwykłego otwartego układu impulsowego, element nieliniowy Q nie wchodzi tu bowiem w skład zamkniętego układu. Obecność nieliniowego kwantyzatora w zamkniętym układzie impulsowym typu b i c utrudnia analizę matematyczną tych układów. Pierwsze prace analizujące układy automatyki z elementami cyfrowymi pomijały efekt kwantowania w poziomie i sprowadzały problem do badania zwykłych układów przerywanych [2, 3, 8, 10, 11]. Pomijanie kwantowania sygnału w poziomie prowadzi do wyników jedynie przybliżonych (przy odpowiednio małej wartości kwantu), a czasem wręcz fałszywych. Ostatnio pojawiło się szereg prac uwzględniających w tego typu układach kwantowanie w poziomie [np. 4, 5, 7]. W niniejszym artykule omówione zostanie zagadnienie stabilności układów kwantowo-impulsowych w oparciu o przedstawiony wyżej opis ich własności dynamicznych za pomocą schodkowych funkcji przejścia oraz zastosowanie metody funkcji opisującej. Opisana zostanie metoda kolejnego ("step by step") wyznaczania przebiegu regulacji, która może być również zastosowana dla układu z elementem nieliniowym (oprócz kwantyzatora) oraz dla układu, w którym funkcja przejścia części liniowej k(t) dana jest tylko w postaci graficznej. Można również, dokonując obliczeń "krok po kroku" wyznaczyć funkcję przejścia k(t) lub charakterystykę statyczną korekcyjnego elementu nieliniowego, gdy podany jest wymagany przebieg procesu regulacyjnego. Ze względu na swój numeryczny i rekurencyjny charakter obliczenia nadają się do przeprowadzenia na maszynie cyfrowej.

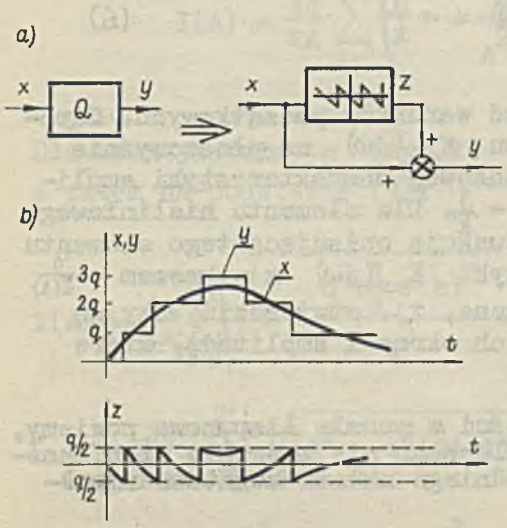
Zauważmy jeszcze, że nie tylko układy cyfrowe z taktem zewnętrznym prowadzą w konsekwencji do układów kwantowo-impulsowych. Kwantowanie w poziomie zachodzi często w zwykłych układach impulsowych. Jeśli np. w układzie impulsowym zastosujemy impulsator z poruszającą się ramką o wycięciu

schodkowym takim jak na rysunku 5, to impulsy wyjściowe impulsatora nie mogą zmieniać swych wartości w sposób ciągły, co prowadzi do konieczności zastąpienia takiego impulsatora kwantyzatorem i impulsatorem idealnym (układ kwantowo-impulsowy z rysunku 4b). Kwantyzator ma w tym wypadku charakterystykę taką jak na rysunku 2b.

Rys.5. Profil ramki impulsatora z wycięciem schodkowym

1. STABILNOŚĆ I DRGANIA SWOBODNE UKŁADU

Zauważmy, że kwantowanie w poziomie sprowadza się do dodania do sygnału kwantowanego x pewnego zakłócenia z, zależnego od x, które spełnia warunek $|z| \leq \frac{q}{2}$. Wyjaśnia to rysunek 6. Układ kwantowo-impulsowy różni się zatem od odpowiedniego układu impulsowego dodaniem w miejscu kwantyzatora ograniczonego zakłócenia z. Wypływa stąd oczywisty wniosek, że warunkiem wystarczającym stabilności układu kwantowo-impulsowego jest stabilność odpowiedniego układu impulsowego. Przez stabilność rozumiemy w tym wypadku niewystępowanie procesów narastających



Rys.6. a) Schemat zastępczy kwantyzatora, b) Przebiegi czasowe sygnałów

przy ograniczonych zaburzeniach działających na układ z zewnątrz, czyli fakt, że przebiegi w układzie wywołane pewnymi warunkami początkowymi są ograniczone[x].

Stabilność układu liniowego nie jest więc równoważna stabilności odpowiedniego układu z kwantyzatorem, bowiem przy stabilnym układzie liniowym w układzie kwantowo-impulsowym istnieć mogą ustalone drgania graniczne, a z drugiej strony przy stabilnych drganiach granicznych w układzie z kwantyzatorem odpowiedni układ liniowy może być niestabilny.

Wygodnie i jasno, choć w sposób przybliżony, zilustrować można zagadnienie stabilności i drgań swobodnych układu kwantowo-impulsowego metodą funkcji opisującej. Jeśli $kK_{o\Gamma}(p)$ oznacza schodkową funkcję przejścia otwartego układu impulsowego, to równanie charakterystyczne układu zamkniętego jest następujące:

$$1 + kK_{o\Gamma}(p) = 0 \qquad (5)$$

i $\mathrm{Re}\,p_k < o$, gdzie p_k są pierwiastkami tego równania - oznacza warunek stabilności. Dla $\mathrm{Re}\,p_k = 0$ w układzie zachodzą drgania ustalone o okresie $N = \frac{2\pi}{\omega}$[xx], gdzie ω spełnia równanie

