

ZDZISŁAW POGODA

Katedra Teorii Regulacji

STABILNOŚĆ UKŁADÓW REGULACJI AUTOMATYCZNEJ  
Z WIELOMA ELEMENTAMI NIELINIOWYMI

Streszczenie. Praca stanowi próbę rozszerzenia metody funkcji opisującej na układy automatycznej regulacji z wieloma elementami nieliniowymi. Autor podaje ogólne zasady metody i przykłady jej praktycznego zastosowania.

1. Algebra funkcji opisujących

Niech będą dwa elementy nieliniowe o funkcjach opisujących odpowiednio  $J_1(A_1)$  i  $J_2(A_2)$ , gdzie  $A_1$  i  $A_2$  amplitudy sygnałów harmonicznnych działających odpowiednio na wejściu elementu pierwszego i drugiego.

1.1. Połączenie równoległe (rys.1)

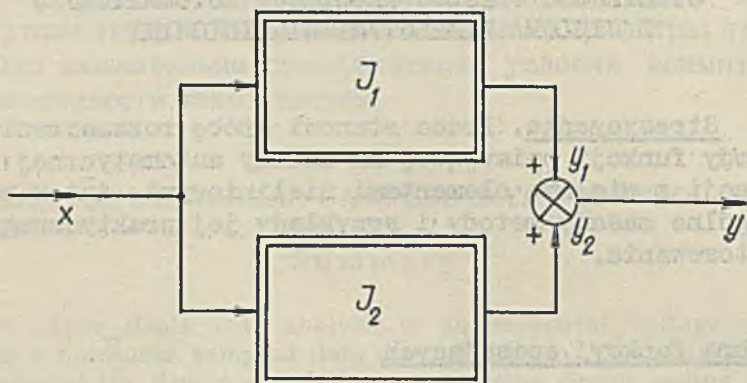
W tym przypadku na wejściach obydwu elementów nieliniowych działają te same sygnały, wobec czego funkcje opisujące tych elementów są funkcjami tych samych argumentów (amplitud):  $A_1 = A_2 = A$ . Z definicji funkcji opisującej wynikają następujące relacje dla pierwszej harmonicznnej sygnałów wyjściowych, wziętych w postaci symbolicznej:

$$\hat{Y}_1 = J_1(A) \hat{X}_1,$$

$$\hat{Y}_2 = J_2(A) \hat{X}_1.$$

Jak wynika z rys.1, sygnał wyjściowy  $Y$  jest równy sumie sygnałów wyjściowych z poszczególnych elementów  $Y_1$  i  $Y_2$ :

$$\hat{Y} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 = [J_1(A) + J_2(A)]\hat{X}_1 \quad (1)$$



Rys.1. Połączenie równoległe dwóch elementów nieliniowych

Z równania tego wynika, że układ dwóch elementów nieliniowych, połączonych równoległe, zachowuje się jak jeden element nieliniowy o funkcji opisującej równej sumie funkcji opisujących elementy składowych

$$J(A) = J_1(A) + J_2(A) \quad (2)$$

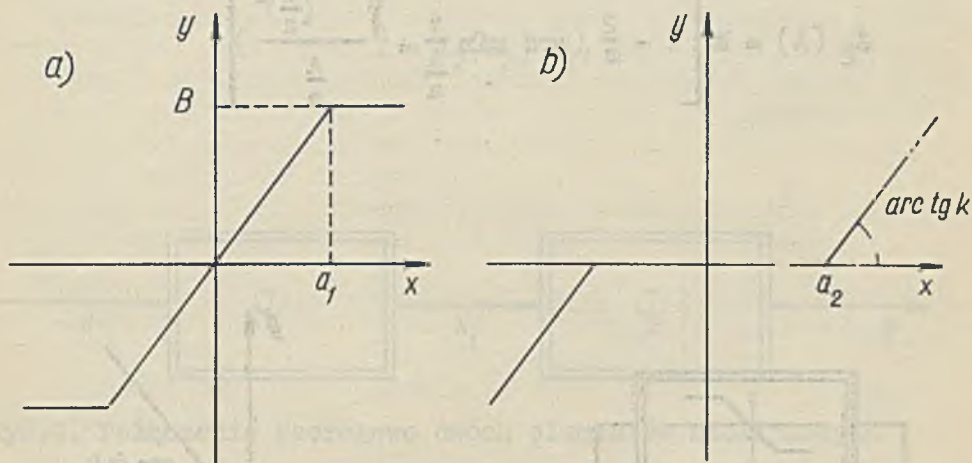
Znalezienie zastępczej funkcji opisującej jest możliwe dzięki temu, że obydwie funkcje składowe są funkcjami tego samego argumentu  $A$ .

Wynik (2) łatwo uogólnić na dowolną liczbę elementów nieliniowych:

$$J(A) = \sum_{i=1}^n J_i(A) \quad (3)$$

Przykład. Znaleźć zastępczą funkcję opisującą dwóch równoległe połączonych elementów liniowych ze strefą nasycenia i strefą nieczułości.

Charakterystyki tych elementów pokazane są na rys.2.