$$K_{o\Gamma}(j\omega) = -\frac{1}{k} \qquad (6)$$

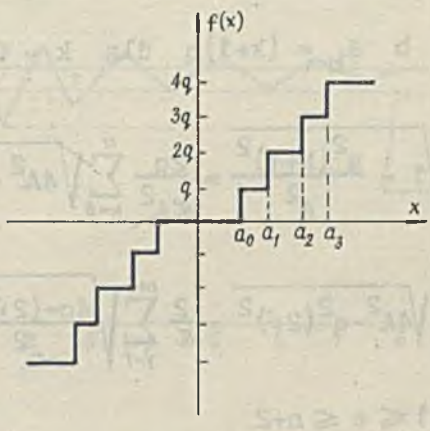
Amplituda tych drgań zależy od warunków początkowych. Odpowiada to przechodzeniu wykresu $K_{o\Gamma}(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (tj. schodkowej charakterystyki amplitudowo-fazowej) przez punkt $-\frac{1}{k}$. Dla elementu nieliniowego wzmocnienie k zastępujemy funkcją opisującą tego elementu $\hat{I}(A)$. Przecięcie charakterystyki $K_{o\Gamma}(j\omega)$ z wykresem $-\frac{1}{\hat{I}(A)}$ pozwala ocenić drgania graniczne, tj. stwierdzić, czy są one stabilne oraz wyznaczyć ich okres i amplitudę, które

---

x) Używając pojęcia stabilności w sensie Liapunowa powiemy, że stabilność układu impulsowego nie zapewnia stabilności asymptotycznej odpowiedniego układu kwantowo-impulsowego.

xx) N podaje ile razy okres drgań jest większy od okresu impulsowania.

zależą od parametrów układu (a przy większej ilości stabilnych cyklów granicznych również od warunków początkowych).



Rys.7. Schodkowa charakterystyka statyczna elementu nieliniowego

Dla elementu o charakterystyce schodkowej (rys.7) funkcja opisująca jest następująca [9]:

$$I(A) = \frac{4q}{\pi A}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\frac{a_k^2}{A^2}} \quad \text{dla} \quad a_n \leqslant A \leqslant a_{n+1} \qquad (7)$$

Dla kwantyzatora a (rys.2) $a_k = \frac{q}{2} + kq$ dla $k = 0,1,...$ a zatem na podstawie (7):

$$I(A) = \frac{4q}{\pi A}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\frac{q^2(\frac{1}{2}+k)^2}{A^2}} = \frac{2q}{\pi A^2}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{4A^2-q^2(1+2k)^2} =$$

$$= \frac{2q}{\pi A^2}\sum_{\gamma=1}^{n+1}\sqrt{4A^2-q^2(2\gamma-1)^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{\gamma=1}^{n+1}\sqrt{\frac{4c-(2\gamma-1)^2}{c^2}}$$

$$\text{dla} \quad n+\frac{1}{2} \leqslant c \leqslant n+\frac{3}{2} \qquad (8)$$

gdzie

$$c = \left(\frac{A}{q}\right)^2 \quad \text{(por. [6])}.$$

Dla kwantyzatora b $a_k = (k+1)q$ dla $k = 0,1,2,\ldots$, zatem

$$I(A) = \frac{4q}{\pi A}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\frac{q^2(k+1)^2}{A^2}} = \frac{2q}{\pi A^2}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{4A^2-q^2(2+2k)^2} =$$

$$= \frac{2q}{\pi A^2}\sum_{\nu=1}^{n+1}\sqrt{4A^2-q^2(2\nu)^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n+1}\sqrt{\frac{4c-(2\nu)^2}{c^2}}$$

$$\text{dla} \quad n+1 \leqslant c \leqslant n+2 \tag{9}$$

gdzie

$$c = \left(\frac{A}{q}\right)^2.$$

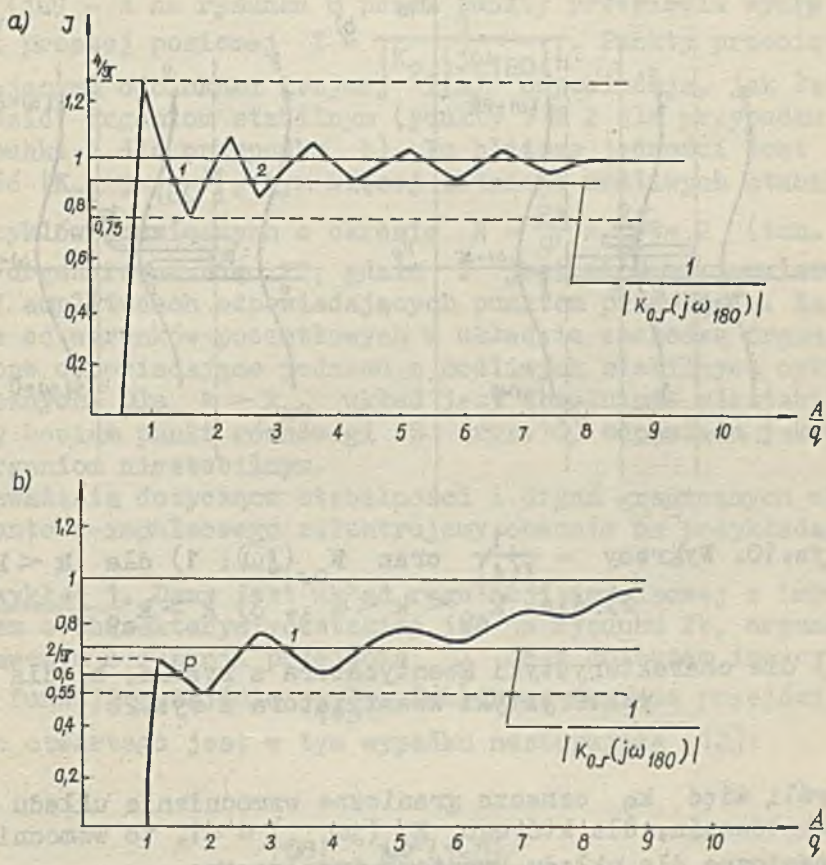
Z wykresów funkcji opisujących dla obu charakterystyk (rys.8) widać, że przy odpowiednio dużym stosunku $\frac{A}{q}$ układ traktować można jak liniowy, tzn. zaniedbać efekt kwantowania w poziomie, wówczas bowiem $I(A) \approx 1$. Dla małych wartości $\frac{A}{q}$ przebieg $I(A)$ znacznie różni się od jedności i występują wówczas zjawiska specyficzne dla układów kwantowo-impulsowych. Dla charakterystyki kwantyzatora typu b jest stale $I(A) < 1$, co staje się jasne, jeśli zauważymy, że w tym wypadku wielkość wyjściowa kwantyzatora nigdy nie przekracza wielkości wejściowej, a zatem amplituda pierwszej harmonicznej przebiegu wyjściowego jest zawsze mniejsza od amplitudy sinusoidalnego sygnału wejściowego (rys.9).

Z wykresów $-\frac{1}{I(A)}$ oraz $K_{os}(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (rys.10) widać, że w przypadku a układ jest absolutnie stabilny, gdy

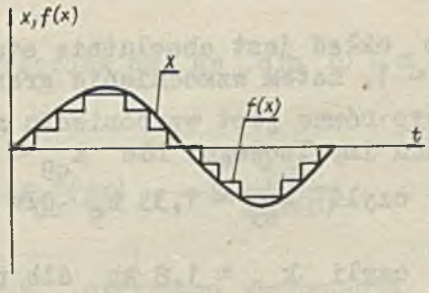
$$K_{o\Gamma}(j\omega_{180}) > -\frac{\pi}{4},$$

gdzie

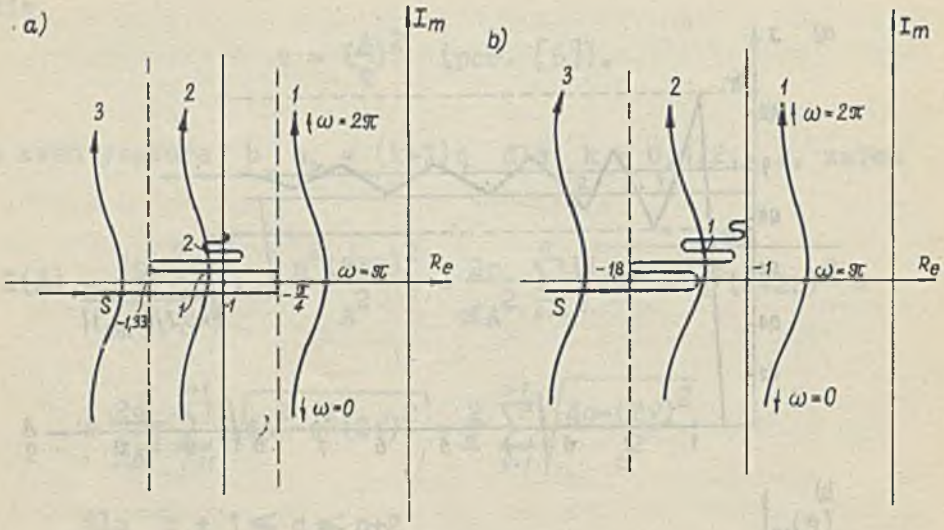
$$\arg K_{o\Gamma}(j\omega_{180}) = 180^\circ.$$



Rys.8. Wykresy $I = f(\frac{A}{q})$ a) wg wzoru (8), b) wg wzoru (9)



Rys.9. Kwantowanie sinusoidy w kwantyzatorze typu b



Rys.10. Wykresy $-\frac{1}{I(A)}$ oraz $K_{o\Gamma}(j\omega)$: 1) dla $k < k_{q9}$, 2) dla $k_{q9} < k < k_{s9}$, 3) $k > k_{s9}$

a) dla charakterystyki kwantyzatora z rys.2a, b) dla charakterystyki kwantyzatora z rys.2b

Jeśli więc k_9 oznacza graniczne wzmocnienie układu bez kwantowania, dla którego $K_{o\Gamma}(j\omega_{180}) = -1$, to wzmocnienie graniczne dla układu kwantowo-impulsowego

$$k_{q9} = \frac{\pi}{4} k_9 \approx 0{,}79\, k_9, \text{ czyli } k_9 = \frac{4}{\pi} k_{q9} \approx 1{,}3\, k_{q9}. \quad (10)$$

W przypadku b układ jest absolutnie stabilny, gdy $K_{o\Gamma}(j\omega_{180}) > -1$, zatem wzmocnienie graniczne układu kwantowo-impulsowego równe jest wzmocnieniu granicznemu odpowiedniego układu impulsowego. Dla $k_{q9} < k < k_{s9}$ (gdzie $\frac{1}{k_{s9}} \approx 0{,}75 \frac{1}{k_9}$ czyli $k_{s9} \approx 1{,}33\, k_9$ dla przypadku a oraz $\frac{1}{k_{s9}} \approx 0{,}55 \frac{1}{k_9}$ czyli $k_{s9} \approx 1{,}8$ kg dla przypadku b - por. rysunki 8 i 10) w układzie zachodzą drgania graniczne wyznaczone przez punkty przecięcia charakterystyk $-\frac{1}{I(A)}$

i $K_{0\Gamma}(j\omega)$ - a na rysunku 8 przez punkty przecięcia wykresu $I(A)$ i prostej poziomej $I = \frac{1}{|K_{0\Gamma}(j\omega_{180})|}$. Punkty przecięcia z malejącymi odcinkami krzywej $I(A)$ odpowiadają, jak łatwo sprawdzić, drganiom stabilnym (punkty 1 i 2 dla przypadku a oraz punkt 1 dla przypadku b). Im bliższa jedności jest wartość $|K_{0\Gamma}(j\omega_{180})|$, tym więcej istnieje możliwych stabilnych cyklów granicznych o okresie $N = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ (tzn. okres drgań równa się $2T$, gdzie T jest okresem impulsowania) i amplitudach odpowiadających punktom przecięcia. Zależnie od warunków początkowych w układzie zachodzą drgania ustalone odpowiadające jednemu z możliwych stabilnych cyklów granicznych. Dla $k > k_{s9}$ układ jest absolutnie niestabilny, jedyny bowiem punkt równowagi S (rys. 10) odpowiada jak widać drganiom niestabilnym.