Rys.2. Charakterystyki elementów liniowych, a) ze strefą nasycenia i b) ze strefą nieczułości

Wypadkowa charakterystyka równoległego połączenia tych elementów dla przypadku

$$a_1 = a_2 \quad \text{i} \quad \frac{B}{a_1} = k$$

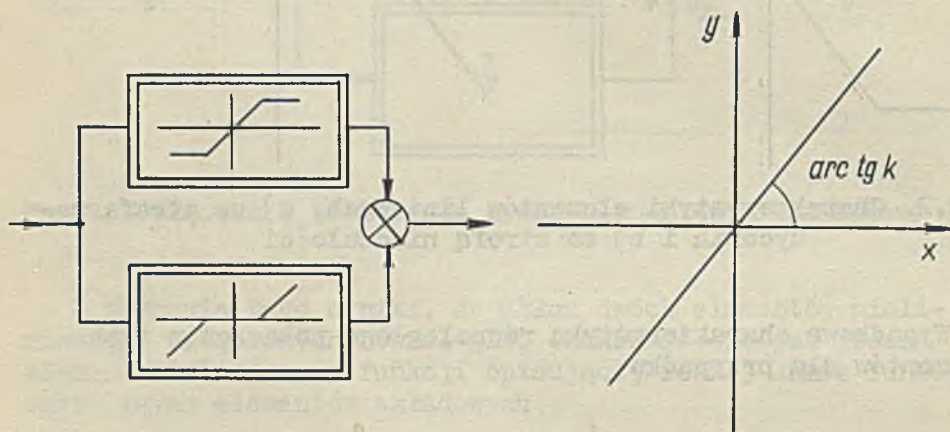
pokazana jest na rys.3 Jest to więc element liniowy o wzmacnieniu k.

Funkcje przejścia badanych elementów mają postać

$$\left. \begin{aligned} J_1(A) &= \frac{B}{a} \\ J_2(A) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ dla } A < a_1$$

$$J_1(A) = \frac{2}{\pi} \frac{B}{a} \left[ \arcsin \frac{1}{\frac{A}{a}} + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{A}{a}}\right)^2}}{\frac{A}{a}} \right],$$

$$J_2(A) = k \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{\frac{A}{a}} + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{A}{a}}\right)^2}}{\frac{A}{a}} \right) \right] \text{ dla } A > a$$



Rys.3. Charakterystyka wypadkowa równoległego połączenie elementów nieliniowych o charakterystykach pokazanych na rys.2

Sumując te funkcje przy założeniu, że  $\frac{B}{a} = k$ , otrzymujemy

$$J(A) = J_1(A) + J_2(A) = k$$

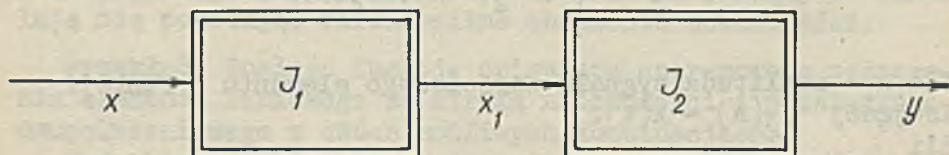
Jest to funkcja opisująca elementu liniowego o współczynniku wzmocnienia  $k$  (rys.3).

## 1.2. Połączenie szeregowe (rys.4)

Z rys.4 wynikają zależności:

$$\hat{X}_1 = J_1(A_1) \hat{X},$$

$$\hat{Y} = J_2(A_2) \hat{X}_1,$$



Rys.4. Połączenie szeregowe dwóch elementów nieliniowych

Gdzie  $A_1$  jest amplitudą sygnału wejściowego dla elementu nieliniowego o funkcji opisującej  $J_1(A)$ , natomiast  $A_2$  jest amplitudą sygnału wejściowego elementu o funkcji opisującej  $J_2(A)$ . Z zależności powyższych otrzymujemy:

$$\hat{Y} = J_1(A_1) J_2(A_2) \hat{X} \quad (4)$$

Szeregowe połączenie dwóch elementów nieliniowych zachowuje się więc jak jeden element nieliniowy o funkcji opisującej równą iloczynowi funkcji opisujących elementy składowych. Znalezienie iloczynu funkcji opisujących występującego we wzorze (4) byłoby możliwe wtedy, gdyby były one funkcjami tego samego argumentu. Sprowadzenie tych funkcji do tego samego argumentu można przeprowadzić, uwzględniając związek między amplitudami  $A_1$  i  $A_2$

$$A_2 = |J_1(A_1)| A_1 \quad (5)$$

Podstawiając tę zależność do wzoru (4), otrzymujemy zastępczą funkcję opisującą połączenia szeregowego:

$$J(A) = J_1(A) J_2(/J_1(A)/A) \quad (6)$$

gdzie  $A$  - amplituda sygnału wejściowego elementu o funkcji opisującej  $J_1(A) - x(t)$ .

Jeśli zmienić kolejność elementów nieliniowych, to zamiast (6) otrzymamy

$$J^*(A) = J_1 (/J_2(A)/A) J_2(A) \quad (7)$$

gdzie  $A$  - amplituda sygnału wejściowego elementu o funkcji opisującej  $J_2(A) - x(t)$ .

Jeśli

$$J_1(A) \neq J_2(A)$$

to również

$$J_1(A) J_2(/J_1(A)/A) \neq J_2(A) J_1(/J_2(A)/A),$$

skąd wynika, że

$$J(A) \neq J^*(A),$$

co fizycznie oznacza, że własności szeregowego połączenia elementów nieliniowych zależą od kolejności ich połączenia. Wynik (6) łatwo jest uogólnić na dowolną ilość elementów nieliniowych:

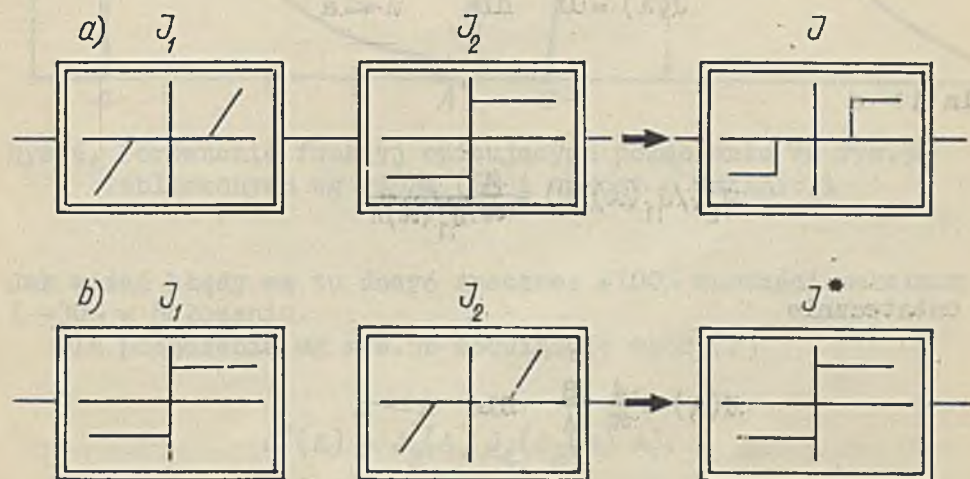
$$J(A) = J_1(A) \prod_{i=1}^{n-1} J_{i+1} (/J_1(A)/A) \quad (8)$$

Warto zauważyć, że ze wzoru (6) nie otrzymamy tej samej funkcji opisującej, co obliczając bezpośrednio z definicji, po złożeniu charakterystyk statycznych. Spowodowane to jest błędem powstającym wskutek pominięcia wyższych harmonicznych na wejściu drugiego elementu nieliniowego. Błędy te odgrywają tu znacznie większą rolę niż w przypadku stosowania metody funkcji opisującej do układów z jednym elementem nieliniowym i liniową częścią inercyjną, gdyż nie ma tutaj tłumiącego działania części inercyjnej dla wyższych harmonicznych. Dlatego też, jeśli mamy do czynienia z bezpośrednim połączeniem dwóch elementów nieliniowych, to lepiej jest złożyć ich charakterystyki statyczne i dla charakterystyki zastępczej obliczyć funkcję opisującą z definicji.

Przy większej ilości elementów nieliniowych, błędy te akumulują się powodując bardzo silne obniżenie dokładności.

Przykład. Znaleźć funkcję opisującą szeregowe połączenia elementu liniowego ze strefą nieczułości i przekaźnika dwupołożeniowego w dwóch możliwych kombinacjach.

Charakterystyki statyczne poszczególnych elementów pokazane są na rys. 5a i 5b.



Rys. 5. Dwa możliwe połączenia szeregowe dwóch elementów nieliniowych

Funkcje opisujące poszczególnych elementów są:

$$J_1(A) = 0, \quad A < a,$$

$$J_1(A) = k \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{\frac{A}{a}} + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{A}{a}\right)^2}}{\frac{A}{a}} \right) \right] \quad A > a,$$

$$J_2(A) = \frac{4}{\pi} \frac{B}{a},$$

przy czym w połączeniu z rys.5b zakładamy, że  $B > a$ . Dla połączenia z rys.5a mamy wg wzoru (6)

$$J(A) = J_1(A) J_2 \left( \frac{J_1(A)}{A} \right)$$

Ponieważ dla  $A < a$ ,  $J_1(A) = 0$ , więc

$$J(A) = 0 \quad \text{dla} \quad A < a$$

Dla  $A > a$

$$J_2 \left( \frac{J_1(A)}{A} \right) = \frac{4}{\pi} \frac{B}{J_1(A) A}$$

i ostatecznie

$$J(A) = \frac{4}{\pi} \frac{B}{A} \quad \text{dla} \quad A > a$$

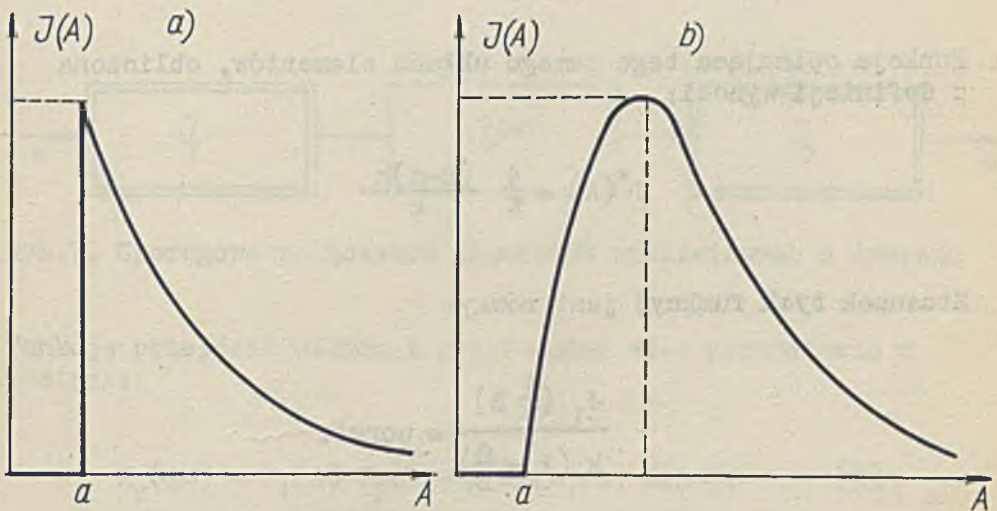
Funkcje opisujące obliczone wg wzoru (6) oraz z definicji, pokazane są na rys.6a i 6b.