Rozważania dotyczące stabilności i drgań granicznych układu kwantowo-impulsowego zilustrujemy obecnie na przykładach.

Przykład 1. Dany jest układ regulacji impulsowej z impulsatorem o charakterystyce takiej jak na rysunku 2b, organem wykonawczym o funkcji przejścia $\frac{1}{p}$ oraz obiektem inercyjnym o funkcji przejścia $\frac{k}{1+p\tau}$. Schodkowa funkcja przejścia układu otwartego jest w tym wypadku następująca [12]:

$$K_{0\Gamma}(p) = \frac{ke^{p}(1-D)}{(e^{p}-1)(e^{p}-D)} \tag{11}$$

gdzie

$$D = e^{-\frac{T}{\tau}}.$$

Wykres $K_{0\Gamma}(j\omega)$ przecina oś Re dla $\omega = \pi$ i wówczas

$$K_{0\Gamma}(j\pi) = -k\frac{1-D}{2(1+D)} \tag{12}$$

Wzmocnienie $k_{q9} = k_9$ otrzymamy z równania

$$k\frac{1-D}{2(1+D)} = 1$$

skąd

$$k_{q9} = 2\,\frac{1+D}{1-D} = 2 \text{ ctg h } \frac{T}{2\tau} \qquad (13)$$

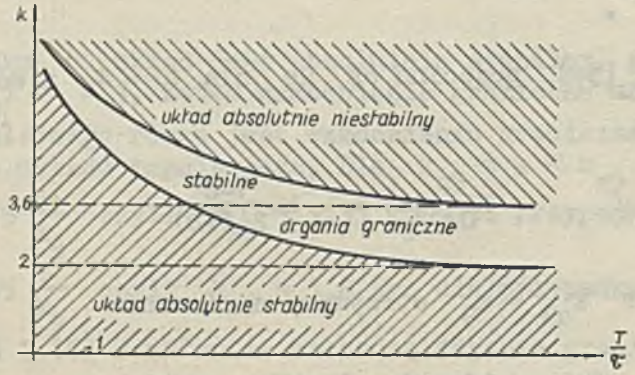
oraz

$$k_{s9} = \frac{1}{0{,}55}\,k_{q9} = 1{,}8\,k_{q9} = 3{,}6 \text{ ctg h } \frac{T}{2\tau} \qquad (14)$$

Dla $k < 2 \text{ ctg h } \frac{T}{2\tau}$ układ jest zatem absolutnie stabilny; dla $2 \text{ ctg h } \frac{T}{2\tau} < k < 3{,}6 \text{ ctg h } \frac{T}{2\tau}$ w układzie występują stabilne drgania graniczne; dla $k > 3{,}6 \text{ ctg h } \frac{T}{2\tau}$ układ jest absolutnie niestabilny (procesy narastające). Ilustruje to rysunek 11. Np. dla $D = \frac{1}{2}$ $(T \quad 0{,}7\tau)$ $k_{q9} = 6$, $k_{s9} = 10{,}8$. Jeśli $k = 10$, to

$$\frac{1}{|K_{0\Gamma}(j\pi)|} = \frac{2(1+D)}{k(1-D)} = 0{,}6$$

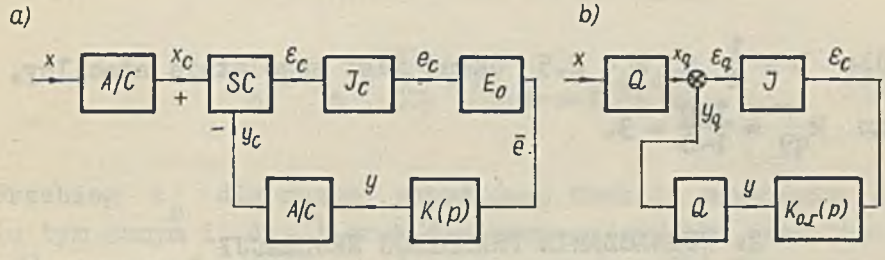
i w układzie zachodzą drgania graniczne o okresie równym 2T i amplitudzie ok. 1,7q (rys.8b punkt P). Pomijając efekt kwantowania w poziomie wysnulibyśmy fałszywy wniosek, że układ jest wówczas niestabilny (tzn. przy skokowym zaburzeniu błąd wzrasta do nieskończoności).



Rys.11. Obszary stabilności dla rozpatrywanego przykładu

Przykład 2. Dany jest układ cyfrowy o schemacie blokowym przedstawionym na rysunku 12, w którym konwertory A/C pracują z parametrami T i q. I_c oznacza integrator cyfrowy całkujący metodą trapezów [1] o schodkowej funkcji przejścia

$$K_{c\Gamma}(p) = \frac{e^p}{e^p-1},$$



Rys. 12. a) Schemat blokowy rozpatrywanego układu cyfrowego, b) Odpowiedni układ kwantowo-impulsowy

E_0 jest ekstrapolatorem zerowego rzędu o funkcji przejścia

$$K_{e\Gamma}(p) = 1,$$

zaś obiekt jest inercyjny o funkcji przejścia

$$K(p) = \frac{k}{1+p\tau}, \quad \text{czyli} \quad K_\Gamma(p) = k\,\frac{1-D}{e^p-D}.$$

Funkcja przejścia układu otwartego

$$K_{o\Gamma}(p) = \frac{ke^p(1-D)}{(e^p-1)(e^p-D)}$$

jest taka sama jak w poprzednio rozpatrywanym przykładzie, natomiast charakterystyka kwantyzatora jest w tym wypadku taka, jak na rysunku 2a.

Zatem na podstawie (10) i (13)

$$k_{q9} = \frac{\pi}{4} k_9 = \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} h \frac{T}{2\tau} \approx 1{,}57 \operatorname{ctg} h \frac{T}{2\tau}$$

$$k_{s9} = \frac{1}{0{,}75} k_9 \approx 1{,}66 \operatorname{ctg} h \frac{T}{2\tau}.$$

Np. dla $D = \frac{1}{2}$ i $k = 2{,}5$ układ jest absolutnie stabilny, bowiem $k_{q9} = \frac{1+D}{1-D} = 3$.

2. WYZNACZANIE PRZEBIEGU REGULACJI

Dla wyznaczenia przebiegów nieustalonych w zamkniętych układach kwantowo-impulsowych, zawierających wewnątrz układu nieliniowy element Q (rys.4b i c) wypiszmy równania określające statykę i dynamikę takiego układu. Dla układu z rysunku 4b równania te są następujące:

$$\varepsilon_n = x_n - y_n \tag{15}$$

$$\varepsilon_{qn} = Q\left[\varepsilon_n\right] \tag{16}$$

$$Y_\sigma(p) = K_{o\sigma}(p) E_{q\sigma}(p) \quad \text{czyli} \quad y_n = \sum_{m=0}^{n} \Delta K_{o,n-m-1} \cdot \varepsilon_{qm} \tag{17}$$

gdzie

$$k_{on} \mathrel{\hat{=}} K_{o\sigma}(p)^{x)}$$

x) Wynika to z twierdzenia o splocie dla funkcji schodkowych: Jeśli $f_n \mathrel{\hat{=}} F_\sigma(p)$ i $\varphi_n \mathrel{\hat{=}} \Phi_\sigma(p)$, to $\sum_{m=0}^{n} f_m \varphi_{n-m} \mathrel{\hat{=}} \frac{F_\sigma(p) - F_\sigma(p)}{1-e^{-p}}$, czyli $\Phi_\sigma(p) - \Phi_\sigma(p) \mathrel{\hat{=}} \sum_{m=0}^{n} \Delta\varphi_{n-m-1} \cdot f_m (\varphi_o = 0)$.

Przy założeniu $k_n = o$ dla $n \leqslant o$ trzecie równanie przybierze postać

$$y_n = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta k_{o,n-m-1} \circ \varepsilon_{qm} \circ \tag{18}$$

Wstawiając (18) i (16) do równania (15), otrzymujemy

$$\varepsilon_n = x_n - \sum_{m=0}^{n-1} \Delta k_{o,n-m-1} \circ Q\left[\varepsilon_m\right] \tag{19}$$

Przebieg ε_n dla znanej schodkowej funkcji przejścia k_{on} (a tym samym i Δk_{on}) oraz dla pewnego sygnału sterującego x_n x) wyznaczać można na podstawie związku (19) "krok po kroku":

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_o &= x_o \\
\varepsilon_1 &= x_1 - \Delta k_{o,o} \circ Q\left[\varepsilon_o\right] \\
\varepsilon_2 &= x_2 - \Delta k_{o,1} \circ Q\left[\varepsilon_o\right] - \Delta k_{o,o} \circ Q\left[\varepsilon_1\right] \\
\varepsilon_3 &= x_3 - \Delta k_{o,2} \circ Q\left[\varepsilon_o\right] - \Delta k_{o,1} \circ Q\left[\varepsilon_1\right] - \Delta k_{o,o} \circ Q\left[\varepsilon_2\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n &= x_n - \Delta k_{o,n-1} \circ Q\left[\varepsilon_o\right] - \Delta k_{o,n-2} \circ Q\left[\varepsilon_1\right] - \ldots - \Delta k_{o,1} \circ Q\left[\varepsilon_{n-2}\right] - \\
&\quad - \Delta k_{o,o} \circ Q\left[\varepsilon_{n-1}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

x) Zakładamy, że dla $n < 0$ $x_n = y_n = 0$

Podobnie dla układu z rysunku 4c

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{qn} &= x_{qn} - y_{qn} \\ x_{qn} &= Q[x_n] \\ y_{qn} &= Q[y_n] \\ y_n &= \sum_{m=0}^{n-1} \Delta k_{o,n-m-1} \cdot \varepsilon_{qm} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

skąd otrzymujemy

$$y_n = \sum_{m=0}^{n-1} \Delta k_{o,n-m-1} \cdot (Q[x_m] - Q[y_m]) \tag{22}$$

Przebieg y_n wyznaczamy "krok po kroku" na podstawie związku (22):

$$y_o = 0$$

$$y_1 = \Delta k_{o,o}(Q[x_o]-Q[y_o])$$

$$y_2 = \Delta k_{o,1}(Q[x_o]-Q[y_o])+\Delta k_{o,o}(Q[x_1]-Q[y_1])$$

$$y_3 = \Delta k_{o,2}(Q[x_o]-Q[y_o])+\Delta k_{o,1}(Q[x_1]-Q[y_1])+\Delta k_{o,o}(Q[x_2]-Q[y_2])$$

.....

$$y_n = \Delta k_{o,n-1}(Q[x_o]-Q[y_o])+\Delta k_{o,n-2}(Q[x_1]-Q[y_1])+\ldots+$$
$$+ \Delta k_{o,o}(Q[x_{n-1}]-Q[y_{n-1}]) \tag{23}$$