Charakterystyczny punkt maksimum określony jest w obu przypadkach współrzędnymi

$$a) \quad J_{\max} = \frac{4}{\pi} \frac{B}{a} \quad \text{dla} \quad \Lambda = a,$$

$$b) \quad J_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{B}{a} \quad \text{dla} \quad A = \sqrt{2} a$$



Rys.6. Porównanie funkcji opisujących połączenia wg rys.5a obliczonych wg wzoru (6) i wprost z definicji

Jak widać błędy są tu dosyć znaczne: +100% wartości maksimum i -30% w położeniu.

Dla połączenia wg rys.5b obowiązuje wzór (7)

$$J^*(A) = J_2(A) J_1(J_2(A) A),$$

przy czym

$$J_2(A) A = \frac{4}{\pi} B,$$

oraz

$$J_1(J_2(A)A) = J_1\left(\frac{4}{\pi} B\right) = \text{const} > 0 \quad \text{dla } B > a$$

i ostatecznie

$$J^*(A) = \frac{4}{\pi} J_1\left(\frac{4}{\pi} B\right) \frac{B}{A}$$

Funkcja opisująca tego samego układu elementów, obliczona z definicji wynosi:

$$J^*(A) = \frac{4}{\pi} \frac{(B-a)k}{k}$$

Stosunek tych funkcji jest równy:

$$\frac{J_1\left(\frac{4}{\pi} B\right)}{k \left(1 - \frac{a}{B}\right)} = \text{const.}$$

Kształt funkcji opisującej jest w tym przypadku nie zmieniony. Błąd zależy tylko od tego, jak wiele powyższy współczynnik różni się od jedności. Ciekawy jest fakt, że błąd nie zależy od współczynnika wzmocnienia elementu liniowego a tylko od stosunku  $\frac{a}{B}$ . Np. dla  $\frac{a}{B} = 0,8$  powyższy współczynnik wynosi 1,25 a dla  $\frac{a}{B} = 0,5$  tylko 1,04.

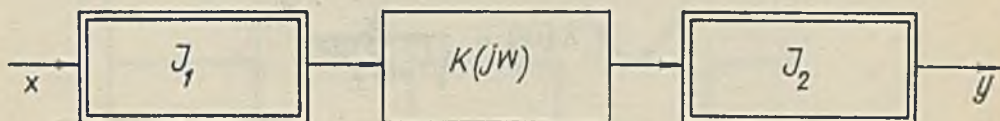
### 1.3. Łączenie elementów nieliniowych z inercją

Zajmiemy się przechodzeniem sygnału harmonicznego przez układ o schemacie blokowym przedstawionym na rys.7. Z rysunku tego wynika następująca zależność:

$$\hat{Y} = J_1(A_1) K(j\omega) J_2(A_2) \hat{X},$$

gdzie  $A_1$  amplituda sygnału wejściowego  $x$ , a  $A_2$  amplituda sygnału na wejściu elementu nieliniowego o funkcji opisującej  $J_2$ . Amplitudę pierwszej harmonicznej na wejściu drugiego elementu nieliniowego można łatwo obliczyć ze wzoru:

$$A_2 = |J_1(A) K(j\omega)| A$$



Rys.7. Szeregowe połączenie elementów nieliniowych z inercją

Funkcję przejścia układu z rys.7 można więc przedstawić w postaci:

$$K_2(j\omega) = J_1(A) J_2(\lambda(\omega) / J_1(A)/A) K(j\omega), \quad (9)$$

gdzie  $\lambda(\omega) = |K(j\omega)|$ .

Z wzoru (9) wynika, że przy mieszanym połączeniu szeregowym elementów nieliniowych i liniowych inercyjnych, zastępcza funkcja przejścia składa się z czynnika zależnego tylko od amplitudy sygnału wejściowego, czynnika zależnego tylko od częstotliwości tego sygnału oraz czynnika zależnego od obydwu parametrów sygnału wejściowego.

Jeśli część liniowa ma charakter filtra dolno-przepustowego (element układu automatyki), to obliczenia przeprowadzone wg wzoru (9) obarczone są znacznie mniejszym błędem niż w przypadku braku części liniowej (tłumienie wyższych harmonicznych przez część liniową).

Wzór (9) łatwo jest uogólnić na dowolną ilość elementów liniowych i nieliniowych.

Przykład. Znaleźć funkcję przejścia układu pokazanego na rys.8.

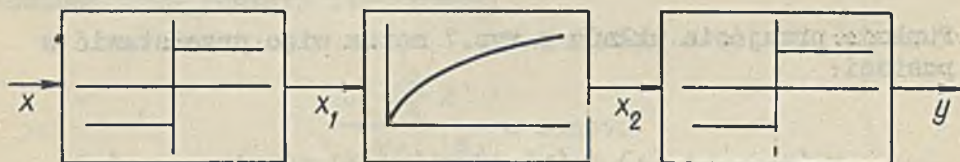
Dla identycznych przekładników mamy:

$$J_1(A) = \frac{4}{\pi} \frac{B}{A},$$

$$J_2(A) = \frac{4}{\pi} \frac{B}{A},$$

$$K(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T}$$

$$\lambda(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$



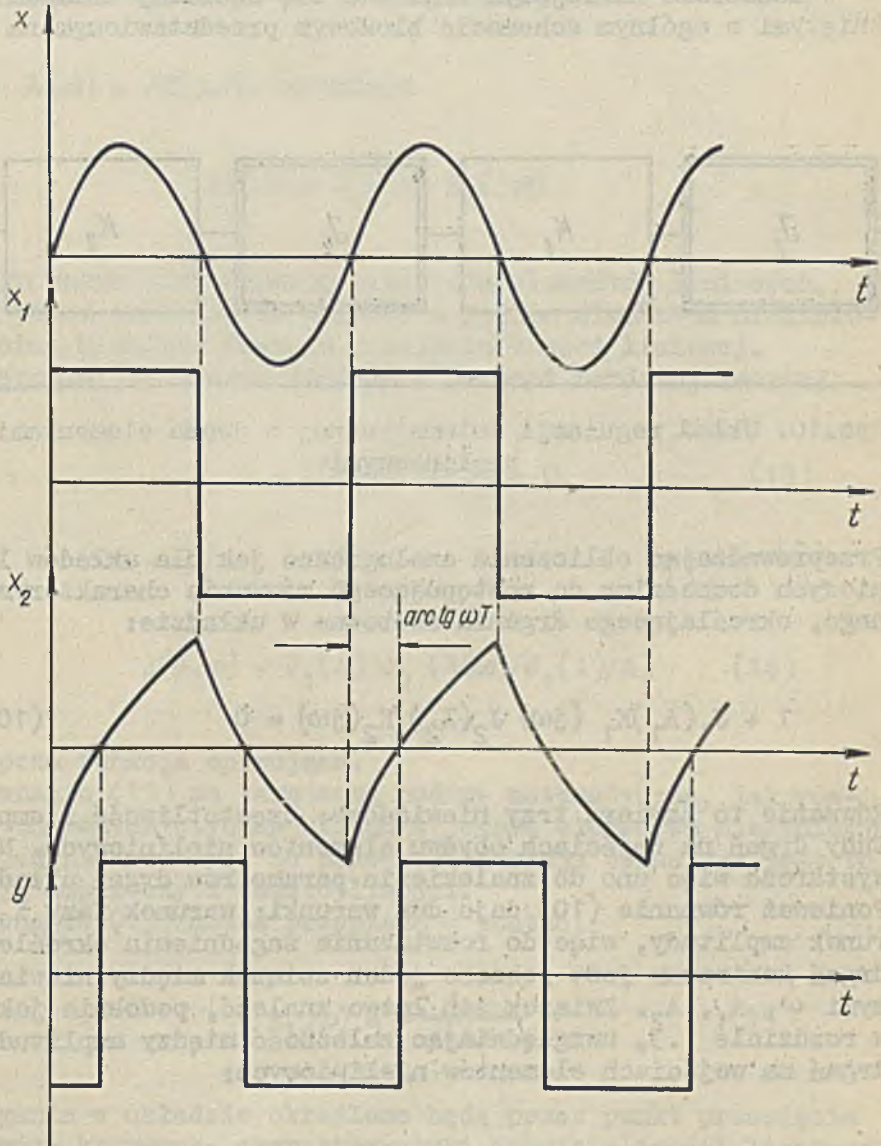
Rys.8. Układ nieliniowy do przykładu

Funkcja przejścia wg wzoru (9) będzie

$$\begin{aligned} K_z(j\omega) &= J_1(A) \frac{4}{\pi} \frac{B}{J_1(A) \Delta k} \sqrt{1+\omega^2 T^2} \frac{k}{1+j\omega T} = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{B}{A} e^{-j \operatorname{arc} \operatorname{tg} \omega T} \end{aligned}$$

Wynika stąd, że element liniowy wpływa w tym układzie jedynie na przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego. Rzeczy-

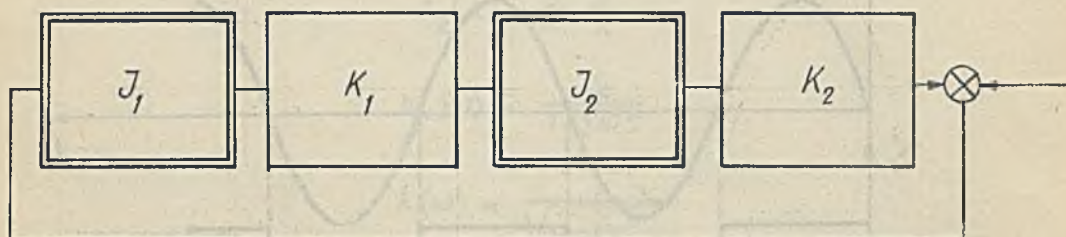
wiste przebiegi sygnałów w układzie przedstawione są na rys.9.



Rys.9. Przebiegi sygnałów w układzie z rys.8

## 2. Stabilność układu zamkniętego z dwoma elementami nieliniowymi

W rozdziale niniejszym zajmować się będziemy układami zamkniętymi o ogólnym schemacie blokowym przedstawionym na rys.10.