Znając y_n wyznaczamy ε_n korzystając ze związku

$$\varepsilon_n = x_n - y_n \tag{24}$$

Obliczenia upraszczają się nieco jeśli układ nie zawiera cyfrowego urządzenia liczącego CUL (tzn. elementami cyfrowymi w układzie są tylko, jak to najczęściej bywa, konwertory oraz sumator cyfrowy). Wówczas, jak łatwo sprawdzić $\Delta k_{o,n-1} = k'_n$, gdzie $k'(t)$ oznacza impulsową funkcję przejścia liniowego członu dynamicznego (wraz z konwertorem cyfrowo-analogowym), na który podawane są impulsy z sumatora cyfrowego. W tym wypadku zatem

$$y_n = \sum_{m=0}^{n-1} k'_{n-m} \cdot \varepsilon_{qm} \tag{25}$$

Dla układu z rysunku 4b

$$\varepsilon_n = x_n - \sum_{m=0}^{n-1} k'_{n-m} \cdot Q[\varepsilon_m]$$

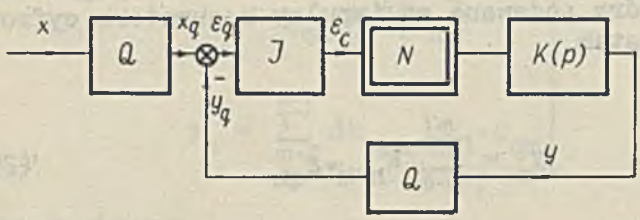
a stąd

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_o &= x_o \\
\varepsilon_1 &= x_1 - k'_1 Q[\varepsilon_o] \\
\varepsilon_2 &= x_2 - k'_2 Q[\varepsilon_o] - k'_1 Q[\varepsilon_1] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n &= x_n - k'_n Q[\varepsilon_o] - k'_{n-1} Q[\varepsilon_1] - \ldots - k'_1 Q[\varepsilon_{n-1}]
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

i podobnie dla układu z rysunku 4c

$$\begin{aligned}
y_o &= 0 \\
y_1 &= k'_1(Q[x_o]-Q[y_o]) \\
y_2 &= k'_2(Q[x_o]-Q[y_o])+k'_1(Q[x_1]-Q[y_1]) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= k'_n(Q[x_o]-Q[y_o]) + k'_{n-1}(Q[x_1]-Q[y_1]) + \ldots + k'_1(Q[x_{n-1}]-Q[y_{n-1}])
\end{aligned} \tag{27}$$

Dla kolejnego wyznaczania przebiegu regulacji w układzie, wywołanego działaniem sygnału sterującego x_n konieczna jest zatem znajomość przebiegu impulsowej funkcji przejścia $k'(t)$ liniowej części dynamicznej, a właściwie wystarczy jedynie znajomość tej funkcji w punktach $t = nT$; przebieg



Rys. 13. Schemat blokowy układu kwantowo-impulsowego z elementem nieliniowym N

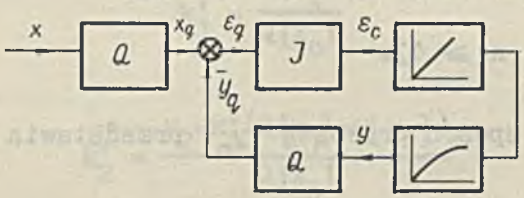
funkcji przejścia może być więc dany tylko graficznie w postaci wykresu $k'(t)$ otrzymanego na rejestratorze. Zauważmy też, że metodę kolejnego wyznaczania przebiegu regulacji stosować można również w wypadku, gdy układ zawiera element nieliniowy (oprócz kwantyzatora - rys. 13). Jeśli charakterystyka elementu nieliniowego jest $\varepsilon_c = f(\varepsilon_q)$, to przebieg y_n wyznaczamy następująco:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= 0\\
y_1 &= k'_1 \circ f(Q[x_0]-Q[y_0])\\
y_2 &= k'_2 \circ f(Q[x_0]-Q[y_0])+k'_1 \circ f(Q[x_1]-Q[y_1])\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= k'_n \circ f(Q[x_0]-Q[y_0])+k'_{n-1} \circ f(Q[x_1]-Q[y_1])+\ldots+\\
&\quad + k'_1 \circ f(Q[x_{n-1}]-Q[y_{n-1}])
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Rozważania dla układu z rysunku 4b, zawierającego element nieliniowy są analogiczne.

Obliczmy dla przykładu przebieg y_n w układzie kwantowo-impulsowym z całkującym organem wykonawczym o funkcji przejścia $\frac{1}{p}$ i obiektem inercyjnym o funkcji przejścia $\frac{1}{1+p\tau}$

(rys.14), wywołany skokową zmianą sygnału sterującego $x(t) = X1(t)$, gdzie $x = 10{,}3q$. W tym wypadku impulsowa funkcja przejścia liniowego członu dynamicznego równa jest funkcji przejścia obiektu, czyli $k'(t) = 1-e^{-\frac{t}{\tau}}$. Niech $q = 1$, $\tau = T$.



Rys.14. Schemat blokowy rozpatrywanego układu kwantowo-impulsowego

Dla kolejnego wyznaczania y_n według algorytmu (27) korzystać będziemy z danych: $k'_0 = k'(0) = 0$; $k'_1 = k'(T) = 0{,}63$; $k'_2 = k'(2T) = 0{,}86$; $k'_3 = k'(3T) = 0{,}95$; $k'_n = k'(nT) \approx 1$ dla $n > 3$; $Q[x_n] = 10$. Na podstawie (27) otrzymujemy zatem