Rys.10. Układ regulacji automatycznej z dwoma elementami nieliniowymi

Przeprowadzając obliczenia analogiczne jak dla układów liniowych dochodzimy do następującego równania charakterystycznego, określającego drgania swobodne w układzie:

$$1 + J_1(A_1)K_1(j\omega)J_2(A_2)K_2(j\omega) = 0 \quad (10)$$

Równanie to zawiera trzy niewiadome: częstotliwość i amplitudy drgań na wejściach obydwu elementów nieliniowych. Nie wystarcza więc ono do znalezienia parametrów drgań układu. Ponieważ równanie (10) daje dwa warunki: warunek fazy i warunek amplitudy, więc do rozwiązania zagadnienia określenia drgań konieczny jest jeszcze jeden związek między niewiadomymi  $\omega$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ . Związek ten łatwo znaleźć, podobnie jak w rozdziale 1.3, uwzględniając zależność między amplitudami drgań na wejściach elementów nieliniowych:

$$A_2 = \sqrt{J_1(A_1)} / \sqrt{K_1(j\omega)} / A_1 \quad (11)$$

Uwzględniając tę zależność w równaniu (10), otrzymamy:

$$1 + J_1(\Lambda) J_2(\lambda(\omega)/J_1(\Lambda)/A) K(j\omega) = 0 \quad (12)$$

gdzie  $\lambda(\omega) = 1/K(j\omega)$ , natomiast

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega)$$

iloczyn wszystkich funkcji przejścia elementów liniowych, który przez analogię do układów z jednym elementem nieliniowym można by nazwać funkcją przejścia części liniowej.

Równanie (10) można zapisać w postaci bardziej zwartej

$$1 + J(A_1\omega) \cdot K(j\omega) = 0 \quad (13)$$

gdzie

$$J(A_1\omega) = J_1(\Lambda) J_2(\lambda(\omega)/J_1(\Lambda)/A) \quad (14)$$

zastępcza funkcja opisująca.

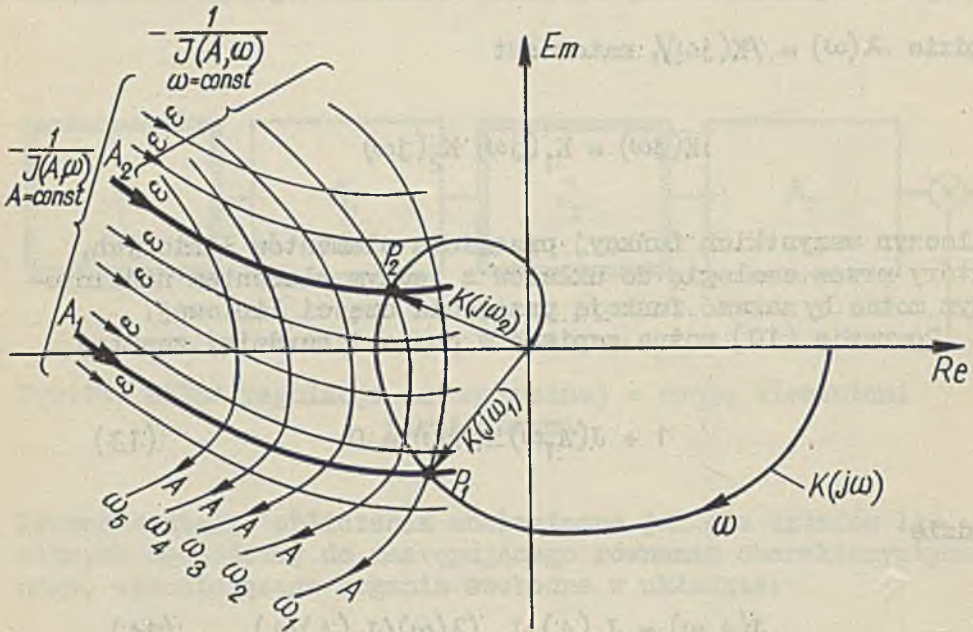
Równanie (13) ma taką samą budowę matematyczną, jak równanie charakterystyczne układu z jednym elementem nieliniowym z tą jedynie różnicą, że zastępcza funkcja opisująca jest tu funkcją amplitudy i częstotliwości.

Równanie (13) można przepisać w postaci:

$$K(j\omega) = - \frac{1}{J(A_1\omega)} \quad (15)$$

Drgania w układzie określone będą przez punkt przecięcia się dwóch krzywych: charakterystyki Nyquista części liniowej oraz zastępczej funkcji opisującej wziętej z przeciwnym znakiem  $= \frac{1}{J(A_1\omega)}$ . Należy podkreślić, że przecięcie tych charakterystyk, decydujące o drganiach, musi się odbywać dla tej samej częstotliwości  $\omega$ .

Odwrotną funkcję opisującą można traktować jako jednoparametrową rodzinę funkcji amplitudy z parametrem  $\omega$ . Rodzina krzywych, odpowiadająca tym funkcjom, może być przedstawiona na płaszczyźnie Gaussa wspólnie z charakterystyką Nyquista części liniowej (rys.11).



Rys.11. Charakterystyki układu z dwoma elementami nieliniowymi

W układzie mogą powstać drgania jeśli w rodzinie krzywych  $-\frac{1}{J(A,\omega)}$  istnieją takie, które przecinają się z charakterystyką Nyquista części liniowej w punktach odpowiadających częstotliwości wyznaczającej daną krzywą  $-\frac{1}{J(A,\omega)}$ .

Teoretycznie, krzywych takich może być więcej, co oznacza, że w układzie może istnieć więcej punktów możliwych drgań. Nie wszystkie z tych punktów muszą być punktami drgań możliwych. Istotną cechą odróżniającą układ z jednym elementem nieliniowym od układu z większą ilością elementów nieliniowych jest to, że w tych ostatnich może istnieć więcej punktów drgań możliwych. Stan drgań układu zależy od warunków początkowych.