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 0{,}63 \cdot 10 = 6{,}3$$

$$y_2 = 0{,}86 \cdot 10 + 0{,}63(10-6) = 11{,}1$$

$$y_3 = 0{,}95 \cdot 10 + 0{,}86 \cdot 4 + 0{,}63(10-11) = 12{,}3$$

$$y_4 = 1 \cdot 10 + 0{,}95 \cdot 4 - 0{,}86 + 0{,}63(10-12) = 11$$

$$y_5 = 10 + 4 - 0{,}95 - 2 \cdot 0{,}86 + 0{,}63(10-11) = 10{,}7$$

$$y_6 = 10 + 4 - 1 - 2 \cdot 0{,}95 - 0{,}86 + 0{,}63(10-11) = 9{,}6$$

$$y_7 = 10 + 4 - 1 - 2 - 0{,}95 - 0{,}86 + 0{,}63(10-10) = 9{,}2$$

$$y_8 = 10 + 4 - 1 - 2 - 1 - 0{,}95 - 0{,}86 \cdot 0 + 0{,}63(10-9) = 9{,}68$$

$$y_9 = 10 + 4 - 1 - 2 - 1 + 0{,}86 + 0{,}63(10-10) = 10{,}86$$

$$y_{10} = 10 + 4 - 1 - 2 - 1 + 0{,}95 + 0{,}63(10-11) = 10{,}32$$

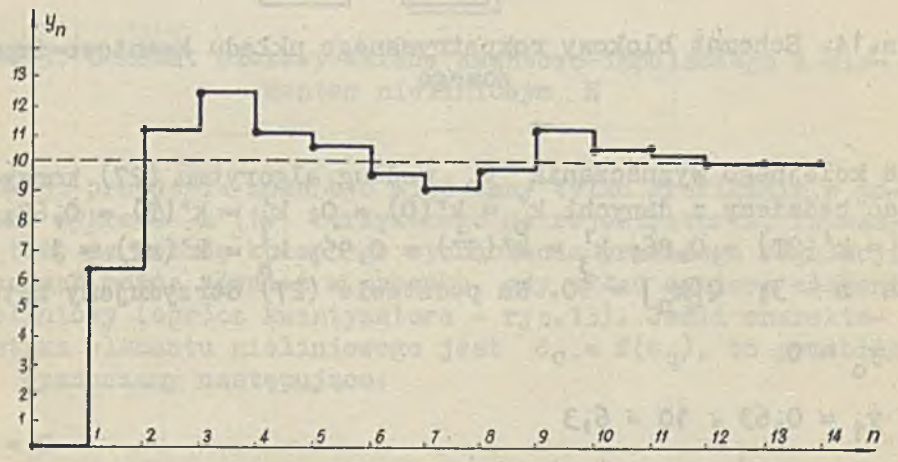
$$y_{11} = 10 + 4 - 1 - 2 - 1 + 1 - 0{,}86 + 0{,}63(10-10) = 10{,}14$$

$$y_{12} = 10 + 4 - 1 - 2 - 1 + 1 - 0{,}95 = 10{,}05$$

$$y_{13} = 10 + 4 - 1 - 2 - 1 + 1 - 1 = 10$$

$$y_n = 10 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 13.$$

Otrzymany w ten sposób przebieg y_n przedstawia rysunek 15.



Rys.15. Przebieg regulacji w rozpatrywanym układzie

3. SYNTEZA ELEMENTU LINIOWEGO I NIELINIOWEGO

Metodę obliczeń "krok po kroku" wykorzystać można do rozwiązania zadania odwrotnego do rozpatrzonego wyżej zadania analizy. Zadanie syntezy przedstawimy następująco: dany jest wymagany przebieg procesu regulacyjnego, należy znaleźć funkcję przejścia $k(t)$ układu realizującego ten przebieg. Będzie to synteza elementu liniowego o funkcji przejścia $k(t)$. Zwykle pewne elementy członu liniowego są narzucone (obiekt, organ wykonawczy) i wówczas rozwiązanie zadania syntezy pozwala dobrać dodatkowy liniowy element korekcyjny tak, by funkcja przejścia liniowej części ciągłej była $k(t)$. Synteza korekcyjnego elementu nieliniowego polegać będzie

na znalezieniu charakterystyki statycznej elementu nieliniowego (rys.13) dla danej funkcji przejścia członu liniowego k(t) i danego przebiegu regulacyjnego.

Na przykład dla układu z rysunku 4c otrzymamy na podstawie (27)

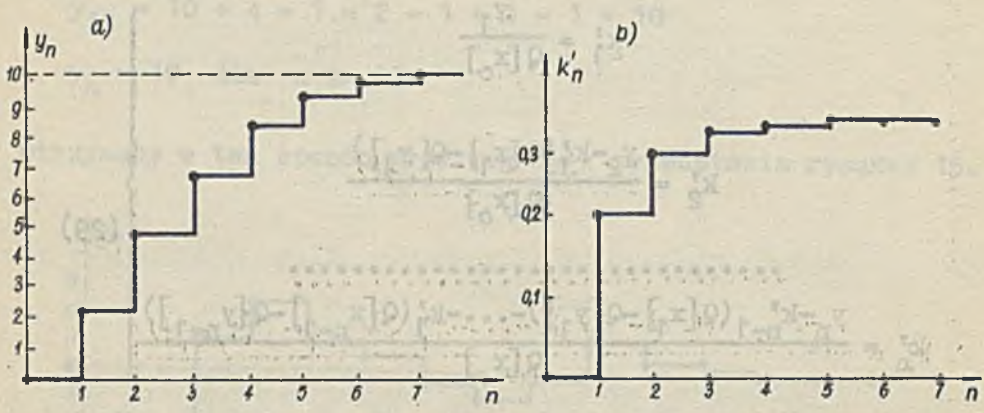
$$\left.\begin{aligned} k_1' &= \frac{y_1}{Q[x_o]} \\ k_2' &= \frac{y_2 - k_1'(Q[x_1] - Q[y_1])}{Q[x_o]} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_n' &= \frac{y_n - k_{n-1}'(Q[x_1] - Q[y_1]) - \ldots - k_1'(Q[x_{n-1}] - Q[y_{n-1}])}{Q[x_o]} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

W ten sposób znając x_n i y_n możemy kolejno wyznaczać wartości k_n' i otrzymany przebieg aproksymować pewnym łatwym do zrealizowania fizykalnego wyrażeniem analitycznym. Należy zauważyć, że nie zawsze dla dowolnie wybranego przebiegu regulacji otrzymać można realizowalny przebieg funkcji przejścia.