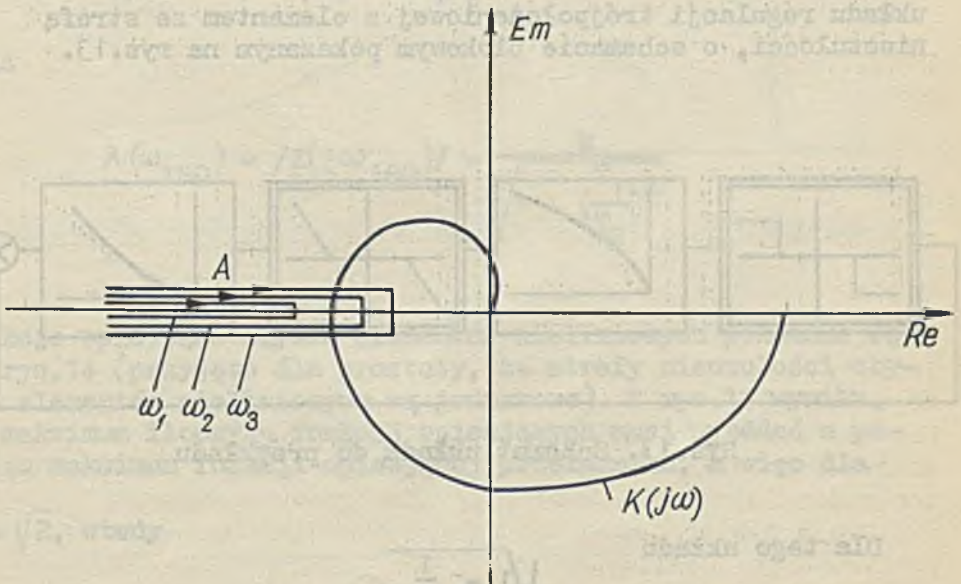
Na rys.11 pokazane są dwie krzywe (1 i 2) wyznaczające dwa punkty drgań możliwych  $P_1$  i  $P_2$ . Łatwo stwierdzić, że



punkt  $P_1$  jest punktem drgań stabilnych, a punkt  $P_2$  - punktem drgań niestabilnych.

Nanosząc na wykres (rys.11) rodzinę krzywych  $-\frac{1}{J(A,\omega)}$  jako funkcje częstotliwości  $\omega$  z parametrem  $A$ , możemy od razu odczytać z niego amplitudę drgań  $A$ . Do innych osobliwości układu z wieloma elementami nieliniowymi należy fakt, że może istnieć tylko jedna krzywa wyznaczająca drgania w układzie które mogą być stabilne lub niestabilne. Przez analogię do układów z jednym elementem nieliniowym, układ z wieloma elementami nieliniowymi nazwiemy bezwzględnie stabilnym, jeśli w rodzinie  $-\frac{1}{J(A,\omega)}$  nie ma krzywych przecinających charakterystykę Nyquista w punkcie o wspólnej z nią częstotliwości. Układ o charakterystykach jak na rys.11 jest stabilny dla małych zaburzeń i niestabilny dla dużych zaburzeń (autodrgania).

Badanie stabilności układu z wieloma elementami nieliniowymi szczególnie się upraszcza jeśli wszystkie elementy nieliniowe posiadają bezpętlowe charakterystyki statyczne. Zastępcza funkcja opisująca tworzy wówczas rodzinę prostych pokrywających się z osią rzeczywistą (rys.12).



Rys.12. Charakterystyki układu z wieloma elementami nieliniowymi o bezpętlowych charakterystykach statycznych

Charakterystyka Nyquista części liniowej może w tym przypadku przecinać się z zastępczą funkcją opisującą tylko dla jednej częstotliwości  $\omega_{180}$ , przy której część liniowa odwraca fazę sygnału o  $180^\circ$ . Częstotliwość tę można znaleźć z równania.

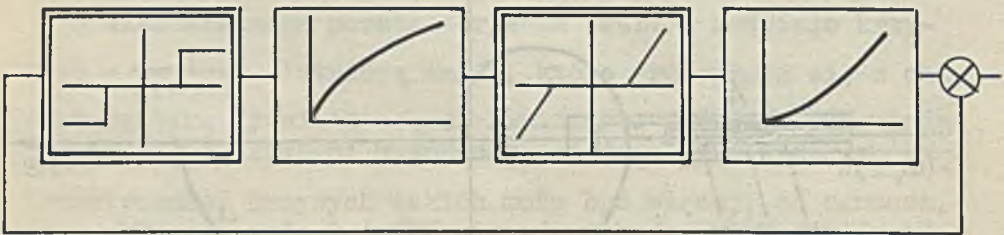
$$\text{Im} [ (j\omega) ] = 0 \quad (16)$$

Mając częstotliwość  $\omega_{180}$ , można z rodziny krzywych  $\frac{1}{J(A, \omega)}$  wybrać krzywą  $\frac{1}{J(A, \omega_{180})}$  decydującą o stabilności. Dalsze postępowanie jest identyczne jak w przypadku układu z jednym elementem nieliniowym.

Warunek bezwzględnej stabilności można zapisać w postaci:

$$K(j, \omega_{180}) > - \frac{1}{J(A, \omega_{180})_{\max}} \quad (17)$$

Przykład 1. Znaleźć warunek bezwzględnej stabilności układu regulacji trójpołożeniowej z elementem ze strefą nieczułości, o schemacie blokowym pokazanym na rys.13.