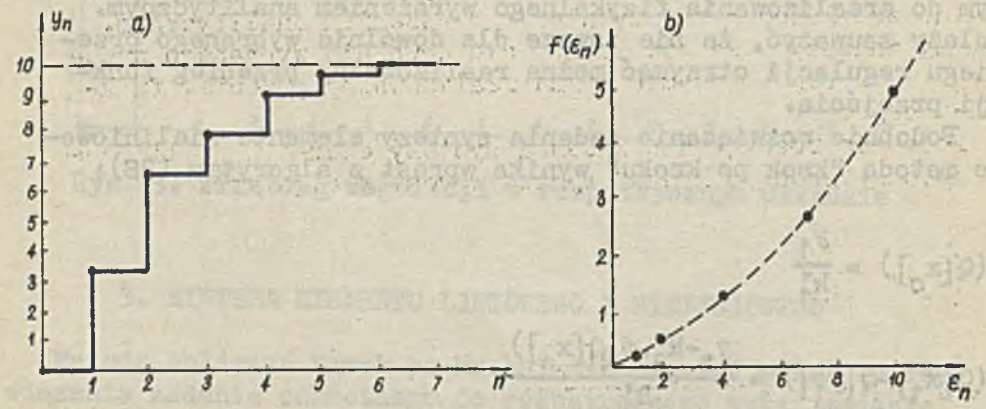
Podobnie rozwiązanie zadania syntezy elementu nieliniowego metodą "krok po kroku" wynika wprost z algorytmu (28):

$$\begin{aligned} f(Q[x_o]) &= \frac{y_1}{k_1'} \\ f(Q[x_1] - Q[y_1]) &= \frac{y_2 - k_2' \cdot f(Q[x_o])}{k_1'} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(Q[x_{n-1}] - Q[y_{n-1}]) &= \frac{y_n - k_n' \cdot f(Q[x_o]) - \ldots - k_2' \cdot f(Q[x_{n-2}] - Q[y_{n-2}])}{k_1'} \end{aligned} \quad (30)$$

Jak widać, zadane przebiegi x_n, y_n oraz k'_n wyznaczają charakterystykę statyczną elementu nieliniowego w punktach: $Q[x_0]$, $Q[x_1]-Q[y_1]$, $Q[x_2]-Q[y_2]$,...,$Q[x_n]-Q[y_n]$,... Przebieg charakterystyki pomiędzy tymi punktami może być dowolny.



Rys.16. a) Założony przebieg regulacji, b) Wyznaczony przebieg funkcji przejścia



Rys.17. a) Założony przebieg regulacji, b) Wyznaczona charakterystyka elementu nieliniowego

Jeśli dla przykładu w rozpatrywanym poprzednio układzie z rys.14 założymy przebieg regulacji y_n aperiodyczny (rys.16a), to przebieg funkcji przejścia k'_n będzie taki jak na rys.16b. Łatwo sprawdzić, że jest to w przybliżeniu

funkcja $k'_n = \frac{1}{3}(1-e^{-n})$, tzn. dla otrzymania założonego przebiegu wystarczy jedynie zmniejszyć wzmocnienie z wartości 1, dla której otrzymano przebieg przedstawiony na rys.15, do wartości $\frac{1}{3}$. Jeśli chcemy uzyskać szybszy przebieg regulacji (rys.17a), to dla funkcji $k'_n = 1-e^{-n}$ korzystając z (29) wyznaczyć możemy przebieg charakterystyki elementu nieliniowego N, który jest taki jak na rys.17b.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 10.X.1961 r.

LITERATURA

[1] J.Z.Cypkin - Tieoria impulsnych sistiem. Fizmatgiz, Moskwa 1958.

[2] J.Z.Cypkin - O sistiemach awtomaticzeskowo riegulirowanija sodierżaszczich cyfrowyje wyczislitielnyje ustrojstwa. Awtomatika i Telemiechanika, t.17, nr 8, 1956.

[3] J.Z.Cypkin - Diskretnyje awtomaticzeskije sistiemy, problemy tieorii i pierspiektiwy razwitja. Tieoria i primienienije diskretnych awtomaticzeskich sistiem. Izd. An SSSR, Moskwa 1960.

[4] J.Z.Cypkin - Oceńka wlijanija kwantowanija po urowniu na processy w cifrowych awtomaticzeskich sistiemach. Awtomatika i Telemiechanika t.21, nr 3, 1960.

[5] J.Z.Cypkin - Elementy tieorii cifrowych awtomaticzeskich sistiem. Pierwyj mieżdunarodnyj kongress IFAC, Ref. nr I.10, Moskwa 1960.

[6] R.L.Hovious - Jitter in instrument servos. Trans. AIEE, v.73 part.2, 1954.

[7] K.Kurman - Metoda analizy procesów dynamicznych w kwantowo-impulsowych układach automatycznej regulacji. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t.VI, Z.1, 1961.

[8] W.K.Linvill, J.M.Salzer - Analysis of control systems involving digital computers. Proc. IRE, vol 41, Nr 7, 1953.

[9] E.P.Popow, J.P.Paltow - Priblizennyje mietody isledowanija nielinijnych awtomaticzeskich sistiem. Fizmatgiz, Moskwa 1960.

[10] J.M.Salzer - Frequency analysis of digital computers, operating in real time. Proc. IRE, vol.42 nr 2, 1954.

[11] J.Tou - Digital and sampled-data control systems. Mc Graw-Hill 1959.

[12] S.Węgrzyn - (red.) Podstawy automatyki, PWN Warszawa 1960.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА КВАНТОВО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Содержание

В статье разсматривается некоторые вопросы цифровых систем и обыкновенных импульсных систем с квантованием по уровню.

К анализу и синтезу таких систем применяется ступенчатые передаточные функции и метод гармонической линеаризации.

SOME PROBLEMS OF ANALYSIS AND SYNTHESIS OF SAMPLED-DATA AND QUANTIZED CONTROL SYSTEMS

Summary

Some problems of digital and ordinary sampled-data control systems with amplitude-quantized signal are presented in the paper.

Step transfer functions and describing function method are used for the analysis and the synthesis of such systems.