Rys.13. Schemat układu do przykładu

Dla tego układu

$$J_1(A) = \frac{4}{\pi} \frac{B}{A} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{A}{a})^2}}}{\frac{A}{a}}$$

$$J_2(\Lambda) = k_N \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{\frac{\Lambda}{a}} + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\Lambda}{a}\right)^2}}{\frac{\Lambda}{a}} \right) \right],$$

$$K_1(j\omega) = \frac{k_1}{1 + j\omega T_1}$$

$$K_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega T (1 + j\omega T_2)}$$

Funkcja przejścia części liniowej będzie:

$$K(j\omega) = \frac{k}{j\omega T (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\omega_{180} = \frac{1}{T_1 T_2},$$

oraz

$$\lambda(\omega_{180}) = |K(j\omega_{180})| = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}}$$

Funkcje opisujące obydwu elementów nieliniowych pokazane są na rys.14 (przyjęto dla prostoty, że strefy nieczułości obydwu elementów nieliniowych są jednakowe). Z rys.14 wynika, że maksimum iloczynu funkcji opisujących musi wypadać w pobliżu maksimum funkcji opisującej przekaźnika, a więc dla

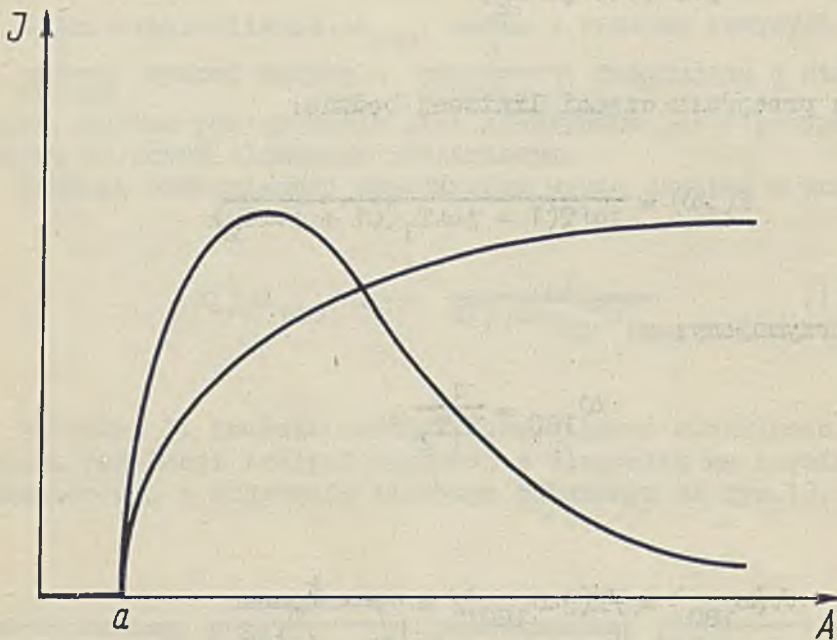
$$\frac{\Lambda}{a} = \sqrt{2}, \text{ wtedy}$$

$$J_1(\Lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{B}{a},$$

$$J_2(\Lambda_2) = k_N \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{a}{B\lambda}}{\frac{\Lambda_2}{a}} + \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{a}{B\lambda}}{\frac{\Lambda_2}{a}}\right)^2}}{\frac{\Lambda_2}{a}} \right) \right]$$

oraz

$$K(j\omega_{180}) = -k \frac{T_1 + T_2}{T \left(1 + \frac{T_1^2}{T_2^2}\right) \left(1 + \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)}$$



Rys.14. Funkcje opisujące elementów nieliniowych do przykładu

Warunek stabilności (17) będzie więc miał postać:

$$kk_N < \frac{T}{T_1 + T_2} \left(1 + \frac{T_1^2}{T_2^2}\right) \left(1 + \frac{T_2^2}{T_1^2}\right) \cdot \frac{x}{1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}\lambda} + \frac{x}{\sqrt{2}\lambda} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\lambda^2}}\right)}$$

gdzie

$$x = \frac{\pi a}{2B} \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}}$$

Przykład 2. Znaleźć warunek bezwzględnej stabilności w układzie takim jak w przykładzie 1, jeżeli element ze stre-  
fą nieczułości zastąpiono elementem o charakterystyce kwa-  
dratowej

$$y = b x^2$$

Funkcja opisująca takiego elementu jest równa:

$$J_2 = \frac{8}{3\pi} b A$$

Po prostych obliczeniach otrzymamy

$$J(\Lambda, \omega_{180}) = \frac{32\sqrt{2}}{3\pi^3} \frac{Bb}{a} \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}}$$

Układ będzie stabilny, gdy będzie spełniona nierówność:

$$k^2 < \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}} \frac{a}{Bb} \frac{T}{T_1 + T_2} \frac{T_2^2}{T_1^2} \left(1 + \frac{T_1^2}{T_2^2}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Wynika stąd, że wzrost stałej czasowej elementu wykonawcze-  
go  $T_2$  wpływa niekorzystnie na proces regulacji, natomiast  
stała<sup>2</sup> czasowa elementu liniowego znajdującego się między  
elementami nieliniowymi działa stabilizująco.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СО МНОГИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

### С о д е р ж а н и е

Статья представляет попытку расширения метода гармонического баланса для систем со многими нелинейными элементами. Дан общий принцип метода и примеры его применения.

### STABILITY OF CONTROL SYSTEMS CONTAINING A NUMBER OF NONLINEAR ELEMENTS

#### S u m m a r y

The describing function method is applied to a control system with a large number of nonlinear elements, to compute its stability properties. General principles of the method and some examples illustrating the application of it are given.